

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

СОСТОЯНИЕ Ю-ШИБЫ-РУСИНОВА В ГРЯЗНОМ СВЕРХПРОВОДНИКЕ

(бакалаврская работа)

Студент:

Бабкин Серафим Сергеевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Бурмистров Игорь Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2021

Оглавление

Аннотация	3
Введение	4
1 Формулировка задачи	7
2 Одномерный случай	9
2.1 Область энергий $E < \Delta$:	9
2.1.1 Случай $1 - \alpha \ll 1$:	12
2.1.2 Случай $\gamma \ll \eta \ll \frac{1}{\gamma^4}$	13
2.1.3 Случай $\eta \gg \frac{1}{\gamma^4}$	17
2.1.4 Число состояний с энергией $E < \Delta$	20
2.1.5 Энергетическая зона	21
2.1.6 Диаграмма положений энергетической зоны	23
2.2 Область энергий $E > \Delta$	24
2.2.1 Область $E - \Delta \ll \Delta$	26
2.2.2 Область $E \gg \Delta$	29
2.3 Плотность состояний	29
2.4 Анализ результатов	33
3 Двумерный случай	36
3.1 Область энергий $E < \Delta$	36
3.1.1 Случай $1 - \alpha \ll 1$:	40
3.1.2 Случай $t_{\xi_0} \ll \eta \ll \exp \left[\frac{2}{t} \right]$	41
3.1.3 Энергетическая зона	43
3.1.4 Диаграмма положений энергетической зоны	44
3.2 Область энергий $E > \Delta$	45
3.2.1 Область $E - \Delta \ll \Delta$	46
3.2.2 Область $E \gg \Delta$:	48
3.3 Плотность состояний	49

4	Анализ результатов	51
5	Заключение	56
	Список литературы	58

Аннотация

В этой работе изучено локализованное состояние, возникающее на уединенной магнитной примеси в грязном сверхпроводнике. Теоретическое исследование проводилось с помощью уравнения U заделя для квазиодномерной и двумерной геометрий. Показано, что наличие потенциального беспорядка приводит к тому, что локализованное состояние размывается по энергии в узкую зону. В работе были найдены границы этой энергетической зоны, а также вычислен профиль плотности состояний. Исследовано влияние магнитной примеси на состояния с энергией больше сверхпроводящей щели.

Введение

Теоретическое исследование [1–3] сверхпроводников s-типа, содержащих одну магнитную примесь, показало, что благодаря магнитной примеси появляется состояние Ю-Шибы-Русинова (YSR state) – локализованное состояние с энергией $E < \Delta$, где Δ – величина щели в энергетическом спектре сверхпроводника, схематичное изображение этого представлено на рисунке 1.1. Качественно объяснить этот эффект можно следующим образом: добавление магнитной примеси может способствовать разрушению куперовской пары (см. рис. 1.2), связано это с тем, что при рассеянии электрона на магнитной примеси спин электрона может перевернуться, в результате пара разрушится. То есть магнитная примесь способна частично подавлять сверхпроводящие свойства материала, в результате чего в энергетической щели возникает локализованное состояние.

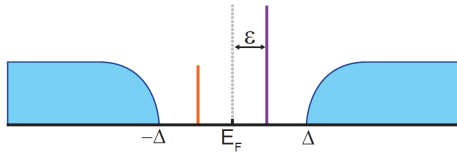


Рис. 1: (из [5])

На рисунке представлено схематичное изображение локализованного состояния, появляющегося в энергетической щели сверхпроводника из-за наличия магнитной примеси

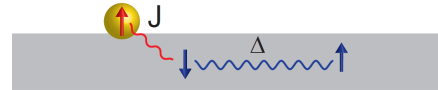


Рис. 2: (из [5])

На рисунке представлено качественное объяснение разрушения куперовской пары, возникающее из-за взаимодействия спина примеси со спином электрона

Пусть S – спин магнитной примеси, J – обменный интеграл взаимодействия спина магнитной примеси со спином электрона, ν – плотность состояний нормального металла на энергии Ферми на одну проекцию спина, тогда энергия состояния Ю-Шибы-Русинова выражается так (здесь

предполагается, что вклад от магнитной примеси в гамильтониан не содержит потенциальную часть):

$$E_{YSR} = \pm \Delta \cdot \frac{1 - [JS\pi\nu]^2}{1 + [JS\pi\nu]^2} \quad (1)$$

Кроме того, теоретически были исследованы сверхпроводники с магнитными примесями конечной концентрации. Так, в работе Шибы [2] теоретически исследовался случай, когда магнитные примеси случайно распределены в сверхпроводнике и ориентации спинов тоже случайны. В этом случае в щели сверхпроводника возникает целая энергетическая зона. С ростом концентрации магнитных примесей энергетическая зона становится шире и при достаточно больших значениях концентрации энергетическая зона заполняет всю щель.

Спустя некоторое время, появилась возможность экспериментально исследовать этот эффект в плотности состояний с помощью сканирующего туннельного микроскопа [4] и интерес к этой теме увеличился [5, 6]. Туннельный микроскоп позволил получить зависимость плотности состояний от энергии в любой точке поверхности исследуемого материала. С помощью туннельного микроскопа были проведены измерения локальной плотности состояний на поверхности объемных сверхпроводников, а также двумерных сверхпроводящих пленок [5]. В итоге теоретические результаты были подтверждены экспериментом.

Помимо сверхпроводников с магнитными примесями большой интерес также представляли сверхпроводники с электростатическими примесями [7–9]. Особое внимание представляют грязные сверхпроводники – сверхпроводники с электростатическими примесями, концентрация которых велика: пусть l – характерное расстояние между примесями, а ξ_0 – длина когерентности в сверхпроводнике, тогда грязному пределу соответствует следующее условие:

$$l \ll \xi_0 \quad (2)$$

Влияние электростатических примесей на плотность состояний $\rho(E)$ определяется малым параметром $\frac{1}{k_F l} \ll 1$ [10]. Так, например, это влияние проявляется в подавлении пика плотности состояний при энергии $E = \Delta$. Этот факт был обнаружен экспериментально [11], а затем исследован теоретически.

В последнее время интерес представляет теоретическое исследование грязных сверхпроводников с конечной концентраций магнитных примесей [12, 13] и с одной магнитной примесью [14]. Электростатические при-

меси размывают границы щели в спектре и границы энергетической зоны, появляющейся в щели из-за наличия магнитных примесей.

Глава 1

Формулировка задачи

В данной работе мы будем исследовать грязный сверхпроводник s-типа, в который помещена одна магнитная примесь. Для теоретического анализа задачи мы будем использовать уравнение Узаделя [15]. Также учтем в уравнении Узаделя, что в сверхпроводник помещена магнитная примесь [16].

Введем систему координат, в которой магнитная примесь находится в начале координат, тогда уравнение Узаделя с учетом магнитной примеси принимает такой вид:

$$\frac{D}{2} \nabla^2 \theta + iE \sin \theta + \Delta \cos \theta = \frac{1}{\pi \nu} \frac{\alpha \sin 2\theta}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos 2\theta} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.1)$$

где $\alpha = (\pi \nu J S)^2$, ν - плотность состояний на энергии Ферми на одну проекцию спина, J - обменный интеграл, S - спин магнитной примеси. Нас будет интересовать зависимость плотности состояний ρ от энергии E и координаты r . Мы знаем, как выражается плотность состояний через θ :

$$\rho(E, r) = 2\nu \operatorname{Re}(\cos \theta(E, r)) \quad (1.2)$$

Для дальнейших расчетов нам будет удобно ввести следующую параметризацию энергии E и θ .

$$\theta = \frac{\pi}{2} + i\psi \quad (1.3)$$

$$\sinh \psi_\infty(E) = \frac{E}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \quad (1.4)$$

$$\cosh \psi_\infty(E) = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \quad (1.5)$$

Физический смысл обозначения ψ_∞ заключается в том, что это является решением уравнения Узаделя в однородном случае. Также, можно

заметить, что при $r \rightarrow \infty$ решение уравнения 1.1 стремится к этому значению.

Введем характерную длину и сдвинем функцию так, чтобы на бесконечности она принимала нулевое значение:

$$\xi^2 = \frac{D}{2\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \quad (1.6)$$

$$\tilde{\psi} = \psi - \psi_\infty \quad (1.7)$$

тогда уравнение примет такой вид:

$$\xi^2 \Delta \tilde{\psi} - \sinh \tilde{\psi} = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi^2}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)} \delta(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

а плотность состояний будет выражаться так:

$$\rho(E) = 2\nu \cdot \text{Im}(\sinh(\psi)) \quad (1.9)$$

Глава 2

Одномерный случай

В последнее время значительно возрос интерес к изучению одномерных сверхпроводников, которые представляют собой нанопроволоки, связано это с тем, что появилась возможность создавать такие нанопроволки и исследовать их экспериментально [17]. Сверхпроводящие нанопроволки, в которые помещены магнитные примеси, также исследовались теоретически [18] и экспериментально [19]. В этих работах исследовался эффект связанный с тем, что если поместить содержащую магнитные примеси сверхпроводящую нанопроволоку в магнитное поле, то зависимость критического тока от магнитного поля может быть немонотонной, что означает усиление сверхпроводящих свойств нанопроволоки в некоторой области значений магнитного поля.

В данной главе мы будем исследовать плотность состояний одномерного сверхпроводника (сверхпроводящей нанопроволки) с одной магнитной примесью (в отсутствии магнитного поля).

Сначала мы изучим плотность состояний для энергий внутри щели, а потом отдельно рассмотрим область энергий, лежащих вне энергетической щели, и также исследуем плотность состояний.

2.1 Область энергий $E < \Delta$:

$$\xi^2 \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} - \sinh \tilde{\psi} = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi^2}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)} \delta(x) \quad (2.1)$$

Сначала рассмотрим однородную часть:

$$\xi^2 \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} - \sinh \tilde{\psi} = 0 \quad (2.2)$$

У этого уравнения имеется первый интеграл:

$$\frac{\xi^2}{2} \left(\frac{d}{dx} \tilde{\psi} \right)^2 - \cosh \tilde{\psi} = \gamma = \text{const} \quad (2.3)$$

Воспользуемся теперь тем, что функция $\tilde{\psi}$ на бесконечности принимает нулевое значение: $\tilde{\psi}(\infty) = 0$. Это означает, что для производной справедливо то же самое: $\frac{d}{dx} \tilde{\psi}(\infty) = 0$, значит мы можем найти константу γ :

$$\gamma = -1 \quad (2.4)$$

$$\frac{\xi^2}{2} \left(\frac{d}{dx} \tilde{\psi} \right)^2 - \cosh \tilde{\psi} = -1 \quad (2.5)$$

Теперь учтем правую часть. Из-за дельта-функции имеется скачок производной.

$$\xi^2 \left(\tilde{\psi}'(0+) - \tilde{\psi}'(0-) \right) = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi^2}{\nu D} \frac{\alpha \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right)} \quad (2.6)$$

Используя 2.5, из 2.6 мы получаем самосогласованное уравнение на $\tilde{\psi}(0)$:

$$\sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{\nu D} \frac{\alpha \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right)} \quad (2.7)$$

Введем обозначения:

$$\xi^2 = \frac{D}{2\sqrt{\Delta^2 - E^2}} = \sqrt{\frac{D}{2\Delta}} \cosh \psi_\infty = \xi_0 \cosh^{1/2} \psi_\infty \quad (2.8)$$

$$\xi_0 = \sqrt{\frac{D}{2\Delta}} \quad (2.9)$$

$$\gamma = \frac{1}{8\pi\nu\xi_0\Delta} \ll 1 \quad (2.10)$$

здесь мы воспользовались равенством 1.5. То, что $\gamma \ll 1$, можно объяснить следующим образом: перепишем выражение для $\gamma \ll 1$ в другом виде и подставим выражение 2.9 для ξ_0 :

$$\gamma \sim \frac{1}{\nu \xi_0 \Delta} = \frac{\xi_0}{\nu \xi_0^2 \Delta} \sim \frac{\xi_0}{\nu \frac{D}{\Delta} \Delta} = \frac{\xi_0}{\nu D} \quad (2.11)$$

С другой стороны, если воспользоваться формулой Друде для проводимости, то не сложно получить, что для кондактанса проволоки длины L справедливо следующее выражение:

$$G \sim \frac{D\nu}{L} \quad (2.12)$$

Таким образом, величина γ обратно пропорциональная кондактансу проволоки длины ξ_0 , а мы предполагаем, что кондактанс большой, поэтому $\gamma \ll 1$. Тогда уравнение 2.7 принимает такой вид:

$$\sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = \gamma \cdot \frac{2\alpha \sqrt{\cosh \psi_\infty} \cdot \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right)} \quad (2.13)$$

Найдем также зависимость ψ от координаты, решив уравнение 2.5:

$$\tanh \frac{\tilde{\psi}(x)}{4} = \tanh \frac{\tilde{\psi}(0)}{4} \exp \left[-\frac{|x|}{\xi} \right] \quad (2.14)$$

Наша цель – изучить плотность состояний для этого мы воспользуемся выражением 1.2, учтя замену 1.3, тогда выражение для плотности примет такой вид:

$$\rho(E, r) = 2\nu \cdot \text{Im}(\sinh[\psi]) \quad (2.15)$$

Таким образом, нам нужно понять, при каких значения энергии $\sinh[\psi]$ имеет нетривиальную мнимую часть, что будет соответствовать ненулевой плотности состояний, то есть энергетической зоне. Исходя из выражения 2.14, понятно, что мнимая часть может появиться только из-за $\tilde{\psi}(0)$, поэтому нам нужно исследовать самосогласованное уравнение 2.7. Мы будем приближенно решать это уравнение для различных областей параметров задачи.

2.1.1 Случай $1 - \alpha \ll 1$:

Предположим, что $|\tilde{\psi}(0)| \ll 1$ и $\psi_\infty \ll 1$ и будем решать уравнение в рамках этого предположения:

$$\begin{aligned} \sinh \frac{\psi(0) - \psi_\infty}{2} (1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh(2\psi(0))) = \\ = \gamma \cdot 2\alpha \sqrt{\cosh \psi_\infty} \cdot \sinh(2\psi(0)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

здесь нам будет удобно вернуться к переменной $\psi(0)$: $\psi(0) = \tilde{\psi}(0) + \psi_\infty$.

Также введем обозначение:

$$\eta = \frac{(1 - \alpha)^2}{4\alpha} \quad (2.17)$$

Раскладывая правую и левую части уравнения по формуле Тейлора до третьего порядка по $\psi(0)$ и ψ_∞ , мы получаем кубическое уравнение:

$$\psi^3(0) - \psi^2(0) \cdot \psi_\infty + \psi(0)(2\gamma - \eta) + \eta\psi_\infty = 0 \quad (2.18)$$

Мы хотим найти такие ψ_∞ , при которых имеются корни уравнения с нетривиальной мнимой части, это эквивалентно тому, что дискриминант этого кубического уравнения отрицателен. Дискриминант выражается так:

$$D = \eta\psi_\infty^4 + \psi_\infty^2(\gamma^2 - 10\gamma\eta - 2\eta^2) - (2\gamma - \eta)^3 \quad (2.19)$$

Тогда из условия $D < 0$ мы получаем условие на ψ_∞ , задающее энергетическую зону:

$$\begin{aligned} 0 < \sqrt{-\frac{\gamma^2}{2\eta} - \frac{\sqrt{\gamma}(\gamma + 4\eta)^{3/2}}{2\eta} + 5\gamma + \eta} < \psi_\infty < \\ < \sqrt{-\frac{\gamma^2}{2\eta} + \frac{\sqrt{\gamma}(\gamma + 4\eta)^{3/2}}{2\eta} + 5\gamma + \eta} \end{aligned} \quad (2.20)$$

При $\eta > 2\gamma$ левая граница зоны больше нуля, а при $\eta \leq 2\gamma$ левая граница зоны совпадает с 0.

Таким образом, границы зоны выражаются так:

$$0 \leq \eta < 2\gamma : \quad 0 < \psi_\infty < \sqrt{-\frac{\gamma^2}{2\eta} + \frac{\sqrt{\gamma}(\gamma + 4\eta)^{3/2}}{2\eta} + 5\gamma + \eta} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} 2\gamma \leq \eta : \quad & \sqrt{-\frac{\gamma^2}{2\eta} - \frac{\sqrt{\gamma}(\gamma + 4\eta)^{3/2}}{2\eta} + 5\gamma + \eta} < \psi_\infty < \\ & < \sqrt{-\frac{\gamma^2}{2\eta} + \frac{\sqrt{\gamma}(\gamma + 4\eta)^{3/2}}{2\eta} + 5\gamma + \eta} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Вспомним, что это решение применимо для $\psi_\infty \ll 1$, тогда, анализируя правый край зоны и учитывая то, что $\gamma \ll 1$, мы получаем условие применимости этого решения:

$$\eta \ll 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha \ll 1 \quad (2.23)$$

Кроме того, когда $\eta \ll 1$ также выполняется условие $|\tilde{\psi}(0)| \ll 1$. Таким образом полученный результат соответствует все условиям применимости сделанного нами приближения.

Для наглядности приведем выражение для плотности состояний в случае $\alpha = 1$:

$$\rho \approx \begin{cases} 2\nu \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{8\gamma - \left(\frac{E}{\Delta}\right)^2} & \frac{E}{\Delta} < 2\sqrt{2\gamma} \\ 0 & 2\sqrt{2\gamma} < \frac{E}{\Delta} < 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

2.1.2 Случай $\gamma \ll \eta \ll \frac{1}{\gamma^4}$

Теперь предположим, что $|\tilde{\psi}(0)| \ll 1$, однако малость ψ_∞ не будем предполагать.

Мы будем использовать теорию возмущения для уравнения:

$$\begin{aligned} & \sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right] \right) = \\ & = \gamma \cdot 2\alpha \sqrt{\cosh \psi_\infty} \cdot \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Учитывая условие $\gamma \ll 1$, в правой части пренебрегаем $\tilde{\psi}(0)$. Левую часть раскладываем до второго порядка по $\tilde{\psi}(0)$. Используя обозначение $\eta = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$, мы получаем такое уравнение:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^2(0) \sinh(2\psi_\infty) - \tilde{\psi}(0) \cdot (\eta - \sinh^2 \psi_\infty) + \\ + \gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} \sinh(2\psi_\infty) = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

А условие применимости сделанного приближения становится таким:

$$|\tilde{\psi}(0)| \ll \min(\psi_\infty, 1) \quad (2.27)$$

Корни квадратного уравнения 2.26 такие:

$$\tilde{\psi}(0) = \frac{(\eta - \sinh^2 \psi_\infty) \pm i \sqrt{\gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} (2 \sinh(2\psi_\infty))^2 - (\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}}{2 \sinh(2\psi_\infty)} \quad (2.28)$$

Если исследовать условие применимости приближения $\tilde{\psi}(0) \ll \min(\psi_\infty, 1)$, то получится следующее ограничение:

$$\gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} \ll \min(\psi_\infty^2, 1) \quad (2.29)$$

Мы ищем такие ψ_∞ , при которых $\tilde{\psi}(0)$ имеет нетривиальную мнимую часть, это эквивалентно тому, что дискриминант отрицательный.

$$D = (\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2 - 4 \cdot \gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} \sinh^2(2\psi_\infty) < 0 \quad (2.30)$$

Исследуем нули дискриминанта:

$$\frac{(\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}{4 \sqrt{\cosh \psi_\infty} \sinh^2(2\psi_\infty)} = \gamma \quad (2.31)$$

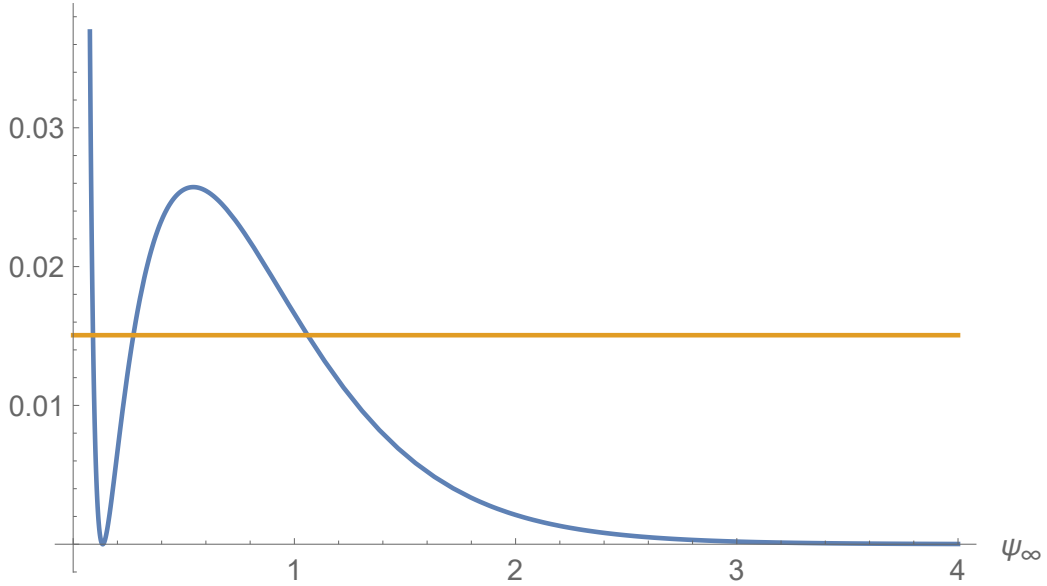


Рис. 2.1:

На графике синим цветом изображена левая часть равенства 2.31, оранжевым цветом—правая часть. Видно, что при достаточно малых γ имеется три корня.

Рассмотрим правый корень, не сложно понять, что он параметрически большой, поэтому при решении уравнения 2.31 уместно будет сделать следующее приближение:

$$\sinh \psi_\infty \sim \frac{\exp \psi_\infty}{2} \sim \cosh \psi_\infty \quad (2.32)$$

Уравнение легко решается и для корня с точностью до константы получаем:

$$\gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} \sim 1 \quad (2.33)$$

Видно, что это противоречит условию применимости 2.29 приближения, в котором мы сейчас работаем, это значит, что в данном приближении мы не можем исследовать область таких высоких энергий и для того, чтобы изучить эту область, нужно работать в другом приближении, мы рассмотрим этот случай ниже.

Исследуем теперь два оставшихся корня.

Понятно, что левая часть уравнения 2.31 неотрицательна и обращается в нуль в точке $\psi_\infty = \arcsin \sqrt{\eta}$. Разложим левую часть уравнения вблизи этой точки до второго порядка, тогда получим квадратное уравнение, корни которого такие:

$$\psi_\infty^{(\pm)} = \operatorname{arcsinh}(\sqrt{\eta}) \pm 2\sqrt{\gamma}(1+\eta)^{1/8}$$

Таким образом, мы нашли энергетическую зону в этой области параметров, левый край которой равен $\psi_\infty^{(-)}$, а правый – $\psi_\infty^{(+)}$.

Теперь определим область применимости найденного решения. Нами было проведено разложение левой части уравнения 2.31 до второго порядка, это справедливо, если следующий член в разложении много меньше квадратичного, то есть мы должны требовать выполнение следующего условия:

$$\frac{\frac{(5\eta+2)(\psi_\infty - \operatorname{arcsinh}(\sqrt{\eta}))^3}{8(\sqrt{\eta}(\eta+1)^{3/4})}}{\frac{(\psi_\infty - \operatorname{arcsinh}(\sqrt{\eta}))^2}{4\sqrt[4]{\eta+1}}} \ll 1 \quad (2.34)$$

Понятно, что самое большое значение эта величина достигает на границах интервала $(\psi_\infty^{(-)}, \psi_\infty^{(+)})$, поэтому подставим граничные значения. В результате появляется два случая и соответствующие им два условия.

Первый случай: $\eta \ll 1$. Тогда из 2.34 получаем условие:

$$\gamma \ll \eta \quad (2.35)$$

Второй случай: $\eta \gg 1$. Тогда из 2.34 получаем условие:

$$\eta \ll \frac{1}{\gamma^4} \quad (2.36)$$

Значит найденное нами решение применимо при выполнении условий $\gamma \ll \eta \ll \frac{1}{\gamma^4}$ (при $\eta \sim 1$ условие 2.34 также выполнено в силу малости параметра γ).

Таким образом, границы зоны выражаются так:

$$\begin{aligned} \gamma \ll \eta \ll \frac{1}{\gamma^4} : \operatorname{arcsinh}(\sqrt{\eta}) - 2\sqrt{\gamma}(1+\eta)^{1/8} < \psi_\infty < \operatorname{arcsinh}(\sqrt{\eta}) + \\ + 2\sqrt{\gamma}(1+\eta)^{1/8} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Также найдем плотность состояний, используя найденные корни уравнения 2.28 и выражения для плотности состояний 1.9:

$$\rho(E) = 2\nu \cdot \cosh(\psi_\infty) \left[\frac{\sqrt{\gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} (2 \sinh(2\psi_\infty))^2 - (\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}}{2 \sinh(2\psi_\infty)} \right] \quad (2.38)$$

где связь ψ_∞ с энергией E такая:

$$\cosh \psi_\infty(E) = \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - E^2}} \quad (2.39)$$

2.1.3 Случай $\eta \gg \frac{1}{\gamma^4}$

Теперь будем изучать энергии E близкие к Δ : $\psi_\infty \gg 1$, так как ранее можно было заметить, что при увеличении η энергетическая зона сдвигается вправо, поэтому можно предположить, что в случае $\eta \gg \frac{1}{\gamma^4}$ энергетическая зона будет вблизи Δ .

Исследуемое уравнение такое:

$$\begin{aligned} \sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \right) - \\ - 2\alpha\gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Предполагая также, что $\text{Re } \tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \gg 1$, получим приближенное уравнение:

$$\begin{aligned} \sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \left(1 + \alpha^2 - \alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \right) = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \gamma \cdot \exp \frac{\psi_\infty}{2} \cdot \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Рассмотрим такой случай:

$$\alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \ll 1 \quad (2.42)$$

Тогда уравнение упрощается следующим образом:

$$\sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha \gamma \cdot \exp \left(2\tilde{\psi}(0) + \frac{5}{2}\psi_\infty \right) \quad (2.43)$$

Введем обозначения:

$$A = \sqrt{2}\alpha\gamma \exp\left(\frac{5\psi_\infty}{2}\right) \quad (2.44)$$

$$x = A^{1/3} \exp \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \quad (2.45)$$

Уравнение становится таким:

$$x^2 - x^5 = A^{2/3} \quad (2.46)$$

Нас интересует область энергий, в которой имеется комплексное решение $\tilde{\psi}(0)$, из уравнения 2.46 понятно, что это имеет место, когда выполнено следующее условие:

$$\max_{x>0} (x^2 - x^5) < A^{2/3} \quad (2.47)$$

$$2x_0 - 5x_0^4 = 0 \quad (2.48)$$

$$x_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3} \quad (2.49)$$

$$x_0^2 - x_0^5 = A_0^{2/3} < A^{2/3} \quad (2.50)$$

$$x_0 = \left(\frac{2}{5}\right)^{1/3} \quad (2.51)$$

Отсюда мы получаем условие на энергию, то есть определяем границы энергетической зоны:

$$\psi_\infty > \psi_\infty^{(0)} = \frac{2}{5} \ln \left(\frac{1}{\alpha\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} \cdot \frac{2}{5} \right) \quad (2.52)$$

Найдем теперь $\tilde{\psi}(0)$ в двух областях: первая область - для ψ_∞ рядом с $\psi_\infty^{(0)}$ и для $\psi_\infty \gg \psi_\infty^{(0)}$.

В первом случае A рядом с A_0 , а значит x рядом с x_0 , поэтому ищем решение в виде $x = x_0 + \epsilon$, где $\epsilon \ll 1$

$$(x_0 + \epsilon)^2 - (x_0 + \epsilon)^5 = A^{2/3} \quad (2.53)$$

$$\epsilon = i \sqrt{\frac{A^{2/3} - A_0^{2/3}}{3}} \quad (2.54)$$

$$\exp \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = A^{-1/3} (x_0 + \epsilon) \quad (2.55)$$

Проанализировав сделанное предположение: $A - A_0 \ll 1$, мы можем определить область применимости найденного решения:

$$\frac{E - E_0}{\Delta - E_0} \ll 1 \quad (2.56)$$

где E_0 - нижняя граница энергетической зоны.

Тогда для плотности состояний получается такое выражение:

$$\begin{aligned} \frac{E - E_0}{\Delta - E_0} \ll 1 : \quad \rho(E) = 2\nu \left(\sqrt{2}\alpha\gamma \right)^{-2/3} \exp \left(-\frac{2\psi_\infty}{3} \right) \left(\frac{2}{5} \right)^{1/3} \cdot \\ \cdot \sqrt{\frac{(\sqrt{2}\alpha\gamma \exp(\frac{5\psi_\infty}{2}))^{2/3} - (\frac{3}{5}) \cdot (\frac{2}{5})^{2/3}}{3}} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Во втором случае $A \gg A_0$, поэтому $|x| \gg 1$:

$$-x^5 = A^{2/3} \quad (2.58)$$

$$\exp \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = A^{-1/5} (-1)^{1/5} \quad (2.59)$$

Когда мы начали рассматривать этот случай, мы предположили, что выполняется условие 2.42, найдем теперь при каких значения параметров выполнено это условие. Сначала подставим выражение 2.55 :

$$\alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \ll 1 \quad (2.60)$$

$$\exp \psi_\infty \gg \frac{1}{\alpha^{1/4}\gamma} \quad (2.61)$$

Поставив вместо ψ_∞ найденное нами значение $\psi_\infty^{(0)}$, получим условие применимости:

$$\alpha \ll \gamma^4 \quad (2.62)$$

Если подставить выражение 2.59, то получим то же условие применимости:

$$\alpha \ll \gamma^4 \quad (2.63)$$

Также исследуем плотность состояний при $\psi_\infty \rightarrow \infty$ ($E \rightarrow \Delta$):

$$\rho(E) = 2\nu \cdot \text{Im} \left(\sinh \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right) \quad (2.64)$$

Поставляя сюда решение 2.59, находим плотность (здесь также был проведен расчет области применимости этого решения, которая получается из анализа сделанного предположения: $A \gg 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta - E}{\Delta} \ll (\alpha\gamma)^{4/5} : \quad \rho(E) = 2\nu \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{2}\alpha\gamma \right)^{-2/5} \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{5} \right] \right] + \\ + 2\nu \cdot \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{2}\alpha\gamma \right)^{-2/5} \cdot \sin \left[\frac{2\pi}{5} \right] \right] \cdot \\ \cdot \left(\left(\sqrt{2}\alpha\gamma \right)^{4/5} - \frac{2}{5} \cdot \left(\sqrt{2}\alpha\gamma \right)^{-2/5} \cdot \sin \left[\frac{\pi}{5} \right] \exp(-\psi_\infty) \right) \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.1.4 Число состояний с энергией $E < \Delta$

Посчитаем число состояний для случая $\gamma \ll \eta \ll \frac{1}{\gamma^4}$ (так как в этом случае получилось найти явное аналитическое выражение для $\tilde{\psi}(0)$ на всем диапазоне энергий внутри зоны). Выражение для $\tilde{\psi}(0)$ такое:

$$\tilde{\psi}(0) = \frac{(\eta - \sinh^2 \psi_\infty) \pm i \sqrt{\gamma \sqrt{\cosh \psi_\infty} (2 \sinh(2\psi_\infty))^2 - (\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}}{\sinh(2\psi_\infty)} \quad (2.66)$$

Область энергий, в которой плотность состояний ненулевая (энергетическая зона) задается следующим неравенством:

$$\psi_\infty^{(-)} < \psi_\infty < \psi_\infty^{(+)} \quad \psi_\infty^{(\pm)} = \arcsin(\sqrt{\eta}) \pm 2\sqrt{\gamma} (1 + \eta)^{1/8} \quad (2.67)$$

Для простоты мы будем считать, что η мало, тогда $\psi_{\infty}^{(\pm)} \approx \sqrt{\eta} \pm \pm 2\sqrt{\gamma} (1 + \eta)^{1/8}$.

Количество состояний определяется следующим образом:

$$N = \int \rho(E, x) dE dx \quad (2.68)$$

Мы знаем зависимость $\psi(x)$:

$$\tanh \frac{\tilde{\psi}(x)}{4} = \tanh \frac{\tilde{\psi}(0)}{4} \exp \left[-\frac{|x|}{\xi} \right] \quad (2.69)$$

А так как в этой области параметров выполнено условие 2.27: $\psi(0) \ll \ll \min \{1, \psi_{\infty}\}$, то можно использовать приближенное решение:

$$\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(0) \exp \left[-\frac{|x|}{\xi} \right] \quad (2.70)$$

Приближенное выражение для плотности состояний получается такое:

$$\begin{aligned} \rho(\psi_{\infty}, x) &\approx 2\nu \cdot \text{Im} \left(\tilde{\psi}(x) \cosh(\psi_{\infty}) \right) = \\ &= 2\nu \text{Im} \frac{(\eta - \sinh^2 \psi_{\infty}) + i \sqrt{\gamma \sqrt{\cosh \psi_{\infty}} (2 \sinh(2\psi_{\infty}))^2 - (\eta - \sinh^2 \psi_{\infty})^2}}{2 \sinh(2\psi_{\infty})} \cdot \\ &\quad \cdot \exp \left[-\frac{|x|}{\xi} \right] \cosh(\psi_{\infty}) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Тогда, интегрируя по x и положительным E мы находим число состояний:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_0^{\Delta} dE \rho(\psi_{\infty}, x) = \frac{1}{2} \quad (2.72)$$

2.1.5 Энергетическая зона

Представим теперь на графике полученные результаты для энергетической зоны.

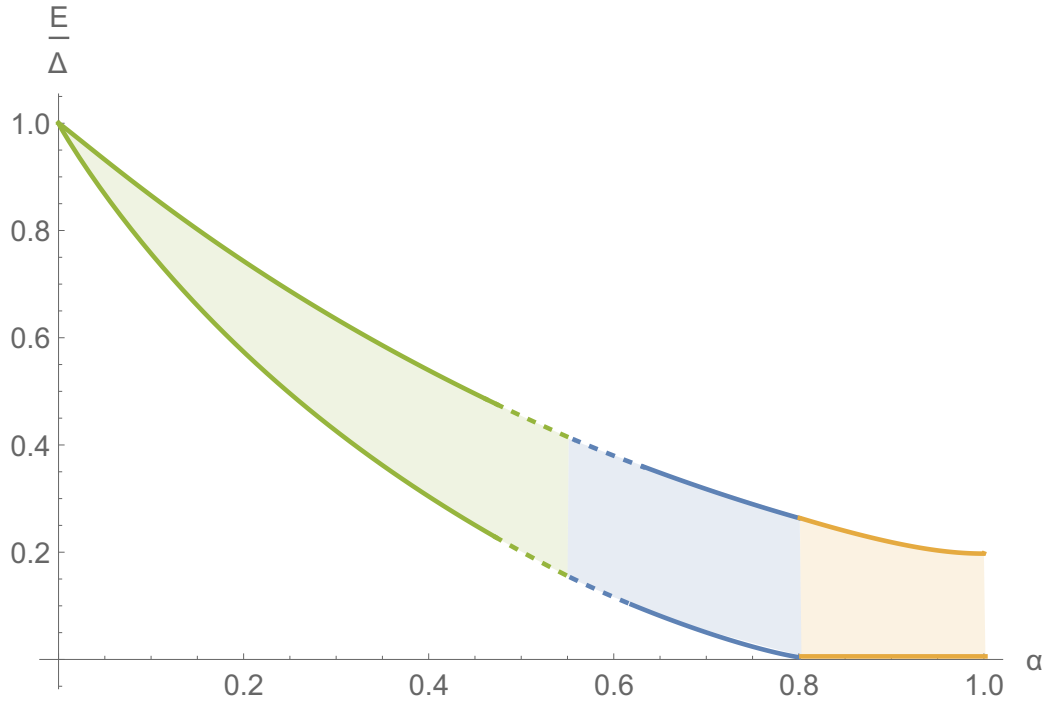


Рис. 2.2:

На рисунке линии изображают границы энергетической зоны в зависимости от параметра α . Сплошной линией изображен результат теоретического расчета (см. ф-лы 2.37, 2.21, 2.22), пунктирной линией изображена сшивка решений (линии проведены вручную) в областях, в которых теоретический результат перестает работать. Оранжевым цветом изображены решения для области $0 \leq \eta < 2\gamma \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2}\sqrt{\gamma} < \alpha \leq 1$, синим цветом изображена область $2\gamma < \eta \ll 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{\gamma} < 1 - \alpha \ll 1$, зеленым цветом изображена область $\gamma \ll \eta \ll \frac{1}{\gamma^4} \Leftrightarrow \gamma^4 \ll \alpha \ll 1$. В данном случае для теоретических кривых использовалось следующее значение параметра γ : $\gamma = 0.005$

На данном графике не видно область с очень малыми α , поэтому представим ее на отдельном графике.

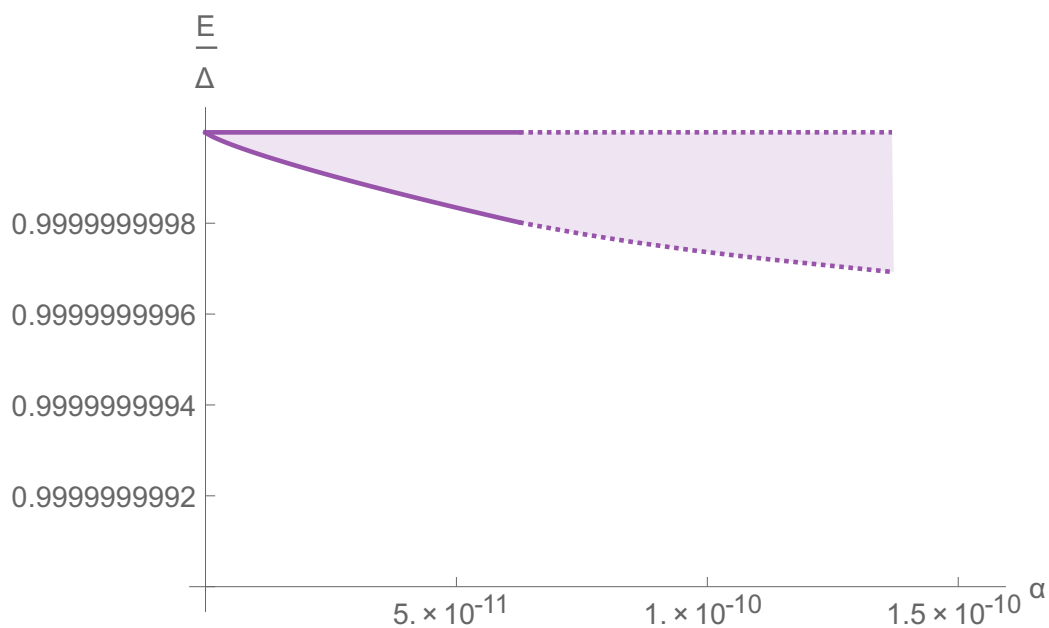


Рис. 2.3:

На рисунке линии изображают границы энергетической зоны в зависимости от параметра α . Сплошной линией изображен результат теоретического расчета (см. ф-лу 2.52), пунктирной линией изображена сшивка решений (линии проведены вручную) в областях, в которых теоретический результат перестает работать. В данном случае для теоретических кривых использовалось следующее значение параметра γ : $\gamma = 0.005$. Видно, что для очень малых α зона прилегает к верхней границе энергетической щели.

2.1.6 Диаграмма положений энергетической зоны

Представим на графике с осями координат α и γ различные реализации положения энергетической зоны в щели сверхпроводника (см. формулы 2.37, 2.21, 2.22 и 2.52).

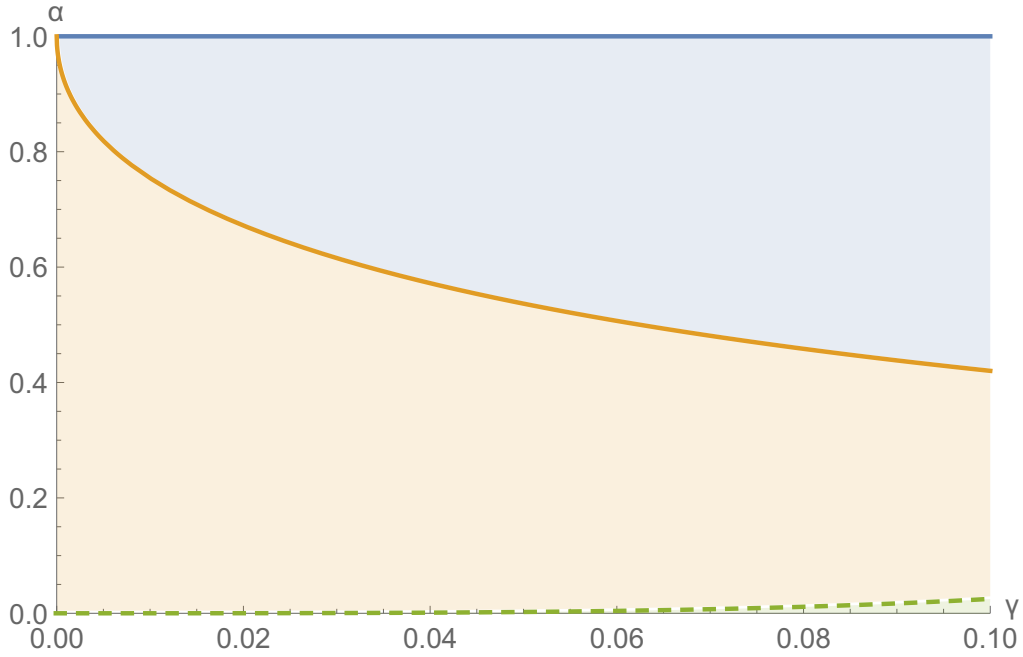


Рис. 2.4:

На графике синим цветом изображена область параметров α и γ , в которой энергетическая зона прилегает к энергии $E = 0$ (см. ф-лу 2.21). Оранжевым цветом изображена область параметров α и γ , в которой энергетическая зона не касается ни энергии $E = 0$, ни энергии $E = \Delta$ (см. формулы 2.22, 2.37). Зеленым цветом изображена область параметров α и γ , в которой энергетическая зона прилегает к энергии $E = \Delta$ (см. ф-лу 2.52).

2.2 Область энергий $E > \Delta$

Вычисления получаются аналогичные случаю $E < \Delta$ со следующими изменениями:

$$\cosh \psi_{\infty} = i \frac{\Delta}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \quad (2.73)$$

$$\sinh \psi_{\infty} = i \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \quad (2.74)$$

$$(2.75)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{D}{2\sqrt{\Delta^2 - E^2}}} = \tilde{\xi} \cdot e^{i\pi/4} \quad (2.76)$$

$$\tilde{\xi} = \sqrt{\frac{D}{2\sqrt{E^2 - \Delta^2}}} \quad (2.77)$$

Уравнение точно такое же, как в случае $E < \Delta$, только величины ξ и ψ_∞ теперь комплексные

$$\xi^2 \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\psi} - \sinh \tilde{\psi} = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi^2}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)} \delta(x) \quad (2.78)$$

Решение:

$$\tanh \frac{\tilde{\psi}(x)}{4} = \tanh \frac{\tilde{\psi}(0)}{4} \exp \left[-\frac{|x|}{\xi} \right] \quad (2.79)$$

А величину $\tilde{\psi}(0)$ мы находим из уравнения:

$$\sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi}{\nu D} \frac{\alpha \sinh \left(2(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty) \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left(2(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty) \right)} \quad (2.80)$$

Введем новое обозначение:

$$\sinh \tilde{\psi}_\infty = \frac{\Delta}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \quad (2.81)$$

$$\cosh \tilde{\psi}_\infty = \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \quad (2.82)$$

Тогда уравнение 2.80 принимает такой вид:

$$\sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = -2e^{i\pi/4} \gamma \sqrt{\sinh \tilde{\psi}_\infty} \frac{\alpha \sinh \left(2(\tilde{\psi}_\infty + \tilde{\psi}(0)) \right)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cosh \left(2(\tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_\infty) \right)} \quad (2.83)$$

Плотность состояний в новых обозначения примет такой вид:

$$\rho(E) = 2\nu \cdot \text{Im} \left(\sinh \left(\tilde{\psi} + \psi_\infty \right) \right) = 2\nu \cdot \text{Re} \left(\cosh \left(\tilde{\psi} + \tilde{\psi}_\infty \right) \right) \quad (2.84)$$

Проанализируем две области энергий.

2.2.1 Область $E - \Delta \ll \Delta$

Мы будем предполагать следующие условия:

$$\tilde{\psi}_{\infty} + \operatorname{Re} \tilde{\psi}(0) \gg 1 \quad (2.85)$$

$$\alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}_{\infty} + \operatorname{Re} \tilde{\psi}(0) \right) \right) \ll 1 \quad (2.86)$$

Тогда, сделав приближения в уравнении 2.83, мы получим такое уравнение:

$$\begin{aligned} & \exp \left(\frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \right) - \exp \left(-\frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \right) = \\ & = -\sqrt{2} e^{i\pi/4} \gamma \cdot \alpha \left(\exp \left(\frac{5}{2} \tilde{\psi}_{\infty} \right) \cdot \exp \left(2 \tilde{\psi}(0) \right) \right) \end{aligned} \quad (2.87)$$

Найдем приближенное решение этого уравнения :

$$\exp \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = A^{-1/5} e^{-i\pi/20} \quad (2.88)$$

здесь было введено следующее обозначение:

$$A = \sqrt{2} \gamma \cdot \alpha \cdot \exp \left(\frac{5}{2} \tilde{\psi}_{\infty} \right) \quad (2.89)$$

и предполагалось, что $A \gg 1$.

Подставляя найденное решение в 2.85, мы получаем следующее условие:

$$\frac{1}{\alpha \gamma} \gg 1 \quad (2.90)$$

которое выполняется, так как $\gamma \ll 1$ и $0 \leq \alpha \leq 1$.

Если же подставить это решение в условие 2.86, то получим дополнительное условие применимости найденного решения:

$$\alpha \ll \gamma^4 \quad (2.91)$$

Теперь посчитаем плотность состояний в ведущем порядке по $\frac{E-\Delta}{\Delta}$, воспользовавшись выражением 2.84 (также учтем ограничение $A \gg 1$, которое даст нам условие применимости)

$$\begin{aligned} \frac{E-\Delta}{\Delta} \ll (\alpha\gamma)^{4/5} : \quad \rho(E, 0) = \nu \cdot \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{2}\gamma \cdot \alpha \right)^{-2/5} \cos \left[\frac{\pi}{10} \right] \right) + \\ + \nu \cdot \frac{1}{2} \left(\left(\sqrt{2}\gamma \cdot \alpha \right)^{-2/5} \cos \left[\frac{\pi}{10} \right] \right) \cdot \\ \cdot \left(\left(\sqrt{2}\gamma \cdot \alpha \right)^{4/5} - \frac{2}{5} \cdot \left(\sqrt{2}\gamma \cdot \alpha \right)^{-2/5} \cdot \frac{\cos \left(\frac{3\pi}{10} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{10} \right)} \cdot \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{2\Delta} \right) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Сравнивая выражение 2.65 для $\rho(\Delta - 0, 0)$ и выражение 2.92 для $\rho(\Delta + 0, 0)$, получаем, что плотность состояний в точке $E = \Delta$ непрерывна:

$$\rho(\Delta + 0, 0) = \rho(\Delta - 0, 0) \quad (2.93)$$

Теперь предположим выполнение других условий:

$$\tilde{\psi}_\infty + \operatorname{Re} \tilde{\psi}(0) \gg 1 \quad (2.94)$$

$$\alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}_\infty + \operatorname{Re} \tilde{\psi}(0) \right) \right) \gg 1 \quad (2.95)$$

Тогда, сделав приближения в уравнении 2.83, мы получим такое уравнение:

$$\left(\exp \left(\frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \right) - \exp \left(-\frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \right) \right) = -\sqrt{2} e^{i\pi/4} \gamma \cdot \exp \left(\frac{1}{2} \tilde{\psi}_\infty \right) \quad (2.96)$$

Введем обозначение:

$$C = \sqrt{2} \gamma \cdot \exp \left(\frac{1}{2} \tilde{\psi}_\infty \right) \quad (2.97)$$

Тогда решение уравнения 2.96 будет выражаться так:

$$\exp \left(\frac{\tilde{\psi}(0)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 + iC^2} - \exp \left(i\frac{\pi}{4} \right) C \right) \quad (2.98)$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай:

$$C \gg 1 \Leftrightarrow \gamma \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\psi}_\infty\right) \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tilde{\psi}_\infty \gg \ln \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \tilde{\psi}_\infty \gg 2 \ln \frac{1}{\gamma} \quad (2.99)$$

Приближенное решение получается такое:

$$\exp\left(\frac{\tilde{\psi}(0)}{2}\right) = \frac{1}{C} \exp\left[-\frac{\pi}{4}i\right] + \exp\left[\frac{\pi}{4}i\right] \cdot \frac{2}{C^3} \quad (2.100)$$

А ограничения 2.94 и 2.95 после подстановки в них решения дают следующее условие:

$$\alpha \gg \gamma^4 \quad (2.101)$$

Плотность в этом случае такая:

$$\frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{\Delta} \ll 2\gamma^2 : \quad \rho(E) = \nu \cdot \frac{1}{\gamma^4} \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{2\Delta} \quad (2.102)$$

Второй случай:

$$C \ll 1 \Leftrightarrow \gamma \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\tilde{\psi}_\infty\right) \ll 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tilde{\psi}_\infty \ll \ln \frac{1}{\gamma} \Leftrightarrow \tilde{\psi}_\infty \ll \ln \frac{1}{\gamma^2} \quad (2.103)$$

Решение получается такое:

$$\exp\left(\frac{\tilde{\psi}(0)}{2}\right) = 1 + \frac{i}{8}C^2 - \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)C \quad (2.104)$$

А ограничения 2.94 и 2.95 после подстановки в них решения дают следующие условия:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\infty &\gg \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\alpha} \\ \alpha &\gg \gamma^4 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Плотность состояний же выражается так:

$$2\gamma^2 \ll \frac{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}{\Delta} \ll 2\sqrt{\alpha} : \quad \rho(E) \approx \nu \cdot \left(\frac{2\Delta}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} - \gamma \left(\frac{2\Delta}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \right)^{3/2} \right) \quad (2.106)$$

Максимум плотности состояний оценим, сшивая асимптотики в точке $E - \Delta \sim \Delta\gamma^4$:

$$\rho_{\max}(E) \sim \frac{\nu}{\gamma^2} \quad (2.107)$$

2.2.2 Область $E \gg \Delta$

$$\sinh \frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = -2e^{i\pi/4}\gamma\sqrt{\sinh \tilde{\psi}_\infty} \frac{\alpha \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}_\infty + \tilde{\psi}(0) \right) \right)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha \cosh \left(2 \left(\tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_\infty \right) \right)} \quad (2.108)$$

В этом случае $\tilde{\psi}_\infty \ll 1$, мы также будем предполагать, что $\tilde{\psi}(0) \ll \tilde{\psi}_\infty$, тогда уравнение упростится:

$$\frac{\tilde{\psi}(0)}{2} = -2e^{i\pi/4}\gamma\sqrt{\tilde{\psi}_\infty} \frac{\alpha \left(2\tilde{\psi}_\infty \right)}{1 + \alpha^2 + 2\alpha} \quad (2.109)$$

$$\tilde{\psi}(0) = -\frac{8e^{i\pi/4}\gamma \cdot \alpha \tilde{\psi}_\infty^{3/2}}{(1 + \alpha)^2} \ll \tilde{\psi}_\infty \quad (2.110)$$

Посчитаем теперь плотность состояний, используя формулу 2.84:

$$\rho(E) = 2\nu \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta}{E} \right)^2 - \frac{4\sqrt{2}\gamma \cdot \alpha}{(1 + \alpha)^2} \cdot \left(\frac{\Delta}{E} \right)^{5/2} \right) \quad (2.111)$$

2.3 Плотность состояний

Для наглядности приведем теперь графические изображения полученных результатов для плотности состояний в одномерном случае.

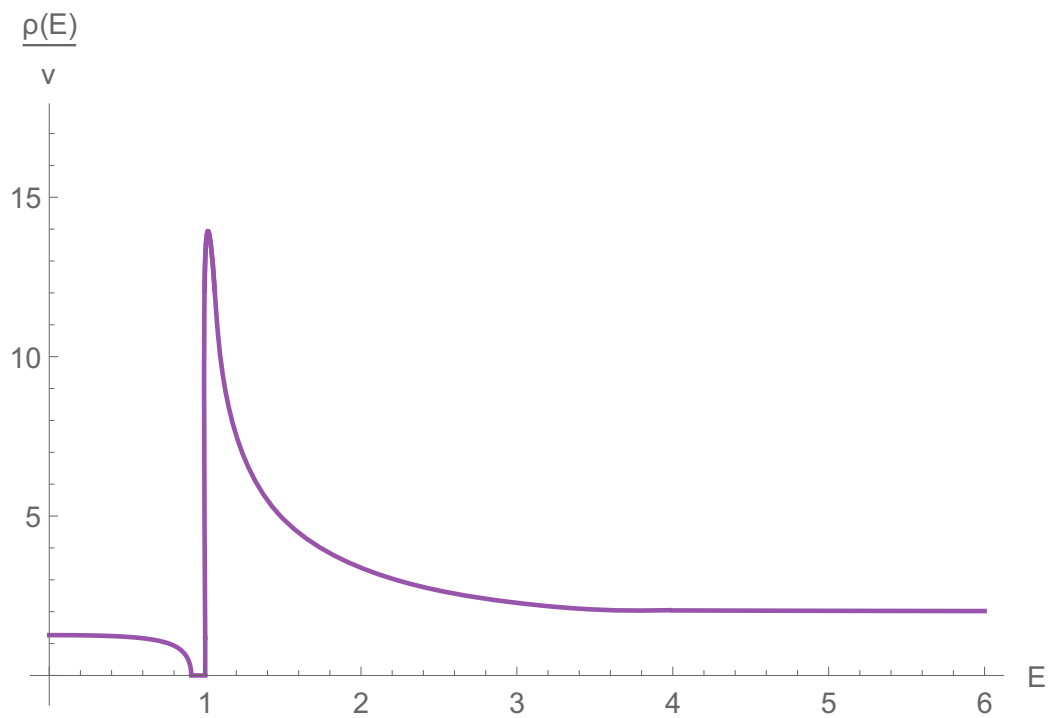


Рис. 2.5:

На рисунке представлена качественная зависимость плотности состояний от энергии в случае $\eta < 2\gamma$ (качественная зависимость основана на теоретических результатах: ф-лы 2.18, 2.102, 2.111, 2.107).

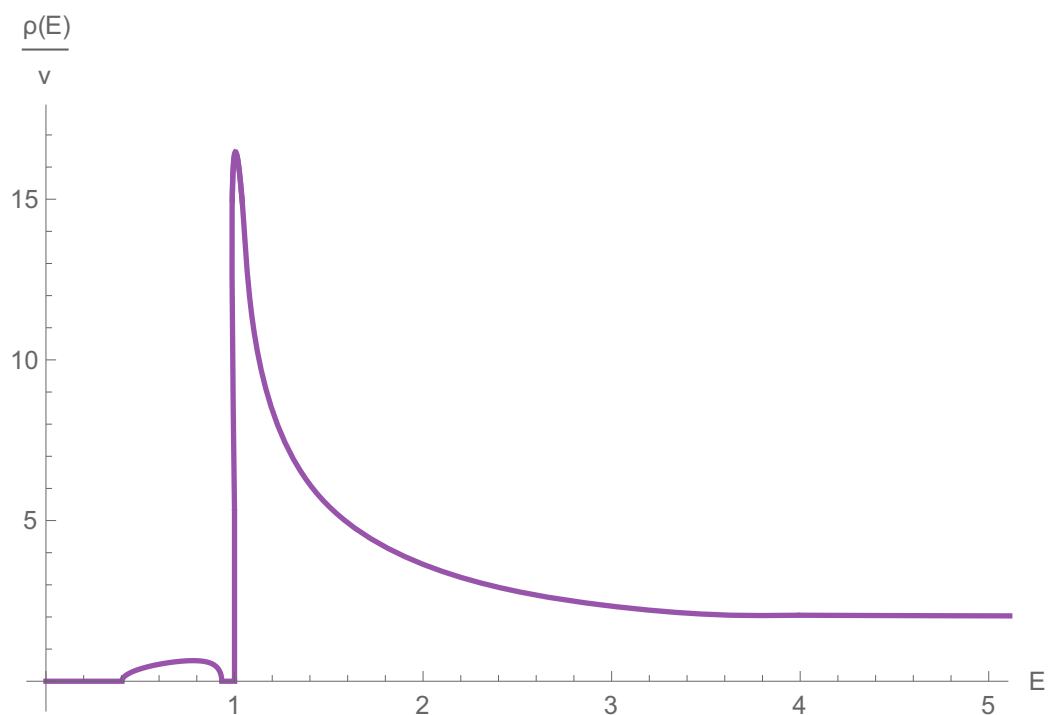


Рис. 2.6:

На рисунке представлена качественная зависимость плотности состояний от энергии в случае $2\gamma < \eta \ll \frac{1}{\gamma^4}$ (качественная зависимость основана на теоретических результатах: ф-лы 2.18, 2.102, 2.111, 2.107).

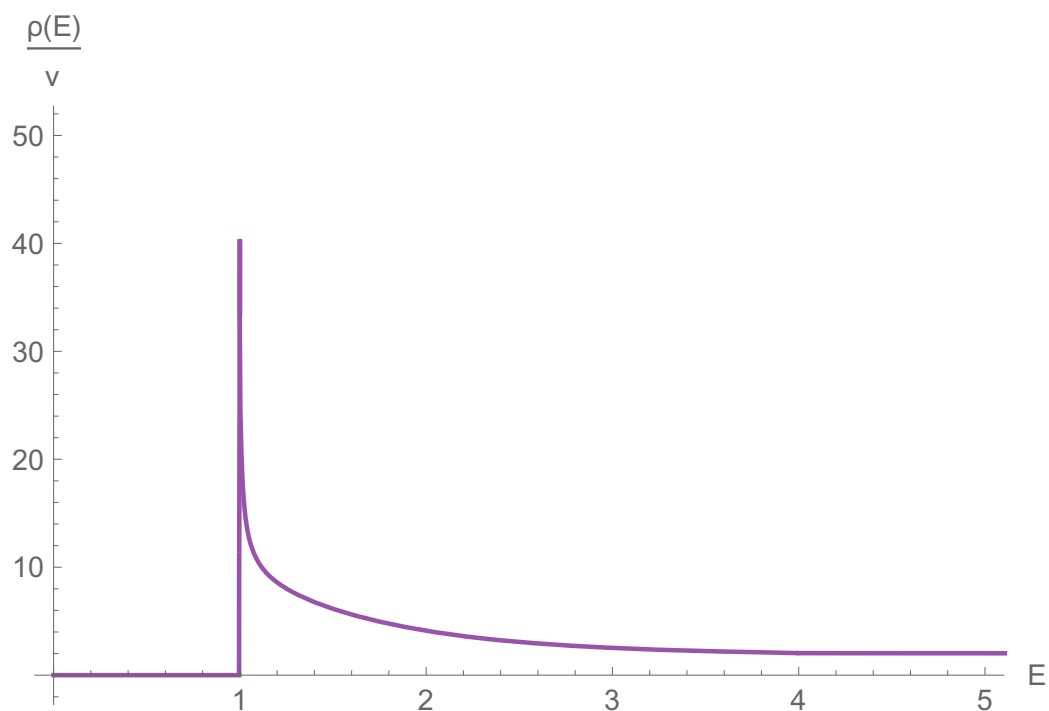


Рис. 2.7:

На рисунке представлена качественная зависимость плотности состояний от энергии в случае $\eta \gg \frac{1}{\gamma^4}$ (качественная зависимость основана на теоретических результатах: Ф-лы 2.57, 2.65, 2.92, 2.111).

Для большей наглядности представим отдельно зависимость плотности состояний от энергии вблизи точки $E = \Delta$ в последнем случае $\left(\eta \gg \frac{1}{\gamma^4}\right)$:

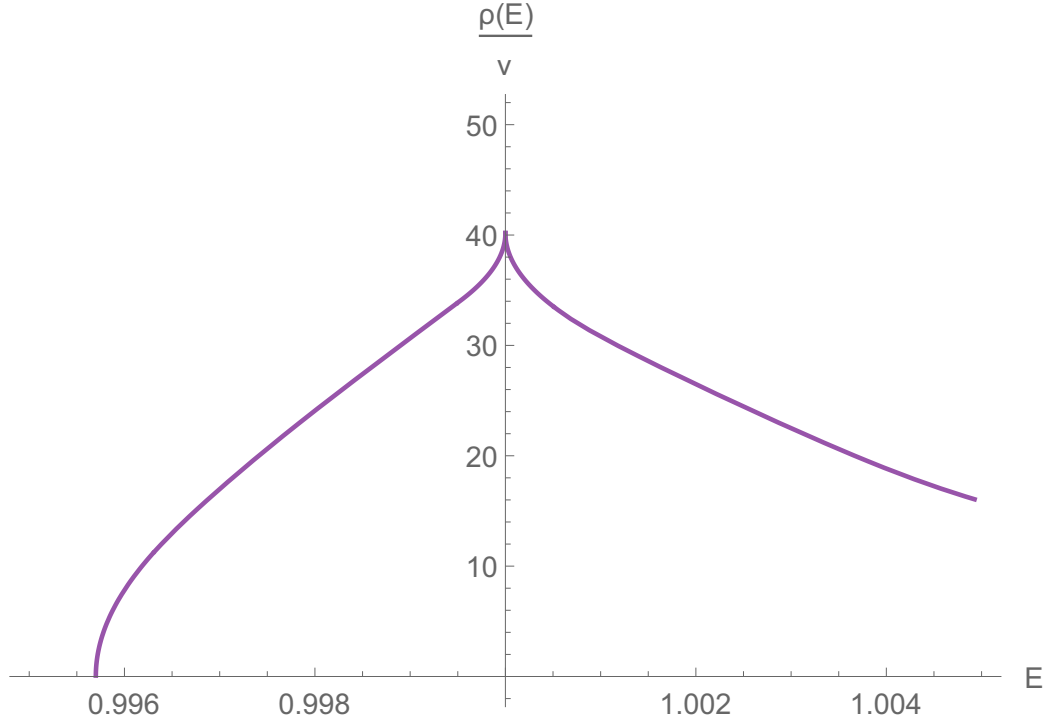


Рис. 2.8:

На рисунке представлена качественная зависимость плотности состояний от энергии в случае $\eta \gg \frac{1}{\gamma^4}$ вблизи точки $E = \Delta$ (качественная зависимость основана на теоретических результатах: ф-лы 2.57, 2.65, 2.92).

2.4 Анализ результатов

В введении было упомянуто, что в чистом случае при наличии одной магнитной примеси появляется связанное состояние (YSR-состояние с энергией E_{YSR} (см. ф-лу 1)), а не энергетическая зона; зона же появляется тогда, когда в сверхпроводник помещено много магнитных примесей с конечной концентрацией.

Здесь мы изучаем грязный случай, причем энергетическая зона появляется уже при наличии одной магнитной примеси, качественно объяснить этот факт можно следующим образом: в грязном пределе имеется беспорядок, в разных реализациях беспорядка энергии YSR-состояния разные, решая уравнение Узаделя, мы совершаем усреднение и в итоге получаем размытие локализованного состояния. Причем можно заметить, что функция распределения энергии YSR-состояния $\mathcal{P}(E_{YSR})$ связана с плотностью состояний $\rho(E)$ следующим образом: для каждой

реализации беспорядка плотность состояний такая: $\delta(E - E_{YSR})$, тогда результирующая плотность состояний, получающаяся после усреднения, имеет такой вид:

$$\rho(E) = \int dE_{YSR} \delta(E - E_{YSR}) \mathcal{P}(E_{YSR}) = \mathcal{P}(E) \quad (2.112)$$

Кроме того, стоит отметить, что в одномерном случае важную роль могут играть эффекты, связанные с локализацией. Мы не учитывали эти эффекты, поэтому выясним, в каком случае так делать корректно. Пренебрегать эффектами, связанными с локализацией, можно, когда выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} \xi &\lesssim \xi_{loc} \\ \xi_{loc} &= N \cdot l = \frac{S}{\lambda_F^2} \cdot l \end{aligned} \quad (2.113)$$

где l - длина свободного пробега, а N число каналов в квазиодномерном многоканальном проводе, которое выражается через площадь сечения S квазиодномерного провода и длину волны Ферми λ_F .

Вспоминая связь ξ с энергией (1.6), мы получаем ограничение на энергию:

$$\left| E - \Delta \right| \gtrsim \Delta \left(\frac{\xi_0}{l \cdot \frac{S}{\lambda_F^2}} \right)^4 = \Delta \left(\frac{\xi_0}{l \cdot N} \right)^4 \quad (2.114)$$

где $\xi_0 = \sqrt{\frac{D}{2\Delta}}$ - длина когерентности в грязном случае (в грязном сверхпроводнике справедливо следующее условие: $l \ll \xi_0$). Для наглядности представим полученный результат на графике для $E < \Delta$:

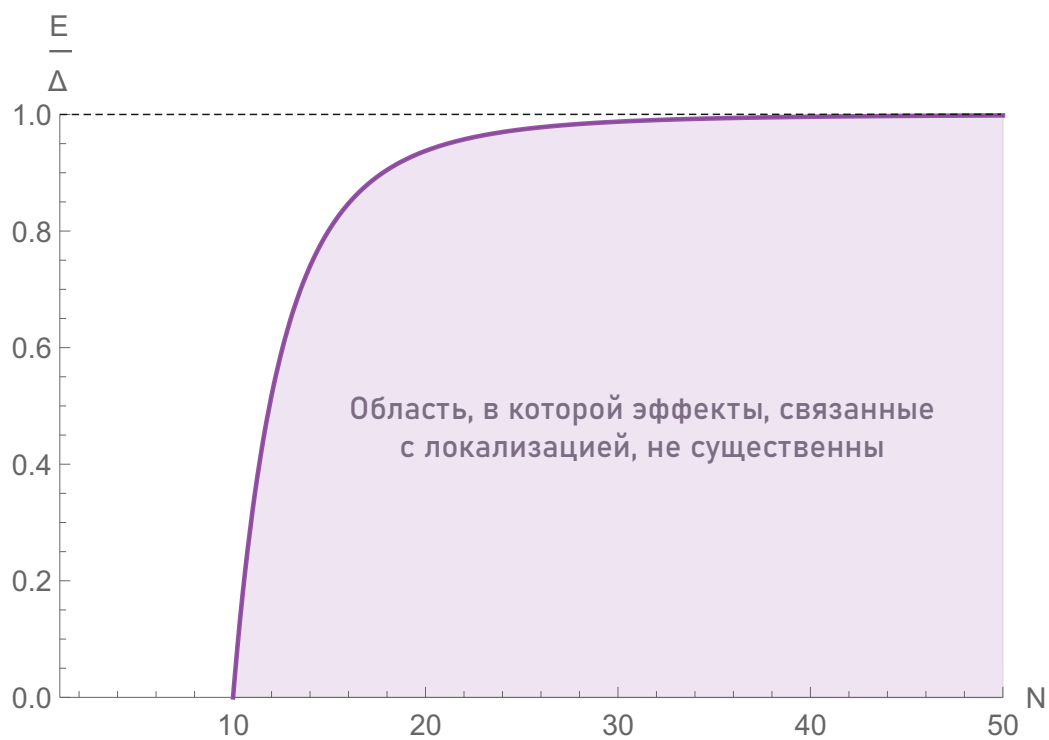


Рис. 2.9:

На графике закрашена область значений энергии, в которой корректно пренебрегать эффектами, связанными с локализацией, а значит применимы результаты, найденные нами ранее (N - число каналов, $\frac{l}{\xi_0} = 0.1$).

Глава 3

Двумерный случай

Недавно появилась возможность создавать и исследовать двумерные материалы, кроме того, был создан туннельный микроскоп (STM), который позволяет измерять зависимость плотности состояний от энергии в каждой точке двумерного образца. Таким образом, экспериментальное исследование плотности состояний двумерного сверхпроводника стало возможным. Так, например, в статье [4] проводится экспериментальное исследование YSR-состояний в чистом сверхпроводнике с магнитной примесью. Кроме того, недавно теоретически исследовались двумерные сверхпроводники, содержащие случайно распределенные в пространстве электростатические примеси и одну магнитную примесь [14], а также грязные двумерные сверхпроводники со случайно распределенными в пространстве магнитными примесями [12, 13].

В этой главе мы будем исследовать плотность состояний грязного двумерного сверхпроводника с одной магнитной примесью. Сначала мы изучим плотность состояний для энергий внутри щели, а потом отдельно рассмотрим область энергий, лежащих вне энергетической щели, и также исследуем плотность состояний.

3.1 Область энергий $E < \Delta$

Уравнение Узаделя в двумерном случае будет таким:

$$\frac{D}{2} \nabla^2 \psi + E \cosh \psi - \Delta \cdot \sinh \psi = -\frac{1}{\pi \nu} \frac{\alpha \sinh 2\psi}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2\psi} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

Используя те же обозначения, что и в одномерном случае и учтем цилиндрическую симметрию, тогда уравнение примет такой вид:

$$\xi^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) - \sinh(\tilde{\psi}) = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi^2}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

Сначала будем искать решение, предполагая его малым: $\tilde{\psi} \ll 1$:

$$\xi^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) - \tilde{\psi} = -\frac{2}{\pi} \frac{\xi^2}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.3)$$

Дельта-функцию аппроксимируем ступенькой:

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} U_0 & r < a/\xi \\ 0 & r > a/\xi \end{cases} \quad (3.4)$$

$$U_0 \pi \left(\frac{a}{\xi} \right)^2 = 1, \quad a \rightarrow 0 \quad (3.5)$$

где a – характерный размер дельта-функции, $\frac{a}{\xi} \ll 1$.

В области $r > a$ решение такое:

$$\tilde{\psi}_R(r) = C_R K_0 \left(\frac{r}{\xi} \right) \quad (3.6)$$

здесь мы учли то, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\psi}(r) = 0 \quad (3.7)$$

В области $r < a$ решение такое:

$$\tilde{\psi}_L(r) = C_L J_0 \left(\frac{r}{\xi} \sqrt{\kappa U_0 - 1} \right) \approx C_L \left(1 - \frac{\left(\frac{r}{\xi} \right)^2}{4} (\kappa U_0 - 1) \right) \quad (3.8)$$

Сшиваем решения в точке $r = a$:

$$\frac{\tilde{\psi}'_L(a)}{\tilde{\psi}_L(a)} = \frac{\tilde{\psi}'_R(a)}{\tilde{\psi}_R(a)} \quad (3.9)$$

Откуда получаем уравнение:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right)} \frac{1}{\tilde{\psi}(0)} = \frac{2\pi}{\ln \frac{\xi}{a}} \quad (3.10)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \ln \frac{\xi}{a} &= \ln \frac{\sqrt{\frac{D}{2\Delta}} \cosh \psi_\infty}{a} = \ln \frac{\xi_0 \cosh^{1/2} \psi_\infty}{a} = \\ &= \ln \frac{\xi_0}{a} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \cdot \ln \cosh \psi_\infty \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\delta = \left(\ln \frac{\xi_0}{a} \right)^{-1} \ll 1 \quad (3.12)$$

$$t = \frac{1}{\nu D} \ll 1 \quad (3.13)$$

Величина t мала, так как для кондактанса двумерной пластинки справедливо следующее выражение: $G \sim \nu D$, значит t обратно пропорциональна кондактансу, а мы предполагаем, что кондактанс большой.

Кроме того, мы будем считать, что выполнено следующее условие:

$$t_{\xi_0} = \frac{t}{\delta} \ll 1 \quad (3.14)$$

где было введено обозначение t_{ξ_0} , физический смысл которого - сопротивление растекания. Параметр t_{ξ_0} мал, так как a не может быть сколь угодно малой величиной, и по порядку величины совпадает с длиной свободного пробега.

В итоге уравнение 3.10 принимает такой вид:

$$\frac{1}{\pi^2} t \frac{\alpha \sinh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right] \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right]} = \tilde{\psi}(0) \quad (3.15)$$

Теперь исследуем уравнение Узаделя, не предполагая малость $\tilde{\psi}$. Для удобства обезразмерим переменную r : $r \rightarrow \frac{r}{\xi}$.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right) - \sinh(\tilde{\psi}) = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi} + \psi_\infty)} \delta(\mathbf{r}) \quad (3.16)$$

Проинтегрируем уравнение по кругу радиуса $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\epsilon \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r}(\epsilon) \right] = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty)} \quad (3.17)$$

Введем обозначение:

$$C = -\frac{1}{\pi^2} \frac{1}{\nu D} \frac{\alpha \sinh 2(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh 2(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty)} \quad (3.18)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[r \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right] = C \quad (3.19)$$

То есть на малых r мы получаем следующее:

$$\tilde{\psi} \approx C \ln r \quad (3.20)$$

Введем феноменологически параметр a , характеризующий размер примеси, тогда из 3.20 можно получить:

$$C \cdot \ln a = \tilde{\psi}(0) \quad (3.21)$$

это совпадает с уравнением, полученным для случая $\tilde{\psi} \ll 1$. При переходе от 3.16 к 3.17 мы сделали следующее предположение:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r < \epsilon} d^2 r \sinh(\tilde{\psi}) = 0 \quad (3.22)$$

Таким образом, и так было понятно, что уравнение для $\tilde{\psi}(0)$ для случая $\tilde{\psi} \ll 1$ должно было получиться таким же, как для случая произвольного $\tilde{\psi}(0)$, так как в первом случае мы бы считали, что $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r < \epsilon} d^2 r \left(\tilde{\psi} \right) = 0$, а во втором случае считаем, что $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{r < \epsilon} d^2 r \sinh \left(\tilde{\psi} \right) = 0$, то есть отличие $\sinh \left(\tilde{\psi} \right)$ от $\tilde{\psi}$ никак не влияет на уравнение для $\tilde{\psi}(0)$, однако нужно учесть ограничение, возникающие из-за возникновения равенства 3.22.

$$\int_{r < \epsilon} d^2 r \sinh \left(\tilde{\psi} \right) \approx \int_{r < \epsilon} d^2 r \sinh (C \ln r) = \pi \cdot \left[\frac{\epsilon^{C+2}}{C+2} - \frac{\epsilon^{-C+2}}{-C+2} \right] \quad (3.23)$$

Откуда мы получаем ограничение на C :

$$|\operatorname{Re} C| < 2 \quad (3.24)$$

Итак, нам нужно исследовать следующее уравнение:

$$\frac{1}{\pi^2} t \frac{\alpha \sinh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right] \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty \right)}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty \right) \right]} = \tilde{\psi}(0) \quad (3.25)$$

Аналогично одномерному случаю мы будем изучать различные области параметров, в которых уравнение 3.25 можно решить аналитически.

3.1.1 Случай $1 - \alpha \ll 1$:

Предположим, что выполнены следующие условия: $|\tilde{\psi}(0)| \ll 1$ и $\psi_\infty \ll 1$. Раскладывая уравнение 3.25 по малым $\tilde{\psi}(0)$ и ψ_∞ и учитывая условие $t_{\xi_0} \ll 1$, мы получаем: кубическое уравнение:

$$\tilde{\psi}(0)^3 + \tilde{\psi}(0)^2 \cdot 2\psi_\infty + \tilde{\psi}(0) \left(\psi_\infty^2 + \frac{1}{2\pi^2} t_{\xi_0} - \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha} \right) + \frac{1}{2\pi^2} t_{\xi_0} \cdot \psi_\infty = 0 \quad (3.26)$$

Вспомним выражение для плотности состояний:

$$\rho(E, r) = 2\nu \cdot \operatorname{Im} (\sinh [\psi]) \quad (3.27)$$

То есть, точно также, как в одномерном случае, для того, чтобы плотность состояний была ненулевая, необходимо, чтобы $\tilde{\psi}(0)$ имело нетривиальную мнимую часть. Для этого необходимо, чтобы дискриминант был отрицательным:

$$\begin{aligned} D \cdot 16\pi^6 \alpha^3 = & -8\alpha^3 (t_{\xi_0})^3 + 4\pi^2 \alpha^2 (t_{\xi_0})^2 (\alpha\psi_\infty^2 + 3(1-\alpha)^2) + \\ & + \pi^6 ((\alpha-1)^3 - 4(\alpha-1)\alpha\psi_\infty^2)^2 - \\ & - 2\pi^4 (\alpha-1)^2 \alpha (t_{\xi_0}) (20\alpha\psi_\infty^2 + 3(\alpha-1)^2) < 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Найдем корни уравнения $D = 0$:

$$\psi_\infty^{(L)} = \frac{\sqrt{\frac{-\sqrt{\alpha^3 t_{\xi_0} (\alpha t_{\xi_0} + 4\pi^2 (\alpha-1)^2)^3 - \alpha^3 t_{\xi_0}^2 + 10\pi^2 \alpha^2 (\alpha-1)^2 t_{\xi_0} + 2\pi^4 \alpha (\alpha-1)^4}}{(\alpha-1)^2 \alpha^2}}}{2\sqrt{2}\pi^2} \quad (3.29)$$

$$\psi_\infty^{(R)} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha^3 t_{\xi_0} (\alpha t_{\xi_0} + 4\pi^2 (\alpha-1)^2)^3 - \alpha^3 t_{\xi_0}^2 + 10\pi^2 \alpha^2 (\alpha-1)^2 t_{\xi_0} + 2\pi^4 \alpha (\alpha-1)^4}}{(\alpha-1)^2 \alpha^2}}}{2\sqrt{2}\pi^2} \quad (3.30)$$

Тогда границы энергетической зоны получаются такие:

$$(1-\alpha)^2 < \frac{2}{\pi^2} t_{\xi_0} : \quad 0 < \psi_\infty < \psi_\infty^{(R)} \quad (3.31)$$

$$(1-\alpha)^2 > \frac{2}{\pi^2} t_{\xi_0} : \quad \psi_\infty^{(L)} < \psi_\infty < \psi_\infty^{(R)} \quad (3.32)$$

Для наглядности представим выражение для зависимости плотности состояний от энергии для случая $\alpha = 1$:

$$\rho \approx \begin{cases} 2\nu \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\theta}{\delta} - \left(\frac{E}{\Delta}\right)^2} & 0 < \frac{E}{\Delta} < \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\theta}{\delta}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\theta}{\delta}} < \frac{E}{\Delta} < 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

3.1.2 Случай $t_{\xi_0} \ll \eta \ll \exp\left[\frac{2}{t}\right]$

Предположим, что для $\tilde{\psi}(0)$ выполнено следующее неравенство: $\tilde{\psi}(0) \ll \min\{1, \psi_\infty\}$. Перепишем уравнение

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}(0) \left(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cosh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty\right)\right]\right) = \\ & = \frac{1}{\pi^2} t \alpha \sinh \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \psi_\infty\right)\right] \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty\right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

Воспользуемся теорией возмущения: в правой части имеется малая величина $t \ll 1$, поэтому пренебрежем $\tilde{\psi}(0)$ справа и разложим до второго порядка слева, также введём обозначение $\tilde{\gamma} = t \frac{\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty}{4\pi^2 \cosh^{1/2} \psi_\infty}$, тогда уравнение примет вид:

$$\tilde{\psi}(0) \left(\eta - \sinh^2 \psi_\infty - \tilde{\psi}(0) \sinh(2\psi_\infty) \right) = \sinh[2(\psi_\infty)] \cosh^{1/2} \psi_\infty \cdot \tilde{\gamma} \quad (3.35)$$

Видно, что это уравнение совпадает с уравнением 2.26 для одномерного случая (только γ отличается от $\tilde{\gamma}$), поэтому анализ корней уравнения будет таким же как в одномерном случае. Мы получаем ненулевую плотность состояний, если выполнено следующее условие:

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} &> \frac{(\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}{16 \sqrt{\cosh \psi_\infty} \sinh^2(\psi_\infty) \cosh^2(\psi_\infty)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{t}{4\pi^2} &> \frac{(\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}{16 \sinh^2(\psi_\infty) \cosh^2(\psi_\infty) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty \right)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Таким образом, для того, чтобы найти границы энергетической зоны, нужно решить следующее уравнение:

$$\frac{t}{4\pi^2} = \frac{(\eta - \sinh^2 \psi_\infty)^2}{16 \sinh^2(\psi_\infty) \cosh^2(\psi_\infty) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \cosh \psi_\infty \right)} \quad (3.37)$$

Решим это уравнение приближенно: разложим правую часть вблизи минимума до второго порядка:

$$\frac{1}{4\pi^2 \nu D} = \frac{\delta (\sinh \psi_\infty - \sqrt{\eta})^2}{(\eta + 1)(\delta \log(\eta + 1) + 4)} \quad (3.38)$$

Откуда находим границы области:

$$\sinh \psi_\infty^{(\pm)} = \sqrt{\eta} \pm \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\eta + 1) t \left(\log(\eta + 1) + \frac{4}{\delta} \right)} \quad (3.39)$$

Осталось исследовать условия применимости этого решения. В начале нами было сделано предположение $\tilde{\psi}(0) \ll \min\{\psi_\infty, 1\}$, подставляя найденные выражения для ψ_∞ и $\tilde{\psi}(0)$, мы получаем следующее условие для случая малых η :

$$\eta \gg \frac{t}{\delta} \quad (3.40)$$

когда же η больше, мы получаем другое условие:

$$\eta \ll \exp \left[\frac{2}{t} \right] \quad (3.41)$$

Кроме того, условие применимости перехода от 3.37 к 3.38 заключается в том, что последующие члены разложения должны быть малы по сравнению с квадратичным членом, однако учет этого ограничения дает условие слабее чем 3.40 и 3.41.

То есть энергетическая зона такая:

$$\frac{t}{\delta} \ll \eta \ll \exp \left(\frac{2}{t} \right) : \quad \psi_{\infty}^{(-)} < \psi_{\infty} < \psi_{\infty}^{(+)} \quad (3.42)$$

Кроме того, нетрудно убедиться, что края зоны 3.32 сшиваются с краями зоны 3.42 в области параметров $1 \gg \eta \gg t_{\xi_0}$:

$$\psi_{\infty}^{(\pm)} \approx \sqrt{\eta} \pm \frac{1}{\pi} \sqrt{t_{\xi_0}} \approx \psi_{\infty}^{R(L)} \quad (3.43)$$

3.1.3 Энергетическая зона

Представим теперь на графике полученные результаты для энергетической зоны в двумерном случае.

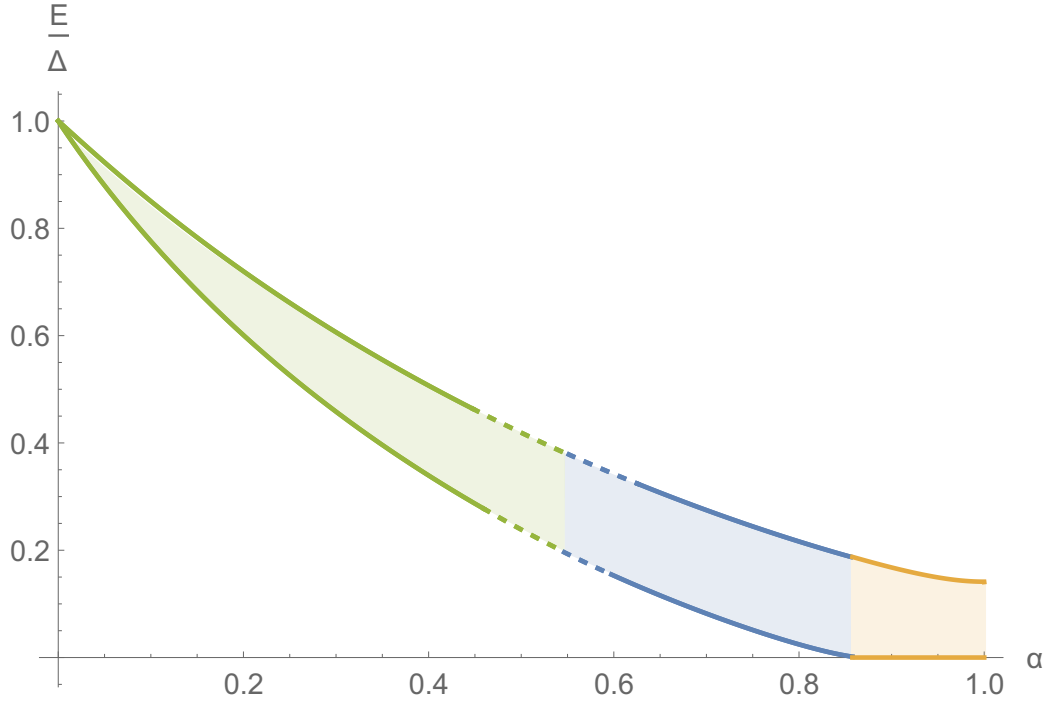


Рис. 3.1:

На рисунке линии изображают границы энергетической зоны в зависимости от параметра α . Сплошной линией изображен результат теоретического расчета (см. ф-лы 3.32, 3.39), пунктирной линией изображена сшивка решений (линии проведены вручную) в областях, в которых теоретический результат перестает работать. Оранжевым цветом изображены решения для области $1 - \sqrt{\frac{2}{\pi^2} t_{\xi_0}} < \alpha < 1$, синим цветом изображена область $\sqrt{\frac{2}{\pi^2} t_{\xi_0}} < 1 - \alpha \ll 1$, зеленым цветом изображена область $t_{\xi_0} \ll \eta \ll \exp\left[\frac{2}{t}\right] \Leftrightarrow \exp\left[-\frac{1}{t}\right] \ll \alpha \ll 1$. В данном случае для теоретических кривых использовались следующие значения параметров t_{ξ_0} и t : $t_{\xi_0} = 0.1$, $t = 0.08$

3.1.4 Диаграмма положений энергетической зоны

Представим на графике с осями координат α и t различные реализации положения энергетической зоны в щели сверхпроводника (см. формулы 3.31, 3.32 и 3.42). Параметр δ мы здесь зафиксировали: $\delta = 0.2$.

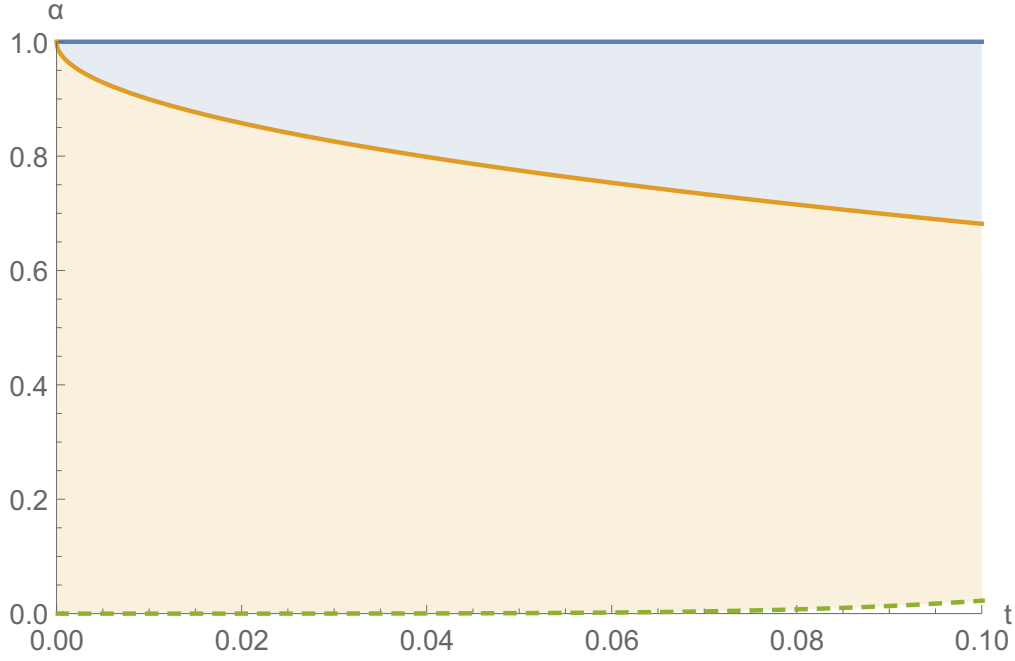


Рис. 3.2:

На графике синим цветом изображена область параметров α и t , в которой энергетическая зона прилегает к энергии $E = 0$ (см. ф-лу 3.31). Оранжевым цветом изображена область параметров α и t , в которой энергетическая зона не касается ни энергии $E = 0$, ни энергии $E = \Delta$ (см. формулы 3.32, 3.42). Под зеленой линией находится область параметров, в которой энергетическая зона находится очень близко к энергии $E = \Delta$ и не может быть исследована в рамках нашей модели, так как это требует учета эффекта локализации.

3.2 Область энергий $E > \Delta$

Здесь мы воспользуемся теми же обозначениями, которые вводили для одномерного случая: $\tilde{\psi}_\infty$ и $\tilde{\xi}$. Действуя аналогично одномерному случаю, мы получаем следующее:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi^2} t \alpha \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}_\infty + \tilde{\psi}(0) \right) \right) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\sinh \tilde{\psi}_\infty \right) + i \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \\ & = -\tilde{\psi}(0) \left[1 + \alpha^2 + 2\alpha \cosh 2 \left(\tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_\infty \right) \right] \end{aligned} \quad (3.44)$$

Для плотности состояний выражение такое же:

$$\rho(E) = 2\nu \cdot \text{Im} \left(\sinh \left(\tilde{\psi} + \psi_{\infty} \right) \right) = 2\nu \cdot \text{Re} \left(\cosh \left(\tilde{\psi} + \tilde{\psi}_{\infty} \right) \right) \quad (3.45)$$

3.2.1 Область $E - \Delta \ll \Delta$

В этой области справедливо соотношение: $\tilde{\psi}_{\infty} \gg 1$.

Сначала изучим такой случай:

$$\tilde{\psi}_{\infty} + \text{Re} \tilde{\psi}(0) \gg 1 \quad (3.46)$$

$$\alpha \exp \left[2 \left(\text{Re} \tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_{\infty} \right) \right] \gg 1 \quad (3.47)$$

Тогда уравнение упрощается:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi^2} t \alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}_{\infty} + \tilde{\psi}(0) \right) \right) \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\sinh \tilde{\psi}_{\infty} \right) + i \cdot \frac{\pi}{4} \right) = \\ = -\tilde{\psi}(0) \alpha \exp \left[2 \left(\tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_{\infty} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

Решение получается такое:

$$\tilde{\psi}(0) = -\frac{1}{2\pi^2} t \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}_{\infty} \right) - i \cdot \frac{t}{8\pi} \quad (3.49)$$

Очевидно, что условие 3.46 выполнено. Найдем, когда выполнено 3.47, подставив найденное $\tilde{\psi}(0)$, тогда получаем следующее условие:

$$\frac{E - \Delta}{\Delta} \ll \alpha \quad (3.50)$$

Также имеется еще одно ограничение, связанное с применимостью уравнения Узаделя. Характерный размер примеси a можно считать по порядку равным длине свободного пробега, так как меньшие масштабы мы не можем изучать с помощью уравнения Узаделя, кроме того мы знаем, что контактанс выражается следующим образом:

$$g = 8\pi\nu D = \frac{8\pi}{t} \quad (3.51)$$

а длина локализации выражается так:

$$\xi_{loc} = l \cdot \exp \left[\frac{\pi g}{2} \right] = a \cdot \exp \left[\frac{4\pi^2}{t} \right] \quad (3.52)$$

Введенный нами пространственный масштаб ξ должен быть много меньше, чем ξ_{loc} , чтобы можно было не учитывать эффекты, связанные с локализацией:

$$|\xi| \ll \xi_{loc} \quad (3.53)$$

В случае $E - \Delta \ll \Delta$ это соотношение эквивалентно следующему:

$$\frac{E - \Delta}{\Delta} \gg \left(\frac{\xi_0}{\xi_{loc}} \right)^4 \quad (3.54)$$

Посчитаем теперь плотность состояний, воспользовавшись равенством 3.45 и условием 3.53:

$$\left(\frac{\xi_0}{\xi_{loc}} \right)^4 \ll \frac{E - \Delta}{\Delta} \ll \alpha : \quad \rho(E, r=0) \approx 2\nu \cdot \sqrt{\frac{\Delta}{2(E - \Delta)}} \cdot \left[1 - \frac{t}{4\pi^2} \tilde{\psi}_\infty - \frac{1}{2\pi^2} \frac{t}{\delta} \right] \quad (3.55)$$

Теперь рассмотрим другой случай:

$$\tilde{\psi}_\infty + \operatorname{Re} \tilde{\psi}(0) \gg 1 \quad (3.56)$$

$$\alpha \exp \left[2 \left(\operatorname{Re} \tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_\infty \right) \right] \ll 1 \quad (3.57)$$

Тогда уравнение упрощается:

$$\tilde{\psi}(0) \approx -\frac{1}{2\pi^2} t \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}_\infty + i \cdot \frac{\pi}{4} \right) \cdot \alpha \exp \left(2 \left(\tilde{\psi}_\infty + \tilde{\psi}(0) \right) \right) \quad (3.58)$$

И, учитывая 3.57, воспользуемся теорией возмущения:

$$\tilde{\psi}(0) \approx -\frac{1}{2\pi^2} t \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}_\infty + i \cdot \frac{\pi}{4} \right) \cdot \alpha \exp \left(2\tilde{\psi}_\infty \right) \quad (3.59)$$

А подставляя это выражение в условия 3.56 и 3.57, мы получаем следующее ограничение:

$$\alpha \ll \frac{E - \Delta}{\Delta} \ll 1 \quad (3.60)$$

Посчитаем плотность состояний, используя 3.45 и принимая во внимание условие 3.53:

$$\alpha \ll \frac{E - \Delta}{\Delta} \ll 1 \quad \rho \approx 2\nu \cdot \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \cdot \left[1 - 8 \cdot \frac{t}{4\pi^2} \left[\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \cdot \tilde{\psi}_\infty \right] \cdot \alpha \frac{\Delta^2}{E^2 - \Delta^2} \right] \quad (3.61)$$

3.2.2 Область $E \gg \Delta$:

В этом случае справедливо следующее неравенство: $\tilde{\psi}_\infty \ll 1$. Мы исследуем уравнение

$$\begin{aligned} & \tilde{\psi}(0) \left[1 + \alpha^2 + 2\alpha \cosh 2 \left(\tilde{\psi}(0) + \tilde{\psi}_\infty \right) \right] = \\ & = \frac{\alpha}{\pi^2} t \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\sinh \tilde{\psi}_\infty \right) + i \cdot \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sinh \left(2 \left(\tilde{\psi}_\infty + \tilde{\psi}(0) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.62)$$

Принимая во внимание условие 3.53, мы получаем, что $t \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\sinh \tilde{\psi}_\infty \right) + i \cdot \frac{\pi}{4} \right) \ll 1$, а значит при решении этого уравнения можно использовать теорию возмущения, пренебрегая $\tilde{\psi}(0)$ в правой части. Раскладывая левую часть до первого порядка, мы находим решение:

$$\tilde{\psi}(0) = - \frac{t\alpha \cdot 2\tilde{\psi}_\infty \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2} \ln \left(\tilde{\psi}_\infty \right) + i \cdot \frac{\pi}{4} \right)}{\pi^2 (1 + \alpha)^2} \quad (3.63)$$

У нас имеется еще одно ограничение:

$$E < \frac{1}{\tau} \quad (3.64)$$

где τ — длина свободного пробега. Выражая τ через введенные нами обозначения, получаем:

$$E < \frac{1}{\tau} = \left(\frac{\xi_0}{a} \right)^2 \cdot \Delta \Leftrightarrow E < \Delta \cdot \exp \left[\frac{2}{\delta} \right] \quad (3.65)$$

Посчитаем теперь плотность состояний, воспользовавшись 3.45:

$$\Delta \ll E < \Delta \cdot \exp \left[\frac{2}{\delta} \right] : \quad \rho(E, r=0) = 2\nu \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta}{E} \right)^2 - \left(\frac{\Delta}{E} \right)^2 \cdot \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{t\alpha}{(1+\alpha)^2} \cdot \left(\frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E}{\Delta} \right) \right) \right] \quad (3.66)$$

3.3 Плотность состояний

Представим теперь зависимость плотности состояний от энергии в двумерном случае с помощью графиков.

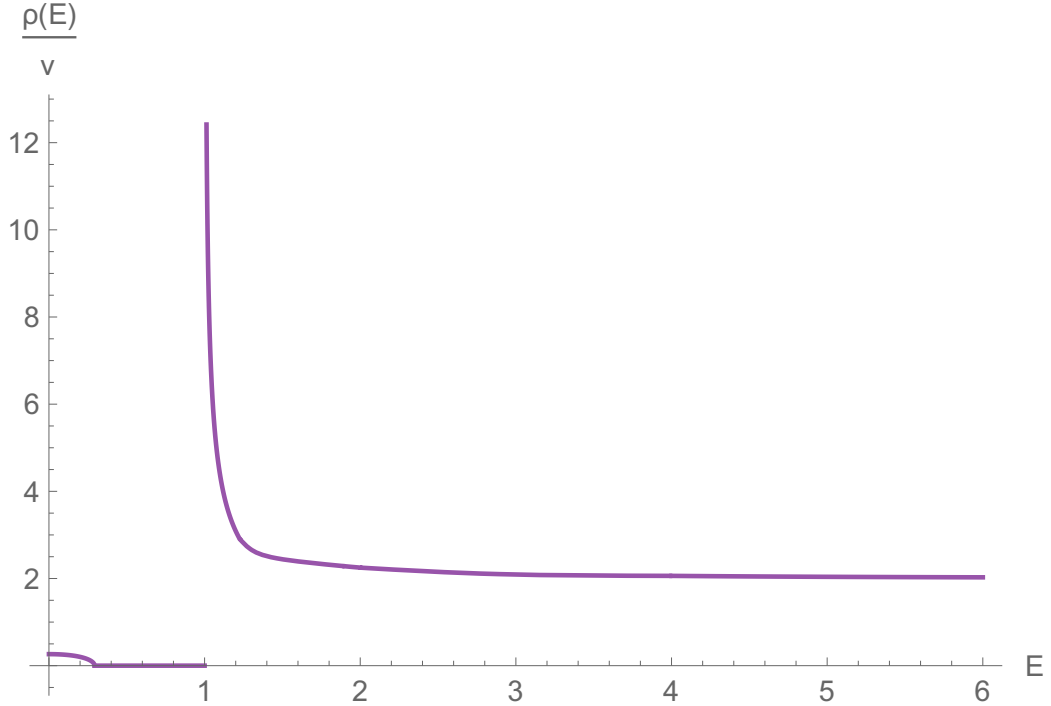


Рис. 3.3:

На рисунке представлена качественная зависимость плотности состояний от энергии в случае $(1 - \alpha)^2 < \frac{2}{\pi^2} t_{\xi_0}$ (качественная зависимость основана на теоретических формулах 3.26, 3.55, 3.61, 3.66). В малой окрестности энергии $E = \Delta$ на графике отсутствуют данные, так как в этой области энергий появляются эффекты, связанные с локализацией, которые мы не учитывали в ходе решения.

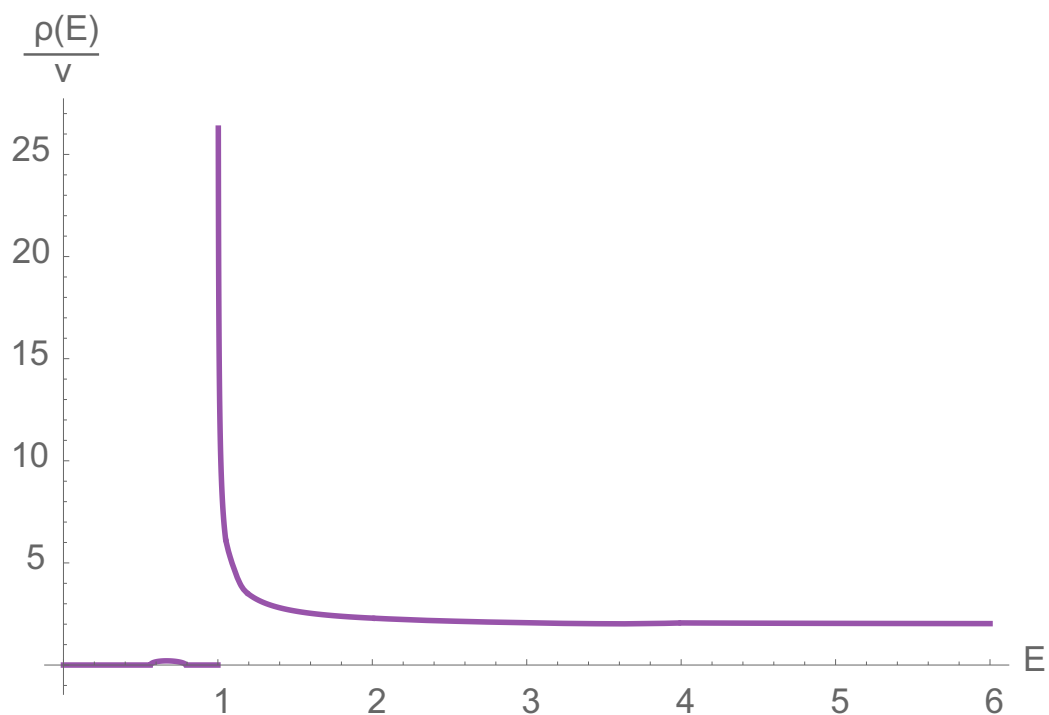


Рис. 3.4:

На рисунке представлена качественная зависимость плотности состояний от энергии в случае $(1 - \alpha)^2 > \frac{2}{\pi^2} t_{\xi_0}$ (качественная зависимость основана на теоретических формулах 3.26, 3.55, 3.61, 3.66). В малой окрестности энергии $E = \Delta$ на графике отсутствуют данные, так как в этой области энергий появляются эффекты, связанные с локализацией, которые мы не учитывали в ходе решения.

Глава 4

Анализ результатов

В введении было упомянуто, что в чистом случае при наличии одной магнитной примеси появляется связанное состояние (YSR-состояние с энергией E_{YSR} (см. Ф-лу 1)), а не энергетическая зона; зона же появляется тогда, когда в сверхпроводник помещено много магнитных примесей с конечной концентрацией.

В работе [12] исследовался грязный сверхпроводник с магнитными примесями, концентрация которых конечна. В этом случае также появляется энергетическая зона. В работе [12] было получено, что из-за наличия мезоскопических флуктуаций плотности состояний сила магнитной примеси α становится случайной величиной со следующим распределением:

$$\mathcal{P}_\alpha(a, t) = \frac{1}{4a\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{1}{4t} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{a}{\alpha} + t \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

где t выражается так:

$$t = \frac{1}{\pi g} \cdot \ln \frac{\xi}{l} \ll 1 \quad (4.2)$$

кроме того, были сделаны переобозначения: через a обозначили величину α , а через α обозначили среднее значение a (с точностью до малого параметра t).

Мы же изучали случай грязного сверхпроводника с одной магнитной примесью с помощью уравнения Узаделя и получили, что из-за наличия магнитной примеси тоже появляется энергетическая зона.

Оценим теперь размытие YSR состояния в чистом случае из-за мезоскопических флуктуаций, воспользовавшись распределением 4.1, то есть нам нужно оценить дисперсию энергии E_{YSR} , а затем сравним получен-

ную дисперсию с энергетической щелью и с шириной зоны, которую мы получили из уравнения Узаделя.

В новых обозначениях E_{YSR} выражается так:

$$E_{YSR} = \Delta \frac{1-a}{1+a} \quad (4.3)$$

Будем работать в приближении

$$\left| \frac{a-\alpha}{\alpha} \right| = \left| \frac{\delta a}{\alpha} \right| \ll 1 \quad (4.4)$$

Это приближение справедливо для энергетических зон, посчитанных нами, поэтому корректно будет сравнивать найденную дисперсию с шириной энергетической зоны, которую мы нашли ранее. В рамках этого приближения распределение будет таким:

$$\mathcal{P}_\alpha(a, t) \approx \frac{1}{4\alpha\sqrt{\pi t}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{4t} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\delta a}{\alpha} + t \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

Для простоты будем рассматривать случай $\eta = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha} \gg 1$. Тогда мы можем найти дисперсию энергии:

$$\frac{\sqrt{\langle \delta E^2 \rangle}}{\Delta} \sim \frac{1}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu D}} \cdot \sqrt{\ln \eta + 2 \ln \frac{D}{\Delta l^2}} \quad (4.6)$$

С другой стороны, анализируя выражение для энергетической зоны 3.42, мы также можем найти ширину энергетической зоны:

$$\frac{\delta E}{\Delta} \sim \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{1}{\nu D}} \sqrt{\left(\ln \eta + 2 \ln \left[\frac{D}{2\Delta a^2} \right] \right)} \quad (4.7)$$

где a - характерный размер магнитной примеси, причем в диффузном пределе (который мы тут изучаем) можно считать, что $a \sim l$, где l длина свободного пробега.

Таким образом, видно, что найденная нами ширина зоны совпадает с дисперсией (с точностью до коэффициента), если считать, что $l = a$ (что мы ранее и предполагали).

Из этого результата можно сделать следующий вывод: учет мезоскопических флуктуаций локальной плотности состояний может быть важен для решения этой задачи, так как полученная дисперсия энергии сравнима с шириной энергетической щели, однако в нашем исследовании мы использовали уравнение Узаделя, а мы знаем, что это уравнение

получается так [12, 20, 21]: действие $S[Q]$ варьируется по переменной θ , причем действие берется в перевальной точке интеграла для статсуммы (при расчете статсуммы $Z = \int \mathcal{D}Q e^{-S[Q]}$ используется метод перевала, то есть находится перевальная точка Q_0). Когда мы используем такое приближенное действие, мы пренебрегаем мезоскопическими флуктуациями, поэтому результирующее уравнение Узаделя не учитывает их, а так как мы пришли к выводу, что мезоскопические флуктуации существенны, значит уравнение Узаделя не позволяет нам найти точный ответ и решение требует уточнения. С другой стороны мы получили, что ширина энергетической зоны, найденная с помощью уравнения Узаделя совпадает с оценкой ширины размытия YSR состояния, вызванного мезоскопическими флуктуациями плотности состояний, это означает, что учет мезоскопический флуктуаций не изменит полученные результаты для энергетической зоны (с точностью до мультипликативной константы). Поэтому можно ожидать, что найденные зависимости границ энергетической зоны от параметров η , t и δ правильные. Что касается зависимости плотности состояний от энергии внутри зоны, сложно предсказать, как она изменится в уточненном решении, однако можно утверждать, что характерный максимум в плотности состояний найден нами верно, так как число состояний фиксировано (одно состояние), а края зоны найдены правильно, а так как число состояний получается путем интегрирования плотности состояний по энергии и координате, значит характерная высота однозначно задается шириной зоны и количеством состояний.

Также стоит заметить, что интеграл для статсуммы $Z = \int \mathcal{D}Q e^{-S[Q]}$ можно брать методом перевала в случае, когда под экспонентой есть большой параметр. В случае конечных концентрации магнитных примесей таким параметром является N - количество примесей. В рассматриваемом нами случае магнитная примесь только одна, а значит этого большого параметра нет, поэтому интеграл нельзя брать методом перевала, то есть нельзя использовать приближенное выражение для статсуммы, а значит для точного решения уравнение Узаделя не подходит. Тем не менее, мы убедились, что оно позволяет найти правильные границы зоны и оценить максимум плотности состояний.

Кроме того, в работе [13] тоже исследуется грязный сверхпроводник с магнитными примесями, концентрация которых конечна. Из-за того, что концентрация магнитных примесей конечна, в щели сверхпроводника появляется зона, в работе [13] основное внимание уделялось тому, как изменятся края этой зоны из-за наличия мезоскопических флуктуаций, про которые мы говорили ранее, и непотенциальных флуктуаций, связанных с тем, что положение магнитных примесей случайно и направление спинов магнитных примесей тоже случайно. В итоге было показано,

что из-за потенциального и магнитного беспорядка края энергетической зоны размываются и появляются хвосты, причем несложно показать, что в нашем случае хвост энергетической зоны и хвост непрерывного спектра не перекрываются из-за ограничения, вызванного пренебрежением эффектом локализации.

Воспользуемся результатом, полученном для краев зоны в этой статье, и сравним с нашим результатом. Мы исследовали сверхпроводник с одной магнитной примесью, причем мы получили, что состояние, возникающее на этой примеси локализовано на масштабе ξ , поэтому, чтобы перейти к случаю с конечной концентрацией, можно сделать такое оценочное рассуждение:

$$\bar{n}_s \sim \frac{1}{\xi^2} \quad (4.8)$$

В статье [13] было получено следующее выражение для краев энергетической зоны:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}^{2/3} \ll \mu : \quad \frac{E_{g1,g2}}{\Delta} &\approx \frac{E_0}{\Delta} \mp \frac{2^{3/4} \mu^{1/4}}{(1+\mu)^{3/4}} \sqrt{\tilde{\eta}} \\ \mu &= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ \tilde{\eta} &= \frac{\bar{n}_s \mu}{\pi v \Delta} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha \ll 1$, будем использовать обозначение $\eta = \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha}$, тогда в случае $\alpha \ll 1$ мы получаем $\eta \sim \frac{1}{\alpha}$.

Тогда условие $\tilde{\eta}^{2/3} \ll \mu$ преобразуется так:

$$\tilde{\eta}^{2/3} \ll \mu \Leftrightarrow \nu D \gg 1 \quad (4.10)$$

здесь мы воспользовались выражением 4.8 для $\bar{n}_s$, а ξ взяли на энергии середины зоны, которая совпадает с E_{YSR} . Видно, что для α это условие выполнено, а значит мы можем воспользоваться выражением 4.9 для границ энергетической зоны. Тогда ширина энергетической зоны получается такая:

$$\frac{\delta \tilde{E}}{\Delta} \sim \frac{1}{\eta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\nu D}} \quad (4.11)$$

С другой стороны, анализируя выражение для энергетической зоны 3.42, мы также можем выразить ширину энергетической зоны, найденную нами с помощью уравнения Узаделя:

$$\frac{\delta E}{\Delta} \sim \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{1}{\nu D}} \sqrt{\left(\ln \eta + 2 \ln \left[\frac{D}{2\Delta a^2} \right] \right)} \quad (4.12)$$

Таким образом, видно, что с точностью до логарифма (которым можно пренебречь, так как это медленная функция) ширина зоны, полученная нами, совпадает с шириной зоны, полученной в работе [13]. Этот факт еще раз подтверждает, то, что мы правильно нашли границы энергетической зоны, а учет мезоскопических флуктуаций несущественно изменит наш ответ.

В одномерном случае применимы аналогичные рассуждения, причем в силу в силу того, что размерность меньше, чем в двумерном случае, мезоскопические флуктуации играют не менее важную роль.

Глава 5

Заключение

В данной работе была исследована плотность состояний (LDOS) грязного сверхпроводника с одной магнитной примесью. Для теоретического анализа использовалось уравнение Узаделя.

Сначала был изучен одномерный случай и было получено, что наличие магнитной примеси приводит к появлению энергетической зоны в щели сверхпроводника. Расположение этой зоны определяется параметром α , который определяется так: $\alpha = (\pi\nu JS)^2$, ν - плотность состояний на энергии Ферми на одну проекцию спина, J - обменный интеграл, S - спин магнитной примеси. Получилось, что в зависимости от значений этого параметра зона может прилегать к энергии Ферми, может прилегать к правой границе щели и может находиться внутри щели. Также был проведен расчет количества состояний лежащих в этой зоне, которые показали, что с учетом симметричной относительно E_F зоны количество состояний, как и ожидалось, равно 1. Затем было проанализировано, как пренебрежение эффектами, связанными с локализацией, влияет на применимость полученных результатов.

Затем аналогичным образом был исследован двумерный случай. Наличие магнитной примеси тоже привело к появлению энергетической зоны. Расположение этой зоны также определяется параметром α . Отличие от одномерного случая заключается в том, что из-за пренебрежения эффектами, связанными с локализацией, появилось ограничение, не позволившее изучить случай экспоненциально малых α , так как в этой области параметров зона лежит слишком близко к $E = \Delta$ и ее исследование требует учета эффектов, связанных с локализацией.

Таким образом, существенным отличием 1D от 2D является то, что в одномерном случае ограничения, появляющиеся из-за пренебрежения эффектами, связанными с локализацией, определялись внешним параметром N (который не фигурировал ранее в решении), в двумерном слу-

чае ограничения определялись параметрами, которые уже были задействованы в решении, в результате чего область экспоненциально малых α не исследовалась.

Также в конце была проведена оценка уширения YSR-состояния, которое появляется из-за мезоскопических флуктуаций [12]. Полученный результат показал, что размытие сравнимо с шириной энергетической щели, а значит вклад мезоскопических флуктуаций существенен и их нужно учитывать, в то время как уравнение $U_{\text{задела}}$ их не учитывает, поэтому решение требует уточнения. Тем не менее, из проведенного сравнения ширины найденной нами энергетической зоны и размытия YSR состояний из-за мезоскопических флуктуаций мы получили, что с точностью до константы они совпадают (4.6,4.7). Кроме того, было проведено сравнение полученной нами ширины энергетической зоны с шириной зоны, полученной в статье [13], получилось, что они тоже совпадают (4.11,4.12). Таким образом, функциональная зависимость краев энергетической зоны от параметров задачи ($\alpha, \gamma, t, \delta$) найдена правильно с точностью до мультипликативной константы, которая может быть определена путем учета мезоскопических флуктуаций. Однако учет мезоскопических флуктуаций может привести к существенным изменениям в зависимости плотности состояний от энергии и этот вопрос предстоит детально исследовать. Тем не менее, найденная нами плотность состояний имеет правильную характерную высоту, так как характерная высота однозначно задается шириной зоны, которая найдена верно и интегралом, который пропорционален числу состояний.

Список литературы

- [1] L. Yu, Acta Phys. Sin. 21, 75 (1965).
- [2] H. Shiba, Prog. Theor. Phys. 40, 435 (1968).
- [3] A. I. Rusinov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 56, 2047 (1969) [Sov. Phys. JETP 29, 1101 (1969)].
- [4] G. C. M'enard, S. Guissart, C. Brun, S. Pons, V. S. Stolyarov, F. Debontridder, M. V. Leclerc, E. Janod, L. Cario, D. Roditchev, P. Simon, and T. Cren, Nat. Phys. 11, 1013 (2015).
- [5] Benjamin W.Heinrich, Jose I.Pascual, Katharina J.Franke, Single magnetic adsorbates on s-wave superconductors, Progress in Surface Science Volume 93, Issue 1, February 2018
- [6] A. V. Balatsky, I. Vekhter, and Jian-Xin Zhu, Impurity-induced states in conventional and unconventional superconductors, Rev. Mod. Phys. 78, 373 (2006)
- [7] A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, On the theory of superconducting alloys. I. The electrodynamics of alloys at absolute zero, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 35, 1558 (1959) [Sov. Phys. JETP 8, 1090 (1959)].
- [8] A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, Superconducting alloys at finite temperatures, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 36, 319 (1959) [Sov. Phys. JETP 9, 220 (1959)].
- [9] P.W.Anderson, Theory of dirty superconductors, J. Phys.Chem. Solids 11, 26 (1959).
- [10] M.V. Feigel'man and M.A. Skvortsov, Universal Broadening of the Bardeen-Cooper-Schrieffer Coherence Peak of Disordered Superconducting Films, Phys. Rev. Lett. 109, 147002 (2012).

- [11] R. C. Dynes, V. Narayanamurti, and J. P. Garno, Phys. Rev. Lett. 41, 1509 (1978); R. C. Dynes, J. P. Garno, G. B. Hertel, and T. P. Orlando, Phys. Rev. Lett. 53, 2437 (1984).
- [12] I. S. Burmistrov and M. A. Skvortsov Magnetic disorder in superconductors: Enhancement by mesoscopic fluctuations, Phys. Rev. B 97, 014515 (2018)
- [13] Y. V. Fominov and M. A. Skvortsov, Subgap states in disordered superconductors with strong magnetic impurities, Phys. Rev. B 93, 144511 (2016).
- [14] Thomas Kiendl, Felix von Oppen, and Piet W. Brouwer, Effects of nonmagnetic disorder on the energy of Yu-Shiba-Rusinov states, Phys. Rev. B 96, 134501 (2017).
- [15] Klaus D. Usadel, Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys, Phys. Rev. Lett. 25, 507 (1970)
- [16] F. M. Marchetti and B. D. Simons, J. Phys. A 35, 4201 (2002)
- [17] A. Rogachev, A.T. Bollinger, and A. Bezryadin, Influence of high magnetic fields on superconducting transition of one-dimensional Nb and MoGe nanowires, arXiv:cond-mat/0411749
- [18] T.-C. Wei, D. Pekker, A. Rogachev, A. Bezryadin and P. M. Goldbart, Enhancing superconductivity: Magnetic impurities and their quenching by magnetic fields, Europhys. Lett., 75 (6), pp. 943–949 (2006)
- [19] A. Rogachev, T.-C. Wei, D. Pekker, A. T. Bollinger, P. M. Goldbart, and A. Bezryadin, Magnetic-Field Enhancement of Superconductivity in Ultranarrow Wires, Phys. Rev. Lett. 97, 137001 (2006)
- [20] Manuel Houzet and Mikhail A. Skvortsov, Mesoscopic fluctuations of the supercurrent in diffusive Josephson junctions, Phys. Rev. B 77, 024525 (2008)
- [21] Yuval Oreg, P. W. Brouwer, B. D. Simons, and Alexander Altland, Competition between Zero Bias Anomaly and Proximity Effect in Disordered Systems, Phys. Rev. Lett. 82, 1269 (1999)