Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Фундаментальной и Прикладной Физики
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

ШУМ КРАЕВОГО ТОКА В ДВУМЕРНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ИЗОЛЯТОРЕ, СВЯЗАННЫЙ С РАССЕЯНИЕМ НАЗАД НА МАГНИТНОЙ ПРИМЕСИ

(бакалаврская работа)

Студент:
Пашинский Борис Витальевич

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Бурмистров Игорь Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)*:
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2019

Аннотация

Рассматриваются краевые состояния электронов в топологическом изоляторе возмущеные магнитной примесью, которая учитывается как неизотропное спин-орбитальное взаимодействие. Вычисляется корелятор тока(шум) создаваемый благодаря рассеянью назад на примесях. Приведины упрощенные выражения для шума при различных предельных случаях. Исходя из вида корелятора определяется время Корринги (характерное время корреляций).

Содержание

1 Введение

Твердые тела, обладающие нетривиальным топологическим порядком, и конкретно топологические изоляторы стали предметом пристальных исследований в последние годы [1, 2].

В данной работе будет рассматриваться двумерный топологический изолятор, в котором электроны представлены парами бесщелевых Дираковских состояний, локализованных вблизи края образца. Благодаря сильной спин-орбитальной связи, краевые состояния, распространяющиеся вдоль границы в разных направлениях, обладают противоположными проекциями спина на нормаль к плоскости топологического изолятора. Вследствие связи спина с направлением движения невозможно упругое рассеяние краевых состояний на возмущении, не нарушающем симметрию обращения времени(например потенциальные), а значит немагнитные примеси не оказывают существенного влияния на транспорт электрического тока вдоль края. Поэтому проводимость топологического изолятора должна иметь идеальное баллистическое значение($G = I/V = e^2/h$).

Однако, эксперименты, проведенные на образцах с размером больше одного микрометра, приводят к большим значениям сопротивления [3]. В связи с этим, имеется интерес к исследованию возможных механизмов рассеяния в краевом канале. Одним из типов возмущений, которые могут приводить к рассеянию краевых состояний с переворотом спина, являются классические магнитные примеси, которые нарушают симметрию обращения времени (квантовые магнитные примеси не нарушают симметрию обращения времени, но все равно их влияние оказывается больше потенциальных).

1.1 Постановка задачи

В этой работе был исследован ток и шум вклада в ток от обратных рассеяний на магнитных примесях в двумерных топологических изоляторах без ограничений на вид матрицы обменного взаимодействия, в отличии от [4], [5]. В [6] был исследован ток и шум только на нулевой частоте, однако подход теории возмущения по вкладу в гамильтониан без средне-полевого значения оказался подходящим для этой задачи. Таким образом, в данной работе получены более обобщенные результаты по шуму в двумерном топологическом изоляторе, по сравнению с научной литературой [4], [5].

Проделанная работа может быть интересна также тем, что внешнее поле в некоторых случаях может быть достаточным, чтобы появлялись резонансы по частоте в шуме, аналогичные парамагнитным резонансам при действии магнитным полем. Дело в том, что обратное время Корринги (время релаксации корреляций), которое будет обсуждено в главе 3.4, в таких резонансах играет роль ширины данных резонансов.

1.2 Модель

Для краевых состояний, взаимодействующих с магнитной примесью, можно написать эффективный гамильтониан [6]:

$$H_{edge} = H_{edge}^{e} + H_{edge}^{e-i}, \quad H_{edge}^{e} = -vk_y\sigma_z, \quad H_{edge}^{e-i} = \frac{1}{2\nu}J_{ij}S_i\sigma_j\delta(y-y_0). \tag{1.1}$$

Где σ_x, σ_y и σ_z матрицы Паули, k -импульс электрона, ν - плотность состояния, S_i спин примеси, и y_0 задает расположение примеси, а сами гамильтонианы записаны в псевдоспиновом пространстве состояний.

Из-за особенностей краевых состояний электронов ток заряда, протекающий вдоль спирального края, всегда сопровождается спиновой поляризацией края, как видно из (1.1). Это соображение позволяет связать ток обратного рассеяния со скоростью изменения z-проекции полного спина электрона на крае. Для этого запишем полную проекцию спина:

$$\Sigma_z = \frac{1}{2}\int dy\psi^{\dagger}(y)\sigma_y\psi(y). \tag{1.2}$$

Исходя из сказанного выше, рассеиваясь назад электрон меняет Σ_z на единицу, поэтому вклад обратного рассеивания в ток выражается [6] (здесь и далее $e=-1$,$h=1$):

$$\Delta I = \frac{d\Sigma_z}{dt}. \tag{1.3}$$

Введем также число электронов, которые рассеялись обратно за время t(где гамильтониан взят из (1.1)):

$$\Delta N(t) = \Sigma_z(t) - \Sigma_z(0), \quad \Sigma_z(t) = e^{iHt}\Sigma_z e^{-iHt}. \tag{1.4}$$

Чтобы вычислить кумулянты $\Delta N(t)$, введем производящую функцию $G(\lambda,t)$ [7]:

$$\langle\langle \Delta N^n(t)\rangle\rangle = \langle\langle [\Sigma_z(t)-\Sigma_z(0)]^n\rangle\rangle = (-i)^n(\partial/\partial\lambda)^n G(\lambda,t) \tag{1.5}$$

$$G(\lambda,t) = \ln Tr\left[e^{i\lambda\Sigma_z(t)}e^{-i\lambda\Sigma_z(0)}\rho_{st}\right]. \tag{1.6}$$

Где ρ_{st} опредяется по Гиббсу. Это определение производящей функции можно переписать через $\rho^{\lambda}(t)$:

$$G(\lambda,t) = \ln\rho^{\lambda}(t). \tag{1.7}$$

А для $\rho^\lambda(t)$ можно написать уравнение:

$$\frac{d\rho^\lambda(t)}{dt} = -iH^\lambda\rho^\lambda + i\rho^\lambda H^{-\lambda}, \quad H^\lambda = e^{i\frac{\lambda}{2}\Sigma_z} H e^{-i\frac{\lambda}{2}\Sigma_z}, \quad \rho^\lambda(0) = \rho_{st}. \tag{1.8}$$

Можно рассчитать средне-полевое значение гамильтониана при внешнем напряжении V:

$$H^{mf}_{e-i} = \langle H_{e-i}\rangle_0 = \langle J_{ij}S_i\hat{s}_j(0)/\nu\rangle = J_{iz}VS_i/2 \tag{1.9}$$

Так как $\langle s_j\rangle_0 = Tr_e\left(\rho(0)\hat{s}_j(0)\right) = \nu V\delta_{jz}/2$.Далее используя теорию возмущения по тому, что осталось (учитываем, что $J \ll 1$):

$$H_{e-i} - H^{mf}_{e-i} = J_{ij}S_i\left(\hat{s}_j(0) - \langle s_j\rangle_0\right)/\nu \tag{1.10}$$

Получаем следующее уравнение для компонент разложения редуцированной $\rho^\lambda(t)_\text{ы}$ для случая спина 1/2 [8]:

$$\frac{d\rho_{\lambda k}}{dt} = M^\lambda_{kp}\rho_{\lambda p}, \quad \rho^\lambda_S(t) = \rho_{\lambda k}S_k, \quad k = 0, 1, 2, 3. \tag{1.11}$$

Матрица M^λ_{kp} записывается так:

$$M^\lambda_{kp} = \begin{pmatrix} -\frac{\pi V}{8}gT^\lambda_2 & i\frac{\pi V}{16}\chi_n T^\lambda_1 \tan\frac{\lambda}{2}^\lambda \\ -i\frac{\pi V}{4}\chi_m T^\lambda_2 \cot\frac{\lambda}{2} & -\frac{\pi T}{2}\Gamma_{mn} - \frac{\pi V}{4}Q_{mn}T^\lambda_2 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

Где с помощью безразмерной обменной матрицы J_{mn} записываются те обозначения, которые приняты в формуле 1.12:

$$T^\lambda_1 = 2\cos\frac{\lambda}{2}\left(\coth\frac{V}{2T}\cos\frac{\lambda}{2} - i\sin\frac{\lambda}{2}\right), \quad T^\lambda_2 = 2\sin\frac{\lambda}{2}\left(\coth\frac{V}{2T}\sin\frac{\lambda}{2} + i\cos\frac{\lambda}{2}\right). \tag{1.13}$$

$$\Gamma_{kr} = \frac{1}{\pi T}\left(Tr(\eta)\delta_{kr} - \frac{\eta_{kr} + \eta_{rk}}{2} + VJ_{iz}\varepsilon_{ikr}\right), \quad \chi_r = 2\varepsilon_{rij}J_{ix}J_{jy}, \quad g = K_{xx}+K_{yy}. \tag{1.14}$$

$$Q_{mn} = J_{mx}J_{nx} + J_{mx}J_{nx} - \frac{g}{2}\delta_{mn}. \tag{1.15}$$

$$K = JJ^T, \quad \eta_{ij} = \left(J\Pi(0)J^T\right)_{ij}, \quad \Pi(0) = \pi T\begin{pmatrix} \frac{V}{2T}\coth\frac{V}{2T} & -i\frac{V}{2T} & 0 \\ i\frac{V}{2T} & \frac{V}{2T}\coth\frac{V}{2T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.16}$$

1.3 План работы

1)Необходимо решить уравнение (1.11) теорией возмущения по λ с точностью до λ^2.
2) Исходя из этого найти производящую функцию с точностью до λ^2.
3) Воспользоваться формулой, которая связывает шум и производящую функцию [9, 10]:

$$S_{II} = \omega \int_0^{+\infty} dt \sin(\omega t) \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2 G(\lambda, t)}{d(i\lambda)^2} \right]_{\lambda=0} \tag{1.17}$$

4)Проанализировать для различных случаев получившийся шум.

2 Теория возмущения по λ

Так как производящая функция определяется следующим образом:

$$G(\lambda, t) = \ln Tr\, \rho_S^\lambda(t) \tag{2.1}$$

Тогда в представлении ρ_λ в виде вектора можно переписать это определение:

$$G(\lambda, t) = \ln(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_\lambda) \tag{2.2}$$

А динамика ρ_λ описывается следующим уравнением:

$$\dot{\rho}_\lambda = M_\lambda \rho_\lambda \tag{2.3}$$

Где M_λ раскладывается по степеням:

$$M_\lambda = M_0 + \lambda M_1 + \lambda^2 M_2 + ... = M_0 + V \tag{2.4}$$

раскладывая по степеням M_λ получаем:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{0} \\ \frac{\pi V}{2} \overrightarrow{\chi} & -\frac{\pi T}{2} \widehat{\Gamma} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

$$M_1 = -\frac{i\pi V}{8} \begin{pmatrix} g & -\frac{1}{2} \coth\left(\frac{V}{2T}\right) \overrightarrow{\chi} \\ 2 \coth\left(\frac{V}{2T}\right) \overrightarrow{\chi} & 2\widehat{Q} \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

$$M_2 = -\frac{\pi V}{16} \begin{pmatrix} g \coth\left(\frac{V}{2T}\right) & -\frac{1}{2} \overrightarrow{\chi} \\ 8 \overrightarrow{\chi} & 2 \coth\left(\frac{V}{2T}\right) \widehat{Q} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Также можно записать уравнение опредляющее стационарное состояние ρ_{st}:

$$M_0 \rho_{st} = \overrightarrow{0} \tag{2.8}$$

Исходя из вида M_0 и из условия $G(0, t) = 0$ получаем:

$$\rho_{st} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{V}{T} \widehat{\Gamma}^{-1} \overrightarrow{\chi} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Из конкретного вида M_0 ясно, что:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_0 = \overrightarrow{0} \tag{2.10}$$

Найдем решение для $\lambda = 0$, то есть в нулевом порядке по λ:

$$\dot{\rho}_0 = M_0 \rho_0 \tag{2.11}$$

Тогда решение в нулевом порядке будет выглядеть:

$$\rho_0 = e^{M_0 t} \rho_{st} \tag{2.12}$$

Поэтому, решая в общем случае, нужно сделать следующую замену:

$$\rho_\lambda = e^{M_0 t}\widetilde{\rho}_\lambda \tag{2.13}$$

Тогда можно написать уравнение на $\widetilde{\rho}_\lambda$:

$$\dot{\widetilde{\rho}}_\lambda = e^{-M_0 t} V e^{M_0 t}\widetilde{\rho}_\lambda = V(t)\widetilde{\rho}_\lambda \tag{2.14}$$

Будем раскладывать возмущение, записанное в представлении Гейзенберга, до второй степени:

$$V(t) = e^{-M_0 t} V e^{M_0 t} = \lambda V_1(t) + \lambda^2 V_2(t) + ... \tag{2.15}$$

И искать решение также с точностью до второй степени:

$$\dot{\widetilde{\rho}}_\lambda = (\lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + ...)\widetilde{\rho}_\lambda \tag{2.16}$$

$$\widetilde{\rho}_\lambda = \widetilde{\rho}_\lambda^{(0)} + \lambda\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)} + \lambda^2\widetilde{\rho}_\lambda^{(2)} + ... \tag{2.17}$$

Мы уже выяснили, каким получается нулевой порядок $\widetilde{\rho}_\lambda$, теперь, подставляя (2.17) в (2.16), получаем уравнения на все оставшиеся нужные нам поправки:

$$\widetilde{\rho}_\lambda^{(0)} = \rho_{st} \tag{2.18}$$

$$\dot{\widetilde{\rho}}_\lambda^{(1)} = V_1(t)\rho_{st} \tag{2.19}$$

$$\dot{\widetilde{\rho}}_\lambda^{(2)} = V_1(t)\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)} + V_2(t)\rho_{st} \tag{2.20}$$

так как $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_0 = \overrightarrow{0}$ то $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} e^{M_0 t} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix})$, а значит:

$$G(\lambda, t) = \ln(2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\rho_\lambda) = \ln(2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda) \tag{2.21}$$

Выясним, как выражается производящая функция через поправки $\widetilde{\rho}_\lambda$:

$$\begin{aligned} G(\lambda, t) = \ln(2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda) = \ln\left[2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\left(\widetilde{\rho}_\lambda^{(0)} + \lambda\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)} + \lambda^2\widetilde{\rho}_\lambda^{(2)} + ...\right)\right] = \\ = \ln\left[1 + 2\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)} + 2\lambda^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda^{(2)} + O\left(\lambda^3\right)\right] = \\ = 2\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)} + 2\lambda^2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda^{(2)} - \\ - \frac{\lambda^2}{2}\left(2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)}\right)^2 + O\left(\lambda^3\right) \end{aligned} \tag{2.22}$$

2.1 Первый порядок по λ

Первую поправку можно вычислить, зная собственный ρ_{st}:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot{\widetilde{\rho}}_{\lambda}^{(1)} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} V_1(t)\rho_{st} = \\ = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} e^{-M_0 t} M_1 e^{M_0 t}\rho_{st} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_1\rho_{st}\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot{\widetilde{\rho}}_{\lambda}^{(1)} = -\frac{i\pi V}{8}\begin{pmatrix}g & -\frac{1}{2}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \frac{V}{T}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\end{pmatrix} = \\ = -\frac{i\pi V}{8}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\end{aligned} \tag{2.24}$$

Уравнение для всех компонент $\dot{\widetilde{\rho}}_{\lambda}^{(1)}$ можно упростить за счёт того, что ρ_{st} является собственным для M_0:

$$\dot{\widetilde{\rho}}_{\lambda}^{(1)} = V_1(t)\rho_{st} = e^{-M_0 t} M_1 e^{M_0 t}\rho_{st} = e^{-M_0 t} M_1\rho_{st} \tag{2.25}$$

2.2 Второй порядок по λ

Запишем уравнения динамики на $2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_{\lambda}^{(2)}$:

$$2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot{\widetilde{\rho}}_{\lambda}^{(2)} = 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_1 e^{M_0 t}\int_0^t e^{-M_0 t} dt M_1\rho_{st} + 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_2\rho_{st} \tag{2.26}$$

И выразим через нее проекцию $\widetilde{\rho}_{\lambda}^{(2)}$ (вывод приведён в приложении A) :

$$\begin{aligned}2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\widetilde{\rho}_{\lambda}^{(2)} = \left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)^2\frac{t^2}{2} + \\ + \left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} - \\ - \left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left[\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\overrightarrow{\chi} + \frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right] - \\ - \frac{\pi V}{16}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)t\end{aligned} \tag{2.27}$$

Таким образом, производящую функцию с точностью до λ^2 можно выразить следующим образом:

$$G(\lambda,t) = -\frac{i\pi V}{8}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)t\lambda +$$
$$+\left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\lambda^2 -$$
$$-\left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left[\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\overrightarrow{\chi} + \frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right]\lambda^2 -$$
$$-\frac{\pi V}{16}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)t\lambda^2 + O\left(\lambda^3\right) \quad (2.28)$$

Где $\widehat{D} = \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}t + \left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\left(e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} - 1\right)$.Исходя из этого, можно найти ток обратного рассеяния:

$$\Delta I = \frac{\overline{\Delta N}}{t} = -i\frac{\partial G}{\partial\lambda}|_{\lambda=0} = -\frac{\pi V}{8}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right) \quad (2.29)$$

Полученное выражение совпадает с выражением в [8]. Для дальнейшего продвижения воспользуемся формулой для конечно-частотного шума из статьи [9, 10]:

$$S_{II}(\omega) = \omega\int_0^{+\infty} dt\sin(\omega t)\frac{d}{dt}\frac{d^2G(\lambda,t)}{d(i\lambda)^2}|_{\lambda=0} \quad (2.30)$$

Окончательно можно записать(подробный вывод в приложении Б):

$$S_{II}(\omega) = \frac{\pi^2V^2}{32}\overrightarrow{\chi}\left(\widehat{E} + \omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\,(\frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} -$$
$$-\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1} - \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}\frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}) +$$
$$+\frac{\pi V}{8}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right) \quad (2.31)$$

Это главный результат данной работы, и дальнейшее рассмотрение будет касаться того, какие важные физическия следствия следуют из этой формулы шума. Хоть эта формула и является довольно универсальной (подходящей для многих случаев), но стоит упомянуть, что в действительности у этой формулы критерий применимости такой же, как у уравнения Линдблада из которого получено уравнение 1.11, то есть необходимо чтобы $\omega \ll max(V,T)$.

3 Приближенный расчёт

В главе 2 мы получили точные выражения для шума, в этой главе мы попробуем упростить это формулу при некоторых условиях. Так в случае $J \ll \frac{V}{T}$ оказывается(подробнее в приложении B):

$$\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\right)_{kr} = = \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{J_{kz} J_{rz}}{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2} \tag{3.1}$$

Тогда можно рассчитать часть, которая нам часто будет встречаться в подсчете $S_{II}(\omega)$:

$$\frac{V}{2T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right) \overrightarrow{\chi}\, \widehat{\Gamma}^{-1} \overrightarrow{\chi} = \frac{4\, det(K)}{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2} = gBC \tag{3.2}$$

Здесь использованы обозначения $C = \frac{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2}{gK_{zz}}$ и $B = \frac{4K_{zz} det(K)}{\left(gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2\right)^2}$. Введем также α которая понадобится нам чуть позже:

$$\alpha = \frac{2}{\pi T}\left(g - \frac{V}{2T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right) \overrightarrow{\chi}\, \widehat{\Gamma}^{-1} \overrightarrow{\chi}\right) \frac{V}{2T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right) = \\ = \frac{2}{\pi T} \frac{V}{2T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right) g\,(1 - BC) \tag{3.3}$$

3.1 Высокочастотный предел

Разберем в начале случай $\left|\frac{T}{\omega}\Gamma_{kr}\right| \ll 1$, в приближении, которое мы выбрали, это значит $\omega \gg VJ$. Тогда в формуле 2.31 можно приблизить:

$$\left(E + \omega^2 \left(\frac{2}{\pi T}\right)^2 \widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1} \approx \left(\frac{\pi T}{2}\right)^2 \frac{\widehat{\Gamma}^2}{\omega^2} \tag{3.4}$$

$$\overrightarrow{\xi} = \left(\alpha \widehat{\Gamma}^{-2} + \beta \widehat{\Gamma}^{-1} + \gamma \widehat{\Gamma}^{-1} \widehat{Q} \widehat{\Gamma}^{-1}\right) \overrightarrow{\chi} \tag{3.5}$$

где $\alpha = \frac{2}{\pi T}\left(g - \frac{V}{2T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right) \overrightarrow{\chi}\, \widehat{\Gamma}^{-1} \overrightarrow{\chi}\right) \frac{V}{2T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right)$, $\beta = -\frac{2}{\pi T} \coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)$ и $\gamma = -\frac{2}{\pi T} \frac{V}{T} \coth\left(\frac{V}{2T}\right)$, в этих обозначениях:

$$\overrightarrow{\chi}\left(E + \omega^2 \left(\frac{2}{\pi T}\right)^2 \widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1} \overrightarrow{\xi} \approx \\ \approx \left(\frac{\pi T}{2}\right)^2 \frac{1}{\omega^2}\left(\alpha \overrightarrow{\chi}\, \overrightarrow{\chi} + \beta \overrightarrow{\chi}\, \widehat{\Gamma} \overrightarrow{\chi} + \gamma \overrightarrow{\chi}\, \widehat{\Gamma} \widehat{Q} \widehat{\Gamma}^{-1} \overrightarrow{\chi}\right) \tag{3.6}$$

Докажем что в $\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi}$ антисимметричная часть $\widehat{\Gamma}$ не дает вклада:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\chi})_k J_{iz}\epsilon_{ikr}(\overrightarrow{\chi})_r = 4\epsilon_{ktn}\epsilon_{krm}\epsilon_{rij}J_{tx}J_{ix}J_{ny}J_{jy}J_{mz} = \\ = 4\left(\delta_{tr}\delta_{nm} - \delta_{tm}\delta_{nr}\right)\epsilon_{rij}J_{tx}J_{ix}J_{ny}J_{jy}J_{mz} = \\ = 4\left(\epsilon_{rij}J_{rx}J_{ix}J_{ny}J_{jy}J_{nz} - \epsilon_{rij}J_{mx}J_{ix}J_{ry}J_{jy}J_{mz}\right) = 0 \quad (3.7)\end{aligned}$$

Посчитаем теперь вклад в $\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi}$ который дает симметричная часть $\widehat{\Gamma}$:

$$(\overrightarrow{\chi})_k \left(JPJ^T\right)_{kr}(\overrightarrow{\chi})_r = 4\epsilon_{kij}J_{ix}J_{jy}J_{km}P_{mn}J_{rn}\epsilon_{rlq}J_{lx}J_{qy} \quad (3.8)$$

Вычисления упростятся, если заметить, что $\epsilon_{kij}J_{ix}J_{jy}J_{km}$ и $J_{rn}\epsilon_{rlq}J_{lx}J_{qy}$ обнуляется при $m \neq z$ и $n \neq z$ соответственно. Поэтому учитывая только члены суммы когда m=z и n=z получаем:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\chi})_k \left(JPJ^T\right)_{kr}(\overrightarrow{\chi})_r = 4\epsilon_{kij}J_{ix}J_{jy}J_{kz}P_{zz}J_{rz}\epsilon_{rlq}J_{lx}J_{qy} = \\ = 4\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\det\left(\widehat{K}\right) \quad (3.9)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\chi}\overrightarrow{\chi} = 4\epsilon_{rij}J_{ix}J_{jy}\epsilon_{rkp}J_{kx}J_{py} = 4\left(\delta_{ik}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jk}\right)J_{ix}J_{jy}J_{kx}J_{py} = \\ = 4\left(J_{kx}J_{py}J_{kx}J_{py} - J_{px}J_{ky}J_{kx}J_{py}\right) = 4K_{xx}K_{yy} - 4K_{yx}^2 \quad (3.10)\end{aligned}$$

Собирая всё вместе находим $\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi} = \frac{V}{2T}coth\frac{V}{2T}\left(tr\left(JPJ^T\right)\overrightarrow{\chi}\overrightarrow{\chi} - (\overrightarrow{\chi})_k\left(JPJ^T\right)_{kr}(\overrightarrow{\chi})_r\right) = \\ = \frac{V}{2T}coth\frac{V}{2T}\left(4K_{xx}K_{yy} - 4K_{yx}^2\right)\left(K_{xx} + K_{yy}\right) + K_{zz}\left(4K_{xx}K_{yy} - 4K_{yx}^2\right) - \\ - 4\det\left(\widehat{K}\right) \quad (3.11)\end{aligned}$$

Посчитаем $\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}$:

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} = \left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\right)_m\left(J_{mx}J_{nx} + J_{my}J_{ny}\right)\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n - \frac{g}{2}\overrightarrow{\chi}\overrightarrow{\chi} \quad (3.12)$$

Считаем $\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n$ учитывая что $\epsilon_{rij}J_{ix}J_{jy}J_{rz} = \det\left(\widehat{J}\right)$:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n = \frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\frac{J_{nz}J_{rz}}{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2}2\epsilon_{rij}J_{ix}J_{jy} = \\ = \frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\frac{2J_{nz}\det\left(\widehat{J}\right)}{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2} \quad (3.13)\end{aligned}$$

Чтобы посчитать $J_{mx}J_{nx}\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n$ и $J_{my}J_{ny}\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n$, воспользуемся тем что $J_{nx}J_{nz}=K_{xz}$, а $J_{nx}J_{ny}=K_{xy}$

$$J_{mx}J_{nx}\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n=\frac{2T}{V}\operatorname{th}\frac{V}{2T}\frac{2J_{mx}K_{xz}\,det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2} \tag{3.14}$$

$$J_{my}J_{ny}\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n=\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\frac{2J_{my}K_{yz}\,det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2} \tag{3.15}$$

При подсчете $\left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\right)_m$, будем учитывать только самый большой, антисимметричный член в $\widehat{\Gamma}$:

$$\left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\right)_k=2\epsilon_{rjm}J_{jx}J_{my}\left(\frac{V}{\pi T}\right)J_{iz}\epsilon_{irk}=2\left(\delta_{jk}\delta_{mi}-\delta_{ji}\delta_{mk}\right)J_{jx}J_{my}J_{iz}\left(\frac{V}{\pi T}\right)=$$
$$=2\left(J_{kx}J_{iy}J_{iz}-J_{ix}J_{ky}J_{iz}\right)\left(\frac{V}{\pi T}\right)=2\left(K_{yz}J_{kx}-K_{xz}J_{ky}\right)\left(\frac{V}{\pi T}\right) \tag{3.16}$$

Используя определение $\widehat{K}$, считаем:

$$\left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\right)_m\left(J_{mx}J_{nx}+J_{my}J_{ny}\right)\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n=$$
$$=4((K_{yz}J_{mx}-K_{xz}J_{my})\,J_{mx}K_{xz}+$$
$$+(K_{yz}J_{mx}-K_{xz}J_{my})J_{my}K_{yz})\left(\frac{V}{\pi T}\right)\frac{2T}{V}\operatorname{th}\frac{V}{2T}\frac{det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2}=$$
$$=4((K_{yz}K_{xx}-K_{xz}K_{xy})\,K_{xz}+$$
$$+(K_{yz}K_{yx}-K_{xz}K_{yy})K_{yz})\left(\frac{V}{\pi T}\right)\frac{2T}{V}\operatorname{th}\frac{V}{2T}\frac{det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2} \tag{3.17}$$

Собирая всё вместе:

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}=\frac{8}{\pi}((K_{yz}K_{xx}-K_{xz}K_{xy})K_{xz}+$$
$$+(K_{yz}K_{yx}-K_{xz}K_{yy})K_{yz})\operatorname{th}\frac{V}{2T}\frac{det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2}-$$
$$-\frac{g}{2}\left(4K_{xx}K_{yy}-4K_{yx}^2\right) \tag{3.18}$$

Попробуем оценить каждый из членов, чтобы понять не является ли один из них пренебрежимо малым по сравнению с другими:

$$\frac{8}{\pi}((K_{yz}K_{xx}-K_{xz}K_{xy})\,K_{xz}+$$
$$+(K_{yz}K_{yx}-K_{xz}K_{yy})\,K_{yz})\operatorname{th}\frac{V}{2T}\frac{det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2}\sim J^5\operatorname{th}\frac{V}{2T} \tag{3.19}$$

$$\frac{g}{2}\left(4K_{xx}K_{yy}-4K_{yx}^2\right)\sim J^6 \tag{3.20}$$

В случае $V\gg T$ и при $V\sim T$, $\operatorname{th}\frac{V}{2T}\sim 1$, а $J^5\gg J^6$, поэтому в этом случае можно пренебречь вторым членом. В случае $J\ll\frac{V}{T}\ll 1$ первый член ведет себя как $J^5\frac{V}{T}$ и это оказывается много больше чем J^6. Поэтому можно считать:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}=\frac{8}{\pi}((&K_{yz}K_{xx}-K_{xz}K_{xy})K_{xz}+\\&+(K_{yz}K_{yx}-K_{xz}K_{yy})K_{yz})\operatorname{th}\frac{V}{2T}\frac{det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2}\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi}=\frac{V}{2T}\coth\frac{V}{2T}&\left(tr\left(JPJ^T\right)\overrightarrow{\chi}\overrightarrow{\chi}-(\overrightarrow{\chi})_k\left(JPJ^T\right)_{kr}(\overrightarrow{\chi})_r\right)=\\=\frac{V}{2T}\coth\frac{V}{2T}&\left(4K_{xx}K_{yy}-4K_{yx}^2\right)(K_{xx}+K_{yy})+\\&+K_{zz}\left(4K_{xx}K_{yy}-4K_{yx}^2\right)-4\det\left(\widehat{K}\right)\end{aligned} \tag{3.22}$$

Исходя из 3.1:

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\chi}\left(E+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi}\approx\\&\approx\left(\frac{\pi T}{2}\right)\frac{1}{\omega^2}(\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)g\left(1-BC\right)\overrightarrow{\chi}\overrightarrow{\chi}-\\&-\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi}-\frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi})\end{aligned} \tag{3.23}$$

Попробуем оценить каждое из трех слагаемых в 3.23:

$$\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)g\left(1-BC\right)\overrightarrow{\chi}\overrightarrow{\chi}\sim\frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)J^6 \tag{3.24}$$

$$\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\overrightarrow{\chi}\sim\frac{V}{T}\coth^3\frac{V}{2T}J^6 \tag{3.25}$$

$$\frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\sim\frac{V}{T}J^5 \tag{3.26}$$

Проведем анализ по порядку этих трех слагаемых. В случае $V\gg T$ и при $V\sim T$, первые два члена порядка $\frac{V}{T}J^6$, а третий член порядка $\frac{V}{T}J^5$, поэтому в этом случае можно пренебречь и первым и вторым членом. В случае $J \ll \frac{V}{T} \ll 1$ первый член ведет себя как J^6, второй член $\left(\frac{T}{V}\right)^2 J^6$, а третий член порядка $\frac{V}{T} J^5$, в этом случае можно пренебречь только первым. Поэтому в целом можно пренебречь только первым членом:

$$\overrightarrow{\chi}\left(E+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi}\approx \\ \approx\frac{1}{\omega^2}\left(V\coth^3\left(\frac{V}{2T}\right)\mu+T\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\kappa-V\vartheta\right) \quad (3.27)$$

Где введены следующие обозначения:

$$\mu=\pi\left(K_{yx}^2-K_{xx}K_{yy}\right) \quad (3.28)$$

$$\kappa=2\pi\left(\det\left(\widehat{K}\right)-K_{zz}\left(K_{xx}K_{yy}-K_{yx}^2\right)\right) \quad (3.29)$$

$$\vartheta=4((K_{yz}K_{xx}-K_{xz}K_{xy})\,K_{xz}+ \\ +\left(K_{yz}K_{yx}-K_{xz}K_{yy}\right)K_{yz})\frac{det\,J}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2} \quad (3.30)$$

Тогда окончательно найдем шум:

$$S_{II}(\omega)=\frac{\pi^2V^2}{32}\frac{\left(V\coth^3\left(\frac{V}{2T}\right)g\mu+T\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\kappa-V\vartheta\right)}{\omega^2}+ \\ +\frac{\pi Vg}{8}\left(\coth\left(\frac{V}{2T}\right)-\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}BC\right) \quad (3.31)$$

Заметим что предельный бесконечный шум по этой формуле получается:

$$S_{II}(+\infty)=F(+\infty)\Delta I,\quad F(+\infty)=1 \quad (3.32)$$

То есть фактор Фано в этом случае равен 1.

3.2 Низкочастотный предел

Теперь разберем случай $\left|\frac{T}{\omega}\Gamma_{kr}\right|\gg 1$, в приближении которое мы выбрали, это значит $\omega \ll VJ$. Тогда можно разложить в ряд:

$$\left(E+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^{2n}\widehat{\Gamma}^{-2n} \quad (3.33)$$

$$\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\right)_{nk} = = \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{J_{kz}J_{nz}}{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2} \tag{3.34}$$

$$\left(\widehat{\Gamma}^{-m}\right)_{nk} = \left(\frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{K_{zz}}{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2}\right)^m \frac{J_{kz}J_{nz}}{K_{zz}} =$$

$$= \left(\frac{2T}{V} \operatorname{th} \frac{V}{2T} \frac{1}{Cg}\right)^m \frac{J_{kz}J_{nz}}{K_{zz}} \tag{3.35}$$

$C = \frac{gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2}{gK_{zz}}$ и $B = \frac{4K_{zz}\det(\widehat{K})}{\left(gK_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2\right)^2}$

$$\overrightarrow{\xi} = \left(\alpha\widehat{\Gamma}^{-2} + \beta\widehat{\Gamma}^{-1} + \gamma\widehat{\Gamma}^{-1}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\right)\overrightarrow{\chi} \tag{3.36}$$

$$\overrightarrow{\chi}\left(E + \omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^{2n}\left(\alpha\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-2-2n}\overrightarrow{\chi} + \beta\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\overrightarrow{\chi} + \gamma\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right) \tag{3.37}$$

Далее воспользуемся тем, что $(\overrightarrow{\chi})_k J_{kz} = 2\det(\widehat{J})$:

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-2n-2}\overrightarrow{\chi} = \left(\frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{1}{Cg}\right)^{2n+2} \frac{4\det(\widehat{K})}{K_{zz}} = \left(\frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{1}{Cg}\right)^{2n+2} g^2BC^2 \tag{3.38}$$

Аналогично:

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-2n-1}\overrightarrow{\chi} = \left(\frac{2T}{V} \operatorname{th} \frac{V}{2T} \frac{1}{Cg}\right)^{2n+1} g^2BC^2 \tag{3.39}$$

Для подсчета $\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}$, воспользуемся формулами 3.13,3.14,3.15:

$$\left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\right)_m = \left(\frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{1}{Cg}\right)^{1+2n} \frac{2\det\left(\widehat{J}\right)J_{mz}}{K_{zz}} \tag{3.40}$$

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} =$$

$$= \left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\right)_m (J_{mx}J_{nx} + J_{my}J_{ny})\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n - \frac{g}{2}\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-2-2n}\overrightarrow{\chi} \tag{3.41}$$

э

$$\left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\right)_m (J_{mx}J_{nx}+J_{my}J_{ny})\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n =$$

$$=\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\left(\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{1+2n}\frac{4\det\left(\widehat{K}\right)J_{mz}}{K_{zz}}\frac{(J_{mx}K_{xz}+J_{my}K_{yz})}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2}=$$

$$=\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\left(\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{1+2n}\frac{4\det\left(\widehat{K}\right)}{K_{zz}}\frac{\left(K_{xz}^2+K_{yz}^2\right)}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2} \quad (3.42)$$

Перепишем эту формулу через C и B:

$$\left(K_{xz}^2+K_{yz}^2\right)=gK_{zz}\left(1-C\right) \quad (3.43)$$

$$4\det\left(\widehat{K}\right)\frac{g\left(1-C\right)}{gK_{zz}-K_{zx}^2-K_{zy}^2}=g^2BC\left(1-C\right) \quad (3.44)$$

$$\left(\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\right)_m (J_{mx}J_{nx}+J_{my}J_{ny})\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)_n =$$

$$=\frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\left(\frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{1+2n}g^2BC\left(1-C\right) \quad (3.45)$$

Тогда складывая всё:

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{\Gamma}^{-1-2n}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}=\left(\frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{2+2n}g^3BC^2\left(1-C\right)-$$

$$-\frac{g}{2}\left(\frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{2n+2}g^2BC^2=\left(\frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{2+2n}g^3BC^2\left(\frac{1}{2}-C\right) \quad (3.46)$$

Теперь суммируя весь ряд:

$$\overrightarrow{\chi}\left(E+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi}=$$
$$=\frac{2}{\pi T}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^{2n}\left(\left(1-BC\right)g^2BC-\right.$$
$$\left.-\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)g^2BC^2-g^2BC\left(1-2C\right)\right)\left(\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{2n+1}=$$
$$=\frac{4}{\pi V}gBC\,th\frac{V}{2T}\left(2-B-\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\right)\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{4\omega}{\pi V}th\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^{2n}=$$
$$=\frac{4}{\pi V}gBC\,th\frac{V}{2T}\left(2-B-\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\right)\frac{1}{1+\left(\frac{4\omega}{\pi V}th\frac{V}{2T}\frac{1}{Cg}\right)^2} \quad (3.47)$$

Тогда окончательно найдем шум:

$$S_{II}(\omega)=\frac{\pi gV}{8}BC\,th\frac{V}{2T}\frac{2-B-\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)}{1+\omega^2\tau_K^2}+$$
$$+\frac{\pi gV}{8}\left(\coth\left(\frac{V}{2T}\right)-th\frac{V}{2T}BC\right) \quad (3.48)$$

Заметим, что шум на нулевой частоте(при $V\gg T$) по этой формуле получается:

$$S_{II}(0)=F(0)\Delta I,\quad F(0)=BC \quad (3.49)$$

То есть фактор Фано в этом случае равен BC.

3.3 Случай малых напряжений

Рассмотрим, наконец, случай $V\ll JT$. Тогда можно пренебречь антисимметричной частью $\widehat{\Gamma}$, и считать что $\widehat{P}$ единичная матрица. Диагонализируя, получаем симметричную матрицу, которая постоянна относительно V и T:

$$\widehat{J}=\widehat{R}_<\widehat{\Lambda}\widehat{R}_> \quad (3.50)$$

$$\widehat{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\left(\widehat{K}\right)_{kr}=\left(\widehat{R}_<\widehat{\Lambda}^2\widehat{R}_<^{-1}\right)_{kr}=\left(\widehat{R}_>^{-1}\widehat{\Lambda}^2\widehat{R}_>\right)_{kr} \quad (3.52)$$

$$\left(\widehat{\Gamma}\right)_{kr} = \left(tr\left(\widehat{K}\right)\delta_{kr} - \left(\widehat{K}\right)_{kr}\right) = \\ = \left(\widehat{R}_< \begin{pmatrix} \lambda_2^2+\lambda_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2+\lambda_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^2+\lambda_2^2 \end{pmatrix} \widehat{R}_<^{-1}\right)_{kr} \tag{3.53}$$

Видно что в $\overrightarrow{\xi}$ при таких малых напряжениях остаётся только один член:

$$\overrightarrow{\xi} = -\frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}\left(\frac{2T}{V}\right)^2\overrightarrow{\chi} = -\frac{2}{\pi T}\left(\frac{2T}{V}\right)^2\widehat{R}_< \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2^2+\lambda_3^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_1^2+\lambda_3^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2} \end{pmatrix} \widehat{R}_<^{-1}\overrightarrow{\chi} \tag{3.54}$$

С помощью диагонализации матрицы можно легко выразить часть шума:

$$\left(E + \omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1} = \\ = \widehat{R}_< \begin{pmatrix} \frac{1}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T\left(\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T\left(\lambda_1^2+\lambda_3^2\right)}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}\right)^2} \end{pmatrix} \widehat{R}_<^{-1} \tag{3.55}$$

Тогда найдем компоненту шума:

$$\overrightarrow{\chi}\left(E + \omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi} = -\frac{2}{\pi T}\left(\frac{2T}{V}\right)^2\overrightarrow{\chi}\widehat{R}_<\widehat{\Upsilon}\widehat{R}_<^{-1}\overrightarrow{\chi} \tag{3.56}$$

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{\lambda_2^2+\lambda_3^2}}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T\left(\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\frac{1}{\lambda_1^2+\lambda_3^2}}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T\left(\lambda_1^2+\lambda_3^2\right)}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\frac{1}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2\right)}\right)^2} \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

Теперь, используя диагонализацию $\widehat{J}$, находим $\overrightarrow{\chi}\widehat{R}_<$:

$$\chi_j J_{jl} = 2\det J\delta_{lz} \tag{3.58}$$

$$\chi_j (R_<)_{js}\lambda_s (R_>)_{sl} = 2\det J\delta_{lz} \tag{3.59}$$

$$\chi_j (R_<)_{js} = (2\det J/\lambda_s)(R_>^{-1})_{zs} \tag{3.60}$$

Значит можно написать:

$$\overrightarrow{\chi}\widehat{R}_<\widehat{\Upsilon}\widehat{R}_<^{-1}\overrightarrow{\chi} = 4\det K(R_>^{-1})_{zs}\frac{\widehat{\Upsilon}_{ss}}{\lambda_s^2}(R_>)_{sz} \tag{3.61}$$

Тогда можно записать всё, зная что $\det K = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{\chi}\left(E+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi} = \\ = -\frac{2}{\pi T}\left(\frac{2T}{V}\right)^2 4\left(R_>^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\lambda_2^2\lambda_3^2}{\lambda_2^2+\lambda_3^2}\frac{1}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T(\lambda_2^2+\lambda_3^2)}\right)^2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_1^2\lambda_3^2}{\lambda_1^2+\lambda_3^2}\frac{1}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T(\lambda_1^2+\lambda_3^2)}\right)^2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda_2^2\lambda_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\frac{1}{1+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T(\lambda_1^2+\lambda_2^2)}\right)^2}\end{pmatrix}R_>\right)_{zz}\end{gathered} \tag{3.62}$$

Так как $V \ll JT$, то формулу 2.31 можно упростить

$$S_{II}(\omega) = \frac{\pi^2V^2}{32}\overrightarrow{\chi}\left(E+\omega^2\left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\right)^{-1}\overrightarrow{\xi} + \frac{\pi T}{4}g \tag{3.63}$$

Теперь перепишем g через $R_>^{-1}$ и $R_>$:

$$\begin{gathered}g = (K_{xx}+K_{yy}+K_{zz}) - K_{zz} = (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) - \left(R_>^{-1}\widehat{\Lambda}^2R_>\right)_{zz} = \\ = \left(R_>^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_2^2+\lambda_3^2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1^2+\lambda_3^2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1^2+\lambda_2^2\end{pmatrix}R_>\right)_{zz}\end{gathered} \tag{3.64}$$

Подставляя в 3.63 3.62 и 3.64, получаем шум:

$$S_{II}(\omega) = \frac{\pi T}{4}\left(R_>^{-1}\widehat{\Phi}R_>\right)_{zz} \tag{3.65}$$

где

$$\widehat{\Phi} = \begin{pmatrix} \frac{\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^2}{(\lambda_2^2+\lambda_3^2)^2+\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^2}{(\lambda_1^2+\lambda_3^2)^2+\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)^2+\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^2}{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)^2+\left(\frac{2\omega}{\pi T}\right)^2} \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

3.4 Время Корринги

Если сделать Фурье-преобразование по низковолновой формуле $S_{II}(\omega)$, видно, что получается характерное время релаксации (время Корринги):

$$\tau_K^{-1} = \frac{\pi CgV}{4} \coth \frac{V}{2T} \tag{3.67}$$

Этот результат можно сравнить с временем Корринги для матрицы $J = \begin{pmatrix} J_\perp & 0 & 0 \\ 0 & J_\perp & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$ (на самом деле учитывается возможность слабой недиагональности матрицы, но для времени Корринги оно оказывается не принципиальным) посчитанный в [4]:

$$\tau_K^{-1} = \frac{\pi V J_\perp^2}{2} \coth \frac{V}{2T}$$

Что совпадает с нашим результатом для такой матрицы, так как тогда C $= 1$, а $g = 2J_\perp^2$. Кроме того в [5] тоже получили время Корринги для матрицы обменного взаимодействия которая пропорциональна единичной матрице :

$$\tau_K^{-1} = \frac{\pi V J^2}{2} \coth \frac{V}{2T}$$

То же самое можно сделать также и в случае $V \ll JT$

$$\tau_K^{-1} = \frac{\pi T}{2} max\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2, \lambda_1^2 + \lambda_3^2, \lambda_3^2 + \lambda_2^2\right) \tag{3.68}$$

4 Заключение

В ходе дипломной работы был точно рассчитан шум вклада, созданного обратным рассеянием на магнитной примеси, в ток в двумерном топологическом изоляторе. Кроме того, были рассчитаны различные предельные случаи для шума: для больших и маленьких частот с достаточно большим напряжением, и для достаточно маленьких напряжений.

Тем самым полученные результаты есть обобщение работ [4], [5], в том смысле, что в данной работе рассмотрена общая обменная матрица, без предположений о, например, малости недиагональной части матрицы.

Эти результаты могут быть использованы для дальнейшей работы. Например, можно расчитать время Корринги не только для малочастотного случая, но и в общем случае. Также можно учесть эффекты конечности образцов, чтобы учесть это, необходимо понимать, как выглядит шум на ненулевой частоте. Можно обобщить задачу для других спинов.

A Приложение к теории возмущения по λ

Запишем M_0 в виде:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{a} & \widehat{\mathrm{c}} \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

Используя блочное умножение, вычисляем квадрат:

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{0} \\ \widehat{\mathrm{c}}\,\overrightarrow{a} & \widehat{\mathrm{c}}^2 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

И любую степень:

$$M_0^n = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{0} \\ \widehat{\mathrm{c}}^{n-1}\overrightarrow{a} & \widehat{\mathrm{c}}^n \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Значит вычисление матричной экспоненты можно свести к степеням:

$$e^{M_0 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M_0^n t^n}{n!} = \begin{pmatrix} 1 & \overrightarrow{0} \\ (e^{\widehat{c}t} - 1)\widehat{c}^{-1}\overrightarrow{a} & e^{\widehat{c}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overrightarrow{0} \\ -\frac{V}{T}\left(e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} - 1\right)\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} & e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

Введем $I_1 = \int_0^t e^{-M_0 t}dt$,чтобы записать компактно динамику второй поправки:

$$\begin{aligned} (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\,\dot{\widetilde{\rho}}_\lambda^{(2)} &= (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\,e^{-M_0 t} M_1 e^{M_0 t}\widetilde{\rho}_\lambda^{(1)} + (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\,e^{-M_0 t} M_2 e^{M_0 t}\rho_{st} \\ &= (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\,M_1 e^{M_0 t}\,I_1 M_1 \rho_{st} + (1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0)\,M_2\rho_{st} \end{aligned} \tag{A.5}$$

Найдем I_1:

$$I_1 = \begin{pmatrix} t & \overrightarrow{0} \\ -\frac{V}{T}\left[\frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}\left(e^{\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} - 1\right) - t\right]\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} & \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}\left(e^{\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} - 1\right) \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

Затем в A.5 нужно умножить $e^{M_0 t}$ на I_1:

$$e^{M_0 t} I_1 = \begin{pmatrix} t & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{A} & \widehat{H} \end{pmatrix} \tag{A.7}$$

где $\overrightarrow{A}$ и $\widehat{H}$:

$$\widehat{H} = \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}(1 - e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}) \tag{A.8}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A} &= -\frac{V}{T}(e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} - 1)\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}t - \frac{V}{T}\left[\frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}(1 - e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}) - te^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}\right]\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} = \\ &= -\frac{V}{T}\left[\frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}(1 - e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}) - t\right]\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} = -\frac{V}{T}\widehat{H}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} + \frac{V}{T}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\,t \end{aligned} \tag{A.9}$$

Другие части A.4 может быть выражены следующим образом:

$$2M_1\rho_{st} = -\frac{i\pi V}{8}\begin{pmatrix} g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} \\ 4(\frac{1}{2}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi} + \frac{V}{2T}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}) \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_1 = -\frac{i\pi V}{8}\begin{pmatrix} g & -\frac{1}{2}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\end{pmatrix} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_1 e^{M_0 t} I_1 &= -\frac{i\pi V}{8}\left(gt - \frac{1}{2}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{A} \quad -\frac{1}{2}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{H}\right) = \\ &= -\frac{i\pi V}{8}\begin{pmatrix}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)t + & \\ +\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{H}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} & -\frac{1}{2}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{H}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$\begin{aligned}2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_2\rho_{st} &= -\frac{\pi V}{16}\begin{pmatrix} g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) & -\frac{1}{2}\overrightarrow{\chi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \frac{V}{T}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\end{pmatrix} = \\ &= -\frac{\pi V}{16}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\end{aligned} \tag{A.13}$$

И тогда, исходя из A.7-A.13, динамика второй поправки:

$$\begin{aligned}2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot{\widetilde{\rho}}_{\lambda}^{(2)} &= 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_1 e^{M_0 t} I M_1\rho_{st} + 2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} M_2\rho_{st} = \\ &= \left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)^2 t + \\ &+\left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{H}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} - \\ &-\left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^2\left[\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{H}\overrightarrow{\chi} + \frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{H}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right] - \\ &-\frac{\pi V}{16}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\end{aligned} \tag{A.14}$$

Введем

$$\widehat{D} = \int_0^t \widehat{H}dt = \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}t + \left(\frac{2}{\pi T}\right)^2\widehat{\Gamma}^{-2}\left(e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} - 1\right) \tag{A.15}$$

И выразим через нее проекцию $\widetilde{\rho}_{\lambda}^{(2)}$:

$$2\left(1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)\widetilde{\rho}_{\lambda}^{(2)} = \left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^{2}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)^{2}\frac{t^{2}}{2} +$$
$$+\left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^{2}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{D}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} -$$
$$-\left(-\frac{i\pi V}{8}\right)^{2}\left[\coth^{2}\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{D}\overrightarrow{\chi} + \frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\widehat{D}\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right] -$$
$$-\frac{\pi V}{16}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)t \quad \text{(A.16)}$$

Б Подсчет шума

То есть в нашем случае:

$$\frac{d}{dt}\frac{d^2G(\lambda,t)}{d(i\lambda)^2}|_{\lambda=0} = \frac{\pi^2V^2}{32}\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\frac{d}{dt}\left(\widehat{D}\right)$$
$$-\frac{\pi^2V^2}{64}\coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\frac{d}{dt}\left(\widehat{D}\right)\overrightarrow{\chi} - \frac{\pi^2V^2}{64}\frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\frac{d}{dt}\left(\widehat{D}\right)\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} +$$
$$+\frac{\pi V}{8}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right) \quad \text{(Б.1)}$$

При дифференцировании $\widehat{D}$ получаем:

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{D}\right) = \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1} - \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t} \quad \text{(Б.2)}$$

Возьмём следующий интеграл:

$$\int_0^{+\infty} dt\, e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(\int_0^{+\infty} dt\, e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t + i\omega t\, E} - \int_0^{+\infty} dt\, e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t - i\omega t\, E}\right) \quad \text{(Б.3)}$$

Где E - единичная матрица. Берём интегралы:

$$\int_0^{+\infty} dt\, e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}\sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(\left(-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma} - i\omega E\right)^{-1} - \left(-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma} + i\omega E\right)^{-1}\right) \quad \text{(Б.4)}$$

Так как матрицы $-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma} + i\omega E$ и $-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma} - i\omega E$ коммутативны, то коммутативны и их обратные, а значит:

$$\int_0^{+\infty} dt\, e^{-\frac{\pi T}{2}\widehat{\Gamma}t}\sin\omega t = \omega\left(\left(\frac{\pi T}{2}\right)^2\widehat{\Gamma}^2 + \omega^2 E\right)^{-1} \quad \text{(Б.5)}$$

Для постоянной части «I»(t) нужно взять интеграл без экспоненты. Из $|\widehat{\Gamma}| \to 0$ понятно, что регуляризированный интеграл равен:

$$\omega\int_0^{+\infty} dt\, \sin\omega t = 1 \quad \text{(Б.6)}$$

Значит формула для шума на конечной частоте:

$$S_{II}(\omega) = \frac{\pi^2V^2}{32}\overrightarrow{\chi}\,\overrightarrow{\xi} - \frac{\pi^2V^2\omega^2}{32}\overrightarrow{\chi}\left(\left(\frac{\pi T}{2}\right)^2\widehat{\Gamma}^2 + \omega^2 E\right)^{-1}\overrightarrow{\xi} +$$
$$+\frac{\pi V}{8}\left(g\coth\left(\frac{V}{2T}\right) - \frac{V}{2T}\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right) \quad \text{(Б.7)}$$

где

$$\overrightarrow{\xi} = \frac{2}{\pi T}\widehat{\Gamma}^{-1}\left\{\left(g - \frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\overrightarrow{\chi}\,\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi}\right)\frac{V}{2T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\widehat{\Gamma}^{-1}- \right.$$

$$\left. - \coth^2\left(\frac{V}{2T}\right)E - \frac{V}{T}\coth\left(\frac{V}{2T}\right)\widehat{Q}\widehat{\Gamma}^{-1}\overrightarrow{\chi} \qquad (\text{Б.8})\right.$$

B Нахождение приближенного значения $\widehat{\Gamma}^{-1}$

Для этого нужно выразить $\widehat{\Gamma}$ через известные величины, а для этого нужно вычислить η, а значит и $\Pi(0)$:

$$\Pi(0) = \frac{\pi V}{2}\coth\frac{V}{2T}\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ i & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\end{pmatrix} \tag{B.1}$$

Так как $\eta = J\Pi(0)J^T$, то симметризуя матрицу получаем:

$$\frac{\eta+\eta^T}{2} = J\frac{\Pi(0)+\Pi(0)^T}{2}J^T = \frac{\pi V}{2}\coth\frac{V}{2T}J\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2T}{V}\,\mathrm{th}\,\frac{V}{2T}\end{pmatrix}J^T = \\ = \frac{\pi V}{2}\coth\frac{V}{2T}JPJ^T \tag{B.2}$$

$$tr\,\eta = \frac{\pi V}{2}\coth\frac{V}{2T}\,tr\left(JPJ^T\right) \tag{B.3}$$

Используя циклическую перестановку в следе, можно свести его к простой формуле:

$$tr\left(JPJ^T\right) = tr\left(PJ^TJ\right) = tr\left(PK\right) = K_{xx}+K_{yy}+\frac{2T}{V}th\frac{V}{2T}K_{zz} \tag{B.4}$$

Тогда необходимый нам $\widehat{\Gamma}$ можно выразить через антисимметричную часть и симметричную:

$$\left(\widehat{\Gamma}\right)_{kr} = \frac{V}{2T}coth\frac{V}{2T}\left(tr\left(JPJ^T\right)\delta_{kr} - \left(JPJ^T\right)_{kr}\right) + \frac{V}{\pi T}J_{iz}\epsilon_{ikr} = a_{kr}+b_i\epsilon_{ikr} \tag{B.5}$$

Докажем, что при $J \ll \frac{V}{T}$, $|b_i| \gg |a_{kr}|$:

1)для $J \ll \frac{V}{T} \ll 1$, $|a_{kr}| \sim J^2$, а $|b_i| \sim \frac{V}{T}J$, поэтому $|b_i| \gg |a_{kr}|$

2)для $\frac{V}{T} \sim 1$, $|a_{kr}| \sim J^2$, а $|b_i| \sim J$, поэтому $|b_i| \gg |a_{kr}|$

3)для $\frac{V}{T} \gg 1$, $|a_{kr}| \sim \frac{V}{T}J^2$, а $|b_i| \sim \frac{V}{T}J$, поэтому $|b_i| \gg |a_{kr}|$

То есть для всех режимов кроме $\frac{V}{T} \ll J$ получается $|b_i| \gg |a_{kr}|$ (в режиме $\frac{V}{T} \ll J$ получается $|b_i| \ll |a_{kr}|$). Значит можно использовать приближенную формулу для обратной матрицы (если $c_{kr} = a_{kr}+b_i\epsilon_{ikr}$ и

$|b_i| \gg |a_{kr}|$, то $\left(c^{-1}\right)_{kr} = \frac{b_k b_r}{b_p a_{pq} b_q}$):

$$\left(\widehat{\Gamma}^{-1}\right)_{kr} = \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{J_{kz} J_{rz}}{\left(J^T \left(tr\left(JPJ^T\right) - JPJ^T\right) J\right)_{zz}} =$$

$$= \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{J_{kz} J_{rz}}{tr\left(JPJ^T\right) K_{zz} - (KPK)_{zz}} =$$

$$= \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{J_{kz} J_{rz}}{\left(K_{xx} + K_{yy} + \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} K_{zz}\right) K_{zz} - \left(K_{zx}^2 + K_{zy}^2 + \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} K_{zz}^2\right)} =$$

$$= \frac{2T}{V} th \frac{V}{2T} \frac{J_{kz} J_{rz}}{g K_{zz} - K_{zx}^2 - K_{zy}^2} \quad \text{(B.6)}$$

Список литературы

[1] C. L. Kane and E. J. Mele. Z2 topological order and the quantum spin hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 95:146802, 2005. doi:10.1103/PhysRevLett.95.146802.

[2] Xiao-Liang Qi and Shou-Cheng Zhang. Topological insulators and superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 83:1057, 2011. doi:0.1103/RevModPhys.83.1057.

[3] Christoph Brüne Andreas Roth Hartmut Buhmann Laurens W. Molenkamp Xiao-Liang Qi Shou-Cheng Zhang Markus König, Steffen Wiedmann. Quantum spin hall insulator state in hgte quantum wells. *Science*, 318:766, 2007. doi:10.1126/science.1148047.

[4] Leonid I. Glazman Jukka I. Väyrynen. Current noise from a magnetic moment in a helical edge. *Phys. Rev. Lett.*, 118:106802, 2017. doi:10.1103/PhysRevLett.118.106802.

[5] D. S. Shapiro K. E. Nagaev, S. V. Remizov. Noise in the helical edge channel anisotropically coupled to a local spin. *JETP Lett.*, 108:664–669, 2018. doi:10.1134/S002136401822006X.

[6] I. S. Burmistrov M. Goldstein P. D. Kurilovich, D. Kurilovich. Helical edge transport in the presence of a magnetic impurity. *JETP Letters*, 106:593–599, июль 2017. doi:10.1134/S0021364017210020.

[7] Upendra Harbola Massimiliano Esposito and Shaul Mukamel. Nonequilibrium fluctuations, fluctuation theorems, and counting statistics in quantum systems. *Rev. Mod. Phys.*, 81(2):1665, 2009. doi:10.1103/RevModPhys.81.1665.

[8] Курилович Павел Даниилович. Статистика краевого тока в двумерном топологическом изоляторе при наличии магнитной примеси, 2018. URL: http://chair.itp.ac.ru/biblio/masters/2018/kurilovichpd_diplom_2018.pdf.

[9] Alessandro Braggio Maura Sassetti Antti-Pekka Jauho Christian Flindt, Tomas Novotny. Counting statistics of non-markovian quantum stochastic processes. *Phys. Rev. Lett.*, 100:150601, 2008. doi:10.1103/PhysRevLett.100.150601.

[10] T. Brandes N. Lambert, R. Aguado. Non-equilibrium entanglement and noise in coupled qubits. *Phys. Rev. B*, 75:045340, 2006. doi:10.1103/PhysRevB.75.045340.