

Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Сверхпроводящий диодный эффект в SN бислоях

Студент:

Б02-009 группы

Дмитриевцев Юрий Алексеевич

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Фоминов Яков Викторович



Москва 2024

Аннотация

В данной работе исследуется диодный эффект в гибридной структуре сверхпроводник-нормальный металл в частном случае тонких слоев и прозрачной границы. Эффект рассматривается в грязном пределе, допускающем описание с помощью уравнений Узаделя. Получено уравнение на функцию Грина, аналогичное уравнению теории Абрикосова — Горькова для сверхпроводника с магнитными примесями. Получены зависимости для критических токов в предельных случаях: случая нулевой температуры и случая, близкого к фазовому переходу.

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи	6
2.1	Уравнение Узаделя	6
2.2	Угловая параметризация	7
2.3	Уравнение Узаделя в SN бислое	7
3	Решение уравнений Узаделя	11
3.1	Решение первого уравнения Узаделя	11
3.2	Решение второго уравнения Узаделя	12
4	Диодный эффект в предельных случаях	15
4.1	Диодный эффект при нулевой температуре в малом магнитном поле . . .	17
4.2	Диодный эффект вблизи фазового перехода	18
5	Заключение	21
6	Приложение 1 (Вычисление поправки от поля тока)	22
7	Приложение 2 (Вычисление концентрации сверхпроводящих электронов)	25
7.1	Случай нулевой температуры	25
7.1.1	Вычисление параметра порядка	25
7.1.2	Концентрации при нулевой температуре	29
7.2	Случай, близкий к фазовому переходу	30
7.2.1	Критический паразитизирующий параметр	30
7.2.2	Вычисление параметра порядка	31
7.2.3	Концентрация вблизи фазового перехода	33

1 Введение

В последние годы в научном сообществе вызывает интерес сверхпроводящий диодный эффект (SDE) [1]. Этот эффект очень интересен как с чисто научной, так и с прикладной сторон. На его основе возможно реализовать множество приборов для сверхпроводящей электроники: диоды, выпрямители тока, фильтры и т.д.

Диодный эффект заключается в несимметричности свойств транспорта тока при протекании в разные стороны вдоль некоторой структуры, в частности различаются значения критического тока, ответственного за разрушение сверхпроводимости. Подобного рода эффект наблюдается в множестве различных структур: джозефсоновские контакты, СКВИДы, различные гибридные структуры. Необходимыми ингредиентами для асимметричности являются нарушения симметрий. Как правило, достаточно выделения определенного направления, вдоль которого и будет изучаться транспорт тока, нарушения симметрии по отношению к инверсии и относительно обращения времени.

Одной из структур, где может наблюдаться такой эффект, является бислоем из сверхпроводника и нормального металла, находящийся в параллельном магнитном поле. За счет эффекта близости возникает градиент концентрации сверхпроводящих электронов в направлении, перпендикулярном плоскости бислоя. Таким образом, выделяется направление, перпендикулярное этому градиенту и магнитному полю. Также магнитное поле нарушает симметрию обращения времени, а значит, можно ожидать диодный эффект.

В сентябре 2023 года вышла статья ([2]), в которой численно и экспериментально был изучен диодный эффект в бислое MoN/Cu. Численный счет был проведен для бислоя с толщиной каждого слоя $d = 4\xi \ll \lambda$ в грязном пределе, допускающем применение уравнений Узаделя. Грязный предел означает большую концентрацию немагнитных примесей ($l \ll \xi$). Тот факт, что толщина слоев порядка корреляционной длины, приводит к нетривиальному распределению параметра порядка, а значит, и концентрации сверхпроводящих электронов вдоль толщины образца. Это делает задачу нерешаемой аналитически в общем случае.

Однако задача допускает аналитическое решение в предельном случае совсем тонких слоев $d \ll \xi$. В этом случае задача сильно упрощается в силу однородности параметра порядка и концентрации в каждом из слоев. Но при этом многие закономерности для критических токов аналогичны таковым в общей задаче, что будет рассмотрено далее.

В этом случае диодный эффект можно просто качественно описать.

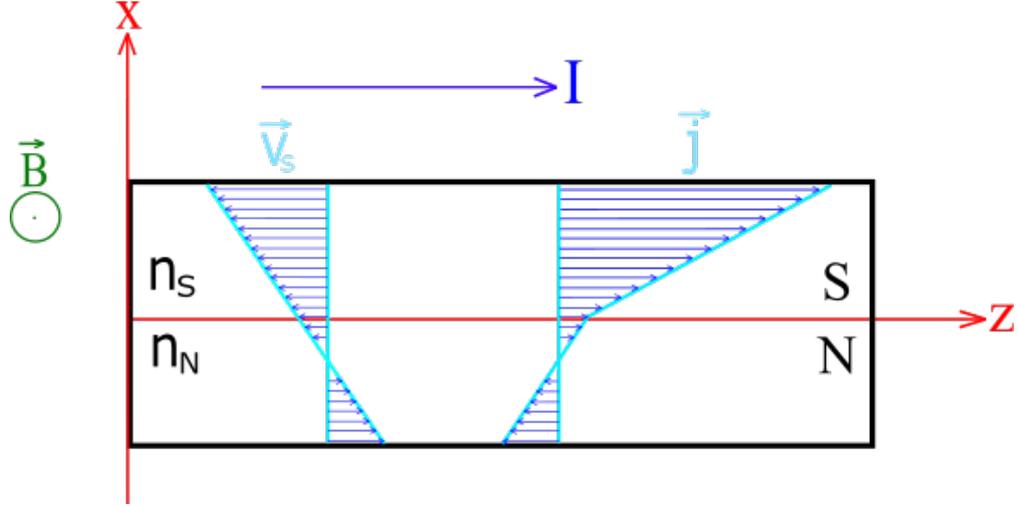


Рис. 1: Рисунок образца с качественными зависимостями сверхпроводящих скорости и тока в случае прозрачной границы.

В силу эффекта близости в нормальном металле возникает концентрация сверхпроводящих электронов $n_N < n_S$. Т.к. слои тонкие по сравнению с корреляционной длиной, можно считать эти концентрации постоянными. Аналогично, из-за тонкости по сравнению с лондоновской глубиной проникновения можно пренебречь экранировкой внешнего магнитного поля. Как известно из квантовой механики, вклад магнитного поля заключается в добавке к оператору импульса:

$$p \rightarrow p - eA(x), \quad (1)$$

что в терминах сверхтекучей скорости в постоянном магнитном поле [$A(x) = -Bx$] дает линейный закон для скорости:

$$v_s(x) = v_0 - \frac{eB}{m}x. \quad (2)$$

Плотность сверхтока же будет кусочно-линейной функцией координаты в силу неоднородной концентрации [$j_s(x) = -en(x)v_s(x)$]. Это приводит к тому, что нулевой ток через образец соответствует ненулевой средней сверхтекучей скорости (Finite momentum superconductivity). Отсюда следует, что критическая средняя скорость в двух противоположных направлениях ($\pm v_c$) соответствует двум разным критическим токам ($I_{m+} \neq I_{m-}$).

2 Постановка задачи

2.1 Уравнение Узаделя

Решение задачи будет использовать рассуждения, аналогичные проведенным в работе [3].

Свойства грязных систем описываются запаздывающей квазиклассической функцией Грина $\hat{R}(\vec{r}, E)$, являющейся матрицей 2x2 в пространстве Горькова — Намбу и удовлетворяющей условию нормировки $\hat{R}^2 = \hat{1}$. Она подчиняется уравнению Узаделя [4]:

$$D\nabla(\hat{R}\nabla\hat{R}) + i[\hat{H}, \hat{R}] = 0. \quad (3)$$

Здесь квадратные скобки — коммутатор, $D = \frac{1}{3}v_F l$ — коэффициент диффузии, v_F — скорость Ферми, l — длина свободного пробега, \hat{H} — гамильтониан в пространстве Горькова — Намбу:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E & \Delta \\ -\Delta^* & -E \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Уравнение Узаделя необходимо дополнить граничными условиями Куприянова — Лукичева [5], имеющими вид:

$$\sigma_l(\hat{R}_l\nabla_n\hat{R}_l) = \sigma_r(\hat{R}_r\nabla_n\hat{R}_r) = \frac{g_B}{2}[\hat{R}_l, \hat{R}_r], \quad (5)$$

где индексы l и r обозначают левую и правую стороны границы соответственно, σ — проводимость металла в нормальном состоянии, ∇_n — проекция градиента на нормаль границы, g_B — кондактанс границы на единицу площади.

С помощью функции Грина, найденной из уравнения Узаделя, нужно определить параметр порядка из уравнения самосогласования:

$$\hat{\Delta}(\vec{r}) = \frac{v_0\lambda}{4} \int_0^{\omega_D} dE \operatorname{th}\left(\frac{E}{2T}\right) [\hat{R}(\vec{r}, E) - \hat{R}(\vec{r}, -E)]_{o.d.}, \quad (6)$$

где индекс *o.d.* означает недиагональную часть матрицы, $v_0 = \frac{m^2 v_F}{\pi^2}$ — плотность состояний на поверхности Ферми, λ — эффективная константа электрон-фононного взаимодействия в сверхпроводнике, ω_D — дебаевская частота. При этом предполагается,

что в нормальном слое нет притяжения между электронами ($\lambda = 0$), следовательно, зануляется параметр порядка $\Delta = 0$.

2.2 Угловая параметризация

В силу условия нормировки для функции Грина, можно параметризовать ее двумя функциями θ и ϕ в следующем виде:

$$\hat{R}(\vec{r}, E) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -ie^{i\phi} \sin \theta \\ ie^{-i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\theta(\vec{r}, E)$ — угловой параметр, характеризующий сверхпроводящие корреляции (при $\theta = 0$ сверхпроводимость исчезает), $\phi(\vec{r}, E)$ — вещественная сверхпроводящая фаза, градиент которой ответственен за токовые состояния.

В этих терминах уравнение Узаделя принимает вид системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{D}{2} \nabla^2 \theta + \left[iE - \frac{D}{2} (\nabla \phi)^2 \cos \theta \right] \sin \theta + |\Delta| \cos \theta = 0, \\ \nabla(\sin^2 \theta \nabla \phi) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

С граничными условиями:

$$\begin{cases} \sigma_l \nabla_n \theta_l = g_B (\cos(\phi_r - \phi_l) \cos \theta_l \sin \theta_r - \sin \theta_l \cos \theta_r), \\ \sigma_r \nabla_n \theta_r = g_B (\cos \theta_l \sin \theta_r - \cos(\phi_r - \phi_l) \sin \theta_l \cos \theta_r), \\ \sigma_l \sin^2 \theta_l \nabla_n \phi_l = \sigma_r \sin^2 \theta_r \nabla_n \phi_r = g_B \sin(\phi_r - \phi_l) \sin \theta_l \sin \theta_r. \end{cases} \quad (9)$$

Уравнение самосогласования принимает вид:

$$\Delta = \frac{v_0 \lambda}{2} \int_0^{\omega_D} dE \operatorname{th} \left(\frac{E}{2T} \right) \operatorname{Im}(\sin \theta) e^{i\phi}. \quad (10)$$

Также для изучения свойств токовых состояний необходимо определить концентрацию сверхпроводящих электронов из следующей формулы:

$$n = \frac{2m\sigma}{e^2} \int_0^{\infty} dE \operatorname{th} \left(\frac{E}{2T} \right) \operatorname{Im}(\sin^2 \theta). \quad (11)$$

2.3 Уравнение Узаделя в SN бислое

Рассмотрим систему из слоев сверхпроводника ($0 < x < d_S$) и обычного металла ($-d_N < x < 0$) с наведенной сверхпроводимостью. Рассматриваем грязный предел тон-

ких слоев ($l \ll d \ll \xi, \lambda_{S(N)}$) и прозрачной границы ($g_B \rightarrow \infty$), где l — длина свободного пробега между немагнитными примесями, ξ — корреляционная длина сверхпроводника, $\lambda_{S(N)}$ — лондоновская глубина проникновения для сверхпроводника и нормального металла соответственно:

$$\begin{cases} \xi = \sqrt{\frac{D_S}{2\pi T_{c0}}}, \\ \lambda_{S(N)} = \sqrt{\frac{m}{4\pi n_{S(N)} e^2}}, \end{cases} \quad (12)$$

где D_S — коэффициент диффузии в сверхпроводнике, T_{c0} — его критическая температура, $n_{S(N)}$ — концентрация сверхпроводящих электронов.

Будем предполагать, что система однородная вдоль плоскости бислоя и все изменения в функции θ происходят лишь перпендикулярно слоям: $\theta = \theta(x)$. Аналогично фаза $\phi = \phi(x, z)$.

Образец находится в заданном внешнем магнитном поле B , направленном вдоль оси y . Также через образец течет заданный полный ток I , положительное направление которого — вдоль оси z . Для учета магнитного поля необходимо произвести замену в уравнениях: $\nabla\phi \rightarrow 2m\vec{v}_s = \nabla\phi + 2e\vec{A}$.

Таким образом, первое уравнение Узаделя примет вид:

$$\begin{cases} \frac{D_S}{2} \partial_x^2 \theta_S + \left[iE - \frac{D_S}{2} (2m\vec{v}_s(x))^2 \cos \theta_S \right] \sin \theta_S + |\Delta| \cos \theta_S = 0, \\ \frac{D_N}{2} \partial_x^2 \theta_N + \left[iE - \frac{D_N}{2} (2m\vec{v}_s(x))^2 \cos \theta_N \right] \sin \theta_N = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Градиент фазы $\nabla\phi$ направлен по оси z , как и ток. С учетом направления магнитного поля и тока получим для сверхскорости:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B(x) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_s(x) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$v_s(x) = \frac{1}{2m} \partial_z \phi(x, z) + \frac{eA(x)}{m}. \quad (15)$$

Теперь рассмотрим граничные условия. В пределе прозрачной границы граничные

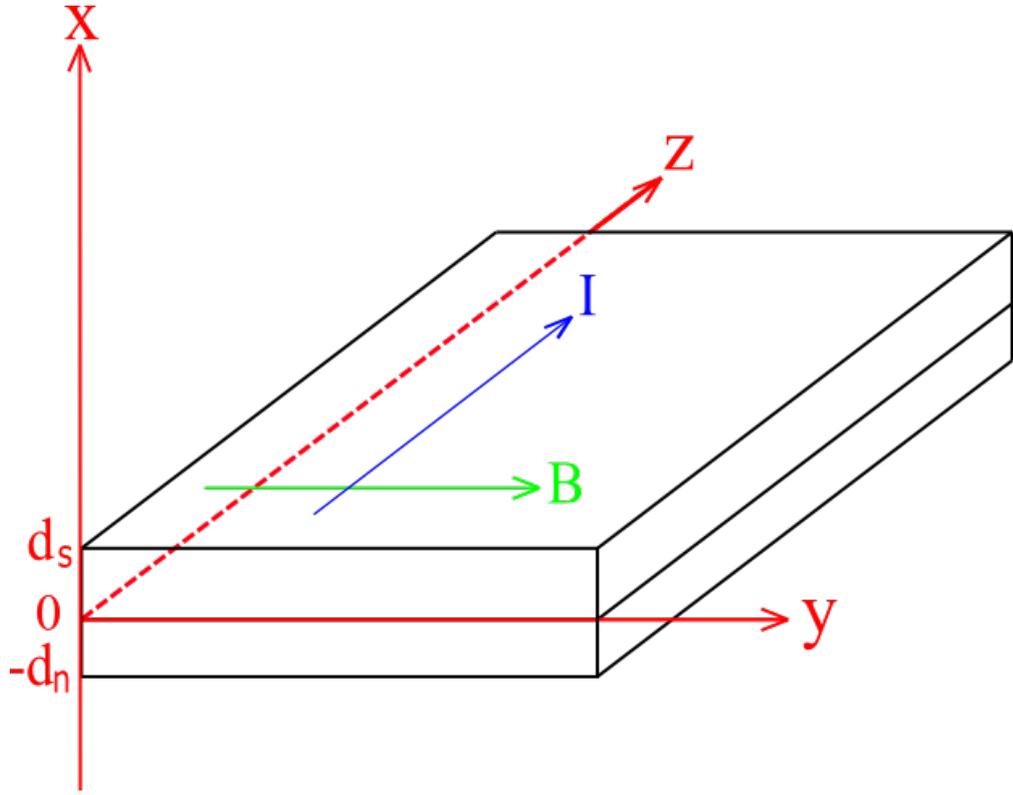


Рис. 2: Рисунок образца.

условия на фазу и на ее градиент:

$$\begin{cases} \phi_S = \phi_N, \\ \sigma_S \sin^2 \theta_S \partial_x \phi_S = \sigma_N \sin^2 \theta_N \partial_x \phi_N, \end{cases} \quad (x = 0, \forall z) \Rightarrow \begin{cases} \partial_z \phi_S = \partial_z \phi_N, \\ \sigma_S \sin^2 \theta_S \partial_x \partial_z \phi_S = \sigma_N \sin^2 \theta_N \partial_x \partial_z \phi_N. \end{cases} \quad (16)$$

Тем самым можно упростить граничные условия для θ :

$$\sigma_S \partial_x \theta_S(0) = \sigma_N \partial_x \theta_N(0) = g_B \sin(\theta_S(0) - \theta_N(0)) \Rightarrow \begin{cases} \theta_S(0) = \theta_N(0), \\ \sigma_S \partial_x \theta_S(0) = \sigma_N \partial_x \theta_N(0). \end{cases} \quad (17)$$

Добавим граничные условия на краях образца (при $x = d_S, -d_N$ $\partial_x \theta = 0$). Вместе с граничными условиями на фазу полный набор граничных условий:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_S(0) = \theta_N(0), \\ \sigma_S \partial_x \theta_S(0) = \sigma_N \partial_x \theta_N(0), \\ \partial_x \theta_S(d_S) = 0, \\ \partial_x \theta_N(-d_N) = 0, \\ \partial_z \phi_S(x=0) = \partial_z \phi_N(x=0), \\ \sigma_S \partial_x \partial_z \phi_S(x=0) = \sigma_N \partial_x \partial_z \phi_N(x=0). \end{array} \right. \quad (18)$$

Также будем считать заданным полный ток, текущий через образец. Для него получим уравнение:

$$I = \int_{-d_N}^{d_S} j(x) dx = -e \left(n_S \int_0^{d_S} v_s(x) dx + n_N \int_{-d_N}^0 v_s(x) dx \right). \quad (19)$$

Тем самым задача заключается в решении уравнений Узаделя с этим набором граничных условий и условием на полный ток.

3 Решение уравнений Узаделя

3.1 Решение первого уравнения Узаделя

Рассмотрим первое уравнение Узаделя:

$$\begin{cases} \partial_x^2 \theta_S + \left[\frac{2iE}{D_S} - 4m^2 v_s(x)^2 \cos \theta_S \right] \sin \theta_S + \frac{2|\Delta|}{D_S} \cos \theta_S = 0, \\ \partial_x^2 \theta_N + \left[\frac{2iE}{D_N} - 4m^2 v_s(x)^2 \cos \theta_N \right] \sin \theta_N = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Поскольку слои много тоньше корреляционной длины ξ , параметр θ меняется слабо. Разложим по неоднородности:

$$\theta(x) = \bar{\theta} + \delta\theta(x), \quad \delta\theta \ll \theta. \quad (21)$$

И линеаризуем уравнения:

$$\begin{cases} \partial_x^2 \delta\theta_S + \frac{2iE}{D_S} \sin \bar{\theta}_S - 2m^2 v_s(x)^2 \sin 2\bar{\theta}_S + \frac{2|\Delta|}{D_S} \cos \bar{\theta}_S + \\ + \left(\frac{2iE}{D_S} \cos \bar{\theta}_S + 4m^2 v_s(x)^2 \cos 2\bar{\theta}_S - \frac{2|\Delta|}{D_S} \sin \bar{\theta}_S \right) \delta\theta_S = 0, \\ \partial_x^2 \delta\theta_N + \frac{2iE}{D_N} \sin \bar{\theta}_N - 2m^2 v_s(x)^2 \sin 2\bar{\theta}_N + \\ + \left(\frac{2iE}{D_N} \cos \bar{\theta}_N + 4m^2 v_s(x)^2 \cos 2\bar{\theta}_N \right) \delta\theta_N = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Можно пренебречь самой величиной $\delta\theta$, оставив лишь ее производную, и упростить уравнение интегрированием по толщине образца (от 0 до d_S и от $-d_N$ до 0). С учетом граничных условий на границах образца ($x = d_S, -d_N$), получим:

$$\begin{cases} -\partial_x \delta\theta_S(0) + \frac{2id_S E}{D_S} \sin \bar{\theta}_S - \frac{d_S E_S}{D_S} \sin 2\bar{\theta}_S + \frac{2d_S |\Delta|}{D_S} \cos \bar{\theta}_S = 0, \\ \partial_x \delta\theta_N(0) + \frac{2id_N E}{D_N} \sin \bar{\theta}_N - \frac{d_N E_N}{D_N} \sin 2\bar{\theta}_N = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где введены величины, имеющие размерность энергии:

$$\begin{cases} E_S = 2m^2 D_S \langle v_s(x)^2 \rangle_S = \frac{2m^2 D_S}{d_S} \int_0^{d_S} v_s(x)^2 dx, \\ E_N = 2m^2 D_N \langle v_s(x)^2 \rangle_N = \frac{2m^2 D_N}{d_N} \int_{-d_N}^0 v_s(x)^2 dx. \end{cases} \quad (24)$$

С учетом граничного условия на границе между пластинами ($\bar{\theta}_S = \bar{\theta}_N = \theta$ — средний угловой параметр, $\sigma_S \partial_x \delta \theta_S(0) = \sigma_N \partial_x \delta \theta_N(0)$) между слоями, получим:

$$\frac{2d_S \sigma_S}{D_S} \left((iE - E_S \cos \theta) \sin \theta + |\Delta| \cos \theta \right) = -\frac{2d_N \sigma_N}{D_N} (iE - E_N \cos \theta) \sin \theta, \quad (25)$$

что можно преобразовать, введя перенормированные величины. Получаем уравнение на параметр θ , которое определяет θ как функцию от E :

$$\frac{i\tilde{E}}{\cos \theta} + \frac{|\tilde{\Delta}|}{\sin \theta} = \frac{1}{\tau_s}, \quad (26)$$

где введены обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{E} = (1 + \eta)E, \\ \tilde{\Delta} = \eta\Delta, \\ \eta = \frac{\sigma_S d_S D_N}{\sigma_N d_N D_S}, \\ \beta = \frac{\sigma_S d_S}{\sigma_N d_N}, \\ \frac{1}{\tau_s} = \eta E_S + E_N = 2m^2 D_N \left(\beta \langle v_s(x)^2 \rangle_S + \langle v_s(x)^2 \rangle_N \right). \end{array} \right. \quad (27)$$

Уравнение имеет вид уравнения для функции Грина из теории Абрикосова — Горькова для грязного сверхпроводника с парамагнитными примесями [6]. В этой теории параметр τ_s , введенный здесь как некоторая функция от магнитного поля и тока, играет роль времени свободного пробега между парамагнитными примесями. По аналогии с этой теорией будем называть $1/\tau_s$ параразрушающим параметром. Заметим также, что вся информация о магнитном поле и токе собралась в этом параметре, а значит, весь диодный эффект состоит в том, как поле и ток входят в этот параметр, и симметричности его относительно обращения тока. То есть, ожидается $\tau_s(B, I) \neq \tau_s(B, -I)$. Но должна быть полная симметрия относительно обращения времени: $\tau_s(B, I) = \tau_s(-B, -I)$, что в частности означает, что диодный эффект пропадает в отсутствие магнитного поля: $\tau_s(0, I) = \tau_s(0, -I)$.

3.2 Решение второго уравнения Узаделя

Для дальнейшего анализа необходимо определить параразрушающий параметр в уравнении (26). Поэтому рассмотрим уравнения, связанные с фазой ϕ .

Будем считать заданными внешнее магнитное поле и полный ток через образец. Требуется найти сверхтекучую скорость $v_s(B, I)$, которая нужна для определения $\theta(B, I)$.

Уравнение Узаделя на фазу решается тривиально:

$$\nabla(\sin^2 \theta \vec{v}_s) = \sin 2\theta (\nabla \theta \vec{v}_s) + \sin^2 \theta \partial_z v_s = 0. \quad (28)$$

Также пренебрежем магнитным полем, создаваемым полным током, текущим через образец, по сравнению с внешним полем:

$$B(x) = B = \text{const} \Rightarrow A(x) = -Bx. \quad (29)$$

Тонкость пластин вместе с граничными условиями на непрерывность фазы на границе позволяет считать ее градиент константой: $\partial_z \phi(x, z) = \text{const}$. Тогда из (15) получим:

$$v_s(x) = v_0 - \frac{eB}{m}x. \quad (30)$$

Далее будут упомянуты случаи при полях, сравнимых или меньших характерного поля тока $B \lesssim B_I$, где $B_I = 2\pi I$. В этом случае нельзя пренебрегать полем, создаваемым полным током через образец. Однако, можно показать, что и в этом случае формула (30) законна (см. Приложение 1).

Коэффициент v_0 можно получить из условия на полный ток через образец:

$$\begin{aligned} I = \int_{-d_N}^{d_S} j(x) dx &= -e \left(n_S \int_0^{d_S} v_s(x) dx + n_N \int_{-d_N}^0 v_s(x) dx \right) = \\ &= -ev_0(n_S d_S + n_N d_N) + \frac{e^2 B}{2m} (n_S d_S^2 - n_N d_N^2), \end{aligned} \quad (31)$$

$$v_0 = \frac{eB}{2m} \frac{n_S d_S^2 - n_N d_N^2}{n_S d_S + n_N d_N} - \frac{I}{e(n_S d_S + n_N d_N)}, \quad (32)$$

где концентрации $n_{S(N)}$ определяются из (11):

$$\begin{cases} n_S(x) = \frac{2m\sigma_S}{e^2} \int_0^\infty dE \operatorname{th} \left(\frac{E}{2T} \right) \operatorname{Im}(\sin^2 \theta_S(x, E)), \\ n_N(x) = \frac{2m\sigma_N}{e^2} \int_0^\infty dE \operatorname{th} \left(\frac{E}{2T} \right) \operatorname{Im}(\sin^2 \theta_N(x, E)). \end{cases} \quad (33)$$

В пределе прозрачной границы $\theta_S(x, E) = \theta_N(x, E) = \theta$. А значит, концентрации постоянны в каждом слое и удовлетворяют простому соотношению:

$$\frac{n_S}{n_N} = \frac{\sigma_S}{\sigma_N}. \quad (34)$$

Вместо концентрации удобно переписать все в терминах лондоновской глубины проникновения $\lambda_{S(N)}$:

$$v_0 = \frac{eB}{2m} \frac{\beta d_S - d_N}{\beta + 1} - \frac{4\pi eI}{m} \frac{\lambda_S^2}{d_S} \frac{\beta}{\beta + 1}. \quad (35)$$

Заметим, что вклад тока умножается на большой множитель $\sim (\lambda/d)^2$, поэтому пренебречь этим слагаемым нельзя.

Тогда можно найти паразитирующий параметр из определения (27):

$$\frac{1}{\tau_s} = \frac{D_N(\beta + 1)}{2} \left[\left(\frac{8\pi\beta}{1+\beta} Ie \frac{\lambda_S^2}{d_S} \right)^2 + (BeL)^2 + \frac{32\pi\beta}{1+\beta} BIe^2 \frac{\lambda_S^2 d_{eff1}}{d_S} \right], \quad (36)$$

$$\begin{cases} d_{eff1} = \frac{\beta d_S - d_N}{\beta + 1}, \\ d_{eff2}^2 = \frac{\beta d_S^2 + d_N^2}{\beta + 1}, \\ L^2 = \frac{4}{3} d_{eff2}^2 - d_{eff1}^2 > 0. \end{cases} \quad (37)$$

Здесь видно, что за диодный эффект отвечает член $\sim BI$. При этом в отсутствие одного из вкладов паразитирующий параметр пропорционален квадрату оставшегося, а значит, эффекта нет.

4 Диодный эффект в предельных случаях

Дальнейшее повествование опирается на результаты теории Абрикосова — Горькова для грязных сверхпроводников с парамагнитными примесями. Для изучения диодного эффекта необходимо знание поведения паразарушающего параметра от температуры $\tau_s(T)$, а также зависимости параметра порядка и концентрации сверхпроводящих электронов от температуры и паразарушающего параметра $\tilde{\Delta}(T, 1/\tau_s)$, $n_S(T, 1/\tau_s)$. Т.к. эти результаты отличаются от известных лишь перенормировкой величин, они вынесены в Приложение 2. Далее везде будем пользоваться обезразмеренными переменными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \frac{1}{\tau_s |\tilde{\Delta}_0|}, \\ \bar{\Delta} = \frac{|\tilde{\Delta}|}{|\tilde{\Delta}_0|}, \\ \varepsilon = \frac{\tilde{E}}{|\tilde{\Delta}_0|}, \\ t = \frac{\tilde{T}}{|\tilde{\Delta}_0|} = \frac{T(1+\eta)}{|\tilde{\Delta}_0|}, \end{array} \right. \quad (38)$$

где $\tilde{\Delta}_0 = \eta \Delta_0$ — перенормированный параметр порядка при нулевой температуре в отсутствие магнитного поля и тока:

$$|\tilde{\Delta}_0| = 2\omega_D e^{-1/\Lambda}. \quad (39)$$

Здесь Λ — перенормированная константа электрон-фононного взаимодействия:

$$\Lambda = \frac{v_0 \lambda \eta}{2(1+\eta)}. \quad (40)$$

Вычисление критических токов проводится так же, как и в аналогичной задаче в обычной сверхпроводящей пластине [7]. Необходимо найти максимум тока как функции среднего импульса сверхпроводящих электронов. В нашем случае вместо среднего импульса $\bar{q} = 2mv_0 - Be(d_S - d_N)$ удобнее использовать параметр $q = 2mv_0 - Bed_{eff1}$, который отличается лишь сдвигом.

$$\begin{cases} I(q) = -I_0 \frac{n_S(\Gamma(q))}{n_0} \frac{q}{q_c}, \\ I_0 = \frac{1 + \beta}{2\beta} \frac{ed_S}{m} n_0 q_c \sim \frac{d}{e\xi\lambda^2}, \\ q_c = \sqrt{\frac{2\Gamma_c |\tilde{\Delta}_0|}{D_N(\beta + 1)}} \sim \frac{1}{\xi}. \end{cases} \quad (41)$$

Здесь «критический» импульс q_c соответствует критическому параразрушающему параметру (в пределе нулевого магнитного поля), но не критическому току. Как известно, в тонких слоях разрушение сверхпроводимости за счет тока не обусловлено фазовым переходом. Это связано с тем, что по мере увеличения тока увеличивается сверхскорость сверхпроводящих электронов, что сопровождается уменьшением их концентрации. Происходит так называемое распаривание. При достижении критического тока концентрация падает до такой степени, что электронов не хватает для дальнейшего увеличения тока. При превышении критического тока несверхпроводящие электроны приходят в движение, и сверхпроводник переходит в резистивное состояние.

Параразрушающий параметр в этих терминах запишется в следующем виде:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_c} = \left(\frac{q}{q_c}\right)^2 + \left(\frac{B}{B_c}\right)^2 + \Xi \frac{B}{B_c} \frac{I}{I_0}. \quad (42)$$

Здесь B_c — критическое магнитное поле бислоя, Ξ — безразмерная константа:

$$\begin{cases} B_c = \frac{q_c}{eL} \sim \frac{1}{ed\xi}, \\ \Xi = \frac{32\pi\beta}{1+\beta} B_c I_0 e^2 \frac{\lambda_S^2 d_{eff1}}{d_S}. \end{cases} \quad (43)$$

В общем случае критический ток определяется как экстремум функции $I_m = I(q_m)$. Импульс здесь определяется из уравнения:

$$\frac{n'_S(\Gamma(q_m))}{n_S(\Gamma(q_m))} = -\frac{1}{q_m^2}. \quad (44)$$

Решение осложнено невозможностью аналитически получить вид функции $n_S(\Gamma)$ в общем случае произвольной температуры и произвольных соотношений между током и полем. Однако, в некоторых предельных случаях удастся получить явные выражения.

4.1 Диодный эффект при нулевой температуре в малом магнитном поле

Рассмотрим предел нулевой температуры. Здесь известна зависимость $n_S(\Gamma)$ (см. Приложение 2: 7.1.2). Случай, который можно аналитически рассмотреть, — случай малого магнитного поля. Будем считать вклад магнитного поля в паразарушающий параметр (42) малым: $B \ll B_c$.

При полном отсутствии магнитного поля картина, как и полагается, симметрична.

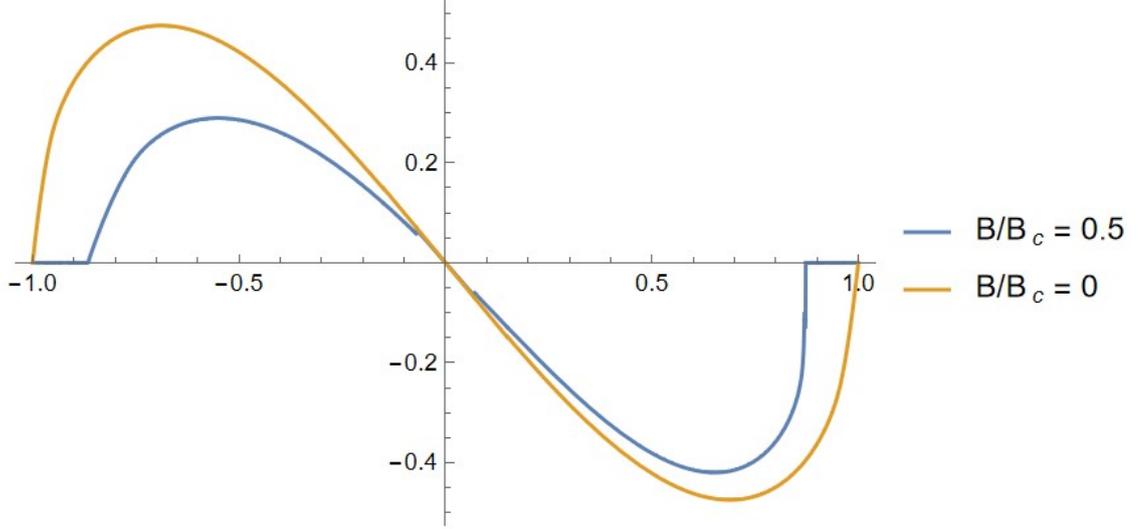


Рис. 3: Зависимость I/I_0 от q/q_c , при $\frac{B}{B_c} = 0$ и $\frac{B}{B_c} = 0.5$.

Как видно из графика, критические токи достигаются при $q_m \approx 0.7q_c \Rightarrow \Gamma(q_m) \approx 0.25 < \Gamma' \approx 0.46$. В этой области сверхпроводимость сопровождается щелью в спектре, и малое магнитное поле не выводит из этой области. Это значит, что зависимость для концентрации имеет простой вид:

$$n_S(\Gamma) = n_0 \left(\bar{\Delta}(\Gamma) - \frac{4}{3\pi} \Gamma \right), \quad (45)$$

где параметр порядка определяется из уравнения (см. Приложение 2):

$$\ln \bar{\Delta} + \frac{\pi}{4} \frac{\Gamma}{\Delta} = 0. \quad (46)$$

При нулевом поле решаем (44):

$$\Phi(\ln \bar{\Delta}_{m0}) = -\frac{\Gamma}{q_{m0}^2} = -\frac{1}{2}. \quad (47)$$

Здесь введена функция:

$$\Phi(x) = x \frac{16 + 3\pi^2 + 16x}{(1+x)(3\pi^2 + 16x)}, \quad (48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Delta}_{m0} = \exp \left[\frac{(-16 - 3\pi^2 + \sqrt{256 + 32\pi^2 + 9\pi^4})}{32} \right] \approx 0.8, \\ \Gamma_{m0} = -\frac{4}{\pi} \bar{\Delta}_{m0} \ln \bar{\Delta}_{m0} \approx 0.24, \\ q_{m0} = \sqrt{2\Gamma_{m0}} q_c \approx 0.7q_c, \\ I_{m0} = \pm I_0 \frac{n_S(\Gamma_{m0})}{n_0} \frac{q_{m0}}{q_c} \approx \pm 0.48I_0. \end{array} \right. \quad (49)$$

С учетом же магнитного поля картина становится несимметричной.

Решаем уравнение (44) по теории возмущений с малым параметром B/B_c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\Delta}_{m\pm} = \bar{\Delta}_{m0} \left(1 \mp \frac{I_{m0}/I_0}{2\Phi'(\ln \bar{\Delta}_{m0}) q_{m0}/q_c} \Xi \frac{B_0}{B_c} \right) \approx \bar{\Delta}_{m0} \left(1 \mp 0.17 \Xi \frac{B_0}{B_c} \right), \\ \Gamma_{m\pm} = -\frac{4}{\pi} \bar{\Delta}_{m\pm} \ln \bar{\Delta}_{m\pm} \approx \Gamma_{m0} \left(1 \pm 0.57 \Xi \frac{B_0}{B_c} \right), \\ q_{m\pm} = \sqrt{2\Gamma_{m\pm}} q_c \approx q_{m0} \left(1 \pm 0.78 \Xi \frac{B_0}{B_c} \right), \\ I_{m\pm} = I_0 \frac{n_S(\Gamma_{m\pm})}{n_0} \frac{q_{m\pm}}{q_c} \approx I_{m0} \left(1 \pm 0.50 \Xi \frac{B_0}{B_c} \right), \end{array} \right. \quad (50)$$

$$\frac{I_{m+} - I_{m-}}{I_{m0}} = 1.01 \Xi \frac{B}{B_c}. \quad (51)$$

Получаем разные критические токи в разных направлениях, как и ожидалось. Магнитное поле помогает подавлять сверхпроводимость в одном направлении и частично компенсирует в другом.

4.2 Диодный эффект вблизи фазового перехода

Второй интересный случай — вблизи фазового перехода. Близость подразумевается в смысле $|\Gamma - \Gamma_c(T)| \ll 1$. В частности, это покрывает область вблизи критического поля $B \rightarrow B_c$ при нулевой температуре, недостижимую в предыдущем рассмотрении, а также область при произвольном поле вблизи критической температуры $t \rightarrow t_c$.

Простота этого случая заключается в простых зависимостях концентрации и параметра порядка от паразарушающего параметра. При этом вся зависимость от температуры прячется в константы $\Gamma_c(t), n_0(t), q_c(t), I_0(t)$.

Уравнение, определяющее ток:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{q}{q_c} \left(\frac{q^2}{q_c^2} + \left(\frac{B}{B_c} \right)^2 + \Xi \frac{B}{B_c} \frac{I}{I_0} - 1 \right). \quad (52)$$

Условия экстремума дают систему:

$$\begin{cases} 3 \frac{q_m^2}{q_c^2} + \left(\frac{B}{B_c} \right)^2 + 2\Xi \frac{B}{B_c} \frac{q_m^3}{q_c^3} = 1, \\ \frac{I_m}{I_0} = -2 \frac{q_m^3}{q_c^3}. \end{cases} \quad (53)$$

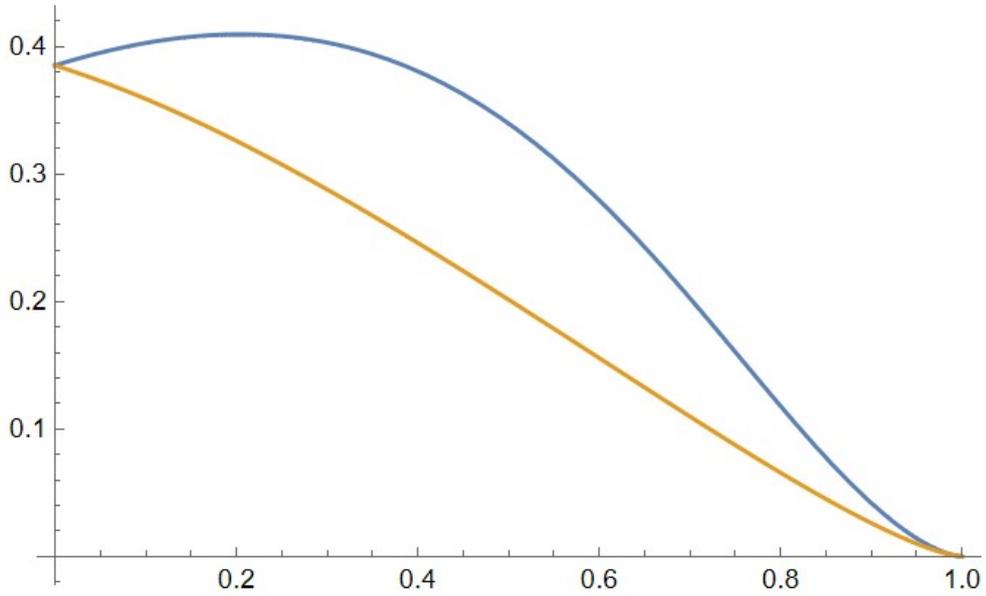


Рис. 4: Зависимость $I_{m\pm}/I_0$ от B/B_c при $\Xi = 1$

Заметим, что больший критический ток имеет немонотонную зависимость от поля и, соответственно, максимум, что качественно совпадает с численным счетом в [2]. Как и полагается, при этом направлении поля $I_{m+} > I_{m-}$. Также они оба зануляются в критическом поле, где пропадает сверхпроводимость.

$$\frac{I_{m+} - I_{m-}}{I_0} = \begin{cases} \frac{2}{9} \frac{B}{B_c}, & B \ll B_c, \\ \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \left(1 - \frac{B}{B_c}\right)^{3/2}, & B_c - B \ll B_c. \end{cases} \quad (54)$$

5 Заключение

В работе рассмотрен сверхпроводящий диодный эффект на примере SN бислоя. Рассматривался бислой в параллельном магнитном поле и вычислялись критические токи, текущие в противоположных направлениях перпендикулярно магнитному полю. Получены результаты для тонкого ($d \ll \xi, \lambda$) бислоя в грязном пределе с прозрачной границей.

С помощью уравнения Узаделя найдено уравнение, определяющее функцию Грина. Задача сведена к известной теории Абрикосова — Горькова для грязного сверхпроводника с парамагнитными примесями. Роль параразрушающего параметра $1/\tau$, здесь играет сумма вкладов магнитного поля и тока. Диодный эффект определяется изменением параразрушающего параметра при замене знака тока.

Рассмотрены два случая, допускающие аналитическое решение задачи: случай нулевой температуры и малого магнитного поля и случай, близкий к фазовому переходу. Они выделяются простой зависимостью концентрации сверхпроводящих электронов от параразрушающего параметра.

Известно, что в тонких слоях разрушение сверхпроводимости током не сопровождается фазовым переходом. Поэтому для нахождения критического тока использовался метод, заключающийся в рассмотрении тока как функции среднего импульса сверхпроводящих электронов и нахождении ее экстремумов ([7]). Были найдены соотношения для разностей критических токов.

В будущем планируется рассмотрение случаев неидеальной границы: сильно прозрачной для тонких слоев и слабо прозрачной для слоев $d \sim \xi \ll \lambda$.

6 Приложение 1 (Вычисление поправки от поля тока)

Отдельно стоит рассмотреть случай слабых магнитных полей в том смысле, что:

$$B \lesssim B_I. \quad (55)$$

В этом случае нельзя пренебречь полем, создаваемым током, по сравнению с внешним полем.

Как известно из магнитостатики, постоянный ток, текущий по плоскости, создает на поверхности магнитное поле $B_I = 2\pi I$. Причем это поле направлено в противоположные стороны с разных сторон от плоскости. А значит, поле по две стороны от пластины принимает значения:

$$\begin{cases} B_+ = B + B_I, \\ B_- = B - B_I. \end{cases} \quad (56)$$

Получаем, что для того чтобы учесть поле тока, нельзя пренебрегать изменением магнитного поля внутри образца.

Решим более общую задачу: найдем распределение магнитного поля внутри пластины произвольной толщины, а потом устремим толщину в нуль.

Используем уравнение Лондонов и уравнение Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{v}_s(x) = \frac{e}{m} \vec{B}(x), \\ \nabla \times \vec{B}(x) = 4\pi \vec{j}(x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \partial_x v_s(x) = -\frac{e}{m} B(x), \\ \partial_x B(x) = -4\pi e n_{S(N)} v_s(x). \end{cases} \quad (57)$$

Необходимо учесть условие на внешнее поле $[B(x) = B_+, x > d_S; B(x) = B_-, x < -d_N]$. Также надо, чтобы магнитное поле и сверхскорость были непрерывны на границе между пластинами. А значит, имеем следующие граничные условия на магнитное поле:

$$\begin{cases} B(d_S) = B + B_I =: B_+, \\ B(-d_N) = B - B_I =: B_-, \\ B(+0) = B(-0), \\ \lambda_S^2 \partial_x B(+0) = \lambda_N^2 \partial_x B(-0). \end{cases} \quad (58)$$

Решение этих уравнений:

$$\begin{cases} B(0 < x < d_S) = \mu \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_S} + \frac{v}{\lambda_S} \operatorname{sh} \frac{x}{\lambda_S}, \\ B(-d_N < x < 0) = \mu \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_N} + \frac{v}{\lambda_N} \operatorname{sh} \frac{x}{\lambda_N}, \end{cases} \quad (59)$$

где коэффициенты:

$$\begin{cases} \mu = \frac{B_+ \lambda_S \operatorname{sh} \frac{d_N}{\lambda_N} + B_- \lambda_N \operatorname{sh} \frac{d_S}{\lambda_S}}{\lambda_S \operatorname{ch} \frac{d_S}{\lambda_S} \operatorname{sh} \frac{d_N}{\lambda_N} + \lambda_N \operatorname{ch} \frac{d_N}{\lambda_N} \operatorname{sh} \frac{d_S}{\lambda_S}}, \\ v = \lambda_S \lambda_N \frac{B_+ \operatorname{ch} \frac{d_N}{\lambda_N} - B_- \operatorname{ch} \frac{d_S}{\lambda_S}}{\lambda_S \operatorname{ch} \frac{d_S}{\lambda_S} \operatorname{sh} \frac{d_N}{\lambda_N} + \lambda_N \operatorname{ch} \frac{d_N}{\lambda_N} \operatorname{sh} \frac{d_S}{\lambda_S}}. \end{cases} \quad (60)$$

Теперь разложим их по малому d/λ :

$$\begin{cases} \mu = B + B_I \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \\ v = \frac{B d_N - d_S \beta}{2} \frac{1 + \beta}{1 + \beta} + \frac{2 B_I \beta \lambda_S^2}{1 + \beta} \frac{1}{d_S}. \end{cases} \quad (61)$$

Отсюда и из уравнения Лондонов получим сверхскорость:

$$\begin{cases} v_s(0 < x < d_S) = -\frac{e}{m} \left(\mu \lambda_S \operatorname{sh} \frac{x}{\lambda_S} + v \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_S} \right) \approx -\frac{ev}{m} \left(1 + \frac{\mu}{v} x \right), \\ v_s(-d_N < x < 0) = -\frac{e}{m} \left(\mu \lambda_N \operatorname{sh} \frac{x}{\lambda_N} + v \operatorname{ch} \frac{x}{\lambda_N} \right) \approx -\frac{ev}{m} \left(1 + \frac{\mu}{v} x \right). \end{cases} \quad (62)$$

Откуда получаем:

$$v_0 = -\frac{ev}{m} \Rightarrow q = -2ev = Be \frac{d_S \beta - d_N}{1 + \beta} - \frac{8\pi e I \beta \lambda_S^2}{1 + \beta} \frac{1}{d_S}, \quad (63)$$

что совпадает с ранее полученным.

Но изменился коэффициент в линейной зависимости сверхскорости:

$$\mathcal{A} = \frac{Be}{mv_0} \rightarrow -\frac{\mu}{v} = \frac{Be}{mv_0} \left(1 + 2\pi \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \frac{I}{B} \right). \quad (64)$$

Эта поправка играет роль при небольших полях. Однако, если $B \lesssim B_I$, то $B \ll B_I(\lambda/d)^2$, а значит:

$$q \approx -\frac{8\pi eI\beta}{1+\beta} \frac{\lambda_S^2}{d_S} \sim I \frac{\lambda^2}{d} \Rightarrow \mathcal{A} \sim \frac{B}{v_0} \sim \frac{B}{I} \frac{d}{\lambda^2} \ll \frac{1}{d}. \quad (65)$$

То есть даже при малых полях учет поля тока дает очень малый вклад $\sim d^2/\lambda^2$.

7 Приложение 2 (Вычисление концентрации сверхпроводящих электронов)

Для определения необходимых зависимостей понадобятся уравнение, определяющее параметр θ в безразмерном виде:

$$i\varepsilon + \bar{\Delta} \operatorname{ctg} \theta = \Gamma \cos \theta, \quad (66)$$

и уравнение самосогласования, которое запишем сразу в удобном виде:

$$\bar{\Delta} \ln \frac{t}{t_c} = \operatorname{Im} \int_0^\infty d\varepsilon \operatorname{th} \left(\frac{\varepsilon}{2t} \right) \left(\sin \theta(\varepsilon) - \frac{i\bar{\Delta}}{\varepsilon} \right). \quad (67)$$

Здесь $t_c = \frac{e^\gamma}{\pi} \approx 0.57$ — безразмерная критическая температура. $\gamma \approx 0.577$ — постоянная Эйлера.

7.1 Случай нулевой температуры

7.1.1 Вычисление параметра порядка

При нулевой температуре интеграл в уравнении самосогласования можно взять, подставив энергию ε как функцию θ :

$$\operatorname{Im} \int_0^\infty d\varepsilon \sin \theta(\varepsilon) = \operatorname{Re} \left[\frac{\Gamma}{2} \left(\theta_\infty - \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_\infty \right) - \bar{\Delta} \ln \frac{\operatorname{tg}(\theta_\infty/2)}{\operatorname{tg}(\theta_0/2)} \right], \quad (68)$$

где θ_0 и θ_∞ — параметр θ при нулевой и бесконечной энергиях соответственно. На больших энергиях из (66) получим:

$$\theta(\varepsilon \rightarrow \infty) \approx \frac{i\bar{\Delta}}{\varepsilon} \rightarrow 0. \quad (69)$$

Это значит, что в первой части выражения для интеграла (после Γ) можно положить θ_∞ нулем, а во второй части (логарифм после $\bar{\Delta}$) соответствующее слагаемое пойдет на компенсацию логарифмического вклада.

Получаем уравнение на параметр порядка:

$$\ln \bar{\Delta} = \frac{\Gamma}{2\bar{\Delta}(\Gamma)} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta_0 - \theta_0 \right) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right|. \quad (70)$$

Осталось найти параметр θ_0 . Решений уравнения (66) при нулевой энергии существует множество. Чтобы выбрать правильное решение, нужно вспомнить, что интеграл в уравнении самосогласования после перехода к интегрированию по θ брался вдоль некоторого комплексного контура с конечными точками θ_0 и $\theta_\infty = 0$.

Рассмотрим области $\operatorname{Re} \varepsilon(\theta) = 0$ и $\operatorname{Im} \varepsilon(\theta) = 0$ при небольших Γ ($\Gamma < \bar{\Delta}$) на комплексной плоскости (рис. 5). Пересечение этих областей даст решение уравнения θ_0 . При изменении энергии от 0 до бесконечности оранжевая область рисунка будет искажаться до тех пор, пока наше решение не придет непрерывно в 0. Тем самым надо брать решения, которые лежат на кривой, связанной с нулем (на рис. 5 это Φ -образная конструкция в правой части рисунка).

Однако, это дает 4 разных подходящих корня. Чтобы определиться с выбором, вспомним, что изначально уравнения Узаделя описывали запаздывающую функцию Грина. Чтобы учесть ее запаздывающий характер, можно добавить к энергии малую мнимую часть $+i0$. Модифицированные контуры изображены на рис. 6. Здесь видно, что подходит лишь $\theta_0 = \pi/2$.

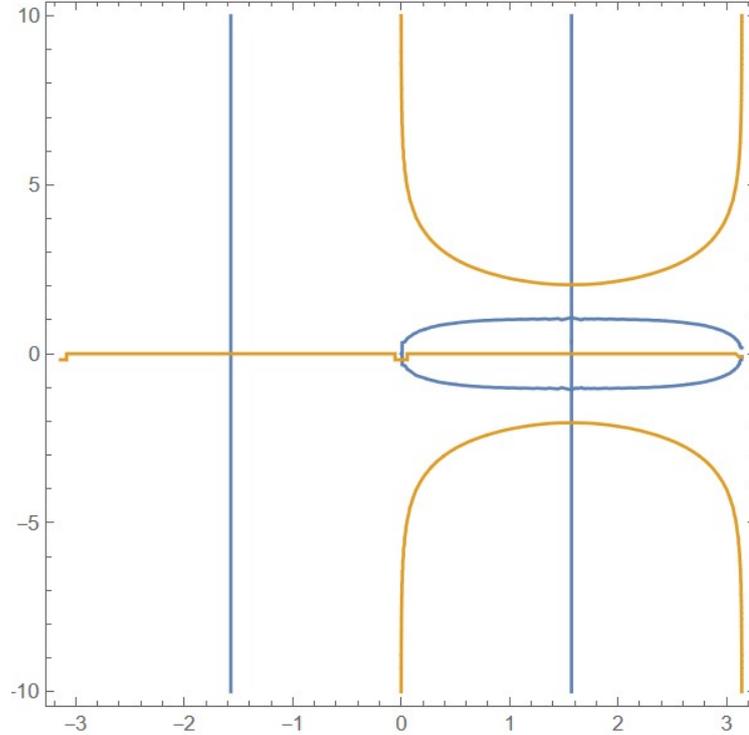


Рис. 5: Область $\operatorname{Im} \varepsilon(\theta) = 0$ (синяя) и $\operatorname{Re} \varepsilon(\theta) = 0$ (оранжевая) при $\Gamma/\bar{\Delta} < 1$.

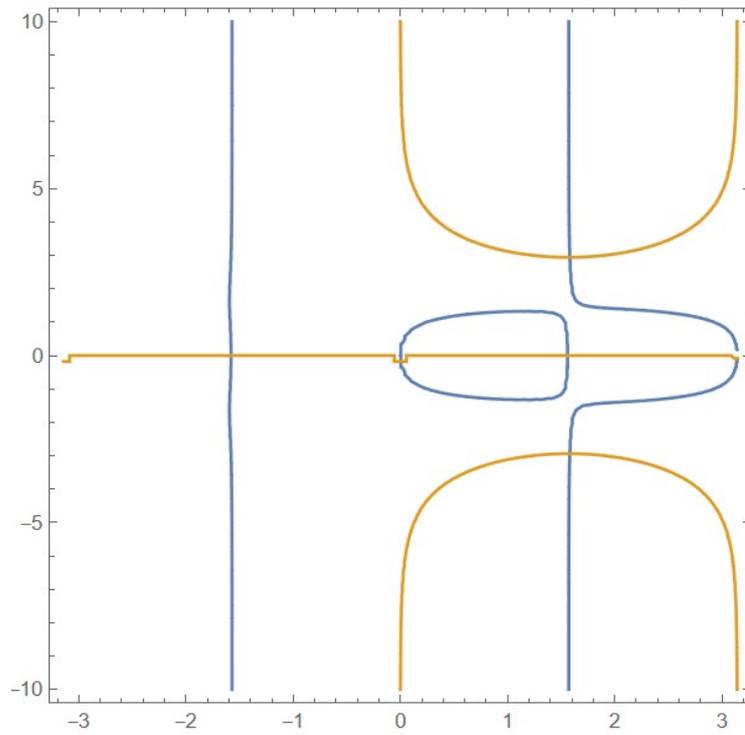


Рис. 6: Область $\text{Im } \varepsilon(\theta) = 0.01$ (синяя) и $\text{Re } \varepsilon(\theta) = 0$ (оранжевая) при $\Gamma/\bar{\Delta} < 1$.

Однако, это справедливо лишь при $\Gamma < \bar{\Delta}$. В обратном же случае контур видоизменяется и $\theta_0 = \arcsin \frac{\bar{\Delta}}{\Gamma}$.

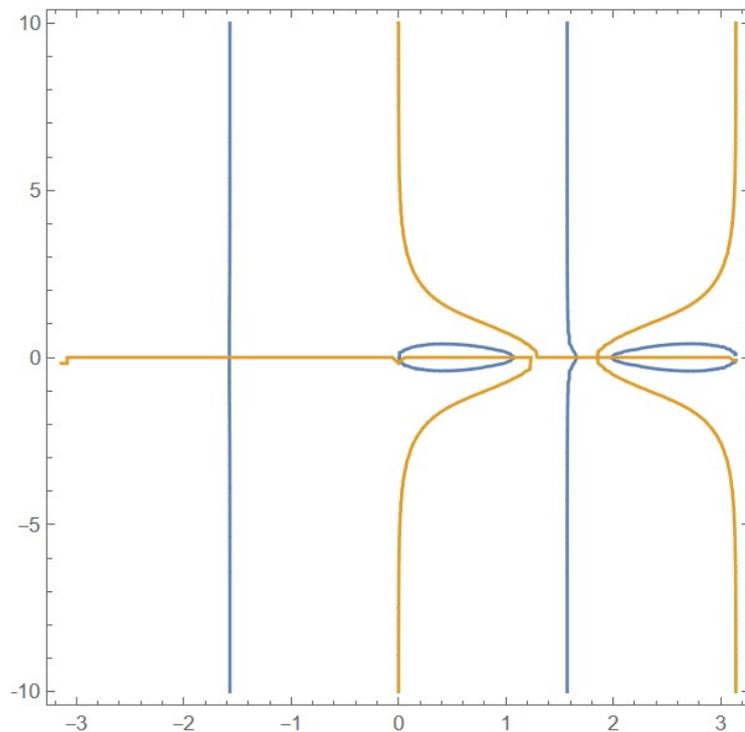


Рис. 7: Область $\text{Im } \varepsilon(\theta) = 0.01$ (синяя) и $\text{Re } \varepsilon(\theta) = 0$ (оранжевая) при $\Gamma/\bar{\Delta} > 1$.

Итого получим для параметра порядка:

$$\ln \bar{\Delta} + f\left(\frac{\Gamma}{\bar{\Delta}}\right) = 0, \quad (71)$$

где введена функция f :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x; & x < 1, \\ \operatorname{arch}x + \frac{x}{2}\left(\arcsin \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right); & x > 1, \end{cases} \quad (72)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}x - \frac{4\sqrt{2}}{15}(x-1)^{5/2}; & 0 < x-1 \ll 1, \\ \ln 2x + \frac{1}{12x^2}; & x \gg 1. \end{cases} \quad (73)$$

Удобно также ввести функцию:

$$F(x) = f(x) - \ln x. \quad (74)$$

Тогда можно явно записать зависимость параметра порядка от разрушающего параметра в следующем виде:

$$\bar{\Delta}(\Gamma) = \Gamma / F^{-1}(-\ln \Gamma). \quad (75)$$

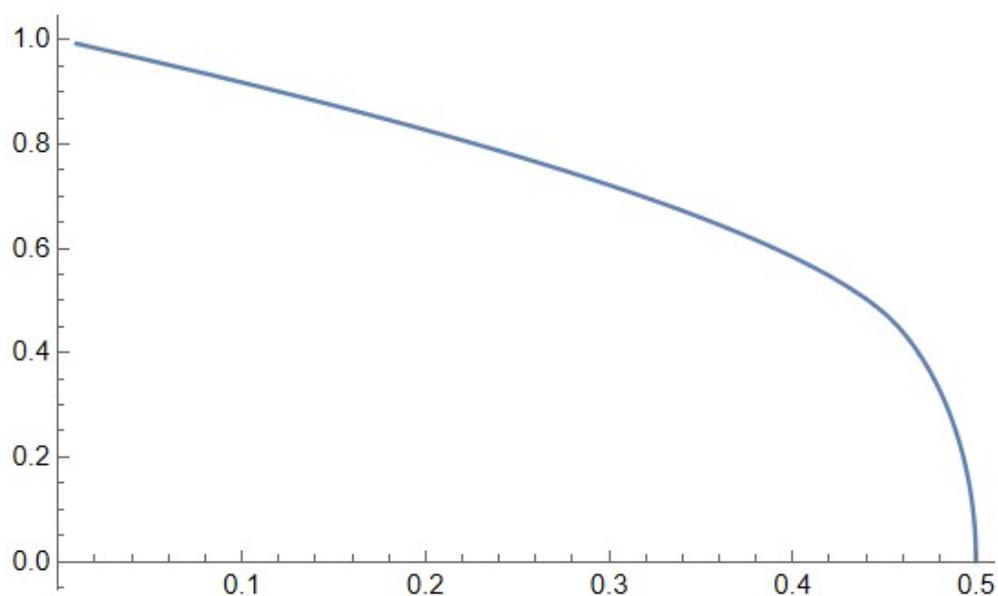


Рис. 8: Зависимость $\bar{\Delta}$ от Γ .

Рассмотрим предельные случаи и особые точки.

При малых магнитном поле и токе ($\Gamma \ll 1$):

$$\bar{\Delta} = 1 - \frac{\pi}{4}\Gamma. \quad (76)$$

Противоположный предельный случай соответствует критическому разрушающему параметру ($\Gamma \rightarrow \Gamma_c$). В этом случае исчезает сверхпроводимость, а значит, $\bar{\Delta} \rightarrow 0$. Тогда из уравнения (71) получим, раскладывая функцию f при большом аргументе:

$$\begin{cases} \bar{\Delta} = \sqrt{6}\sqrt{\Gamma_c - \Gamma}, \\ \Gamma_c = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (77)$$

Следующая интересная точка соответствует неаналитическому поведению функции f :

$$\bar{\Delta}(\Gamma') = \Gamma' = e^{-\pi/4} \approx 0.46. \quad (78)$$

Как известно из теории Абрикосова — Горькова, эта точка соответствует обращению щели в спектре возбуждений сверхпроводника в нуль и переходу в режим бесщелевой сверхпроводимости.

7.1.2 Концентрации при нулевой температуре

Аналогичным способом найдем теперь концентрацию из (11):

$$n_S = \frac{2}{\pi} n_0 \operatorname{Re} \left[\bar{\Delta}(\theta_0 - \theta_\infty) + \frac{\Gamma}{12} (9 \cos \theta_0 - 9 \cos \theta_\infty + \cos 3\theta_\infty - \cos 3\theta_0) \right]. \quad (79)$$

Здесь n_0 — концентрация сверхпроводящих электронов в отсутствие магнитного поля и тока:

$$n_0 = \frac{\pi m \sigma_S |\tilde{\Delta}_0|}{e^2 (1 + \eta)}. \quad (80)$$

Подставив ранее найденные $\theta_{0(\infty)}$, получим:

$$\frac{n_S(\Gamma)}{n_0} = \frac{2}{\pi} \bar{\Delta}(\Gamma) g \left(\frac{\Gamma}{\bar{\Delta}(\Gamma)} \right). \quad (81)$$

Здесь введена функция:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}; & x < 1, \\ \arcsin \frac{1}{x} - \frac{x}{3} \left(2 - 3\sqrt{1 - 1/x^2} + (1 - 1/x^2)^{3/2} \right); & x > 1, \end{cases} \quad (82)$$

$$\frac{n_S(\Gamma)}{n_0} = \begin{cases} 1 - \frac{4\Gamma}{3\pi}; & \Gamma \rightarrow 0, \\ \frac{24}{\pi}(\Gamma_c - \Gamma); & \Gamma \rightarrow \Gamma_c = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (83)$$

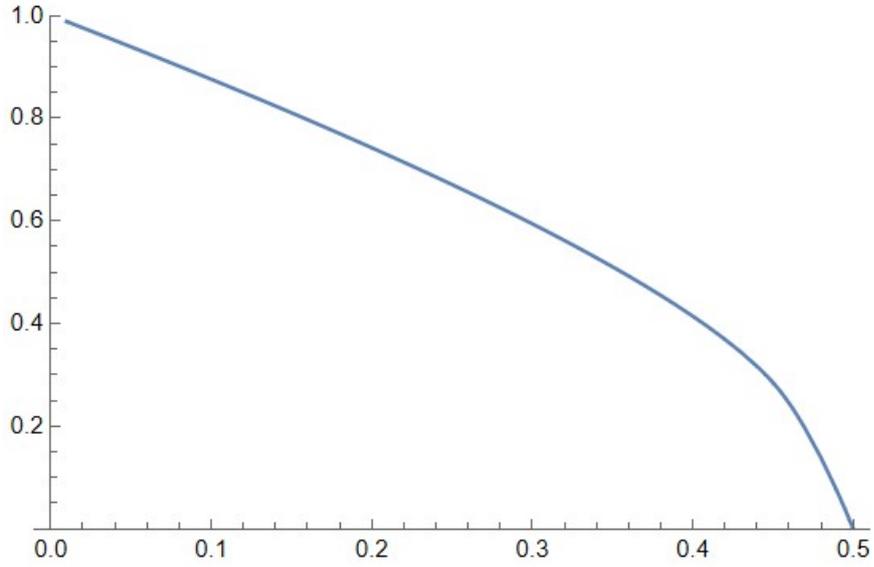


Рис. 9: Зависимость n_s/n_0 от Γ .

7.2 Случай, близкий к фазовому переходу

Второй интересный случай — близкий к фазовому переходу $\Gamma \rightarrow \Gamma_c(T)$.

7.2.1 Критический паразарушающий параметр

Для анализа случая при произвольной температуре удобно рассматривать уравнение самосогласования в мацубаровском представлении:

$$\bar{\Delta} \ln \frac{t}{t_c} = 2\pi t \sum_{\varepsilon_n} \left(\sin \theta(\varepsilon_n) - \frac{\bar{\Delta}}{\varepsilon_n} \right). \quad (84)$$

Вблизи перехода $\theta \ll 1$, тогда из уравнения (26) можно явно выразить:

$$\theta \approx \frac{\bar{\Delta}}{\varepsilon_n + \Gamma}. \quad (85)$$

Подставим в уравнение самосогласования (84):

$$\ln \frac{t}{t_c} = 2\pi t \sum_{\varepsilon_n} \left(\frac{1}{\varepsilon_n + \Gamma_c} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n + 1/2 + \Gamma_c/(2\pi t)} - \frac{1}{n + 1/2} \right). \quad (86)$$

Перепишав в терминах дигамма функции ψ , получим уравнение, связывающее критический разрушающий параметр и температуру:

$$\ln \frac{t_c}{t} = \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_c}{2\pi t} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right). \quad (87)$$

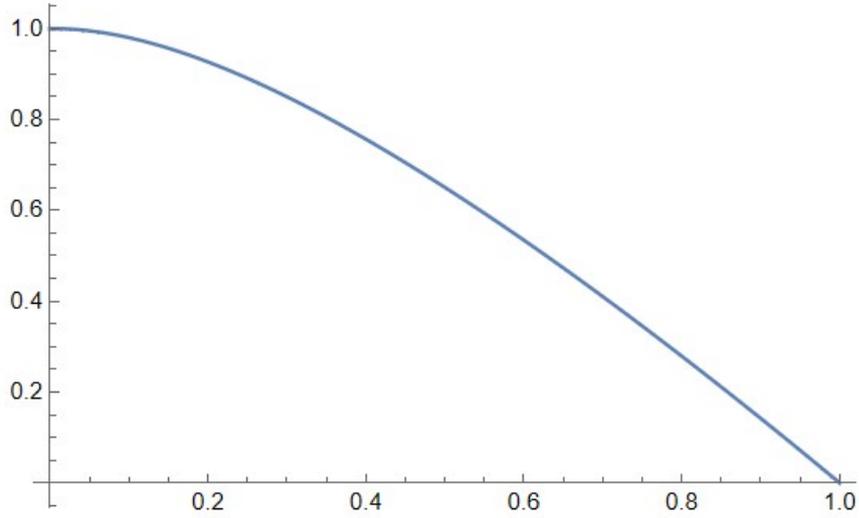


Рис. 10: Зависимость $\frac{\Gamma_c}{\Gamma_c(0)}$ от $\frac{t}{t_c}$.

7.2.2 Вычисление параметра порядка

Для определения тока необходимо установить поведение концентрации сверхпроводящих электронов при произвольной температуре. Для этого разложим уравнение самосогласования и основное уравнение (26) до второго порядка по $\bar{\Delta}$:

$$\theta \approx \frac{\bar{\Delta}}{\varepsilon_n + \Gamma} - \frac{1}{6} \frac{(2\varepsilon_n - \Gamma)\bar{\Delta}^3}{(\varepsilon_n + \Gamma)^4}, \quad (88)$$

$$\sin \theta \approx \frac{\bar{\Delta}}{\varepsilon_n + \Gamma} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_n \bar{\Delta}^3}{(\varepsilon_n + \Gamma)^4}. \quad (89)$$

Используем мацубаровское уравнение самосогласования:

$$\begin{aligned} \ln \frac{t}{t_c} &= -\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi t} \right) + \Psi \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{\bar{\Delta}^2}{16\pi^2 t^2} \left(\Psi'' \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi t} \right) + \frac{1}{3} \frac{\Gamma}{2\pi t} \Psi''' \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi t} \right) \right) = \\ &= -\Psi \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_c}{2\pi t} \right) + \Psi \left(\frac{1}{2} \right), \end{aligned} \quad (90)$$

где последнее равенство следует из (87).

Раскладывая по Γ вблизи Γ_c , получаем параметр порядка:

$$\bar{\Delta}^2(t, \Gamma) = 8\pi t (\Gamma_c(t) - \Gamma) \Psi \left(\frac{\Gamma_c(t)}{2\pi t} \right), \quad (91)$$

где введена функция:

$$\Psi(x) = - \frac{\Psi' \left(\frac{1}{2} + x \right)}{\Psi'' \left(\frac{1}{2} + x \right) + \frac{x}{3} \Psi''' \left(\frac{1}{2} + x \right)}. \quad (92)$$

В предельных случаях получим известные результаты.

В случае без поля и тока $\Gamma = 0$, $t \rightarrow t_c$:

$$\bar{\Delta}^2(t, 0) = \frac{8\pi t_c^2}{7\zeta(3)} \left(1 - \frac{t}{t_c} \right). \quad (93)$$

В случае нулевой температуры воспроизводится ранее полученный результат (77) ($t = 0$, $\Gamma_c = 1/2$):

$$\bar{\Delta}^2(0, \Gamma) = 6 \left(\frac{1}{2} - \Gamma \right). \quad (94)$$

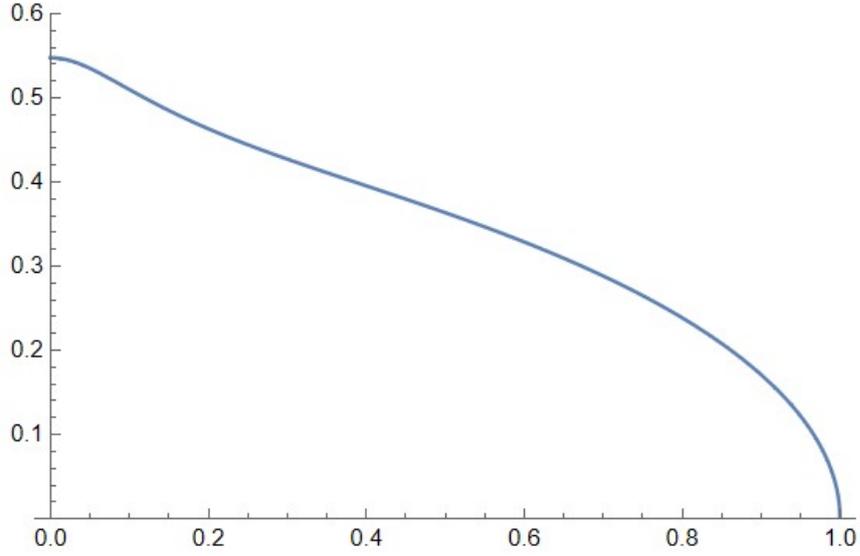


Рис. 11: Зависимость $\bar{\Delta}$ от t/t_c при $1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_c} = 0.1$

7.2.3 Концентрация вблизи фазового перехода

Аналогично с уравнением самосогласования, подставим явное выражение для параметра θ из (85) в выражение (11):

$$n_S = -\frac{n_0 \bar{\Delta}^2}{\pi t} \text{Im} \int_0^\infty \frac{\text{th} x dx}{(x + i\Gamma/2t)^2}. \quad (95)$$

Аналогично переходу к мацубаровскому представлению, возьмем интеграл методами ТФКП:

$$n_S = n_0 \frac{\bar{\Delta}^2}{\pi^2 t} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi t} \right). \quad (96)$$

Подставляя найденную ранее зависимость для параметра порядка, получим:

$$n_S(t, \Gamma) = \frac{8}{\pi} n_0 (\Gamma_c(t) - \Gamma) \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_c(t)}{2\pi t} \right) \Psi \left(\frac{\Gamma_c(t)}{2\pi t} \right) = n_0(t) \left(1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_c(t)} \right), \quad (97)$$

$$n_0(t) = \frac{8}{\pi} n_0 \Gamma_c(t) \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\Gamma_c(t)}{2\pi t} \right) \Psi \left(\frac{\Gamma_c(t)}{2\pi t} \right). \quad (98)$$

В предельном случае без поля и тока $\Gamma = 0$, $t \rightarrow t_c$, получим:

$$n_s = \frac{4\pi^2}{7\zeta(3)} n_0 (t_c - t). \quad (99)$$

Аналогично в случае нулевой температуры:

$$n_s = \frac{24}{\pi} n_0 \left(\frac{1}{2} - \Gamma \right). \quad (100)$$

Что воспроизводит ранее полученные результаты.

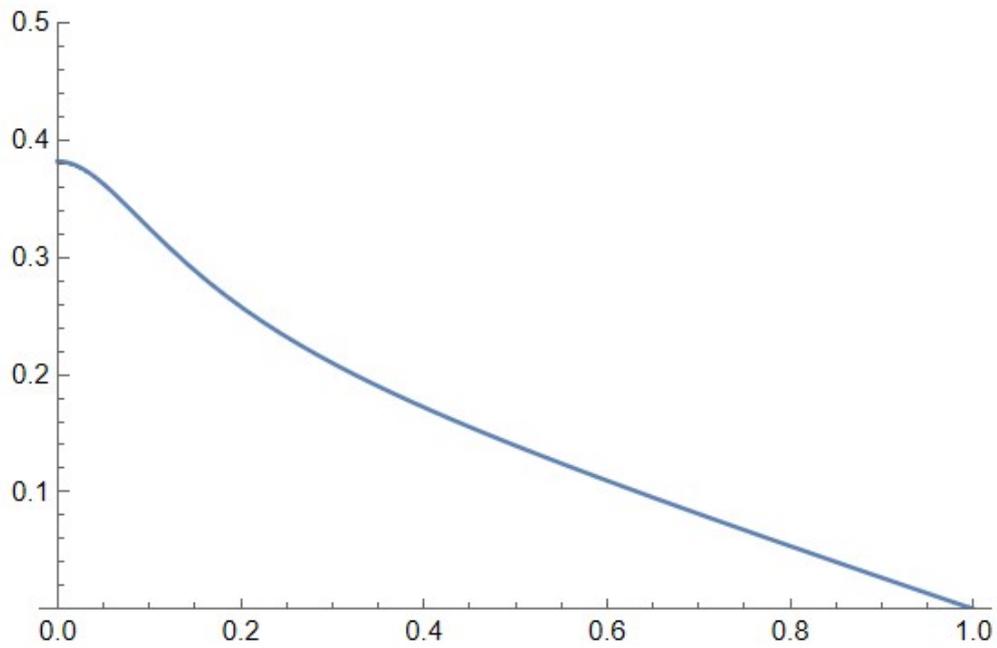


Рис. 12: Зависимость $n_s(t, \Gamma)/n_0(t=0)$ от t/t_c при $1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_c} = 0.1$

Список литературы

- [1] Nadeem, Muhammad. The superconducting diode effect / Muhammad Nadeem, Michael S. Fuhrer, Xiaolin Wang // *Nat. Rev. Phys.* — 2023. — Vol. 5, no. 10. — Pp. 558–577. <https://doi.org/10.1038/s42254-023-00632-w>.
- [2] Finite momentum superconductivity in superconducting hybrids: Orbital mechanism / M. Yu. Levichev, I. Yu. Pashenkin, N. S. Gusev, D. Yu. Vodolazov // *Phys. Rev. B.* — 2023. — Sep. — Vol. 108. — P. 094517. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.108.094517>.
- [3] Fominov, Ya. V. Superconductive properties of thin dirty superconductor–normal-metal bilayers / Ya. V. Fominov, M. V. Feigel'man // *Phys. Rev. B.* — 2001. — Feb. — Vol. 63. — P. 094518. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.63.094518>.
- [4] Usadel, Klaus D. Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys / Klaus D. Usadel // *Phys. Rev. Lett.* — 1970. — Aug. — Vol. 25. — Pp. 507–509. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.25.507>.
- [5] М.Ю. Куприянов, В.Ф. Лукичѐв / В.Ф. Лукичѐв М.Ю. Куприянов // *ЖЭТФ.* — 1988. — Vol. 94. — Pp. 139–149.
- [6] Абрикосов, А. А. К теории сверхпроводящих сплавов с парамагнитными примесями / А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков // *ЖЭТФ.* — 1960. — Vol. 39. — Pp. 1781–1796.
- [7] Шмидт, В. В. Введение в физику сверхпроводников. Изд. 2-е, испр. и доп. / В. В. Шмидт. — М.: МЦНМО, 2000. — Pp. 92–97.
- [8] Свидзинский, А. В. Пространственно неоднородные задачи теории сверхпроводимости / А. В. Свидзинский. — М., Наука, 2001.