

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Эйлеровская неустойчивость с беспорядком в
подвешенном одноэлектронном транзисторе»
(Дипломная работа бакалавра)

студента 721 группы
С.С. Евсева
научные руководители:
к.ф.-м.н. К.С. Тихонов

Черноголовка 2021

Оглавление

1	Аннотация	3
2	Введение	4
3	Эйлеровская неустойчивость	5
3.1	Постановка задачи	5
3.2	Определение формы стержня в стационарном случае	6
3.2.1	Разложение $\theta(s)$ в ряд фурье	7
3.2.2	Максимальная сила	8
4	Эйлеровская неустойчивость с беспорядком	10
4.1	Модель	10
4.1.1	Распределение фурье-компонент беспорядка	11
4.2	Функция распределения положения стержня в пренебрежении старшими гармониками	12
4.3	Функция распределения положения стержня с учётом старших гармоник	15
4.3.1	Изменение строгой щели при учёте старших гармоник беспорядка	17
4.3.2	Предел сильного беспорядка $\epsilon \ll \Delta_1$ и случай, когда $\epsilon < 0$	17
4.3.3	Предел слабого беспорядка $\Delta_1 \ll \epsilon$	18
4.3.4	Сшивка функций распределения	19
5	Одноэлектронный транзистор в беспорядке	21
5.1	Модель	21
5.2	Конечная температура	22
5.3	Нулевая температура	22
5.3.1	Рецепт вычисления тока с беспорядком	22
5.3.2	Нахождение функции $\tilde{C}_+(v)$	24
5.3.3	Обсуждение результатов	25
6	Ключевые результаты и их обсуждение	27
7	Заключение	28
	Список литературы	29

Глава 1

Аннотация

Одноэлектронный транзистор на основе подвешенной углеродной нанотрубки или нанопроволоки может демонстрировать эффекты, связанные с сильной корреляцией электронных и механических степеней свободы. Один из наиболее интересных режимов реализуется вблизи Эйлеровской неустойчивости (ЭН), индуцированной продольной силой, сжимающей нано-трубку. В таком режиме даже малое изменение сжимающей силы резко меняет вольт-амперные характеристики (ВАХ) транзистора. Одним из интересных свойств такой системы является существование щели: ток не течёт через транзистор при $V < \Delta_v$ и всех затворных напряжениях, при этом Δ_v имеет острый пик в области ЭН [1]. В этой работе мы исследуем поведение такой системы в присутствии беспорядка в упругих свойствах трубки. Естественно ожидать, что вблизи ЭН упругие свойства трубки оказываются особенно чувствительны к такому беспорядку. Мы развили простой метод расчета, позволяющий явно вычислить функцию распределения изгиба нанотрубки с учётом электронной и механической степеней свободы. Главные результаты состоят в следующем: получено выражение для тока через такой одноэлектронный транзистор, позволяющее найти ток без численного интегрирования; показано, что беспорядок приводит к двум эффектам: размытию щели Δ_v и увеличению области ненулевого тока в переменных V_g, V . Таким образом, вопреки наивным ожиданиям, беспорядок может приводить к усилению тока через систему.

Глава 2

Введение

В мире наблюдается глобальный тренд на уменьшение размеров устройств и уменьшение их энергопотребления. Одноэлектронный транзистор (ОЭТ) хорошо вписывается в этот тренд. Главная его часть - это квантовая точка, в качестве которой может выступать углеродная нанотрубка. ОЭТ основан на эффекте кулоновской блокады: сидящий в квантовой точке электрон не даёт попасть другим электронам на квантовую точку своим кулоновским отталкиванием, из-за чего ток не течёт [2].

Недавний интерес к наноэлектромеханическим системам вызван потребностью в нано-устройствах с высокой степенью связи между электрической и механической степенями свободы. Таким примером является ОЭТ вблизи Эйлеровской неустойчивости [1]. Стержень, являющийся основой ОЭТ, очень чувствителен к беспорядку [3] вблизи Эйлеровской неустойчивости, поэтому мы задались целью выяснить влияние беспорядка на ОЭТ.

Сначала мы определили наилучшую параметризацию формы стержня и выяснили, что она хорошо описывается одной фурье-гармоникой даже тогда, когда отклонения стержня от положения равновесия нельзя считать малыми. Затем выяснили, что в случае с беспорядком в виде случайной кривизны можно пренебречь всеми Фурье-гармониками беспорядка, кроме одной, что даёт несложную явную формулу для распределения положения стержня.

Предположив, что в одноэлектронном транзисторе также будут важны только первая гармоника отклонения и первая гармоника беспорядка, мы нашли численно ток через точку при ненулевой температуре, а для нулевой температуры нашли эффективный способ численного счёта, проанализировав влияние беспорядка на ВАХ ОЭТ.

Глава 3

Эйлеровская неустойчивость

3.1 Постановка задачи

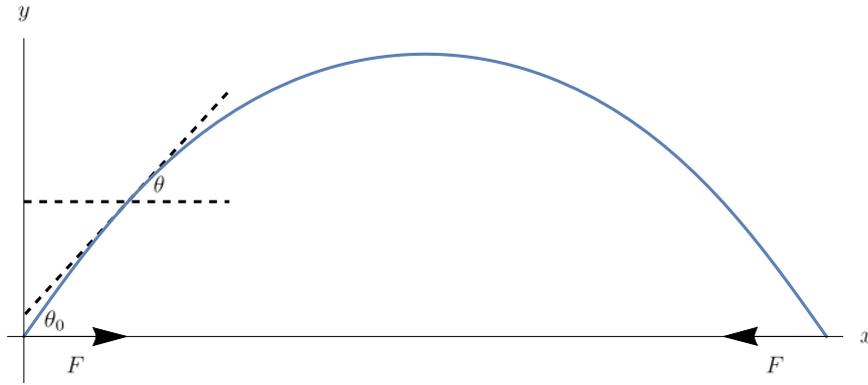


Рис. 3.1: Стержень длины L , зажатый с двух концов силой F . Точки на стержне задаются естественной параметризацией $s \in [0, L]$. Положение этих точек можно задавать функциями $y(s), x(s)$ или $\theta(s)$. Введено обозначение: $\theta_0 \equiv \theta(0)$.

Мы рассмотрели упругий несжимаемый (т.е. $\sqrt{x'^2 + y'^2} = 1$) стержень, сжатый с двух концов постоянной силой F . Он живёт в плоскости OXY . Пока нет беспорядка и температуры, это не важно, поскольку в положении равновесия стержень всегда будет находиться в плоскости. Его концы закреплены на рельсах, по которым он может ходить вдоль оси OX :

$$y(0) = y(L) = 0 \quad (3.1)$$

Они закреплены на рельсах таким образом, что на них не действуют моменты сил, что приводит к отсутствию кривизны на концах:

$$\theta'(0) = \theta'(L) = 0 \quad (3.2)$$

Определим его форму и амплитуду его тепловых колебаний.

Лагранжиан стержня можно записать в декартовых координатах

$$\mathcal{L} = \int_0^L ds \left[\frac{\sigma(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2} - \frac{\kappa}{2}(x''^2 + y''^2) - Fx' - \lambda(s, t)(x'^2 + y'^2 - 1) \right] \quad (3.3)$$

Здесь первый член - кинетическая энергия. Второй член следует из формулы (18.5) из [4]). Третий член после интегрирования даёт $F(x(L) - x(0))$ - потенциальная энергия постоянной силы. В последнем члене $\lambda(s, t)$ - множители Лагранжа для обеспечения несжимаемости.

Поскольку стержень несжимаем, то можно выразить лагранжиан через только одну координату y [5]:

$$\mathcal{L} = \int_0^L ds \left[\frac{\sigma}{2(1 - y'^2)} \dot{y}^2 - \frac{\kappa}{2} \frac{(y'')^2}{(1 - (y')^2)} - F \sqrt{1 - (y')^2} \right]. \quad (3.4)$$

При этом кинетическая энергия теряет свою часть, направленную вдоль стержня. Но поскольку колебания стержня вблизи равновесия будут предполагаться малыми и стержень несжимаем, можно считать, что существуют только поперечные колебания.

3.2 Определение формы стержня в стационарном случае

Найдём точную форму изогнутого стержня (разобрано в задачах к §19 [4]).

Параметризация (Рис. 3.1), в которой лагранжиан записывается красиво (точнее только его часть, не зависящая от производных по времени), которая удобна для вычисления формы при отсутствии кинетической энергии:

$$y'(s) = \sin \theta(s) \quad (3.5)$$

$$x'(s) = \cos \theta(s) \quad (3.6)$$

Подставляя это в (3.3), получим энергию в виде

$$H = \int_0^L ds \left[\frac{\kappa \theta'^2}{2} + F \cos \theta \right] \quad (3.7)$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\theta'' + \frac{F}{\kappa} \sin \theta = 0 \quad (3.8)$$

Интегрируем его

$$\frac{d\theta}{ds} = \sqrt{\frac{2F}{\kappa}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0} \quad (3.9)$$

Отсюда форма палки определяется обращением неполного эллиптического интеграла первого рода:

$$s = \sqrt{\frac{\kappa}{2F}} \int_{-\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (3.10)$$

Раскладывая косинусы в ряд тейлора до 2-ой степени и подставляя $s = L$, получаем

$$F_c = \kappa \frac{\pi^2}{L^2} \quad (3.11)$$

А разложившись до 4-ой:

$$\frac{F}{F_c} \approx 1 + \frac{\theta_0^2}{8} \quad (3.12)$$

Поэтому удобно обезразмерить силу как

$$\frac{F}{F_c} = 1 + \frac{\epsilon}{8} \quad (3.13)$$

Тогда

$$\theta_0 \approx \sqrt{8 \frac{F - F_c}{F_c}} = \sqrt{\epsilon} \quad (3.14)$$

3.2.1 Разложение $\theta(s)$ в ряд фурье

$$\theta'' + \frac{F}{\kappa} \sin \theta = 0 \quad (3.15)$$

Пусть $\theta = \theta_1 \cos \frac{\pi s}{L} + \theta_3 \cos \frac{3\pi s}{L}$, отсюда $\theta'' = -\frac{\pi^2}{L^2} \theta_1 \cos \frac{\pi s}{L} - \frac{9\pi^2}{L^2} \theta_3 \cos \frac{3\pi s}{L}$, и подставляя это выражение в уравнение Эйлера-Лагранжа при $s = 0$, получаем:

$$-\frac{\pi^2}{L^2} \theta_1 - \frac{9\pi^2}{L^2} \theta_3 + \frac{F}{\kappa} \sin \theta_0 = 0 \quad (3.16)$$

$$-\theta_1 - 9\theta_3 + \frac{F}{F_c} \sin \theta_0 = 0 \quad (3.17)$$

С нужной точностью раскладывая в ряд Тейлора и используя соотношение $\theta_0 = \theta_1 + \theta_3$, получаем

$$\frac{F}{F_c} = \frac{\theta_1 + 9\theta_3}{\sin \theta_0} = \frac{\theta_0 + 8\theta_3}{\sin \theta_0} = \frac{\theta_0 + 8\theta_3}{\theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6}} = 1 + \left(\frac{\theta_0^2}{6} + 8 \frac{\theta_3}{\theta_0} \right) \quad (3.18)$$

А мы знаем, что $\frac{F}{F_c} = 1 + \frac{\theta_0^2}{8}$. Следовательно,

$$\theta_3 = -\frac{\theta_0^3}{192} \quad (3.19)$$

Т.о.

$$\theta = \left(\theta_0 + \frac{\theta_0^3}{192} \right) \cos \frac{\pi s}{L} - \frac{\theta_0^3}{192} \cos \frac{3\pi s}{L} \quad (3.20)$$

Отсюда видна причина, почему даже при $\theta_0 \approx \frac{\pi}{2}$, когда отклонение стрелы нельзя считать малым, первая гармоника очень хорошо приближает решение. Это из-за малого коэффициента $1/192$ перед следующей поправкой.

Сравним, как различные параметризации приближают точное решение. Из (Рис. 3.2) видно, что θ -параметризация намного лучше, хотя изгиб стержня уже нельзя считать малым.

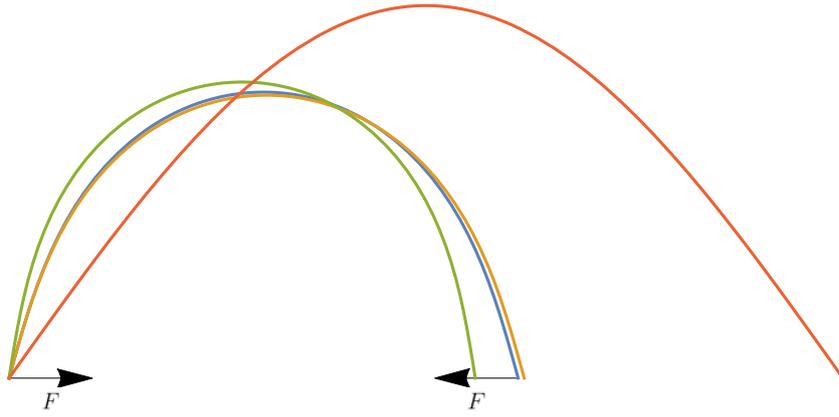


Рис. 3.2: $\epsilon = 2$. Синий профиль стержня найден численно. Оранжевый и зеленый найдены по формуле $\theta = \theta_1 \cos \frac{\pi s}{L}$, но отличаются тем, что коэффициент θ_1 для оранжевого вычислен численно. Красный профиль вычислен по формуле $y = \frac{L\sqrt{\epsilon}}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L}$.

В этом и заключается смысл использования параметризации через $\theta(s)$: в ней решение приближается одной гармоникой намного лучше, чем в y -параметризации, которую обычно используют в статьях про упругий стержень.

3.2.2 Максимальная сила

На стержень можно действовать с любой силой, никогда не достигая $\theta_0 = \pi$, при этом стержень будет скручен в петлю (подразумевается, что стержень живёт в плоскости, иначе он бы выкрутился и задача перешла бы в задачу растяжения, а не сжатия).

Сила, с которой нужно действовать, чтобы сжать палку в "каплю", т.е. сомкнуть два противоположных конца как на (Рис. 3.3), примерно равна (она максимальна в том смысле, что бОльшие силы нам не интересны)

$$F_{\max} = 2.2F_c \quad (3.21)$$

Или, подставляя это в (3.13), получим

$$\epsilon_{\max} = 10 \quad (3.22)$$

Это нужно чтобы понимать условие малости $\theta_1 \ll 1$ в терминах ϵ . Таким образом

$$\epsilon \ll 10 \quad (3.23)$$

Угол, при котором палка сгибается в капельку, примерно

$$\theta_0 = \frac{3\pi}{4} \quad (3.24)$$

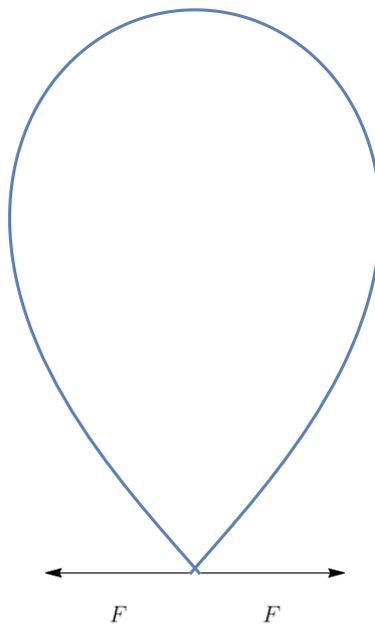


Рис. 3.3: Профиль стержня под действием силы $F = 2.2F_c$

Глава 4

Эйлеровская неустойчивость с беспорядком

4.1 Модель

Введём случайную кривизну $C'(s)$ в гамильтониан в виде

$$\mathcal{H}_e = \int_0^L ds \left[\kappa \frac{(\theta' - C')^2}{2} + F \cos \theta \right] \quad (4.1)$$

Теперь когда на стержень не действует сила F , минимум энергии достигается при $\theta(s) = C(s)$. Такую случайную кривизну может вызвать к примеру налипший мусор на углеродную нанотрубку: он притягивает к себе стержень, изменяя кривизну в равновесии. Это означает, что кривизна будет дельта-коррелированная:

$$\langle C'(s)C'(s') \rangle_C = \Delta \delta(s - s') \quad (4.2)$$

Вычтем из гамильтониана несущественную константу (потом это будет удобно):

$$\mathcal{H}_e = \int_0^L ds \left[\kappa \frac{\theta'^2}{2} + F \cos \theta - \kappa C' \theta' \right] \quad (4.3)$$

При $F > F_c$ происходит спонтанное нарушение симметрии: появляется два положения равновесия $\pm \sqrt{\epsilon}$ как в фазовом переходе второго рода. По аналогии с теорией Гинзбурга-Ландау разложим гамильтониан по $\theta(s)$ до 4 порядка:

$$\mathcal{H}_e = \int_0^L ds \left[\kappa \frac{\theta'^2}{2} + F \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} \right) - \kappa C' \theta' \right] \quad (4.4)$$

Теперь сделаем преобразование фурье гамильтониана с учётом граничных условий

$$\theta'(0) = \theta'(L) = 0:$$

$$q_n = \frac{\pi n}{L} \quad (4.5)$$

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos q_n x \quad (4.6)$$

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L C(s) \cos q_n x \quad (4.7)$$

Оставляя квадратичные выражения для θ_n , получим простую связь

$$\theta_n = \frac{n^2}{n^2 - 1} C_n \quad (4.8)$$

Ввиду простой но длинной связи между ними в промежуточных формулах часто не будем заменять одно на другое.

Мы ожидаем, что как и в Эйлеровской неустойчивости без беспорядка, наибольшей будет первая гармоника $\theta_1 \gg \theta_n \sim C_n$, $n = 2, 3, \dots$. В полном пренебрежении старшими гармониками получим

$$\mathcal{H}_e = \frac{\kappa \pi^2}{16L} \left[\frac{\theta_1^4}{4} - \epsilon \frac{\theta_1^2}{2} - 8C_1 \theta_1 \right] \quad (4.9)$$

Добавим старших гармоник перед каждой степенью θ_1 . Но не будем добавлять при линейном члене, поскольку там уже есть беспорядок, и кубические поправки там ни к чему. А также при θ_1^4 , поскольку от них легко будет избавиться в уравнении Эйлера-лагранжа, что приведёт только к появлению следующих поправок перед остальными степенями, которые нам не интересны.

$$\mathcal{H}_e = \frac{\kappa \pi^2}{16L} \left[\frac{\theta_1^4}{4} + \frac{\theta_1^3 \theta_3}{3} - \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \frac{\theta_1^2}{2} - 8C_1 \theta_1 \right] \quad (4.10)$$

4.1.1 Распределение фурье-компонент беспорядка

Найдем коррелятор:

$$\langle C_n C_m \rangle = \left\langle \frac{2}{L} \int_0^L ds C(s) \cos q_n s \frac{2}{L} \int_0^L ds' C(s') \cos q_m s' \right\rangle = \quad (4.11)$$

$$= \frac{4}{\pi^2 n m} \int_0^L ds' \int_0^L ds \langle C'(s) C'(s') \rangle \sin q_n s \sin q_m s' = \quad (4.12)$$

$$= \frac{4\Delta}{\pi^2 n m} \int_0^L ds' \int_0^L ds \delta(s - s') \sin q_n s \sin q_m s' = \quad (4.13)$$

$$= \delta_{nm} \frac{4\Delta}{\pi^2 n^2} \int_0^L ds \sin^2 q_n s = \quad (4.14)$$

$$= \delta_{nm} \frac{2\Delta L}{\pi^2 n^2} \quad (4.15)$$

Поскольку C_n - это суммы гауссовых величин (точнее интегралы гауссовых величин), то они тоже гауссовы. Тогда из равенства нулю их попарных корреляторов следует, что они независимы.

Их дисперсии:

$$\Delta_n \equiv \langle C_n^2 \rangle = \frac{2\Delta L}{\pi^2 n^2} = \frac{\Delta_1}{n^2} \quad (4.16)$$

4.2 Функция распределения положения стержня в пренебрежении старшими гармониками

Найдём распределение для θ_1 в пренебрежении старшими гармониками. Уравнение:

$$\theta_1^3 - \epsilon\theta_1 - 8C_1 = 0 \quad (4.17)$$

Тогда

$$C_1(\theta_1) = \frac{1}{8} (\theta_1^3 - \epsilon\theta_1) \quad (4.18)$$

Из неё легко получить явное распределение для θ_1 :

$$P(\theta_1) = \frac{dC_1}{d\theta_1} P(C_1) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} (3\theta_1^2 - \epsilon) \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] \quad (4.19)$$

Однако мы получили, что при $\theta_1 = 0$ и $\epsilon > 0$ функция распределения отрицательна! На самом деле эта формула верна только при $\epsilon < 0$, а при $\epsilon > 0$ функция (4.18) (представлена на (Рис. 4.1)) немонотонна, поэтому нужно вести себя аккуратнее.

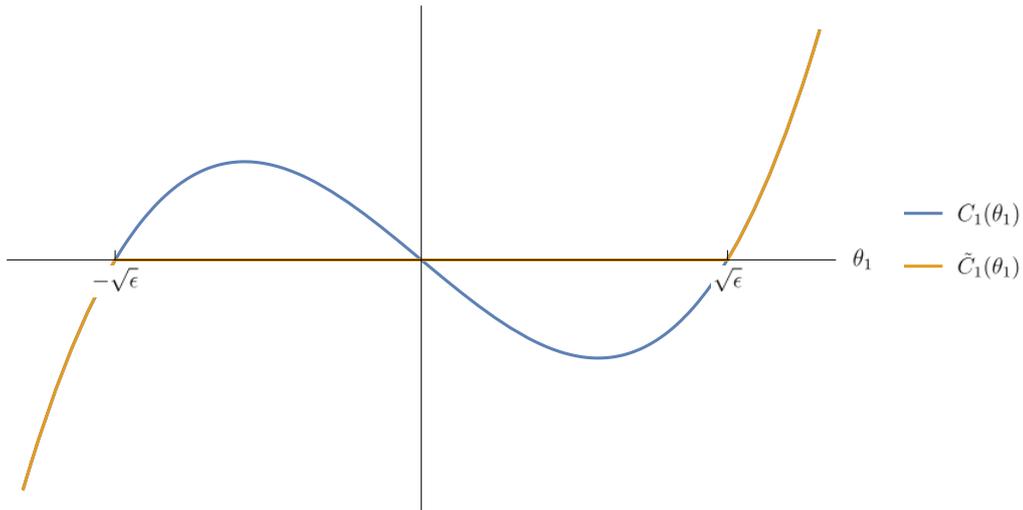


Рис. 4.1: Графики функций (4.18),(4.22). Сравните $\tilde{C}_1(\theta_1)$ с обратной к ней $\theta_1(C_1)$ (Рис. 4.3)

Из рисунка видно, что при $\epsilon > 0$ для каждого фиксированного C_1 существует от одного до трёх различных θ_1 . Из них нужно выбрать тот, в котором энергия минимальна, что даст нам однозначную функцию $\theta_1(C_1)$. Эту функцию можно обратить, назовём её $\tilde{C}_1(\theta_1)$, поскольку она не эквивалентна функции (4.18):

$$\tilde{C}_1() \equiv \theta_1^{-1}() \quad (4.20)$$

Определим простое правило выбора θ_1 . Подставляя (4.18) в выражение для энергии (4.9), получаем (с точностью до несущественного множителя)

$$H(\theta_1, C_1(\theta_1)) = -\frac{3\theta_1^4}{4} + \epsilon\frac{\theta_1^2}{2} \quad (4.21)$$

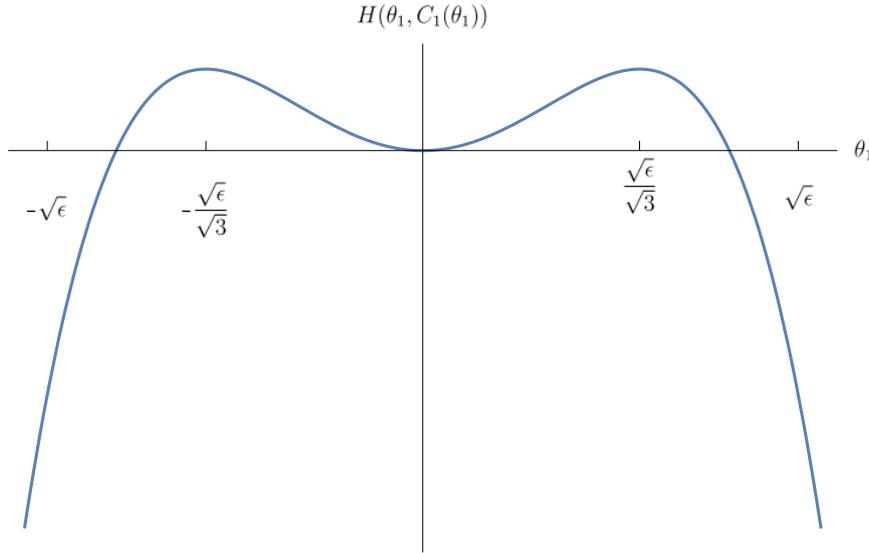


Рис. 4.2: Энергия экстремумов по формуле (4.21)

Поскольку минимум энергии может достигаться только в локальном минимуме $\frac{\partial^2 H(\theta_1, C_1)}{\partial \theta_1^2} = 3\theta_1^2 - \epsilon > 0$, то из (Рис. 4.2) видно, что минимум энергии будет при максимальном $|\theta_1|$, поэтому

$$\tilde{C}_1(\theta_1) = \frac{1}{8} (\theta_1^3 - \epsilon\theta_1) \Theta [\theta_1^2 - \epsilon] \quad (4.22)$$

График для $\tilde{C}_1(\theta_1)$ при $\epsilon > 0$ представлен на (Рис. 4.1). Из (4.22) понятно, что при $\epsilon < 0$ он будет совпадать с $C_1(\theta_1)$.

Отсюда получим распределение для любого знака ϵ :

$$\frac{d\tilde{C}_1}{d\theta_1} = \frac{1}{8} (3\theta_1^2 - \epsilon) \Theta [\theta_1^2 - \epsilon] \quad (4.23)$$

$$P(\theta_1) = \frac{d\tilde{C}_1}{d\theta_1} P(\tilde{C}_1) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} (3\theta_1^2 - \epsilon) \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] \Theta [\theta_1^2 - \epsilon] \quad (4.24)$$

Посмотрим на (Рис. 4.4). Даже при $\epsilon < 0$ отчётливо видны два пика, хотя без беспорядка здесь было единственное решение $\theta_1 = 0$.

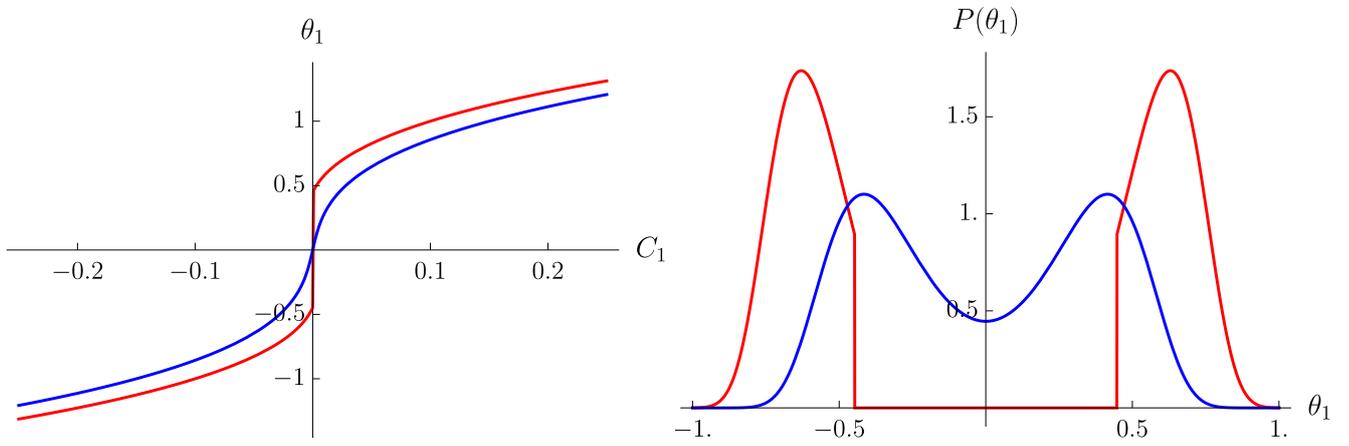


Рис. 4.3: Демонстрация связи функции $\theta_1(C_1)$ (обратная к ней $\tilde{C}_1(\theta_1)$ (4.22)) и функции распределения. Слева: зависимость θ_1 , отвечающего минимуму энергии, от C_1 для $\epsilon = \pm 0.2$ (красный и голубой). Правый: функция распределения, определённая по (4.24), для $\Delta_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\epsilon = 0.2$.

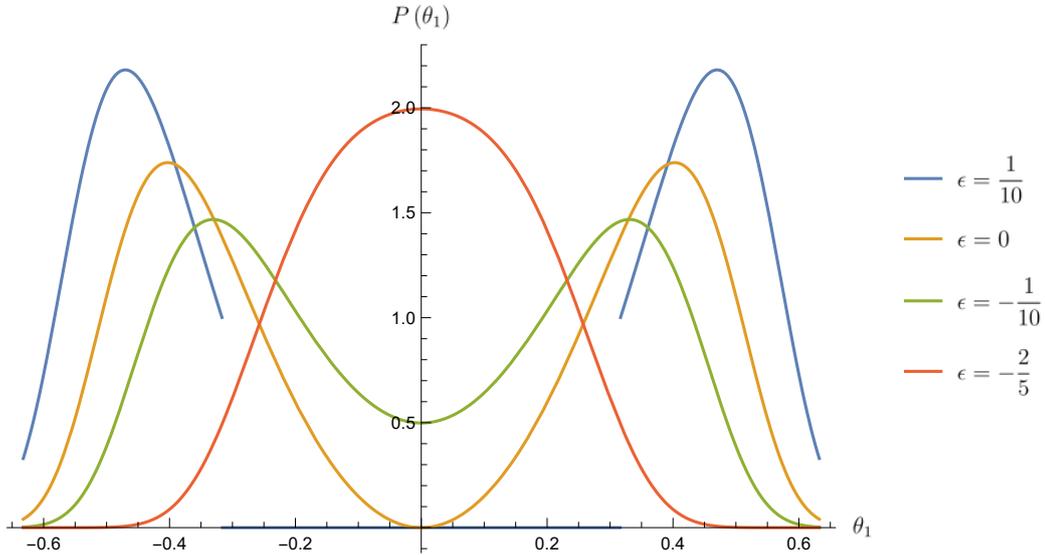


Рис. 4.4: Функция распределения $P(\theta_1)$ при $\Delta_1 = \frac{1}{10000}$ для четырёх характерных сил. Построена по формуле (4.24)

Когда смотришь на (4.24), может показаться неразумным держать коэффициент 8 перед C_1 в формуле (4.17), ведь он привёл к большому коэффициенту в экспоненте $128 = 8^2 \cdot 2$. Однако он там возник не просто так. Заметим, что мы ввели беспорядок таким образом (4.1), что в положении равновесия, когда на стержень не действуют никакие силы, $\theta(s) = C(s)$. Когда сила близка к Эйлеровской неустойчивости, это выражается тем, что для старших гармоник $n = 2, 3, \dots$ дисперсии примерно равны дисперсии старших гармоник беспорядка:

$$\langle \theta_n^2 \rangle = \frac{n^4}{(n^2 - 1)^2} \Delta_n \approx \Delta_n \quad (4.25)$$

Таким образом коэффициент 128 означает, что даже маленький беспорядок вблизи Эйлеровской неустойчивости может приводить к существенному размытию, что мы и видим на (Рис. 4.4).

4.3 Функция распределения положения стержня с учётом старших гармоник

Используем следующую формулу для функции распределения $P(\theta_1)$:

$$P(\theta_1) = \int \left(\prod_{k=2}^{\infty} dC_k P(C_k) \right) P(\theta_1 | C_2, C_3, \dots) \quad (4.26)$$

где

$$P(\theta_1 | C_2, C_3, \dots) = \frac{\partial \tilde{C}_1(\theta_1, C_2, C_3, \dots)}{\partial \theta_1} P(C_1 = \tilde{C}_1(\theta_1, C_2, C_3, \dots)) \quad (4.27)$$

Её можно записать в коротком виде

$$P(\theta_1) = \langle P(\theta_1 | C_2, C_3, \dots) \rangle_{C_k, k \neq 1} = \langle P(\theta_1 | C_2, \dots) \rangle_C \quad (4.28)$$

В конце мы заменили усреднение по старшим гармоникам беспорядка на усреднение по всему беспорядку, потому что функция $P(\theta_1 | C_2, C_3, \dots)$ не зависит от C_1 , из-за чего усреднение по C_1 ничего не меняет. Это сделано только для краткости записи, мы не будем потом как-то использовать этот факт.

Теперь совершенно аналогично в общем случае:

$$\theta_1^3 + \frac{9}{8} C_3 \theta_1^2 - \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \theta_1 - 8C_1 = 0 \quad (4.29)$$

Тогда

$$C_1 = \frac{1}{8} \theta_1^3 + \frac{9}{64} C_3 \theta_1^2 - \frac{1}{8} \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \theta_1 \quad (4.30)$$

Поскольку это тоже кубическая парабола, то нахождение функции $\tilde{C}_1(\theta_1, C_2, C_3, \dots)$ можно свести к предыдущей (т.е. без старших гармоник) подстановкой в кубическое уравнение (4.29), убирающей член перед θ_1^2 :

$$\theta_1 = \theta_{1,\text{eff}} - \frac{3}{8} C_3 \quad (4.31)$$

Тогда

$$\theta_{1,\text{eff}}^3 - \epsilon_{\text{eff}} \theta_{1,\text{eff}} - 8C_{1,\text{eff}} = 0 \quad (4.32)$$

где

$$\epsilon_{\text{eff}} = \epsilon + \frac{27}{64} C_3^2 - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \quad (4.33)$$

$$-8C_{1,\text{eff}} = -8C_1 + \frac{27C_3^3}{256} + \frac{3}{8} C_3 \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \quad (4.34)$$

Сразу пишем ответ, глядя на (4.22):

$$\tilde{C}_{1,\text{eff}} = \frac{1}{8} (\theta_{1,\text{eff}}^3 - \epsilon_{\text{eff}} \theta_{1,\text{eff}}) \Theta [\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}}] \quad (4.35)$$

Подставляя сюда (4.32),(4.33),(4.34), получим

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 = & \left(\frac{1}{8} \theta_1^3 + \frac{9}{64} C_3 \theta_1^2 - \frac{1}{8} \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \theta_1 \right) \Theta [\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}}] + \\ & + \frac{1}{8} \left(\frac{27 C_3^3}{256} + \frac{3}{8} C_3 \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \right) \Theta [\epsilon_{\text{eff}} - \theta_{1,\text{eff}}^2] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Поскольку эта функция получена с помощью нескольких сдвижек в (4.22), то она тоже непрерывна как функция θ_1 и выглядит примерно так же, как на (Рис. 4.1), только сдвинута по осям θ_1, \tilde{C}_1 и теперь другое ϵ . Второй член в (4.36), хоть и выглядит страшно, всего лишь ответственен за сохранение непрерывности функции в результате сдвижки вверх или вниз. Сейчас мы покажем, что его можно выбросить. Берём производную:

$$\frac{\partial \tilde{C}_1}{\partial \theta_1} = \frac{1}{8} \left(3\theta_1^2 + \frac{9}{4} C_3 \theta_1 - \left(\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \right) \Theta [\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}}] \quad (4.37)$$

Это значит, что в предэкспоненте функции распределения будет стоять тета-функция хевисайда, зануляющая $\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}} < 0$, поэтому можно в этой области писать что хотим, а мы не хотим держать в экспоненте этот второй член из (4.36). Получаем функцию распределения по формуле (4.27):

$$\begin{aligned} P(\theta_1 | C_2, \dots) = & \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 + \frac{9}{4} C_3 \theta_1 - \epsilon + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \cdot \\ \cdot \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 + \frac{9}{8} C_3 \theta_1^2 - (\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2})) \theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] & \Theta [\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}}] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Попробуем упростить выражение, не делая новых предположений, кроме $\Delta_1 \ll 1$ и $\epsilon \ll 1$. Сразу видно, что можно пренебречь в экспоненте некоторыми членами.

$$\begin{aligned} P(\theta_1 | C_2, \dots) = & \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 + \frac{9}{4} C_3 \theta_1 - \epsilon + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k \theta_{k+2}) \right) \cdot \\ \cdot \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon \theta_1)^2 + \frac{9}{4} C_3 \theta_1^2 (\theta_1^3 - \epsilon \theta_1)}{128\Delta_1} \right] & \Theta [\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}}] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Член с C_3 в экспоненте можно убрать, сделав сдвиг при интегрировании по C_3 - это приведёт к появлению членов порядка θ_1^3 в предэкспоненте и под

тета-функцией, которыми грех не пренебречь, а также к появлению под экспонентой члена в $(\frac{\theta_1}{8})^4$ раз меньшего чем тот, что останется. Делаем эту сдвижку, и получаем

$$P(\theta_1|C_2, \dots) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 + \frac{9}{4}C_3\theta_1 - \epsilon + 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k\theta_{k+2}) \right) \cdot \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] \Theta [\theta_{1,\text{eff}}^2 - \epsilon_{\text{eff}}] \quad (4.40)$$

Это почти такое же распределение как (4.24), только в тета-функции и пред-экспоненте что-то более сложное.

4.3.1 Изменение строгой щели при учёте старших гармоник беспорядка

Мы видели, что без учёта старших гармоник беспорядка функция распределения имеет щель $-\sqrt{\epsilon} < \theta_1 < \sqrt{\epsilon}$. Однако старшие гармоники размывают эту щель, и мы сейчас покажем как.

Функция распределения (4.38) ненулевая тогда, когда выражение под тета-функцией больше нуля. Т.е. тогда, когда (здесь звёздочкой обозначен тот факт, что $k = 3$ опускается):

$$\left| \theta_1 + \frac{3}{8}C_3 \right| > \sqrt{\epsilon - 2 \sum_{k=2}^{\infty} (\theta_k^2 + \theta_k\theta_{k+2}) - \frac{135}{64}C_3^2 - \frac{75}{64}C_3C_5} \quad (4.41)$$

Отсюда видно, что при достаточно больших C_3 выражение под корнем становится нулевым. Это значит, что после усреднения по C_3 исчезнет строгая щель, т.е. учёт хотя бы C_3 приводит к исчезновению строгой щели.

4.3.2 Предел сильного беспорядка $\epsilon \ll \Delta_1$ и случай, когда $\epsilon < 0$

Посмотрим на формулу (4.40). При сильном беспорядке почти всегда $\epsilon_{\text{eff}} < 0$, что позволяет избавиться от тета-функции. После этого усреднение по беспорядку тривиально:

$$P(\theta_1) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 - \epsilon + 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^4}{(k^2 - 1)^2} \Delta_k \right) \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] = \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 - \epsilon + 2\Delta_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2} \right) \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] = \quad (4.43)$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 - \epsilon + \frac{3 + 4\pi^2}{24} \Delta_1 \right) \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] \quad (4.44)$$

Прелесть этой формулы ещё и в том, что она отлично работает при $\epsilon < 0$, т.к. в этом случае без всяких приближений можно убрать тета-функцию, потому что $\epsilon_{\text{eff}} < 0$

Максимум определяется нулём логарифмической производной, что даёт приблизительно

$$\theta_1 = \sqrt[6]{\frac{128\Delta_1}{3}} \approx \sqrt[6]{\frac{\Delta_1}{0.02}} \quad (4.45)$$

Это накладывает более сильное условие на Δ_1 .

4.3.3 Предел слабого беспорядка $\Delta_1 \ll \epsilon$

Посмотрим на формулу (4.40). Сразу можно пренебречь многими членами:

$$P(\theta_1|C_2, \dots) = \frac{3\theta_1^2 - \epsilon}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \exp\left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1}\right] \Theta\left[\left(\theta_1 + \frac{3}{8}C_3\right)^2 - \epsilon\right] \quad (4.46)$$

Осталось усреднить только тета-функцию:

$$P(\theta_1) = \frac{3\theta_1^2 - \epsilon}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} \exp\left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1}\right] \left\langle \Theta\left[\left(\theta_1 + \frac{3}{8}C_3\right)^2 - \epsilon\right] \right\rangle_C \quad (4.47)$$

Разбиваем её на две и тривиально интегрируем:

$$\left\langle \Theta\left[\left(\theta_1 + \frac{3}{8}C_3\right)^2 - \epsilon\right] \right\rangle_C = \quad (4.48)$$

$$= \left\langle \Theta\left[\theta_1 + \frac{3}{8}C_3 - \sqrt{\epsilon}\right] + \Theta\left[-\theta_1 - \frac{3}{8}C_3 - \sqrt{\epsilon}\right] \right\rangle_C = \quad (4.49)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\operatorname{erfc} \frac{8(\sqrt{\epsilon} - \theta_1)}{\sqrt{2\Delta_1}} + \operatorname{erfc} \frac{8(\sqrt{\epsilon} + \theta_1)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right) \quad (4.50)$$

т.о. получаем функцию распределения в слабом беспорядке:

$$P(\theta_1) = \frac{1}{16\sqrt{2\pi\Delta_1}} (3\theta_1^2 - \epsilon) \exp\left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1}\right] \cdot \left(\operatorname{erfc} \frac{8(\sqrt{\epsilon} - \theta_1)}{\sqrt{2\Delta_1}} + \operatorname{erfc} \frac{8(\sqrt{\epsilon} + \theta_1)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right) \quad (4.51)$$

По функции распределения видно, что беспорядок приводит к размытию пика на величину (в предположении $\delta\theta_1 \ll \sqrt{\epsilon}$)

$$\delta\theta_1 = \frac{\sqrt{32\Delta_1}}{\epsilon} \quad (4.52)$$

Видно, что можно получить $\delta\theta_1 \gg 1$, оставаясь в рамках $\Delta_1 \ll \epsilon \ll \sqrt{\Delta_1}$. На самом деле, в таком случае величина размытия изменится и будет

$$\delta\theta_1 = \sqrt[6]{128\Delta_1} \quad (4.53)$$

При выводе этой формулы подразумевалось $\delta\theta_1 \gg \sqrt{\epsilon}$, поэтому полезно задаться вопросом, насколько это было верно (полезно не только для этого, но и для понимания, можно ли пренебрегать флуктуациями θ_1 в предэкспоненте). Посмотрим на максимально возможное размытие (4.53)

$$\delta\theta_1 = \sqrt[6]{128\Delta_1} \gg \sqrt[3]{\epsilon} \gg \sqrt{\epsilon} \quad (4.54)$$

Т.е. даже слабый беспорядок может существенно размыть функцию распределения и пренебрегать флуктуациями θ_1 в предэкспоненте нельзя.

4.3.4 Сшивка функций распределения

Если сшить два разных предела: (4.44) и (4.51), получим

$$P(\theta_1) = \frac{1}{16\sqrt{2\pi\Delta_1}} \left(3\theta_1^2 - \epsilon + \frac{3 + 4\pi^2}{24}\Delta_1 \right) \exp \left[-\frac{(\theta_1^3 - \epsilon\theta_1)^2}{128\Delta_1} \right] \cdot \left(\operatorname{erfc} \frac{8(\sqrt{\epsilon} - \theta_1)}{\sqrt{2\Delta_1}} + \operatorname{erfc} \frac{8(\sqrt{\epsilon} + \theta_1)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right) \quad (4.55)$$

Пока неизвестно, насколько эта формула верна при $\epsilon \sim \Delta_1$. Однако ясно, что при $\theta_1^2 > \epsilon$ тета-функция почти всегда единица и её можно выбросить (что описывается формулой для сильного беспорядка, а значит и сшивка там работает). Следовательно эта формула хороша везде, кроме $\theta_1^2 < \epsilon$ при $\epsilon \sim \Delta_1$.

Выясним, насколько существенна эта ошибка. Для оценки сверху пренебрегая в (4.40) тета-функциями, получаем

$$P(0) < \frac{-\epsilon + 2\Delta_1}{8\sqrt{2\pi\Delta_1}} < \frac{\sqrt{\Delta_1}}{10} \ll 1 \quad (4.56)$$

При этом

$$\max_{\theta_1} P(\theta_1) \sim \frac{1}{\theta_1} > 1 \quad (4.57)$$

т.е. $\max_{\theta_1} P(\theta_1)$ на 2 порядка больше, чем $P(0)$ (один из порядков за счёт 10 в знаменателе). Следовательно, можно пренебречь ошибками вблизи нуля.

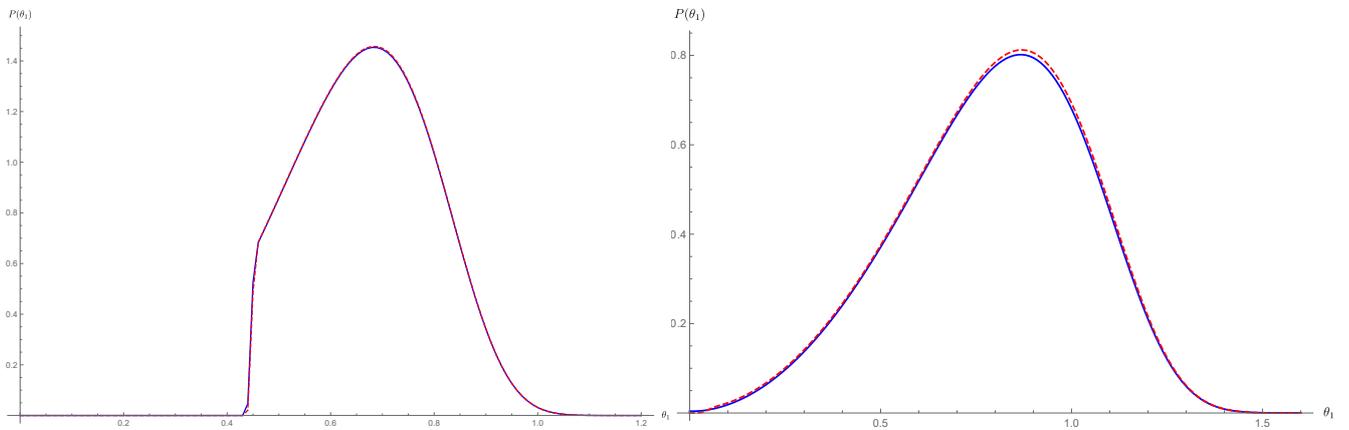


Рис. 4.5: Функция распределения $P(\theta_1)$ вычисленная численным интегрированием точного распределения (4.38) по первым нескольким гармоникам беспорядка (сплошной синий график) и с использованием найденной сшивки аппроксимаций (4.55). (a) Слабый беспорядок $\Delta_1 \ll \epsilon \ll 1$; $\Delta_1 = 0.005$, $\epsilon = 0.2$. (b) Сильный беспорядок $0 < \epsilon \ll \Delta_1$; $\Delta_1 = 0.05$, $\epsilon = 0.002$.

Глава 5

Одноэлектронный транзистор в беспорядке

5.1 Модель

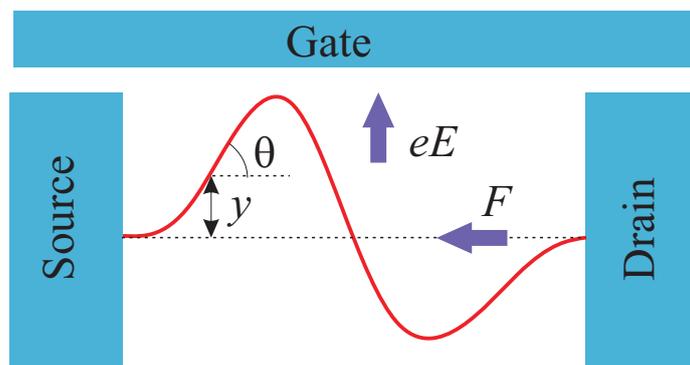


Рис. 5.1: Схема одноэлектронного транзистора. Красным обозначен стержень, который является квантовой точкой.

Одноэлектронный транзистор (Рис. 5.1) без беспорядка вблизи Эйлеровской неустойчивости разобран в статье [1]. Мы же сразу начнём рассмотрение с беспорядком.

Взаимодействие механической и электрической степеней свободы введем как

$$\hat{H}_{int} = eEY\hat{n}_d = \frac{\kappa Lq_1^2}{16}\alpha\hat{n}_d\theta_1 \quad (5.1)$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\left(\frac{8}{\pi}\right)^2\frac{eE}{F_c} \quad (5.2)$$

где $Y = \int_0^L dsy(s)\Psi^2(s)$ - среднее смещение электрона по оси Y . Здесь $\Psi(s)$ - волновая функция электрона. Мы взяли в качестве неё самый низкий уровень в бесконечном ящике:

$$\Psi(s) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi s}{L} \quad (5.3)$$

Обезразмерим величины:

$$\tilde{T} = \frac{16L}{\pi^2\kappa}T \quad (5.4)$$

$$v_g = \frac{3\pi^2V_g}{8EL}, \quad v = \frac{3\pi^2V}{8EL} \quad (5.5)$$

$$v_{\pm} = v_g \pm \frac{v}{2} \quad (5.6)$$

В предыдущей главе мы выяснили, что старшие гармоники слабо меняют функцию распределения стержня, поэтому будем ими пренебрегать. Выпишем эффективный гамильтониан (25) из [1] в наших переменных и добавим к нему беспорядок:

$$H_{\text{eff}}(\theta_1) = \frac{\theta_1^4}{4} - \epsilon \frac{\theta_1^2}{2} - 8C_1\theta_1 - \frac{\tilde{T}}{2} \ln \left[n_F \left[-\alpha \frac{\theta_1 - v_-}{\tilde{T}} \right] n_F \left[-\alpha \frac{\theta_1 - v_+}{\tilde{T}} \right] \right] \quad (5.7)$$

5.2 Конечная температура

Ток даётся выражением (13) из [1]:

$$I(\theta_1) = \frac{1}{2} \left(n_F \left[\alpha \frac{\theta_1 - v_+}{\tilde{T}} \right] - n_F \left[\alpha \frac{\theta_1 - v_-}{\tilde{T}} \right] \right) \quad (5.8)$$

Формула для тока (5.8) беспорядком не меняется, но меняется распределение:

$$P(\theta_1, C_1)d\theta_1dC_1 = P(\theta_1|C_1)d\theta_1P(C_1)dC_1 \quad (5.9)$$

Подставляем (5.7):

$$P(\theta_1|C_1) = \mathcal{N} \exp \left[-\frac{H_{\text{eff}}(\theta_1)}{\tilde{T}} \right] = \quad (5.10)$$

$$= \mathcal{N} \sqrt{n_F \left[-\alpha \frac{\theta_1 - v_-}{\tilde{T}} \right] n_F \left[-\alpha \frac{\theta_1 - v_+}{\tilde{T}} \right]} \exp \left[-\frac{1}{\tilde{T}} \left(\frac{\theta_1^4}{4} - \epsilon \frac{\theta_1^2}{2} - 8\theta_1 C_1 \right) \right] \quad (5.11)$$

Заметим, что нормировка \mathcal{N} зависит от C_1 .

5.3 Нулевая температура

5.3.1 Рецепт вычисления тока с беспорядком

Здесь мы не будем явно вычислять функцию распределения, поскольку чтобы вычислить ток нужно намного меньше информации. Опишем рецепт, как обойтись без вычисления функции распределения.

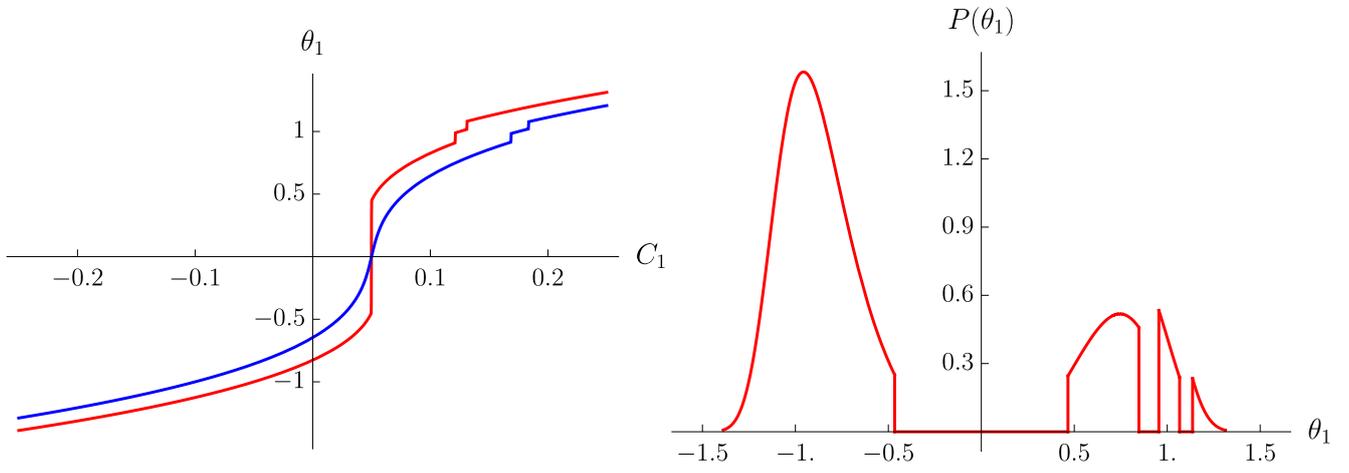


Рис. 5.2: Демонстрация связи функции $\theta_1(C_1, v_-, v_+)$ (обратная к ней $\tilde{C}_1(\theta_1, v_-, v_+)$) и функции распределения. Слева: зависимость θ_1 , отвечающего минимуму энергии, от C_1 для $\epsilon = \pm 0.2$ (красный и голубой) и $\alpha = 0.4$, $v_g = 1$, $v = 0.2$ (сравните с (Рис. 4.3)). Правый: функция распределения, определённая по (4.24) (точнее по первому равенству, т.к. оно общее), для $\Delta_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ и $\epsilon = 0.2$.

При нулевой температуре формула (5.8) становится

$$I(\theta_1) = \frac{1}{2} (\Theta [v_+ - \theta_1] - \Theta [v_- - \theta_1]) \quad (5.12)$$

Найдём средний ток:

$$\langle I \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} I(\theta_1) P(\theta_1) d\theta_1 = \frac{1}{2} \int_{v_-}^{v_+} P(\theta_1) d\theta_1 = \frac{1}{2} \int_{\tilde{C}_1(v_-)}^{\tilde{C}_1(v_+)} P(C_1) dC_1 = \quad (5.13)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{\tilde{C}_1(v_+)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{\tilde{C}_1(v_-)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right] \right) \quad (5.14)$$

Эта формула наталкивает на мысль, что нужно вычислить функцию $\tilde{C}_1(\theta_1)$ и мы поймём, чему равен ток. Тут следует вспомнить, что она на самом деле функция $\tilde{C}_1(\theta_1, v_-, v_+)$, зависящая от напряжений напрямую. Таким образом правильнее будет сказать, что мы хотим найти две функции: $\tilde{C}_1(v_+, v_-, v_+)$, $\tilde{C}_1(v_-, v_-, v_+)$. Заметим, что когда течёт ток, то две щели не соприкасаются (что означает наличие устойчивой области в промежутке где способен течь ток). Это значит, что на самом деле эти две функции независимы. Обозначим их $\tilde{C}_1(v_+, -\infty, v_+) \equiv \tilde{C}_+(v_+)$ - некоторая функция и аналогично $\tilde{C}_1(v_-, v_-, \infty) \equiv \tilde{C}_-(v_-)$.

Случай когда они оказались так близко, что тока нет (и когда они уже влияют друг на друга), можно определять из простого условия $\tilde{C}_+(v_+) < \tilde{C}_-(v_-)$. Также заметим, что поскольку левая щель скользит немного выше правой, то:

$$\tilde{C}_-(v) = \tilde{C}_+(v) + \frac{1}{16}\alpha \quad (5.15)$$

Это соотношение - следствие симметрии левого и правого контакта. Если они не симметричны, то не будет такого простого соотношения между ними, и их нужно будет считать отдельно.

В итоге метод следующий. Нам нужно найти зависимость $\tilde{C}_+(v) = \tilde{C}_1(v, v, \infty)$, т.е. при наличии всего одной щели. Затем подставить \tilde{C}_- и \tilde{C}_+ в немного подправленную общую формулу (5.13):

$$I = \frac{1}{4} \left(\operatorname{erf} \left[\frac{\tilde{C}_+(v_+)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right] - \operatorname{erf} \left[\frac{\tilde{C}_-(v_-)}{\sqrt{2\Delta_1}} \right] \right) \Theta \left[\tilde{C}_+(v_+) - \tilde{C}_-(v_-) \right] \quad (5.16)$$

Здесь тета-функция хевисайда зарезает области, где нельзя считать щели независимыми: поскольку здесь они слились в одну щель, то между напряжениями нет токонесущей области и ток нулевой.

5.3.2 Нахождение функции $\tilde{C}_+(v)$

Уведём $v_- \rightarrow -\infty$ и обозначим $v \equiv v_+$:

$$H = \frac{\kappa L q_1^2}{16} \left[\frac{\theta_1^4}{4} - \epsilon \frac{\theta_1^2}{2} - 8\theta_1 C_1 - \frac{\alpha}{2} (v - \theta_1) \Theta [v - \theta_1] \right] \quad (5.17)$$

Теперь у нас есть только одна щель вблизи напряжения v .

У неё есть левая граница θ_l и правая θ_r . При чём очевидно $\theta_l < v < \theta_r$. Сядем на левую границу и будем увеличивать C_1 . Перескок с левой на правую происходит тогда, когда энергии равны $H(\theta_l, C_1) = H(\theta_r, C_1)$. Получаем систему на θ_l, θ_r и такое C_1 , при котором происходит перескок, т.е. \tilde{C}_+ :

$$\begin{cases} \frac{\theta_l^4}{4} - \epsilon \frac{\theta_l^2}{2} - 8\theta_l \tilde{C}_+ - \frac{\alpha}{2} (v - \theta_l) = \frac{\theta_r^4}{4} - \epsilon \frac{\theta_r^2}{2} - 8\theta_r \tilde{C}_+ \\ 8\tilde{C}_+ = \theta_r^3 - \epsilon \theta_r \\ 8\tilde{C}_+ = \theta_l^3 - \epsilon \theta_l + \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (5.18)$$

Исключим \tilde{C}_+ :

$$\begin{cases} -\frac{3\theta_l^4}{4} + \epsilon \frac{\theta_l^2}{2} - \frac{\alpha v}{2} = -\frac{3\theta_r^4}{4} + \epsilon \frac{\theta_r^2}{2} \\ \theta_r^3 - \epsilon \theta_r = \theta_l^3 - \epsilon \theta_l + \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (5.19)$$

Всего этого уже достаточно, чтобы построить ток численно при $\epsilon < 0$. При $\epsilon > 0$ есть щель посередине, поэтому всё сложнее.

Для численного вычисления тока используется формула (5.13). \tilde{C}_+ считается численно следующим способом: решается система (5.19) и подставляется θ_r во вторую формулу (5.18).

При решении системы могут появиться несколько корней, поэтому отбрасываются все корни, не удовлетворяющие условию $\theta_l < v < \theta_r$ и $\theta_r^2, \theta_l^2 > \epsilon$. Первое условие это определение θ_r, θ_l , а второе нуждается в доказательстве.

Приведем доказательство не математически строгое, но которое должно дать понимание происходящего. Маленькая щель $\theta_l < \theta_1 < \theta_r$ независима от основной щели $-\sqrt{\epsilon} < \theta_1 < \sqrt{\epsilon}$, пока они не соприкасаются (т.е. пока $\theta_r^2, \theta_l^2 > \epsilon$). После соприкосновения они становятся одной щелью. Границы этой объединенной щели не могут быть меньше границ основной щели $-\sqrt{\epsilon} < \theta_1 < \sqrt{\epsilon}$ (теперь θ_l, θ_r - границы объединенной щели по построению). Отсюда и следует условие $\theta_r^2, \theta_l^2 > \epsilon$.

5.3.3 Обсуждение результатов

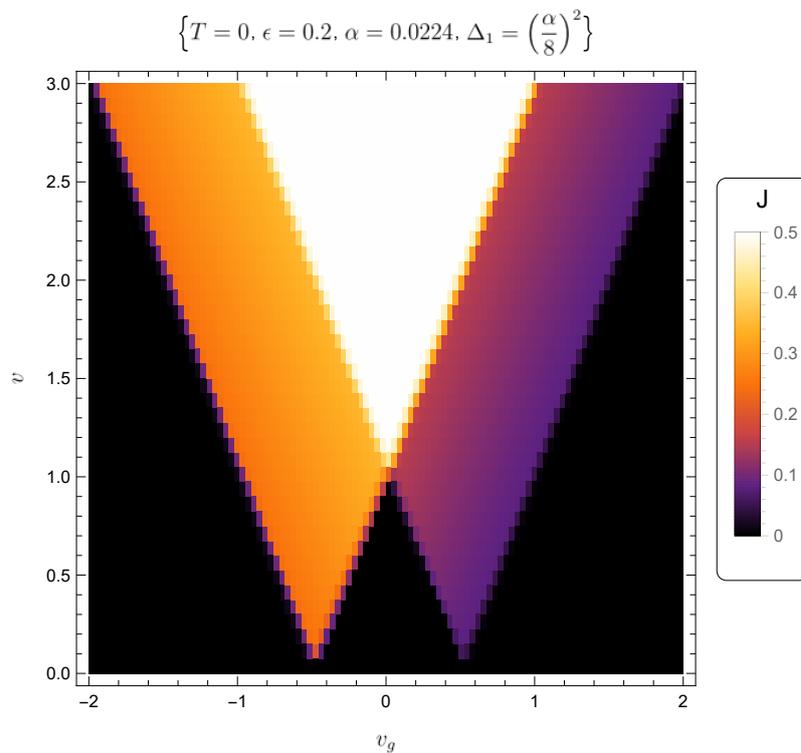


Рис. 5.3: ВАХ транзистора в беспорядке, вычисленный при нулевой температуре.

Можно заметить на (Рис. 5.3), что при фиксированном v_g функция $I(v)$ имеет две ступеньки. Температура может размыть их. Это легко видеть на (Рис. 5.4).

Теперь перейдём к вопросу о том, почему наш беспорядок лучше остальных, ведь могут быть и другие беспорядки, например случайные длины стержней или случайные контакты.

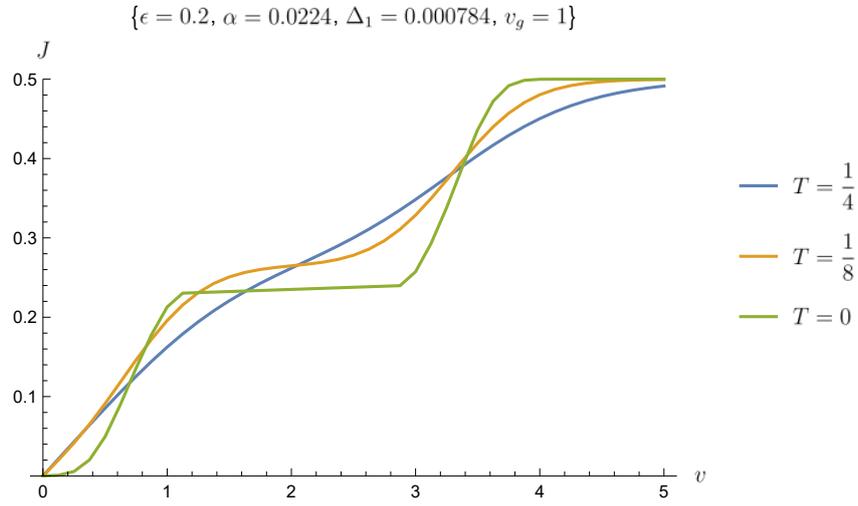


Рис. 5.4: Зависимость тока через транзистор от напряжения на его концах при разных температурах

Размытия при различных беспорядках:

$$\text{Случайная кривизна (в этой работе): } \delta v \sim \left(\frac{\delta y}{L} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.20)$$

$$\text{Случайная длина стержней } L: \delta v \sim \frac{\delta L}{L} \quad (5.21)$$

Здесь под δy подразумевается характерное смещение стержня по оси y при отсутствии силы $F = 0$.

При слабом беспорядке степень $1/3$ будет намного сильнее, поэтому случайная кривизна размывает сильнее случайной длины стержней.

Кроме того, случайная кривизна приводит к появлению второй галочки на (Рис. 5.3), чего не было бы при случайных длинах стержней. Этот эффект можно регулировать электрическим полем E . При достаточно сильном поле вторая галочка станет экспоненциально подавлена.

Глава 6

Ключевые результаты и их обсуждение

- Мы определили, что лучшая параметризация для исследования эйлеровской неустойчивости - это θ -параметризация, хотя во всех статьях используется y .
- Мы выяснили, что вблизи эйлеровской неустойчивости стержень сильно реагирует на беспорядок. Функция распределения при этом хорошо приближается одной гармоникой θ_1 .
- Мы проанализировали ток через одноэлектронный транзистор с температурой и без. Оказывается, случайная кривизна приводит к появлению второй галочки на ВАХ (или двойной ступеньки, если смотреть в разрезе) - эффект, которого не было за счёт температуры или случайных длин стержней. Двойная ступенька размывается температурой.
- Появление второй галочки связано с расширением проводящей области. Однако беспорядок расширяет её ещё и вширь, в отличие от температуры и случайных длин стержней, которые лишь размывает края на ВАХ.

Глава 7

Заключение

Мы разработали аппарат для исследования ОЭТ в беспорядке. Осталось только применить этот аппарат и сделать выводы.

Например, основной результат статьи [1]: щель ВАХ имеет острый пик вблизи Эйлеровской неустойчивости. Ожидается, что беспорядок размывает этот пик, и мы собираемся это исследовать.

Конечно же, нужно обосновать численный метод для нулевой температуры или реализовать его более аккуратно.

Автор данной работы выражает свою искреннюю благодарность Тихонову К.С., Бурмистрову И.С., Качоровскому В.Ю. за интересную и продуктивную работу в составе научной группы и познавательные обсуждения.

Список литературы

- [1] Guillaume Weick, Felix Von Oppen, and Fabio Pistoiesi. Euler buckling instability and enhanced current blockade in suspended single-electron transistors. *Physical Review B*, 83(3):035420, 2011.
- [2] DV Averin and KK Likharev. Coulomb blockade of single-electron tunneling, and coherent oscillations in small tunnel junctions. *Journal of low temperature physics*, 62(3):345–373, 1986.
- [3] Panayotis Benetatos and Eugene M. Terentjev. Stretching semiflexible filaments with quenched disorder. *Physical Review E*, 82(5), Nov 2010.
- [4] Лев Давидович Ландау and Евгений Михайлович Лифшиц. Курс теоретической физики. Том. 7. Теория упругости. - Сер. 5. 2001.
- [5] P Werner and W Zwerger. Macroscopic quantum effects in nanomechanical systems. *Europhysics Letters (EPL)*, 65(2):158–164, jan 2004.