Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

СТРУКТУРА ВИХРЯ В ЧИСТОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ ВБЛИЗИ ПЛОСКОГО ДЕФЕКТА

(бакалаврская работа)

Студент:
Ходаева Ульяна Евгеньевна

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Скворцов Михаил Андреевич,
д-р физ.-мат. наук, доц.

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)*:
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2020

Аннотация

В данной работе изучается структура вихря на границе между двумя чистыми сверхпроводниками. Для описания данной системы используются уравнения Боголюбова-де-Жена. Был получен спектр состояний, локализованных в коре вихря вблизи плоского дефекта, а также собственные функции. Основной результат работы – наличие щели в спектре, величина которой при должной силе дефекта может значительно превышать расстояние между исходными уровнями энергии. Этот эффект качественно отличается от эффектов, возникающих из-за наличия примесей, когда плотность состояний, будучи усредненной на масштабе порядка среднего расстояния между уровнями, оставалась практически постоянной.

Содержание

Введение

В 2018 году на конференции «Локализации, взаимодействия и сверхпроводимость» была представлена работа [1], в которой были исследованы свойства гранулированного грязного алюминия в сверхпроводящем состоянии в магнитном поле. Увеличение числа гранул в заданном объеме приводило к росту добротности системы.

Как известно, в сверхпроводники II рода магнитное поле проникает посредством вихрей Абрикосова. Эти вихри представляют собой нити с сердцевиной из металла в нормальном состоянии, в которой при движении вихрей происходит диссипация энергии. Стоит заметить, что гранулированный алюминий отличается от цельного сверхпроводника тем, что между различными гранулами существует граница в виде тонкого слоя изолятора. Поэтому вихри могут образовываться не только в объеме, но и на границе между гранулами. Чтобы исследовать вопрос диссипации энергии в гранулированном сверхпроводнике, первым делом следует рассмотреть структуру вихря вблизи плоского дефекта. В эксперименте сверхпроводник грязный, но в этом пределе задача становится весьма сложной, поэтому было решено рассмотреть аналогичную задачу, но в случае чистого сверхпроводника. Также для простоты рассматривался случай двумерного сверхпроводника: для трехмерного случая качественных изменений по сравнению с двумерным не ожидается.

Задача о структуре вихря в чистом сверхпроводнике была решена Кароли, де Женом и Матриконом [4]. Было получено, что в коре вихря имеется множество состояний (их число составляет $N \sim E_F/\Delta$), которые классифицируются угловым моментом квазичастицы μ, который является полуцелым числом: $\mu = n + 1/2$. Низколежащие уровни оказываются эквидистантными, расположенными на расстоянии $\omega_0 \sim \Delta/N \sim \Delta^2/E_F$ друг от друга, т. е. спектр даётся выражением $E = \mu\omega_0$.

Обсудим влияние примесей на состояния в коре вихря. Введение в систему слабого беспорядка перемешивает состояния и спектр перестает быть эквидистантным. Приведем здесь краткий обзор результатов.

Пусть ω_0 – расстояние между исходными уровнями, а τ - время свободного пробега. Существует несколько различных предельных случаев:

- Сверхчистый предел: $\omega_0\tau \gg 1$. Это условие соответствует наличию не более одной примеси в коре вихря. Этот случай был подробно рассмотрен в работе [11]. Оказалось, что в этом случае уровни сильно скоррелированы: наличие примеси приводит к смещению уровней с четными и нечетными n на величины, одинаковые по модулю, но противоположные по знаку. Модуль величины зависит от положения примеси, и при определенных ее положениях может приближаться по своей величине к ω_0, так что уровни могут очень сильно сближаться. Но, что важно, спектр остается периодическим, хотя и с периодом $2\omega_0$.

- Умеренно чистый предел: $\Delta\tau \gg 1$, но $\omega_0\tau \ll 1$. В этом случае поведение зависит не только от времени свободного пробега, но и от силы примесей. Случай сильных пуссоновских примесей изучен в работах [12], [13]. Была получена следующая зависимость плотности состояний от энергии:

$$n(E) = \frac{2n_0}{\omega_0}\sin^2\left(\frac{\pi E}{\omega_0}\right),$$

где n_0 – плотность состояний в нормальном металле. В этом случае спектр остается $2\omega_0$-периодичным. Если же сила примесей при фиксированном времени рассеяния стремится к нулю, то реализуется предел случайных матриц класса C [14], где средняя плотность состояний дается выражением

$$n(E) = \frac{n_0}{\omega_0}\left(1 - \frac{\sin(2\pi E/\omega_0)}{2\pi E/\omega_0}\right). \tag{0.1}$$

- Грязный предел: $\Delta\tau \ll 1$. В данном случае также реализуется предел случайных матриц класса C, и средняя плотность состояний также дается выражением (0.1) [15].

Итак, в разных пределах примеси по-разному влияют на спектр, но одно остается общим для всех случаев: в спектре не возникает щели (т.е. заметно большего ω_0 промежутка энергий, для которого плотность состояий становится равной нулю). В определенном смысле, результат нашей работы состоит в том, что если примеси выстроятся в линию и образуют границу, то в спектре может возникнуть щель.

1 Постановка задачи

Нужно найти низколежащие возбуждения сверхпроводника, локализованные в коре двумерного вихря, находящегося на двумерной границе между двумя чистыми сверхпроводниками. Рассмотрен случай, когда плоская граница проходит через центр вихря. Тогда имеем уравнения Боголюбова-де-Жена:

$$\mathcal{H}(r)\Psi(r) = \varepsilon\Psi(r) \tag{1.1}$$

Гамильтониан Боголюбова-де-Жена – матрица 2×2, а Ψ – 2-компонентный вектор в пространстве Намбу:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Гамильтониан Боголюбова-де-Жена состоит из двух частей:

$$\mathcal{H} = H_0 + V, \tag{1.3}$$

где

$$H_0 = \begin{pmatrix} H & \Delta \\ \Delta^* & -H^* \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Здесь $\Delta(r)$ - сверхпроводящий параметр порядка, а H - одночастичный гамильтониан, в присутствии магнитного поля и внешнего потенциала имеющий вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + U(\mathbf{r}) - E_F. \tag{1.5}$$

V описывает плоскую границу между гранулами:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\hbar^2 \varkappa}{m}\delta(x). \tag{1.6}$$

Несложно показать, что если Ψ является решением уравнения (1.1) с энергией E, то волновая функция

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \Psi_\downarrow^* \\ -\Psi_\uparrow^* \end{pmatrix} = i\sigma_y\Psi^* \tag{1.7}$$

тоже является решением уравнения (1.1) с энергией $-E$.

Параметр порядка для вихря с одним квантом потока имеет вид $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(r)e^{-i\varphi}$ (здесь $\Delta(r)$ – действительная функция, φ – полярный угол). Для решений уравнения (1.1) на фоне вихря удобно сделать калибровочное преобразование:

$$\Psi(\mathbf{r}) \to e^{-i\varphi\sigma_z/2}\Psi(\mathbf{r}). \tag{1.8}$$

В результате этого преобразования гамильтониан Боголюбова-де-Жена будет иметь вид [4]:

$$\mathcal{H} = \tau_z \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \sigma_z \frac{e\mathbf{A}}{c} - \sigma_z \frac{\nabla\varphi}{2} \right)^2 - E_F + U(\mathbf{r}) \right] + \Delta(r)\sigma_x. \tag{1.9}$$

Стоит отметить, что обычно для описания границ раздела в сверхпроводниках пользуются так называемым методом туннельного гамильтониана [10]. Напомним кратко, что он из себя представляет.

В этом методе сверхпроводник с границей раздела между двумя частями рассматривается как слабосвязанная система. В нулевом приближении она описывается гамильтонианом, состоящим из двух частей, каждый из которых описывает изолированный сверхпроводник:

$$H_0 = H_1^0 + H_2^0, \tag{1.10}$$

где

$$H_1^0 = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \xi_{\mathbf{p}} a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} a_{\mathbf{p}\alpha} + \frac{1}{2} \left(\Delta_{\mathbf{p}\alpha} a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} a^\dagger_{-\mathbf{p}-\alpha} + .c. \right). \tag{1.11}$$

В следующем приближении гамильтониан содержит член

$$H_{int} = \sum_{\mathbf{pq}\alpha} T_{\mathbf{pq}} a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha} b_{\mathbf{q}\alpha}, \tag{1.12}$$

где $a^\dagger_{\mathbf{p}\alpha}$ и $b^\dagger_{\mathbf{p}\alpha}$ – операторы рождения электронов в первой и второй части сверхпроводника соответственно. H_{int} описывает в первом порядке теории возмущений переходы электронов через границу.

Новизна нашего подхода состоит в том, что в нулевом приближении (т. е. при $\alpha = 0$) дефекта нет. То есть в некотором смысле этот подход противоположен методу туннельного гамильтониана, в котором в нулевом приближении дефект был бы настолько существенен, что две части сверхпроводника считались бы независимыми друг от друга.

2 Состояния в коре вихря в отсутствие дефекта

В отсутствие дефекта задача была решена Кароли, де Женом и Матриконом [2]. В этой работе спектр локализованных состояний при энергиях $\varepsilon \ll \Delta$ был найден в рамках квазиклассического приближения. Точное квантовое (не использующее квазиклассику) решение представлено в работе [3]. Приведем здесь необходимые для решения нашей задачи результаты.

Состояния классифицируются угловым моментом квазичастицы μ, который является полуцелым числом. Энергия μ-ого уровня равна

$$\varepsilon_\mu = \mu\omega_0, \tag{2.1}$$

расстояние между уровнями дается выражением

$$\omega_0 = \frac{\int_0^{+\infty} \frac{\Delta(r)}{k_F r} e^{-2K(r)}\, dr}{\int_0^{+\infty} e^{-2K(r)}\, dr} \tag{2.2}$$

где

$$K(r) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r')\, dr'. \tag{2.3}$$

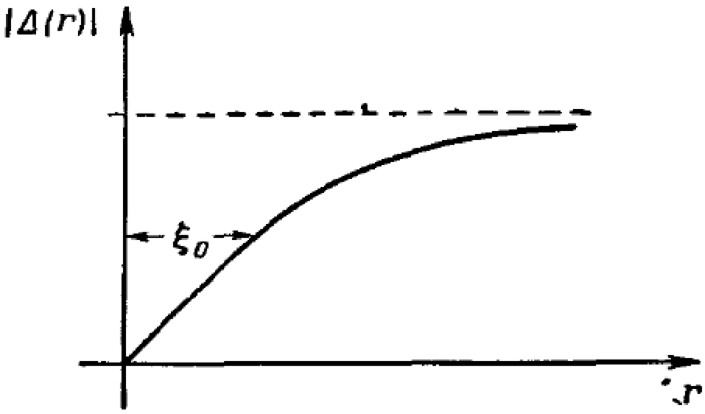

Рис. 1: Изменение амплитуды параметра порядка $|\Delta(r)|$ вблизи вихревой нити в чистом сверхпроводнике второго рода. Источник изображения – [4].

Амплитуда $|\Delta(r)|$ равна нулю при $r = 0$, при удалении от нуля она растет (при малых r рост линейный) и достигает на бесконечности вытекающей из теории БКШ величины Δ_∞ (см. рис. 1). Характерное расстояние, на котором происходит заметное по сравнению с Δ_∞ изменение $\Delta(r)$ составляет $\sim \xi_0$ [4].

Межуровневое расстояние по порядку величины равно $\omega_0 \simeq \Delta^2/E_F$, т.е. всего число локализованных состояний можно оценить как $N \simeq E_F/\Delta$.

Волновая функция состояния с угловым моментом μ имеет вид

$$\Psi_\mu(\mathbf{r}) = Ae^{-K(r)}e^{i\mu\varphi}\begin{pmatrix} J_{\mu-1/2}(k_F r) \\ J_{\mu+1/2}(k_F r) \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где нормировочный коэффициент равен

$$A^2 = \left[\frac{4}{k_F}\int_0^{+\infty} e^{-2K(r)}\,dr\right]^{-1} \sim \frac{k_F}{\xi}. \tag{2.5}$$

3 Решение уравнения Боголюбова-де-Жена

Будем решать напрямую уравнение (1.1). Для этого перейдем в базис из собственных состояний для задачи без дефекта (2.4). Таким образом, сперва надо найти матричный элемент $V_{\mu\nu}$. Выражение для него имеет вид

$$V_{\mu\nu} = \langle\mu|\hat{V}|\nu\rangle = \alpha_0 \iint d^2r\,\delta(x) A^2 e^{-2K(r)} e^{i(\nu-\mu)\varphi} \left[J_{\mu-\frac{1}{2}}(k_F r) J_{\nu-\frac{1}{2}}(k_F r) - J_{\mu+\frac{1}{2}}(k_F r) J_{\nu+\frac{1}{2}}(k_F r)\right] = \tag{3.1}$$

$$= 2\alpha_0 \int_0^{+\infty} dy\, A^2 e^{-2K(y)} \cos\left[(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}\right] \left[\right] J_{\mu-\frac{1}{2}}(k_F y) J_{\nu-\frac{1}{2}}(k_F y) - J_{\mu+\frac{1}{2}}(k_F y) J_{\nu+\frac{1}{2}}(k_F y)\Big] \tag{3.2}$$

Отсюда сразу видно, что $V_{\mu\nu} = 0$ для нечетных $|\mu-\nu|$. Далее, после несложных преобразований (см. приложение A) получаем, что

$$V_{\mu\nu} = \frac{2\alpha\omega_0}{\pi(\mu+\nu)}[(\mu-\nu+1) \bmod 2], \tag{3.3}$$

где для удобства введена безразмерная величина

$$\alpha = \frac{2\hbar^2\varkappa}{m\xi\omega_0}. \tag{3.4}$$

Далее удобнее измерять энергию в единицах ω_0 – расстояний между исходными уровнями. Также обозначим $\mu = i+1/2$. Тогда получим гамильтониан ($i,\ j$ – целые числа)

$$H_{ij} = (i+1/2)\delta_{ij} + \frac{2\alpha}{\pi}\frac{1}{i+j+1}[(i-j+1) \bmod 2] \tag{3.5}$$

Достаточно простой вид матрицы (она представляет собой сумму двух слагаемых: одно диагональное, второе зависит только от суммы индексов) позволяет предположить, что задачу можно решить аналитически.

3.1 Численное исследование спектра

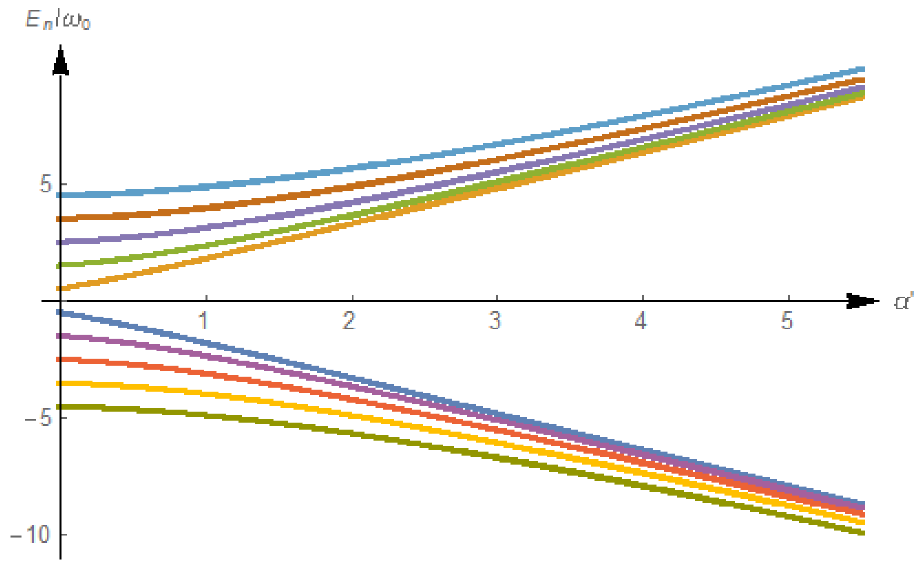

Рис. 2: Зависимость энергий E_n первых пяти положительных и отрицательных уровней энергии от величины α'. Разные уровни обозначены точками разных цветов. E_n измеряется в ω_0 – расстояниях между исходными уровнями энергии.

Исследуем спектр гамильтониана (3.5) численно: найдем спектр соответствующей матрицы в Wolfram Mathematica. Для удобства временно ведем величину $\alpha' = 2\alpha/\pi$. Рассмотрим конечное число уровней: $i, j \in [-50; 50]$. На рис. 3.12 изображен спектр для $\alpha' = 5$, а на рис. 2 - зависимость ближайших к нулю энергетических уровней от величины α'. Как видно из приведенных выше графиков, в спектре действительно есть щель, причем ее величина становится порядка нескольких расстояний между исходными уровнями уже при $\alpha' \sim 1$.

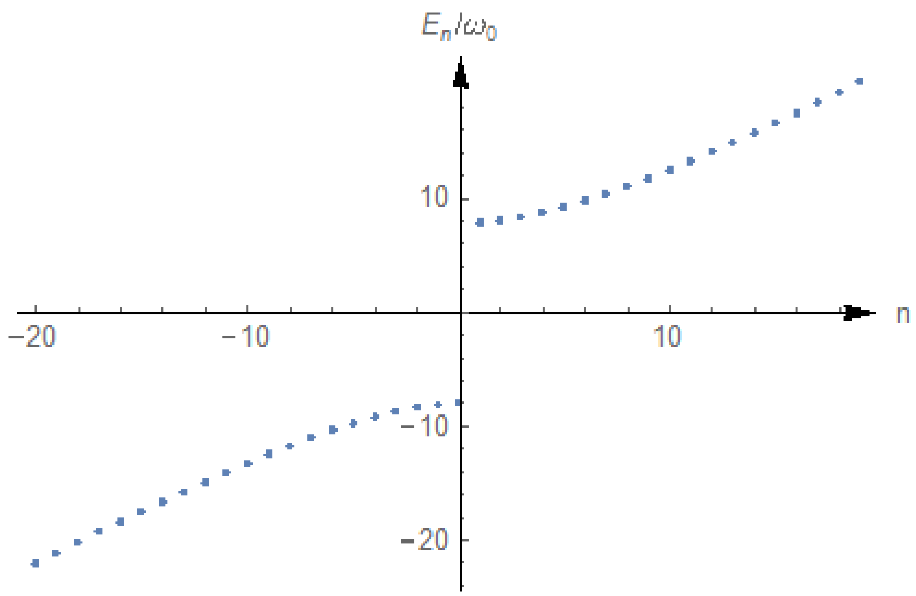

Рис. 3: Уровни энергии в случае $\alpha' = 50$. Энергия измеряется в единицах ω_0, n – номер уровня. Изображены первые 20 положительных и отрицательных уровней энергии.

3.2 Аналитическое исследование спектра

Оказывается, что спектр гамильтониана (3.5) может быть найден точно. Для этого сделаем преобразование Фурье:

$$H(x,y)=\sum_{mn}H_{mn}e^{ixm-iyn}. \tag{3.6}$$

Т. к. m, n – целые числа, на волновые функции в импульсном представлении накладывается условие 2π-периодичности: $\psi(-\pi)=\psi(\pi)$.

Найдем $V(x,y)$:

$$V(x,y)=\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{mn}\frac{e^{ixm-iyn}}{m+n+1}[(m-n+1)\bmod 2]=\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{ms}\frac{e^{ixm-iy(m+2s)}}{2m+2s+1}=\alpha'\sum_{m}e^{i(x+y)m}\sum_{t}\frac{e^{-2iyt}}{2t+1}. \tag{3.7}$$

Вычислив суммы, получаем

$$V(x,y)=i\alpha e^{-ix}\operatorname{sign}(\sin x)2\pi\delta(x+y). \tag{3.8}$$

Итак, получен гамильтониан в импульсном представлении:

$$H(x,y)=(-i\partial_x+1/2)2\pi\delta(x-y)+i\alpha e^{-ix}\operatorname{sign}(\sin x)\,2\pi\delta(x+y). \tag{3.9}$$

Уравнение Шредингера:

$$(-i\partial_x+1/2)\psi(x)+i\alpha e^{-ix}\operatorname{sign}(\sin x)\,\psi(-x)=E\psi(x). \tag{3.10}$$

Волновую функцию ищем в виде:

$$\psi(x)=\begin{cases}C_1e^{ik_1x}+C_2e^{ik_2x}, & 0<x<\pi\\ C_3e^{is_1x}+C_4e^{is_2x}, & -\pi<x<0\end{cases} \tag{3.11}$$

Решая уравнение Шредингера, а также учитывая то, что $\psi(x)$ должна быть непрерывна в $x=0$ и условие $\psi(-\pi)=\psi(\pi)$, получаем (подробные вычисления см. в приложении B) следующие результаты:

1. Спектр локализованных состояний параметризуется волновым числом κ:

$$E^2=\kappa^2+\alpha^2 \tag{3.12}$$

Значения κ определяются из условия

$$\kappa+\alpha\tan\kappa\pi=0 \tag{3.13}$$

Отметим, что при $\alpha\to 0$ получаем, что $\kappa\to n+1/2$, что воспроизводит спектр локализованных состояний в коре вихря в отсутствие плоского дефекта.

2. Волновая функция состояния с энергией E имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-ix/2}[C_1 e^{i\kappa x} + C_2 e^{-i\kappa x}], & 0 < x < \pi \\ e^{-ix/2}[C_3 e^{i\kappa x} + C_4 e^{-i\kappa x}], & -\pi < x < 0 \end{cases}, \tag{3.14}$$

где коэффициенты

$$|C_1|^2 = \frac{\kappa + E}{2(E + \alpha/\pi E)}, \quad C_2 = \frac{i\alpha(\kappa + i\alpha)}{E(\kappa + E)} C_1, \quad C_3 = \frac{\kappa + i\alpha}{E} C_1, \quad C_4 = -\frac{i\alpha}{\kappa + E} C_1 \tag{3.15}$$

Заметим, что при $\alpha \to 0$, волновые функции принимают вид $\psi(x) = e^{inx}$, что в исходном представлении соответствует чистым состояниям с $\mu = n + 1/2$.

4 Плотность состояний

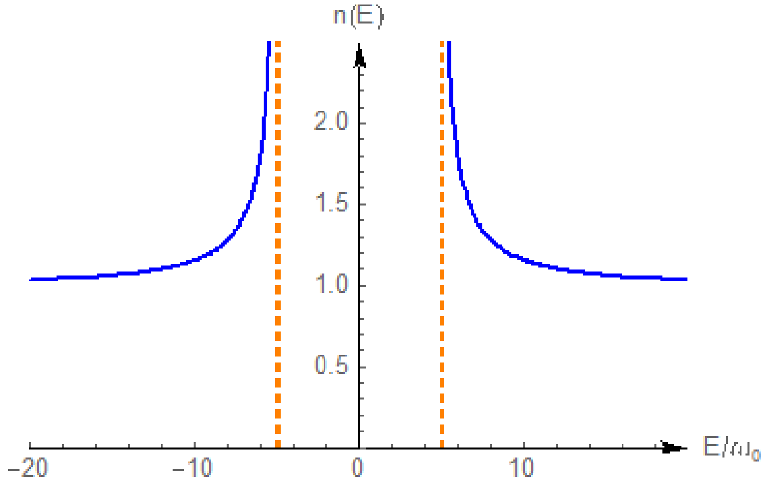

Рис. 4: Зависимость плотности состояний $n(E)$ от энергии E состояний, локализованных в коре вихря, для $\alpha = 5$.

По определению, плотность локализованных в коре вихря состояний равна

$$n(E) = \sum_{\kappa} \delta(E - E_{\kappa}). \tag{4.1}$$

Пусть $\alpha \gg 1$ (следовательно, в этом случае верно и $E \gg 1$) . Для них рассмотрим сглаженную плотность состояний: найдем количество состояний на интервале энергий $\Delta E \ll E$, но при этом $\Delta E \gg 1$. Тогда от суммирования по κ можно перейти к интегрированию. Также, как видно из (3.13), для $\kappa \gg 1$ получается, что $\kappa \simeq n + 1/2$, поэтому κ можно считать в этом пределе эквидистантными. Тогда

$$n(E) = \int d\kappa \, \delta(E - \sqrt{E^2 + \alpha^2}) = \frac{E}{\sqrt{E^2 - \alpha^2}}. \tag{4.2}$$

Обобщая на отрицательные значения энергии, получаем

$$n(E) = \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \alpha^2}}. \tag{4.3}$$

Таким образом, плотность состояний становится постоянной величиной на больших энергиях и стремится к бесконечности при $E \to \alpha$ (см. рис. 4). Такое поведение аналогично зависимости плотности состояний элементарных возбуждений в сверхпроводнике [7] (роль параметра порядка Δ в нашем случае играет параметр α).

5 Связь параметра κ и кондактанса

Для понимания, что представляет из себя параметр κ, стоит связать его величину с каким-либо измеряемым параметром образца, например, кондактансом.

Для простоты рассмотрим плоскую длинную полоску ширины L. Пусть ось x направлена вдоль полоски, а ось y – поперек. Стенка перепендикулярна полоске, ее потенциал $U(x) = \hbar^2 \varkappa/m\ \delta(x)$. Тогда движение вдоль оси y квантуется. Пусть электрон движется с импульсом p_x. Тогда для n-ого канала энергия равна

$$E = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \tag{5.1}$$

Согласно формуле Ландауэра [8], кондактанс полоски равен

$$G = G_Q \sum_n T_n, \tag{5.2}$$

где T_n – коэффициент прохождения барьера для n-ого канала, сумма берется по всем открытым каналам, $G_Q = e^2/\pi\hbar$ – квант кондактанса.

Условие того, что n-й канал открыт (E_F - энергия Ферми):

$$\frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2} < E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}. \tag{5.3}$$

Таким образом, число открытых каналов равно $N = [k_F L/\pi]$.

Коэффициент прохождения через барьер равен

$$T = \frac{k_x^2}{\varkappa^2 + k_x^2}. \tag{5.4}$$

Выражая k_x с помощью (5.1), подставляем в (5.2) и получаем

$$G = G_Q \sum_{n=0}^{[k_F L/\pi]} \frac{k_F^2 - (\pi n/L)^2}{\varkappa^2 + k_F^2 - (\pi n/L)^2}. \tag{5.5}$$

Если $k_F L \gg 1$, то сумму можно заменить на интеграл:

$$G = G_Q \int_0^{k_F L/\pi} dx\, \frac{k_F^2 - (\pi x/L)^2}{\varkappa^2 + k_F^2 - (\pi x/L)^2} = G_Q \frac{k_F L}{\pi} - G_Q \int_0^{k_F L/\pi} dx\, \frac{\varkappa^2}{\varkappa^2 + k_F^2 - (\pi x/L)^2} \tag{5.6}$$

Первое слагаемое – баллистический кондактанс в отсутствие стенки, обозначим его $G_0 = N G_Q$. Второе слагаемое – поправка из-за наличия барьера, обозначим ее δG. Тогда, сделав замену $y = \pi x/L$, получаем

$$\frac{\delta G}{G_0} = -\frac{\varkappa^2}{k_F}\int_0^{k_F} dy\, \frac{1}{\varkappa^2 + k_F^2 - y^2} = -\frac{\varkappa^2}{2k_F\sqrt{\varkappa^2 + k_F^2}} \ln \frac{\sqrt{\varkappa^2 + k_F^2} + k_F}{\sqrt{\varkappa^2 + k_F^2} - k_F} \tag{5.7}$$

При обсуждении вихря можно положить $L \sim \xi$. Также, нагляднее выразить κ через α с помощью (3.4), т. к. в (3.12) фигурирует именно эта величина, и щель в спектре возбуждений становится больше расстояния между исходными уровнями $\omega_0 \sim \Delta^2/E_F$ при $\alpha > 1$. Также напомним, что $\xi \sim \hbar p_F/\pi m \Delta$.

Подставляя все это в (5.7), получаем отношение поправки к кондактансу из-за наличия дефекта к его значению в отсутствие барьера:

$$\frac{\delta G}{G_0} = -\frac{\Delta}{4\pi^2 E_F} \frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi^2 E_F/\Delta)^2}} \ln \frac{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi^2 E_F/\Delta)^2} + 2\pi^2 E_F/\Delta}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi^2 E_F/\Delta)^2} - 2\pi^2 E_F/\Delta} \tag{5.8}$$

Если $\alpha < E_F/\Delta$, то (5.8) можно разложить по малому α, и тогда получаем

$$\frac{\delta G}{G_0} \sim \left(\frac{\Delta \alpha}{E_F}\right)^2 \ln \frac{\Delta \alpha}{E_F} \ll 1. \tag{5.9}$$

Таким образом, даже дефект, дающий малую поправку к баллистической проводимости, способен создать значительную (порядка нескольких расстояний между исходными уровнями) щель в спектре локализованных состояний в коре вихря.

6 Изменение параметра порядка при учете самосогласования

Когда мы решали уравнения Боголюбова-де-Жена, параметр порядка Δ считался таким же, каким бы он был в отсутстие дефекта. Но на самом деле наличие дефекта изменяет параметр порядка: в частности, теряется аксиальная симметрия. В связи с этим возникает необходимость рассмотреть влияние изменения параметра порядка на спектр, а именно на энергию ближайшего к щели уровня энергии. Если поправка окажется много меньше, чем энергия этого уровня, это будет означать, что этот эффект практически не влияет на наличие щели в спектре локализованных состояний.

Итак, из условия самосогласования [4] следует, что величина параметра порядка связана с собственными функциями $(u_n,\ v_n)^T$ уравнения Боголюбова-де-Жена как

$$\Delta(\mathbf{r}) = g\sum_n u_n(\mathbf{r})v_n^*(\mathbf{r})(1-2f_n), \tag{6.1}$$

где g – потенциал взаимодействия электронов из гамильтониана БКШ:

$$H_{int} = g/2\int d\mathbf{r}\,\psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r})\psi_\beta^\dagger(\mathbf{r})\psi_\alpha(\mathbf{r})\psi_\beta(\mathbf{r}), \tag{6.2}$$

где f_n – числа заполнения уровней энергии.

Обозначим ψ_κ состояние (3.14) в вихре вблизи дефекта с энергией $E = \sqrt{\kappa^2+\alpha^2}$, ϕ_μ – чистое состояние 2.4 с угловым моментом μ. Тогда при нулевой температуре вклад локализованных состояний в параметр порядка равен

$$\Delta(\mathbf{r}) = gA^2e^{-2K(r)}\sum_\kappa\sum_{\mu,\nu}\langle\phi_\mu|\psi_\kappa\rangle\langle\phi_\nu|\psi_\kappa\rangle^* J_{\mu-1/2}(k_Fr)J_{\nu+1/2}(k_Fr)e^{i(\mu-\nu)\varphi}. \tag{6.3}$$

Перекрытие с чистым состоянием $\langle\phi_\mu|\psi_\kappa\rangle = \int\frac{dx}{2\pi}\psi_\kappa(x)e^{-imx}$, где $\mu = m+1/2$. Тогда, обозначая $\nu = n+1/2$, получаем

$$\Delta(\mathbf{r}) = gA^2e^{-2K(r)}\sum_\kappa\sum_{m,n}\int\frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_\kappa(x)\psi_\kappa^*(y)e^{-imx}e^{iny}J_m(k_Fr)J_{n+1}(k_Fr)e^{i(m-n)\varphi}. \tag{6.4}$$

Упростим выражение, воспользовавшись формулой Якоби-Ангера

$$\sum_n J_n(z)e^{in\varphi} = e^{iz\sin\varphi}. \tag{6.5}$$

Получим

$$\Delta(\mathbf{r}) = gA^2e^{-2K(r)}\sum_\kappa\int\frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_\kappa(x)\psi_\kappa^*(y)e^{i(\varphi-y)}e^{ik_Fr[\sin(\varphi-x)-\sin(\varphi-y)]}. \tag{6.6}$$

Вернемся к нахождению изменения энергии. Рассмотрим изменение параметра порядка с точки зрения теории возмущений. Обозначим Ψ_0 ближайшее к щели собственное состояние. Его разложение по собственным состояниям в вихре без дефекта

$$\Psi_0 = \sum_\mu \langle\psi_\mu|\psi_0\rangle \Psi_\mu. \tag{6.7}$$

Обозначим $\Delta_0(\mathbf{r})$ параметр порядка в отсутствие стенки. Тогда его изменение $\delta\Delta = \Delta - \Delta_0$ даст добавку к гамильтониану Боголюбова-де-Жена, и в первом порядке теории возмущений изменение энергии будет равно

$$\Delta E = \overline{\Psi_0} \begin{pmatrix} 0 & \delta\Delta \\ \delta\Delta^* & 0 \end{pmatrix} \Psi_0 = \sum_{\mu,\nu} \langle\phi_\nu|\psi_0\rangle^* \langle\phi_\mu|\psi_0\rangle \overline{\Psi_\nu} \begin{pmatrix} 0 & \delta\Delta \\ \delta\Delta^* & 0 \end{pmatrix} \Psi_\mu \tag{6.8}$$

.

Обозначим

$$E(\alpha) = A^2 \int d\mathbf{r} \sum_{\mu,\nu} \langle\phi_\nu|\psi_0\rangle^* \langle\phi_\mu|\psi_0\rangle e^{-2K(r)} \Delta(\mathbf{r}) J_{\mu+1/2}(k_F r) J_{\nu-1/2}(k_F r) e^{i(\mu-\nu)\varphi}. \tag{6.9}$$

Тогда

$$\Delta E = 2\,\mathrm{Re}[E(\alpha) - E(0)]. \tag{6.10}$$

В 6.9 просуммируем по μ и ν аналогично тому, как это было сделано для параметра порядка. Получим

$$E(\alpha) = A^2 \int d\mathbf{r}\, e^{-2K(r)} \Delta(\mathbf{r}) \int \frac{dz\, dt}{(2\pi)^2} \psi_0^*(z) \psi_0(t) e^{i(t-\varphi)} e^{ik_F r[\sin(z-\varphi) - \sin(t-\varphi)]}. \tag{6.11}$$

Подставляя 6.6, получаем

$$E(\alpha) = gA^4 \int dr\, r e^{-4K(r)} \sum_\kappa \int \frac{dx\, dy\, dz\, dt}{(2\pi)^4} \psi_\kappa(x) \psi_\kappa^*(y) \psi_0^*(z) \psi_0(t) e^{i(t-y)} \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{ik_F r Z \sin(\varphi+\varphi_0)]}, \tag{6.12}$$

где

$$Z\sin(\varphi+\varphi_0) = \mathrm{Im}[e^{i(\varphi-x)} - e^{i(\varphi-y)} + e^{i(\varphi-t)} - e^{i(\varphi-z)}] = \sin(\varphi-x) - \sin(\varphi-y) + \sin(\varphi-t) - \sin(\varphi-z). \tag{6.13}$$

Т. е.

$$Z = |e^{-ix} - e^{-iy} + e^{-it} - e^{iz}|. \tag{6.14}$$

Интегрируя по углу, получаем

$$E(\alpha) = gA^4 \int dr\, r e^{-4K(r)} \sum_\kappa \int \frac{dx\, dy\, dz\, dt}{(2\pi)^3} \psi_\kappa(x) \psi_\kappa^*(y) \psi_0^*(z) \psi_0(t) e^{i(t-y)} J_0(k_F r Z). \tag{6.15}$$

Т. к. функции Бесселя осциллируют при больших значениях аргумента, то интеграл по r будет экспоненциально мал при $k_F \xi Z \gg 1$. Поэтому интеграл набирается на таких значениях координат, что $Z \ll \frac{1}{k_F \xi}$, т. е. вблизи плоскостей, на которых $Z = 0$. Таких плоскости 3, и они дают следующие вклады в $E(\alpha)$ (подробные вычисления см. в приложении C.1):

1. $\mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{t} = \mathbf{z}$
$$E_1(\alpha) = \frac{gA^4}{k_F^2} \sum_{k>0} \int \frac{dx\, dz}{(2\pi)^2} \frac{|\psi_0(z)|^2 |\psi_k(x)|^2 e^{i(z-x)}}{|\sin(x-z)|} \tag{6.16}$$

2. $\mathbf{x} = \mathbf{z},\ \mathbf{t} = \mathbf{y}$
$$E_2(\alpha) = \frac{gA^4}{k_F^2} \sum_{k>0} \int \frac{dx\, dy}{(2\pi)^2} \psi_0^*(x)\psi_0(y)\psi_k(x)\psi_k^*(y) \frac{1}{|\sin(x-y)|} \tag{6.17}$$

3. $|\mathbf{x} - \mathbf{t}| = \pi,\quad |\mathbf{y} - \mathbf{z}| = \pi$
$$E_3(\alpha) = -\frac{gA^4}{k_F^2} \sum_{k>0} \int \frac{dx\, dy}{(2\pi)^2} \psi_0^*(\pi + y)\psi_0(\pi + x)\psi_k(x)\psi_k^*(y) e^{i(x-y)} \frac{1}{|\sin(x-y)|} \tag{6.18}$$

Заметим, что все эти интегралы расходятся при $\sin(x - y) = 0$, т. е. при $x = y$ и $|x - y| = \pi$. Эта расходимость возникает, потому что предположения, в которых они были получены, вблизи этих прямых перестают выполняться. Обрезав, интеграл можно свести к локальному (см. приложение C.2). Тогда получаем, что вклады от плоскостей равны

1. $\mathbf{x} = \mathbf{y},\ \mathbf{t} = \mathbf{z}$
$$E_1(\alpha) = \frac{2gA^4}{k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{k>0} \int \frac{dx}{(2\pi)^2} |\psi_0(x)|^2 |\psi_k(x)|^2 - \frac{gA^4}{k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{k>0} \int \frac{dx}{(2\pi)^2} |\psi_0(x+\pi)|^2 |\psi_k(x)|^2 \tag{6.19}$$

2. $\mathbf{x} = \mathbf{z},\ \mathbf{t} = \mathbf{y}$
$$E_2(\alpha) = \frac{2gA^4}{k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{k>0} \int \frac{dx}{(2\pi)^2} |\psi_0(x)|^2 |\psi_k(x)|^2 + \frac{gA^4}{k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{k>0} \int \frac{dx}{(2\pi)^2} \psi_0^*(x)\psi_0(x+\pi)\psi_k(x)\psi_k^*(x+\pi) \tag{6.20}$$

3. $|\mathbf{x} - \mathbf{t}| = \pi,\quad |\mathbf{y} - \mathbf{z}| = \pi$
$$E_3(\alpha) = -\frac{2gA^4}{k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{k>0} \int \frac{dx}{(2\pi)^2} |\psi_0(x+\pi)|^2 |\psi_k(x)|^2 + \frac{gA^4}{k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{k>0} \int \frac{dx}{(2\pi)^2} \psi_0^*(x)\psi_0(x+\pi)\psi_k(x)\psi_k^*(x+\pi) \tag{6.21}$$

Проинтегрируем по x. Выполнив тривиальные преобразования, легко убедиться, что

$$|\psi(x)|^2 = |\psi(x+\pi)|^2 = -\psi^*(x)\psi(x+\pi) = \frac{\pi}{\alpha + \pi E^2} \left[E^2 + \kappa\alpha \sin(2\kappa|x|) - \alpha^2 \cos(2\kappa x) \right]. \tag{6.22}$$

Таким образом, все интегралы по x в (6.19), (6.20) и (6.21) равны между собой. Тогда, суммируя все вклады в $E(\alpha)$ всех трех плоскостей, получаем

$$E(\alpha) = \frac{3gA^4}{4\pi^2 k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{\kappa>0} \int_{-\pi}^{\pi} dx\, |\psi_0(x)|^2 |\psi_k(x)|^2. \tag{6.23}$$

Используя условие 3.13, проинтегрируем по x:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, |\psi_0(x)|^2 |\psi_k(x)|^2 = \frac{2\pi^2}{(\alpha+\pi E^2)(\alpha+\pi E_0^2)} \left[\pi\kappa^2\kappa_0^2 + \alpha(1+\pi\alpha)(\kappa^2+\kappa_0^2+\alpha^2)\right]. \tag{6.24}$$

Предел при $\alpha \to 0$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, |\psi_0(x)|^2 |\psi_k(x)|^2 = 2\pi. \tag{6.25}$$

Выделим в интеграле для произвольного α часть, не зависящую от α:

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, |\psi_0(x)|^2 |\psi_k(x)|^2 = 2\pi - \frac{2\pi\alpha^2(1+\pi\alpha)}{[\alpha(1+\pi\alpha)+\pi\kappa^2][\alpha(1+\pi\alpha)+\pi\kappa_0^2]}. \tag{6.26}$$

Тогда, согласно (6.10), поправка к уровню энергии равна

$$\Delta E = -\frac{3gA^4}{\pi k_F^2} \ln k_F\xi \sum_{\kappa>0} \frac{\alpha^2(1+\pi\alpha)}{[\alpha(1+\pi\alpha)+\pi\kappa^2][\alpha(1+\pi\alpha)+\pi\kappa_0^2]}. \tag{6.27}$$

Оценим сумму по κ. Рассмотрим случай $\alpha \gg 1$ (тогда щель в спектре будет значительно больше расстояния между уровнями). Тогда, как уже упоминалось в главе про плотность состояний, κ можно считать эквидистантными и перейти от суммирования к интегрированию. Также считаем $\kappa_0 \simeq 1/2$. Находим сумму по κ:

$$\sum_{\kappa>0} \frac{1}{\alpha(1+\pi\alpha)+\pi\kappa^2} \simeq \sum_{\kappa>0} \frac{1}{\pi(\alpha^2+\kappa^2)} \simeq \int_0^\infty d\kappa\, \frac{1}{\pi(\alpha^2+\kappa^2)} = \frac{1}{2\alpha}. \tag{6.28}$$

Итак, в пределе $\alpha \gg 1$ получаем

$$\Delta E \simeq -\frac{3gA^4}{2\pi k_F^2} \ln k_F\xi. \tag{6.29}$$

Найдем отношение поправки к энергии ближайшего к щели уровня к ее значению $E_0 \sim \omega_0\alpha$. Учитывая, что $A^2 \sim k_F/\xi$, где $\xi \simeq \hbar v_F/\pi\Delta$, а g выражается через дебаевскую частоту ω_D, параметр порядка при нулевой температуре Δ и плотность состояний ν_0, которая в случае двумерного электронного газа имеет равна $m/2\pi\hbar^2$, как $g\nu_0 = [\ln(\omega_D/\Delta)]^{-1}$, получаем

$$\frac{\Delta E}{E_0} \sim -\frac{1}{\alpha} \frac{\ln(E_F/\Delta)}{\ln(\omega_D/\Delta)} \tag{6.30}$$

Таким образом, при достаточно больших значениях α, поправка к энергии ближайшего к щели состояния окажется значительно меньше самой энергии, что означает, что искажение параметра порядка из-за наличия дефекта качественно не изменит ситуацию, и в спектре, даже с учетом этого эффекта, будет щель.

Стоит заметить, что вклад в поправку к энергии дают только ненулевые гармоники дельты: из-за самосогласования ее нулевая гармоника (т. е. среднее по углам значение) тоже могло измениться, но вклада в поправку она не дает (напомним, что мы работаем в калибровке, в которой исходный параметр порядка Δ является вещественной величиной, зависящей только от r). Доказательство этого факта см. в приложении C.3.

Заключение

В данной работе был найден спектр состояний, локализованных в коре вихря вблизи плоского дефекта, а также собственные функции. Основной результат работы - наличие щели в спектре, величина которой при должной силе дефекта может значительно превышать расстояние между исходными уровнями энергии. Этот эффект качественно отличается от эффектов, возникающих из-за наличия примесей: плотность состояний оставалась либо примерно постоянной, либо осциллировала, но не обращалась в ноль на промежутках энергий, больших, чем удвоенное расстояние между уровнями энергии. Качественно понять, почему примеси, выстроившись в линию, могут создать в спектре щель, а когда их много, но они разбросаны в металле случайным образом, – нет, пока не удалось.

Мы рассматриваем двумерный случай, но что изменится в трехмерном случае? В нём к угловому моменту μ добавляется еще одно квантовое число k_z – импульс вдоль оси вихря. Дискретные уровни размываются в зоны со следующим законом дисперсии [3]:

$$E_\mu(k_z) - E_\mu(0) \sim \mu\omega_0 \frac{m_z}{m}\frac{k_z^2}{k_F^2}, \tag{6.31}$$

где m_Z и m – эффективные массы вдоль направления вихря и в плоскости, перпендикулярной ему, соответственно. Для анизотропных сверхпроводников, таких что $m_z/m \ll 1$, ширина зон оказывается много меньше расстояий между уровнями, и сами уровнями оказываются почти дискретными, что формально соответствует двумерному вихрю в двумерном сверхпроводнике, для которого и поставлена задача, решаемая в данной работе.

Приложения

A Вычисление матричного элемента возмущения

В этом приложении приведены вычисления матричного элемента $V_{\mu\nu}$, с помощью которых из выражения (3.2) был получен результат (3.3).
Воспользуемся соотношением 5.43 из [5]. Получим

$$J_{\mu-1/2}(z)J_{\nu-1/2}(z) - J_{\mu+1/2}(z)J_{\nu+1/2}(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left[J_{\mu+\nu-1}(2z\cos\theta) - J_{\mu+\nu+1}(2z\cos\theta)\right]\cos\left[(\mu-\nu)\theta\right]\,d\theta \tag{A.1}$$

Воспользовавшись известным свойством функций Бесселя $\frac{d}{dz}J_n(z) = \frac{1}{2}\left[J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)\right]$, получаем

$$J_{\mu-1/2}(z)J_{\nu-1/2}(z) - J_{\mu+1/2}(z)J_{\nu+1/2}(z) == \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{dJ_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)}{dz}\frac{\cos\left[(\mu-\nu)\theta\right]}{\cos\theta}\,d\theta \tag{A.2}$$

Подставляя это в (3.2), получаем

$$V_{\mu\nu} = \alpha'\omega_0\cos\left[(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}\right]\int_0^{+\infty} e^{-2K(z/k_F)}dz\int_0^{\pi/2}\frac{dJ_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)}{dz}\frac{\cos\left[(\mu-\nu)\theta\right]}{\cos\theta}\,d\theta \tag{A.3}$$

Т. к. $e^{-2K(r)} \simeq 1$ при $r \lesssim \xi$ и резко убывает на $r \gtrsim \xi$. Поэтому интеграл по z в выражении выше обрезается на $z \simeq k_F\xi$. Далее, воспользовавшись тождеством $\frac{2n}{z}J_n(z) = J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z)$, получаем

$$V_{\mu\nu} = k_F\xi\omega_0\frac{\alpha'}{\mu+\nu}\cos\left[(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}\right]\int_0^{\pi/2}\cos\left[(\mu-\nu)\theta\right]\left(J_{\mu+\nu+1}(2k_F\xi\cos\theta) + J_{\mu+\nu-1}(2k_F\xi\cos\theta)\right)\,d\theta. \tag{A.4}$$

Интеграл вычисляем с помощью соотношения 6.681 из [6]. Тогда

$$V_{\mu\nu} = \pi\omega_0 k_F\xi\frac{\alpha'}{2(\mu+\nu)}\cos\left[(\nu-\mu)\frac{\pi}{2}\right]\left(J_{\mu-1/2}(k_F\xi)J_{\nu 1/2}(k_F\xi) + J_{\mu+1/2}(k_F\xi)J_{\nu+1/2}(k_F\xi)\right). \tag{A.5}$$

Воспользовавшись асимптотическим выражением для функций Бесселя при больших значениях аргумента, получаем для $\mu,\ \nu \ll k_F\xi$

$$J_{\mu-1/2}(k_F\xi)J_{\nu-1/2}(k_F\xi) + J_{\mu+1/2}(k_F\xi)J_{\nu+1/2}(k_F\xi) \simeq \frac{2}{\pi k_F\xi}\cos\left[(\mu-\nu)\frac{\pi}{2}\right]. \tag{A.6}$$

Подставляя в (A.5), получаем окончательный результат (3.3).

B Нахождение волновых функций

В этом приложении приведены подробные вычисления, с помощью которых были получены волновые функции (3.14).

Подставим в уравнение Шредингера (3.10) анзац (3.11). Получим тогда для $x > 0$

$$(k_1 + 1/2 - E)C_1 e^{ik_1 x} + (k_2 + 1/2 - E)C_2 e^{ik_2 x} + i\alpha(C_3 e^{-i(s_1+1)x} + C_4 e^{-i(s_2+1)x}) = 0, \quad \text{(B.1)}$$

а для отрицательных –

$$(s_1 + 1/2 - E)C_3 e^{is_1 x} + (s_2 + 1/2 - E)C_4 e^{is_2 x} - i\alpha(C_1 e^{-i(k_1+1)x} + C_2 e^{-i(k_2+1)x}) = 0. \quad \text{(B.2)}$$

Выбирая $s_2 = -k_1 - 1$ и $s_1 = -k_2 - 1$, получаем системы уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases} (k_1 + 1/2 - E)C_1 + i\alpha C_4 = 0 \\ (-k_1 - 1/2 - E)C_4 - i\alpha C_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (k_2 + 1/2 - E)C_2 + i\alpha C_3 = 0 \\ (-k_2 - 1/2 - E)C_3 - i\alpha C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{(B.3)}$$

Обе системы уравнений имеют нетривиальные решения, если $E^2 = \kappa^2 + \alpha^2$, где $\kappa = k_1 + 1/2 = -(k_2 + 1/2)$.

Условия непрерывности в нуле и 2π-периодичности волновой функции дают

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_3 + C_4 \\ C_1 e^{ik_1\pi} + C_2 e^{ik_2\pi} = -C_3 e^{ik_2\pi} - C_4 e^{ik_1\pi} \end{cases} \quad \text{(B.4)}$$

Отсюда получаем условие на значения κ:

$$\frac{1 - e^{2\pi i\kappa}}{2} = \frac{i\kappa}{\alpha + i\kappa}. \quad \text{(B.5)}$$

Условие (3.13) равносильно ему.

Решая системы уравнений (B.3), получаем коэффициенты $C_2,\ C_3,\ C_4$ (см. (3.15)).

Значения коэффициента C_1 получим, отнормировав волновую функцию. Условие нормировки:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{2\pi} |\psi(x)|^2 = 1. \quad \text{(B.6)}$$

C Дополнения к главе 6

C.1 Вклады от плоскостей

Здесь и далее будем считать волновые функции медленными огибающими.

$$\mathbf{I}: \quad \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{z}$$

Проинтегрируем по нормальным относительно этой плоскости смещений. Сделаем замены: $y = x + u$, $t = z + v$. Тогда

$$E_1(\alpha) = g \sum_{k>0} \int \frac{dx\,dz}{(2\pi)^2} \psi_0^*(z)\psi_0(z)\psi_k(x)\psi_k^*(x) I(x,z). \tag{C.1}$$

Здесь $I(x,z)$ обозначен интеграл по нормальным смещениям:

$$I = \int \frac{du\,dv}{2\pi} \int_0^{+\infty} r\,dr\, J_0(k_F r Z) \tag{C.2}$$

где

$$Z = \left| e^{-ix} - e^{-i(x+u)} + e^{-i(z+v)} - e^{-iz} \right| \simeq |ue^{-ix} - ve^{-iz}| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(x-z)} \tag{C.3}$$

Перейдем к новым переменным интегрирования: $u = (s+p)/2$, $v = (s-p)/2$. Якобиан преобразования равен $1/2$. Тогда аргумент функции Бесселя преобразуется как

$$Z^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos(x-z) = s^2\sin^2[(x-z)/2] + p^2\cos^2[(x-z)/2]. \tag{C.4}$$

Тогда

$$I(x,z) = \int \frac{ds\,dp}{4\pi} \int_0^{+\infty} r\,dr\, A^4 e^{-4K(r)} J_0(k_F r\sqrt{s^2\sin^2[(x-z)/2] + p^2\cos^2[(x-z)/2]}). \tag{C.5}$$

Сделаем еще одну замену: $\xi = s|\sin[(x-z)/2]|$, $\eta = p|\cos[(x-z)/2]|$. Якобиан равен $2|\sin(x-z)|^{-1}$. Тогда

$$I(x,z) = \frac{1}{|\sin(x-z)|} \int \frac{d\xi\,d\eta}{2\pi} \int_0^{+\infty} r\,dr\, A^4 e^{-4K(r)} J_0(k_F r\sqrt{\xi^2+\eta^2}) = \tag{C.6}$$

$$= \frac{1}{|\sin(x-z)|} \int_0^{+\infty} \rho\,d\rho \int_0^{+\infty} r\,dr\, A^4 e^{-4K(r)} J_0(k_F r\rho)$$

Проинтегрируем по ρ. Т. к. интеграл расходится, применим экспоненциальную регуляризацию. Пользуясь формулой 6.623(2) из [6], получаем

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha\rho}\rho J_0(k_F r\rho)\,d\rho = \frac{\alpha}{(\alpha^2 + (k_F r)^2)^3/2}. \tag{C.7}$$

Теперь проинтегрируем по r (замена: $x = k_F r/\alpha$):

$$\int_0^{+\infty} r\,dr\,A^4 e^{-4K(r)} \frac{\alpha}{(\alpha^2 + (k_F r)^2)^{3/2}} = \int_0^{+\infty} \frac{A^4(\alpha x/k_F)x\,dx}{k_F^2(1+x^2)^{3/2}}. \tag{C.8}$$

В пределе $\alpha \to 0$, получаем

$$I = \frac{A^4}{k_F^2|\sin(x-z)|}. \tag{C.9}$$

Заметим, что ответ не зависит от профиля $\Delta(r)$.

Окончательно, получаем вклад от плоскости I:

$$E_1(\alpha) = \frac{gA^4}{k_F^2}\sum_{k>0}\int \frac{dx\,dz}{(2\pi)^2}\frac{|\psi_0(z)|^2|\psi_k(x)|^2}{|\sin(x-z)|} \tag{C.10}$$

$\mathbf{II}: \quad \mathbf{x} = \mathbf{z}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{y}$

Порядок действий такой же, как и при рассмотрении плоскости I.

Проинтегрируем по нормальным направлениям: $z = x + u$, $t = y + v$.

$$E_2(\alpha) = g\sum_{k>0}\int \frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_0^*(x)\psi_0(y)\psi_k(x)\psi_k^*(y)\int \frac{du\,dv}{2\pi}\int_0^{+\infty} r\,dr\,A^4 e^{-4K(r)} J_0(k_F r Z), \tag{C.11}$$

где

$$Z = \left|e^{-ix} - e^{-iy} + e^{-i(y+v)} - e^{-i(x+u)}\right| \simeq |ue^{-ix} - ve^{-iy}| = \sqrt{u^2+v^2-2uv\cos(x-y)}. \tag{C.12}$$

Как видим, получается все то же самое, с точностью до замены y на z. Итак, вклад от плоскости II равен Тогда

$$E_2(\alpha) = \frac{gA^4}{k_F^2}\sum_{k>0}\int \frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_0^*(x)\psi_0(y)\psi_k(x)\psi_k^*(y)\frac{1}{|\sin(x-y)|} \tag{C.13}$$

$\mathbf{III}: \quad |\mathbf{x} - \mathbf{t}| = \pi, \quad |\mathbf{y} - \mathbf{z}| = \pi$

Напомним, что волновые функции 2π-периодичны: $\psi(x+2\pi) = \psi(x)$.

Проинтегрируем по нормальным смещениям: $t = \pi + x + u$, $z = \pi + y + v$.

$$E_3(\alpha) = g\sum_{k>0}\int \frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_0^*(\pi+y)\psi_0(\pi+x)\psi_k(x)\psi_k^*(y)\int \frac{du\,dv}{2\pi}\int_0^{+\infty} r\,dr\,A^4 e^{-4K(r)} J_0(k_F r Z), \tag{C.14}$$

где

$$Z = \left|e^{-ix} - e^{-iy} - e^{-i(x+u)} + e^{-i(y+v)}\right| = \simeq \left|ue^{-ix} - ve^{-iy}\right| = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos(x-y)}. \tag{C.15}$$

Снова получаем то же самое, что и при рассмотрении вкладов от плоскостей I и II. Итак, вклад от плоскости III равен

$$E_3(\alpha) = \frac{gA^4}{k_F^2}\sum_{k>0}\int\frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_0^*(\pi+y)\psi_0(\pi+x)\psi_k(x)\psi_k^*(y)\frac{1}{|\sin(x-y)|}. \tag{C.16}$$

C.2 Сведение интеграла к локальному

Перепишем (C.3) через переменные s и p, введенные в разделе C.1. Заметим, что в (C.5) интеграл по p сходится, поэтому можно положить $p=0$. Тогда аргумент функции Бесселя при $p=0$ равен

$$Z = 4\left|\sin[(x-z)/2]\sin(s/4)\right|. \tag{C.17}$$

Обозначим $\delta = x - z$. Интеграл по r в (C.5) не мал, если $k_F\xi Z \leq 1$. Таким образом, для фиксированного δ дают вклад только s, меньшие чем s_0, где

$$\sin(s_0/4) = \frac{1}{4k_F\xi\sin\delta/2}. \tag{C.18}$$

Как легко видеть, для $\delta < \frac{1}{k_F\xi}$ важны не только малые s, и в (C.3) некорректно пренебрегать высшими порядками по s. Итак, обрезка вблизи $|x-z|=0$ равна $\delta^* = \frac{1}{k_F\xi}$.

Теперь рассмотрим окрестность $|x-z| = \pi$. Введем новое обозначение: $x - z = \pi - \delta$. В этом случае в (C.5) интеграл по s сходится, поэтому положим $s = 0$. Тогда аргумент функции Бесселя равен

$$Z = 4\left|\sin(p/4)\sin(\delta - p/2)\right|. \tag{C.19}$$

Разложим в ряд Тейлора для малых p и δ:

$$Z \simeq p\delta - \frac{p^2}{2} \tag{C.20}$$

Из условия $Z \leq 1/k_F\xi$ найдем максимальное значение p при фиксированном δ, когда интеграл по r еще не мал:

$$p_{max} \sim \frac{1}{\sqrt{k_F\xi} + \delta k_F\xi}. \tag{C.21}$$

Отсюда ясно, что для $\delta \gg \delta^* \sim \frac{1}{\sqrt{k_F\xi}}$ максимальное значение $p_{max} \sim \frac{1}{\delta k_F\xi} \ll \delta$, и можно пренебречь p^2 по сравнению с $p\delta$. Но для $\delta \ll \delta^*$ максимальное значение $p_{max} \gg \delta$, и высшими порядками по p пренебречь нельзя. Таким образом, обрезка вблизи $|x-z| = \pi$ равна $\delta^* = \frac{1}{\sqrt{k_F\xi}}$.

Интегралы в (6.17), (6.17) и (6.18) набираются вблизи $|x-z|=0$ и $|x-z|=\pi$. Сделаем в этих интегралах замену $z=x+t$. Считая волновые функции медленными огибающими и пользуясь тем, что

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos t}{1+\cos t}, \tag{C.22}$$

получаем

$$E_1(\alpha) \simeq \frac{2gA^4}{k_F^2}\ln k_F\xi \sum_{k>0}\int\frac{dx}{(2\pi)^2}|\psi_0(x)|^2|\psi_k(x)|^2 + \frac{gA^4}{k_F^2}\ln k_F\xi\sum_{k>0}\int\frac{dx}{(2\pi)^2}|\psi_0(x-\pi)|^2|\psi_k(x)|^2, \tag{C.23}$$

а также аналогичные выражения (6.20) и (6.21) для вкладов от других плоскостей.

Заметим, что окрестность $|x-z|=\pi$ дает вклад в 2 раза меньший, чем окрестность $|x-z|=0$. Это связано с тем, что вблизи этих точек обрезки оказались разными. Также вклады вблизи 0 и π оказываются разных знаков для плоскостей I и III. Это связано с наличием множителей $e^{i(x-z)}$ и $e^{i(x-y)}$ для плоскостей I и III соответственно.

C.3 Вклад нулевой гармоники

Для начала найдем нулевую гармонику:

$$\Delta^{(0)}(r) = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\Delta(\mathbf{r}). \tag{C.24}$$

Проинтегрировав по φ в уравнении 6.6, получаем

$$\Delta^{(0)}(r) = gA^2e^{-2K(r)}\sum_\kappa\int\frac{dx\,dy}{(2\pi)^2}\psi_\kappa(x)\psi_\kappa^*(y)e^{-iy}e^{i(\pi+x+y)/2}J_1\left(2k_Fr\sin[(y-x)/2]\right) \tag{C.25}$$

Прежде чем подставлять это в (6.11), можно сперва выполнить интегрирование по углам, ведь нулевая гармоника от φ не зависит. Получим

$$E^{(0)}(\alpha) = A^2\int dr\,re^{-2K(r)}\Delta^{(0)}(r)\int\frac{dz\,dt}{2\pi}\psi_0^*(z)\psi_0(t)e^{it}e^{-i(\pi+t+z)/2}J_1\left(2k_Fr\sin[(t-z)/2]\right) \tag{C.26}$$

Подставляя в (6.11), получаем

$$E^{(0)}(\alpha) = gA^4\sum_\kappa\int dr\,e^{-4K(r)}r\int\frac{dx\,dy\,dz\,dt}{(2\pi)^3}\psi_\kappa(x)\psi_\kappa^*(y)\psi_0^*(z)\psi_0(t)e^{i(x-y+t-z)/2}J_1\left(2k_Fr\sin\left[\frac{y-x}{2}\right]\right)J_1\left(2k_Fr\sin\left[\frac{t-z}{2}\right]\right). \tag{C.27}$$

Если $\sin\left[\frac{y-x}{2}\right]\gtrsim\frac{1}{k_F\xi}$ и $\sin\left[\frac{z-t}{2}\right]\gtrsim\frac{1}{k_F\xi}$, то можно положить $e^{-K(r)}$ равной единице и воспользоваться соотношением [9] $(k,q>0)$

$$\int_0^{+\infty}dr\,rJ_n(qr)J_n(kr) = \frac{1}{k}\delta(k-q). \tag{C.28}$$

Учитывая то, что $J_1(x)$ - нечетная функция, обобщим соотношение для произвольных k и q:

$$\int_0^{+\infty} dr\, r J_n(qr) J_n(kr) = \frac{\operatorname{sign} k \operatorname{sign} q}{|k|}\delta(|k|-|q|). \tag{C.29}$$

Сделаем в C.27 замену $y = x+u$, $z = t+v$. Тогда получим

$$E^{(0)}(\alpha) = gA^4\sum_\kappa \int dr\, e^{-4K(r)} r \int \frac{dx\, dt\, du\, dv}{(2\pi)^3}\psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x+u)\psi^*_0(t+v)\psi_0(t)e^{-i(u+v)}J_0\left(2k_F r\sin(u/2)\right)J_0\left(2k_F r\sin(v/2)\right). \tag{C.30}$$

Интегрирование по r даст

$$\int dr\, r J_0\left(2k_F r\sin(u/2)\right)J_0\left(2k_F r\sin(v/2)\right) = \frac{\operatorname{sign} u \operatorname{sign} v}{k_F^2|\sin(u)|}[\delta(|u|-|v|)+\delta(|u|+|v|-2\pi)] = \tag{C.31}$$

$$= \frac{2\operatorname{sign} u \operatorname{sign} v}{k_F^2|\sin(u)|}[\delta(u-v)+\delta(u+v)]. \tag{C.32}$$

Найдем вклад от первой дельта-функции (т.к. $u=v$, то $\operatorname{sign} u \operatorname{sign} v = 1$).

$$E_1^{(0)}(\alpha) = 2gA^4\sum_\kappa \int \frac{dx\, dt\, du}{(2\pi)^3}\psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x+u)\psi^*_0(t+u)\psi_0(t)\frac{e^{-2iu}}{k_F^2|\sin(u)|} \tag{C.33}$$

Проинтегрируем по u. Обрезки равны $1/k_F\xi$ и $\pi - 1/k_F\xi$ (из условия замены $e^{-K(r)}$ на 1). Тогда получаем, что интеграл набирается вблизи 0 и π. Получаем

$$E_1^{(0)}(\alpha) = \frac{4gA^4}{k_F^2}\ln k_F\xi \sum_\kappa \int \frac{dx\, dt}{(2\pi)^3}[\psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x)\psi^*_0(t)\psi_0(t) + \psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x+\pi)\psi^*_0(t+\pi)\psi_0(t)] \tag{C.34}$$

Теперь найдем вклад от второй дельта-функции (т.к. $u=-v$, то $\operatorname{sign} u \operatorname{sign} v = -1$):

$$E_2^{(0)}(\alpha) = -2gA^4\sum_\kappa \int \frac{dx\, dt\, du}{(2\pi)^3}\psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x+u)\psi^*_0(t-u)\psi_0(t)\frac{1}{k_F^2|\sin u|} \tag{C.35}$$

Аналогично предыдущему случаю,

$$E_2^{(0)}(\alpha) = -\frac{4gA^4}{k_F^2}\sum_\kappa \int \frac{dx\, dt}{(2\pi)^3}[\psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x)\psi^*_0(t)\psi_0(t) + \psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x+\pi)\psi^*_0(t+\pi)\psi_0(t)] \tag{C.36}$$

Получается, что $E_2^{(0)}(\alpha) = -E_1^{(0)}(\alpha)$.

Осталось рассмотреть случай малых аргументов бесселей, а именно вклад плоскости $x=y$, $t=z$.

Обозначим $y-x=u$, $t-z=v$. Рассмотрим случай $u,v \ll 1$. Получим, считая волновые функции медленными огибающими:

$$E_3^{(0)}(\alpha) = gA^4\sum_\kappa \int dr\, e^{-4K(r)} r \int \frac{dx\, dz}{(2\pi)^3}\psi_\kappa(x)\psi^*_\kappa(x)\psi^*_0(z)\psi_0(z)I(r), \tag{C.37}$$

где
$$I(r) = \int du\, dv e^{i(v-u)/2} J_1\left(2k_F r \sin(u/2)\right) J_1\left(2k_F r \sin(v/2)\right). \tag{C.38}$$

Возьмем интегралы по u и v, считая волновые функции медленными огибающими. Учитывая, что $J_1(x)$ - нечетная функция, то $\int_{-\pi}^{\pi} du\, \cos(u/2) J_1[2k_F r \sin(u/2)] = 0$. Далее воспользуемся тем, что

$$\int_0^{\pi} dx\, \sin(x/2) J_1(2k_F r \sin(x/2)) = \pi J_0(k_F r) J_1(k_F r). \tag{C.39}$$

Тогда находим
$$I(r) = 4\pi^2 [J_0(k_F r) J_1(k_F r)]^2. \tag{C.40}$$

Чтобы проинтегрировать по r, воспользуемся асимптотикой функций Бесселя при больших значениях аргумента. Она применима, если $r \geq 1/k_F$. Также, $e^{-K(r)}$ даст верхнюю обрезку на $r \sim \xi$. Тогда

$$\int dr\, e^{-4K(r)} r I(r) \simeq \int_{1/k_F}^{\xi} \frac{4r\, dr}{(k_F r)^2} \left(1 + \cos(2k_F r)\right) = \frac{4}{k_F^2} \ln(k_F \xi). \tag{C.41}$$

Интегрирование по x и z в (C.37) даст единицу из условия нормировки волновых функций. Итак, получаем, что

$$E_3^{(0)}(\alpha) = \frac{2gA^4}{\pi k_F^2} \ln(k_F \xi). \tag{C.42}$$

Т. к. $E_2^{(0)}(\alpha) = -E_1^{(0)}(\alpha)$, то оказывается, что $E^{(0)}(\alpha) = E_3^{(0)}(\alpha)$ и не зависит от α. Значит, вклад нулевой гармоники в сдвиг уровня энергии $\Delta E^{(0)} = 2\,\mathrm{Re}[E^{(0)}(\alpha) - E^{(0)}(0)]$ равен нулю.

Список литературы

[1] Britton L. T. Plourde «Vortex Microwave Response in High Kinetic Inductance Superconducting Thin Films», Workshop on Localization, Interactions and Superconductivity, Landau Institute, July 2, 2018.

[2] C.Caroli, P.G. de Gennes, J.Matricon «Bound fermion states on a vortex line in a type II superconductor», Physics Letters, Volume 9, Issue 4, p. 307-309 (1964)

[3] Скворцов М.А., диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. Тема: «Статистика уровней и локализация в двумерных системах с киральным электронным спектром». Черноголовка, 1998

[4] П.Де Жен «Сверхпроводимость металлов и сплавов», М., Наука, 1968

[5] Дж. Н. Ватсон «Теория бесселеых функций», М., Изд-во иностр. лит., 1949

[6] Градштейн И.С., Рыжик И.М. «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», М., Физматгиз, 1963

[7] В.В. Шмидт «Введение в физику сверхпроводников», М., МЦНМО, 2000

[8] Yuli V. Nazarov, Yaroslav M. Blanter «Quantum Transport: Introduction to Nanoscience», Cambridge University Press, 2009

[9] И.В, Колоколов, В.В. Лебедев «Избранные главы математической физики», 2020

[10] И.О. Кулик, И.К. Янсон «Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах», М., Наука, 1970

[11] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov «Resistance of layered superclean superconductors at low temperatures», Phys. Rev. B 57, 5457 (1998)

[12] A. A. Koulakov and A. I. Larkin «Vortex density of states and absorption in clean layered superconductors», Phys. Rev. B 60, 14597 (1999)

[13] M. A. Skvortsov, D. A. Ivanov, G. Blatter «Vortex viscosity in the moderately clean limit of layered superconductors», Phys. Rev. B 67, 014521 (2003)

[14] M. A. Skvortsov, V. E. Kravtsov, M. V. Feigel'man, «Level statistics inside the core of a superconductive vortex», JETP Letters, 68, 78 (1998)

[15] A. Altland, M. R. Zirnbauer «Novel symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures», Phys. Rev. B 55, 1142 (1997)