Московский физико-технический институт

Кафедра проблем теоретической физики

Свойства состояний, локализованных в коре вихря в сильно неупорядоченном сверхпроводнике

(Дипломная работа бакалавра)

Выполнил: Даниил Карузин Константинович

Научный руководитель: Михаил Андреевич Скворцов

г. Долгопрудный

2024

Аннотация

В работе изучается средняя плотность состояний $\langle\rho(E)\rangle$ в коре вихря в грязной сверхпроводящей пленке. В квазиклассическом приближении на энергиях много меньших объемной щели ее можно считать константой. Отталкивание уровня от своего изображения приводит к модуляции $\langle\rho(E)\rangle$ на масштабе порядка среднего расстояния между уровнями. В главном порядке статистика уровней описывается теорией случайных матриц симметрийного класса C. В работе исследуются поправки к этому ответу по величине $1/g$, где g — безразмерный кондактанс пленки. Для описания системы используется метод суперсимметричной сигма модели. Нулевая мода, отвечающая за симметрию класса C, учитывается точно, а массивные флуктуации — пертурбативно. Вычислены все однопетлевые поправки к средней плотности состояний. Показано, что они приводят к перенормировке среднего расстояния между уровнями, оставляя неизменной функциональную форму нульмерного ответа.

Содержание

1 Введение

Как известно, наличие щели в сверхпроводнике затрудняет процессы диссипации энергии при низких температурах. В сверхпроводник II рода магнитное поле проникает в виде металлических нитей — вихрей размером порядка длины когерентности сверхпроводника ξ. В коре вихря есть уровни энергии, простирающиеся от энергии Ферми вплоть до объемной щели сверхпроводника Δ. Наличие таких уровней существенно упрощает возможность диссипации за счет переходов между этими уровнями, что проявляется в конечном сопротивлении при движении вихрей.

Задача о структуре таких локализованных состояний в чистом сверхпроводнике II рода была рассмотрена Кароли, де Женом и Матриконом [3]. Ими было получено, что в двумерном случае низколежащие состояния расположены на одинаковых расстояниях $\omega_0 \sim \Delta^2/E_F$, так что в в коре есть много ($N \sim E_F/\Delta_0$) уровней. Спектр дается выражением $E = \mu\omega_0$, где $\mu = 1/2 + n$ — полуцелый угловой момент квазичастицы.

Введение беспорядка перемешивает уровни энергии, но средняя плотность состояний не становится константой в сибу особой зеркальной симметрии уравнений Боголюбова-де Жена. Поведение плотности состояний зависит от времени упругого рассеяния на примесях τ. В умеренно чистом случае ($\omega_0 \ll 1/\tau \ll \Delta_0$) ответ чувствителен к типу рассеивателей [5]. В случае грязного сверхпроводника ($\Delta_0\tau \ll 1$) на малых энергиях реализуется универсальный предел случайных матриц класса C [1] (симметрия по обращению времени нарушена, а спиновая присутствует), в котором средняя глобальная плотность состояний дается выражением

$$\langle \rho_{\mathrm{C}}(E) \rangle = \frac{1}{\omega_0} \left(1 - \frac{\sin 2\pi E/\omega_0}{2\pi E/\omega_0} \right), \tag{1}$$

где ω_0 — среднее расстояние между уровнями энергии, которое в грязном случае отличается от найденного в работе [3] (см. уравнение (26) ниже).

Поправки к универсальному нульмерному пределу (1) малы по обратному кондактансу g и содержат специфическую информацию об эргодизации в системе, определяемой высшими диффузными модами [6].

2 Постановка задачи

В работе рассматривается тонкая пленка неупорядоченного сверхпроводника 2 рода. Целью является вычисление средней плотности состояний, локализованных в коре вихря.

2.1 Уравнение Узаделя

Стандартным подходом к вычислению плотности состояний в грязном случае является использование уравнения Узаделя. При наличии вихря уравнение Узаделя в калибровке ,где параметр порядка Δ действителен действителен, записывается как [7]

$$D\nabla^2\theta = 4D\frac{e^2A^2(r)}{\hbar^2c^2}\sin\theta\cos\theta - 2\Delta(r)\cos\theta - 2iE\sin\theta, \tag{2}$$

где D - коэффицент диффузии, $A(r)$ - векторный потенциал вихря, E - энергия. Спектральный угол определяется из соотношения между нормальной и аномальной функцией Грина: $F^2+G^2=1$, посредством подстановки

$$F = \sin\theta \quad G = \cos\theta. \tag{3}$$

Спектральный угол связан с запаздывающей функцией Грина соотношением

$$\cos\theta = \frac{i}{\nu\pi}G^R(\mathbf{r},\mathbf{r}). \tag{4}$$

Поэтому локальная плотность состояний будет даваться формулой

$$\rho_E(\mathbf{r}) = 2\nu\,\mathrm{Re}\cos\theta(\mathbf{r}), \tag{5}$$

где ν - плотность состояний на одну проекцию спина на энергии Ферми.

Главным пространственным масштабом является нуль-температурная длина когерентности грязного сверхпроводника:

$$\xi^2 = \frac{D}{2\Delta_0}. \tag{6}$$

В нашей задаче длина лондоновского проникновения сильно больше длины когерентности ($\lambda \gg \xi$). Это связано как с грязью, так и с пирловским увеличением в двумерной пленке. В калибровке, где параметр порядка Δ действителен, градиент фазы связан с векторном потенциалом вихря посредством следущей формулы

$$\nabla\phi = -2(eA/\hbar c)\mathbf{e}_\varphi. \tag{7}$$

. Как известно этот потеницал равен $A = -(\hbar c/2e\lambda)K_1(r/\lambda)$.Здесь K_1 - модифицированная функция Бесселя 2 рода. В рассматриваемом нами пределе $\lambda/\xi \gg 1$ векторный потенциал становится просто $\sim 1/r$. Тем самым можно написать:

$$\nabla\phi = \frac{1}{r}\mathbf{e}_\varphi. \tag{8}$$

Следуя работе [7], для профиля параметра порядка мы будем использовать анзац

$$\frac{\Delta(r/\xi)}{\Delta_0} = \frac{r/\xi}{\sqrt{(r/\xi)^2 + \pi/2}}. \tag{9}$$

Таким образом Уравнение Узаделя переписывается как:

$$D\nabla^2\theta = \frac{D}{r^2}\sin\theta\cos\theta - 2\Delta(r)\cos\theta - 2iE\sin\theta. \tag{10}$$

Уравнение Узаделя описывает систему в квазиклассическом приближении, которое не различает индивидуальные уровни энергии. Корреляции в положении уровней энергии, возникающией за счет квантовых интерференционных эффектов, можно заметить, если использовать формализм нелинейной сигма модели [4].

2.2 Суперсимметричная сигма модель

В соответсвии с [2], теория поля для неупорядоченного сверхпроводника, учитывающая зеркальную симметрию уравнения Боголюбова–де Жена, определяется действием

$$S = -\frac{\pi\nu}{8}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{str}[D(\nabla Q)^2 - 4(\hat{\Delta} + iE\tau_3\Sigma_3)Q], \tag{11}$$

где D - коэффицент диффузии, ν - плотность состояний на одну проекцию спина, E - энергия. Суперматрица 8×8 Q действует в пространстве 2×2 Намбу (N), пространстве 2×2 зарядового сопряжения (CC, 'charge conjugation') и 2×2 суперпространстве (BF, Бозе-Ферми). Пространство Намбу параметризуется матрицами Паули τ_i. Пространство зарядового сопряжения параметризуется матрицами Паули Σ_i. Матрица $\hat{\Delta}$ определяется как, $\Delta\tau_+ + \Delta^*\tau_-$.

Искомой величиной является средняя глобальная плотность состояний как функция энергии:

$$\rho = \frac{\nu}{4}\,\mathrm{Re}\int d\mathbf{r}\int \mathrm{str}(\tau_3\Sigma_3 k Q)e^{-S}D\mathcal{Q}, \tag{12}$$

где

$$k = \mathrm{diag}(1, -1)_{\mathrm{BF}}. \tag{13}$$

На матрицы Q наложены следущие симметрийные условия: [2]

$$Q^2 = 1, \tag{14}$$

$$\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{Q}}, \tag{15}$$

где операция зарядового сопряжения определена согласно

$$Q \equiv \tau_1 \gamma Q^T \gamma^T \tau_1, \tag{16}$$

с матрицей

$$\gamma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\Sigma_2 \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{CC}}. \tag{17}$$

2.3 Седловое решение

Варьируя действие (11) с учетом ограничения $Q^2 = 1$, можно получить седловое уравнение:

$$D\nabla(Q\nabla Q) + \left[Q, (iE\Sigma_3 + \hat{\Delta})\tau_3\right] = 0. \tag{18}$$

Симметрийное соотношение $Q^2 = 1$ позволяет записать единичную в BF пространстве Q матрицу в следующей параметризации:

$$Q_{\mathrm{Us}} = \begin{pmatrix} \cos\check{\theta} & e^{i\varphi}\sin\check{\theta} \\ e^{-i\varphi}\sin\check{\theta} & -\cos\check{\theta} \end{pmatrix}_{\mathrm{N}} \otimes \mathbb{1}_{\mathrm{BF}}, \tag{19}$$

где $\check{\theta} = \mathrm{diag}(\theta^{\mathrm{R}}, \theta^{\mathrm{A}})$ — диагональная матрица в пространстве CC, φ — фаза. Подстановка этой параметризации в уравнение (18) позволяет написать уравнение на спектральные углы θ («+» для R, «−» для A):

$$-D\nabla^2\theta + D(\nabla\phi)^2 \sin\theta\cos\theta \pm 2iE\sin\theta - 2\Delta\cos\theta = 0. \tag{20}$$

Уравнение для θ^R совпадает с приведенным в главе 2.1 уравнением Узаделя. Как обычно, спектральные углы связаны друг с другом посредством соотношения

$$\theta^{\mathrm{R}} + \theta^{\mathrm{A}} = \pi. \tag{21}$$

Поэтому седловое решение можно написать в виде

$$Q_{\mathrm{Us}} = \cos\theta^{\mathrm{R}}\,\tau_3\Sigma_3 + \sin\theta^{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{N}}. \tag{22}$$

3 Низкие энергии

3.1 Решение уравнения Узаделя на нулевой энергии

В дальнейшем мы будем интересоваться энергиями малыми по сравнению с величиной щели сверхпроводника далеко от вихря, Δ_0, поэтому нам понадобится знать поведение спектрального угла $\theta^R(r)$ на нулевой энергии.

Уравнение Узаделя в этом случае записывается как

$$-D\nabla^2\theta^R + D(\nabla\phi)^2\sin\theta^R\cos\theta^R - 2\Delta(r)\cos\theta^R = 0. \tag{23}$$

Обезразмеривая его посредством замены $R = r/\xi$, где ξ — длина локализации, можно переписать это уравнение в виде:

$$-\nabla_R^2\theta^R + \frac{1}{R^2}\sin\theta^R\cos\theta^R - \frac{\Delta(R)}{\Delta_0}\cos\theta^R = 0. \tag{24}$$

Численное решение уравнения (24) показано на Рис. 1. Оно подходит к нулю линейно, чтобы скомпенсировать сингулярность, содержащуюся в члене $1/R^2$. Данная зависимость была получена в работах [7, 2].

Стоит заметить, что спектральный угол $\theta^R(r)$ и $\nabla\phi$ зависят только от расстояния до центра

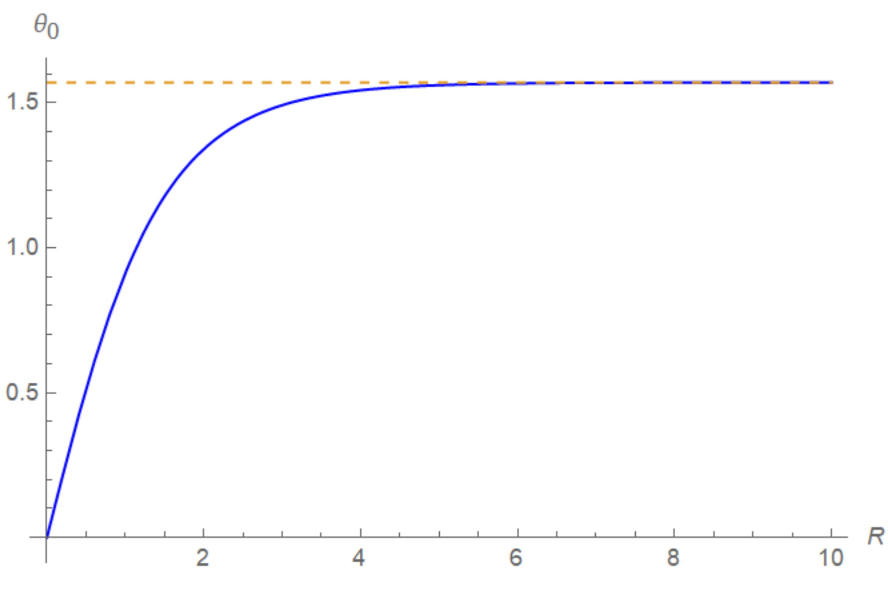

Рис. 1: Зависимость спектрального угла $\theta^R(R)$ на нулевой энергии от расстояния до центра вихря, $R = r/\xi$.

вихря, в связи с чем есть соотношения

$$\nabla\theta^R\nabla\phi = 0 \quad \nabla^2\phi = 0. \tag{25}$$

Локальная плотность состояний дается выражением $\rho_E(r) = 2\nu d\cos\theta_E^R(r)$, где d — толщина пленки. Интегральная плотность состояний на нулевой энергии определяет среднее расстояние между уровнями

$$\omega_0 = \langle\rho(E=0)\rangle^{-1} = \frac{1}{2C_1\nu d\xi^2}, \tag{26}$$

где безразмерный коэффициент

$$C_1 = \int d\mathbf{R}\cos\theta^R(R) \approx 9.8968. \tag{27}$$

Физически уравнение (26) означает, что кор вихря можно считать областью нормального металла порядка ξ. При этом стоит обратить внимание на большой численный коэффициент $2C_1 \approx 20$ в знаменателе.

Относительная поправка к плотности состояний при конечных энергиях ведет себя как $(E/\Delta_0)^2$ [2]. Поэтому при оценке числа состояний в коре вихря с положительной энергией можно использовать расстояние между уровнями при $E = 0$, что дает

$$N \approx \frac{\Delta_0}{\omega_0} = C_1\nu Dd, \tag{28}$$

где мы использовали соотношение (6). Вспоминая формулу Друде для проводимости: $\sigma = (e^2/\hbar)2\nu D$, где 2ν — полная плотность состояний на уровне Ферми с учетом обеих проекций спина, и определяя безразмерный кондактанс пленки g как

$$g = \frac{\sigma d}{e^2/\hbar}, \tag{29}$$

получаем оценку на число состояний:

$$N \approx \frac{C_1}{2}g \approx \frac{20\,k\Omega}{R_\square}, \tag{30}$$

где $R_\square$ — сопротивление пленки на квадрат.

Отметим, что на границе грязного предела, при $\Delta\tau \sim 1$, и при атомной толщине пленки ($d \sim \lambda_F$) расстояние между уровнями, определенное по формуле (30), совпадает с $\omega_0 \sim \Delta^2/E_F$, найденным в работе [3] для чистого двумерного случая.

3.2 Нулевое многообразие

При $E = 0$ существует целое седловое многобразие, на котором действие остается равным нулю. Возникновение такого многообразия связано с зеркальной симметрией уравнения Боголюбова–де Жена относительно энергии Ферми и было предсказано в работе Алтланда и Цирнбауэра [1]. В рассматриваемом случае речь идет о симметрийном классе C.

Зададим матрицу вращений T пропорциональную $\mathbb{1}_{\mathrm{N}}$ и постоянную в пространстве. Тогда вращение седлового решения (22) с помощью этой матрицы запишется как

$$Q_{\mathrm{zero}} = T^{-1} Q_{\mathrm{Us}} T = \cos\theta_0^{\mathrm{R}}\, \tau_3 \mathcal{Q} + \sin\theta_0^{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{N}}, \tag{31}$$

где $\mathcal{Q}$ — постоянная в пространстве («нульмерная») матрица

$$\mathcal{Q} = T^{-1} \Sigma_3 T. \tag{32}$$

При нулевой энергии действие (11) инвариантно под действием преобразования $Q_{\mathrm{Us}} \mapsto Q_{\mathrm{zero}}$ для любой матрицы T, симметрия которой соглсована с условием (15) для матрицы Q.

При конечной энергии возникает действие, снимающее вырождение седлового многообразия:

$$S_E[Q_{zero}] = \pi\nu i E\, \mathrm{str}_4(\Sigma_3 \mathcal{Q}) \int d\mathbf{r} \cos\theta_0^{\mathrm{R}} = \frac{i\pi E}{2\omega_0}\, \mathrm{str}_4(\Sigma_3 \mathcal{Q}). \tag{33}$$

где мы использовали выражение (26) для ω_0.

Симметрия для $T = t \otimes \mathbb{1}_N$ может быть записана как

$$t = \gamma (t^{-1})^T \gamma^T. \tag{34}$$

Используя эти симметрийные соотношения можно написать соотношения для $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{Q} = -\gamma \mathcal{Q}^T \gamma^T. \tag{35}$$

Симметрия накладывает условия на элементы матрицы $\mathcal{Q}$. Для этой матрицы можно ввести параметризацию Ефетова:

$$\mathcal{Q} = U_\eta \mathcal{Q}_0 U_\eta^{-1}, \tag{36}$$

где центральный блок $\mathcal{Q}_0$ содержит только коммутирующие переменные $\theta \in [0, \pi]$ и $\phi \in [0, 2\pi]$ и геометрически представляет собой сферу S^2 в фермион-фермионном секторе (бозон-бозонный сектор тривиален):

$$\mathcal{Q}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -ie^{-i\phi}\sin\theta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & ie^{i\phi}\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix}_{\text{CC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -ie^{-i\phi}\sin\theta \\ 0 & 0 & ie^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}_{\text{BF}}, \tag{37}$$

а грассмановы переменные η и ζ содержатся в матрице U_η:

$$U_\eta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}_{\text{CC}}, \quad u = \exp\begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}_{\text{BF}}, \quad v = \exp\begin{pmatrix} 0 & \eta \\ -\zeta & 0 \end{pmatrix}_{\text{BF}}. \tag{38}$$

Интегрирование $\int D\mathcal{Q}$ ведется по этому многообразию (сфере) и по грассмановым переменным с инвариантной мерой [8]

$$D\mathcal{Q} = \frac{d\phi}{2\pi}\frac{\sin\theta\, d\theta}{2(1-\cos\theta)}d\zeta d\eta. \tag{39}$$

3.3 Средняя плотность состояний в нульмерном пределе

Рассмотрим, как выглядит средняя плотность состояний в нульмерном пределе, когда функциональный интеграл в уравнении (12) ограничивается непертубативным интегрированием по нулевому многообразию:

$$\langle\rho(E)\rangle = \frac{\nu}{4}\int d\mathbf{r}\int D\mathcal{Q}\,\mathrm{str}(\tau_3\Sigma_3 kQ_{zero})e^{-S_E[Q_{zero}]}. \tag{40}$$

Вычислим суперследы, стоящие в (40), используя выражение для $S_E(Q_{zero})$ (33):

$$\mathrm{str}_8[\tau_3\Sigma_3 Q_{zero}] = 2\,\mathrm{str}_4[\Sigma_3\mathcal{Q}]\cos\theta^R(\mathbf{r}) = 4(1-\cos\theta)\cos\theta^R(\mathbf{r}) \tag{41}$$

$$\mathrm{str}_8[\tau_3\Sigma_3 kQ_{zero}] = 2\,\mathrm{str}_4[\Sigma_3 k\mathcal{Q}]\cos\theta^R(\mathbf{r}) = 4[1+\cos\theta+2\zeta\eta(1-\cos\theta)]\cos\theta^R(\mathbf{r}) \tag{42}$$

Интеграл от $\cos\theta^R(\mathbf{r})$ вычисляется с помощью (27) и затем выражается через среднее расстояние между уровнями ω_0 по формуле (26). Результат для плотности состояний:

$$\langle\rho(E)\rangle = \frac{1}{2\omega_0}\,\mathrm{Re}\int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{2(1-\cos\theta)}\int d\zeta d\eta[1+\cos\theta+2\zeta\eta(1-\cos\theta)]\exp\left(-i\pi\frac{E}{\omega_0}(1-\cos\theta)\right). \tag{43}$$

Этот интеграл имеет сингулярность при $\cos\theta = 1$. Поэтому член с $1+\cos\theta$ интегрируется в бесконечность. С другой стороны это вклад в интеграл не содержит грассманов, поэтому должен интегрироваться в 0. Возникающую сингулярность в мере можно устранить дифференцированием по E. Таким образом, этот член должен просто давать константу, не зависящую от энергии, которая отождествляется с $\langle \rho(\infty) \rangle = 1/\omega_0$. Интегрируя второй член, который не содержит сингулярность, можно получить известный результат для средней плотности состояний в классе C случайных матриц:

$$\langle \rho_{\mathrm{C}}(E) \rangle = \frac{1}{\omega_0} \left(1 - \frac{\sin(2\pi E/\omega_0)}{2\pi E/\omega_0} \right) . \tag{44}$$

При энергиях $E \gg \omega_0$ эта формула вырождается просто в $1/\omega_0$, что совпадает с формулой (26).

4 Диффузные моды

4.1 Структура W

Мы хотим изучать малые отклонения от Q_{zero}, которые параметризуем с помощью матрицы W, введенной согласно

$$Q = T^{-1}U^{-1}\tau_1(1 + W + W^2/2 + \dots)UT, \tag{45}$$

где $U^{-1}\tau_1 U = U_{\mathrm{Us}}$ с матрицей

$$U = \mathrm{diag}(U_\theta, U_{\pi-\theta})_{\mathrm{CC}}, \qquad U_\theta = e^{-i\tau_2(\pi/4-\theta^R/2)}e^{-i\tau_3(\phi/2)}. \tag{46}$$

Матрица T порождает нулевую моду, которую мы будем учитывать непертурбативно. Важно отметить, что в W содержатся всевозможные отклонения от седлового решения. Среди этих отклонений не нужно учитывать те, что связаны с «движением» по седловому многообразию, т.к. это учитывается с помощью матрицы T.

Симметрийные условия (15) накладывают следущие ограничения на W

$$\left\{W, \tau_1\right\}_+ = 0 \quad W = -\overline{W}. \tag{47}$$

В связи с этими условиями пишем W как

$$W = \tau_2 c + \tau_3 d, \tag{48}$$

где c и d суперматрицы в CC$\otimes$BF с симметриями

$$c = -\gamma c^T \gamma^T, \qquad d = \gamma d^T \gamma^T. \tag{49}$$

Для дальнейших вычислений удобно разделить c и d на симметричные и антисимметричные вклады:

$$c = c_a + c_s, \quad d = d_a + d_s; \tag{50}$$

$$\{\Sigma_3, c_a\}_+ = \{\Sigma_3, d_a\}_+ = 0, \tag{51}$$

$$[\Sigma_3, c_s]_- = [\Sigma_3, d_s]_- = 0. \tag{52}$$

Используя (49), можно записать c и d в явном виде.

1. Симметричная часть

$$d_s = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}_{\mathrm{CC}}, \quad c_s = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{pmatrix}_{\mathrm{CC}}; \tag{53}$$

$$d_{11} = \begin{pmatrix} a_d & \sigma_d \\ \rho_d & ib_d \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}, \quad d_{22} = \begin{pmatrix} a_d & \rho_d \\ -\sigma_d & ib_d \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}, \tag{54}$$

$$c_{11} = \begin{pmatrix} a_c & \sigma_c \\ \rho_c & ib_c \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}, \quad c_{22} = \begin{pmatrix} -a_c & -\rho_c \\ \sigma_c & -ib_c \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}. \tag{55}$$

2. Антисимметричная часть

$$d_a = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} \\ d_{21} & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{CC}}, \quad c_a = \begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{CC}}; \tag{56}$$

$$d_{12} = \begin{pmatrix} g_d & \chi_d \\ \chi_d & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}, \quad d_{21} = \begin{pmatrix} g_d^* & \zeta_d \\ -\zeta_d & 0 \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}, \tag{57}$$

$$c_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \chi_c \\ -\chi_c & ig_c \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}, \quad c_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_c \\ \zeta_c & ig_c^* \end{pmatrix}_{\mathrm{BF}}. \tag{58}$$

Как видно из явного вида матриц c и d, помимо симметрийных соотношений (49) были использованы дополнительные условия. Как будет видно далее, для сходимости интеграла $\int DWe^{-S^2[W]}$ нужно наложить следующие условия:

$$d_{11}^{BB}, c_{11}^{BB} \in \mathbb{R}, \tag{59}$$

$$d_{11}^{FF}, c_{11}^{FF} \in i\mathbb{R}, \tag{60}$$

$$d_{21}^{BB} = (d_{12}^{BB})^*, \tag{61}$$

$$c_{21}^{FF} = -(c_{12}^{FF})^*. \tag{62}$$

4.2 Гауссово действие

Теперь подставляя (45) в действие (11) при $E = 0$, оставляем только квадратичные вклады. Линейных вкладов нет, так как рассматривается смещение от седлового решения. Получаем

$$S_a^{(2)} = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r}\, \mathrm{str}\left[c_a A_{ac} c_a + d_a A_{ad} d_a - \cos\theta^R\, \nabla\phi\, \Sigma_3 (c_a \nabla d_a - \nabla c_a d_a - d_a \nabla c_a + \nabla d_a c_a)\right]; \tag{63}$$

$$S_s^{(2)} = \frac{\pi\nu}{4} \int d\mathbf{r}\, \mathrm{str}\left[c_s A_{sc} c_s + d_s A_{sd} d_s - \cos\theta^R\, \nabla\phi\, \Sigma_3 (c_s \nabla d_s - \nabla c_s d_s - d_s \nabla c_s + \nabla d_s c_s)\right], \tag{64}$$

где

$$A_{ac} = -D\nabla^2 + 2\Delta \sin\theta^R - D[(\nabla\theta^R)^2 + \sin^2\theta^R(\nabla\phi)^2], \tag{65}$$

$$A_{ad} = -D\nabla^2 + 2\Delta \sin\theta^R, \tag{66}$$

$$A_{sc} = -D\nabla^2 + 2\Delta \sin\theta^R + D\cos 2\theta^R(\nabla\phi)^2, \tag{67}$$

$$A_{sd} = -D\nabla^2 + 2\Delta \sin\theta^R - D[(\nabla\theta^R)^2 - \cos^2\theta^R(\nabla\phi)^2]. \tag{68}$$

Подставим явные выражения для матриц c и d в (63) и возьмем суперслед. В антисимметричной части следы вида $\Sigma_3 c_a d_a$ равны 0, что проверяется непосредственной подстановкой. В симметричной части перекрестные члены не равны 0. Тем не менее, интегрируя по частям, можно добиться того, что перекрестные члены будут иметь вид $c\nabla(\cos\theta\nabla\phi)d$. Это выражение равно 0, т.к. $\nabla^2\phi = 0$ и $\nabla\phi\nabla\theta = 0$, см. (25).

В результате, c и d моды не перемешиваются:

$$S^{(2)}[W] = \frac{\pi\nu}{2}\int d\mathbf{r}\big[g_d A_{ad} g_d^* - 2\chi_d A_{ad}\zeta_d + g_c A_{ac} g_c^* + 2\chi_c A_{ac}\zeta_c \\ + a_d A_{sd} a_d + b_d A_{sd} b_d + 2\sigma_d A_{sd}\rho_d + a_c A_{sc} a_c + b_c A_{sc} b_c + 2\sigma_c A_{sc}\rho_c\big]. \tag{69}$$

Как видно из (69), интеграл $\int DW e^{-S^{(2)}[W]}$ сходится при потребованных условиях (59).

Несложно проверить, что все операторы в (65) кроме A_{ac} имеют наименьшее собственное значение больше 0. Оператор A_{ac} содержит нулевую моду с волновой функцией $\cos\theta^R$, что является следствием наличия симметрии C класса. Эту моду нужно исключить из матриц W, т.к. она уже учтена в поворотах T.

С помощью гауссового действия (69) можно строить теорию возмущений для физических величин, например, для плотности состояний, вводя операцию усреднения по флуктуациям

$$\langle \ldots \rangle = \int DW \ldots e^{-S^{(2)}[W]}. \tag{70}$$

Выпишем все возможные ненулевые средние, индуцированные действием (69):

$$\langle g_d(\mathbf{r}) g_d^*(\mathbf{r}')\rangle = \frac{2}{\pi\nu} A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad \langle g_c(\mathbf{r}) g_c^*(\mathbf{r}')\rangle = \frac{2}{\pi\nu} A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{71}$$

$$\langle \chi_d(\mathbf{r}) \zeta_d(\mathbf{r}')\rangle = \frac{1}{\pi\nu} A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad \langle \zeta_c(\mathbf{r}) \chi_c(\mathbf{r}')\rangle = \frac{1}{\pi\nu} A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{72}$$

$$\langle a_i(\mathbf{r}) a_i(\mathbf{r}')\rangle = \frac{1}{\pi\nu} A_{si}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad i = d, c, \tag{73}$$

$$\langle b_i(\mathbf{r}) b_i(\mathbf{r}')\rangle = \frac{1}{\pi\nu} A_{si}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad i = d, c, \tag{74}$$

$$\langle \rho_i(\mathbf{r}) \sigma_i(\mathbf{r}')\rangle = \frac{1}{\pi\nu} A_{si}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \quad i = d, c. \tag{75}$$

4.3 Правила слияния

Для облегчения дальнейших вычислений удобно вывести так называемые правила слияния, которые выражают средние

$$\langle \mathrm{str}\left[PW(\mathbf{r})RW(\mathbf{r}')\right]\rangle \text{ и } \langle \mathrm{str}\left[PW(\mathbf{r})\right]\mathrm{str}\left[RW(\mathbf{r}')\right]\rangle.$$

через матрицы P и R. В обычном унитарном или ортогональном случае на фоне пространственно-однородного решения они имеют довольно простой вид. Как мы увидим ниже, в случае диффузных мод на фоне вихревого решения правила слияния являются довольно громоздкими.

4.3.1 Вычисление $\langle \mathrm{str}\left[PW(\mathbf{r})\right]\mathrm{str}\left[RW(\mathbf{r}')\right]\rangle$

Разложим матрицы P и R по матрицам Паули в пространстве Намбу:

$$P = P_0\tau_0 + P_1\tau_1 + P_2\tau_2 + P_3\tau_3. \tag{76}$$

Беря след по N получаем

$$\langle \mathrm{str}_8\left[PW(\mathbf{r})\right]\mathrm{str}_8\left[RW(\mathbf{r}')\right]\rangle = 4\langle \mathrm{str}_4(P_2c + P_3d)\,\mathrm{str}_4(R_2c + R_3d)\rangle. \tag{77}$$

В действии (69) симметричные и антисимметричные вклады не перемешиваются, поэтому их можно усреднять независимо. Использовав это можно упростить последнее выражение

$$4\langle \mathrm{str}_4(P_2c_a + P_3d_a)\,\mathrm{str}_4(R_2c_a + R_3d_a) + \mathrm{str}_4(P_2c_s + P_3d_s)\,\mathrm{str}_4(R_2c_s + R_3d_s)\rangle. \tag{78}$$

1. Антисимметричный вклад

Вычислим след по пространству CC:

$$\mathrm{str}_4(P_2c_a + P_3d_a) = \mathrm{str}_2(P_2^{12}c_{21} + P_2^{21}c_{12} + P_3^{12}d_{21} + P_3^{21}d_{12}). \tag{79}$$

Расписав последнее выражение через явные вид матриц c и d получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{str}_4(P_2c_a + P_3d_a) = &-iP_2^{12,FF}g_c^* - iP_2^{21,FF}g_c + (P_2^{12,BF} - P_2^{12,FB})\zeta_c - (P_2^{21,BF} + P_2^{21,FB})\chi_c \\ &+ P_3^{12,BB}g_d^* + P_3^{21,BB}g_d - (P_3^{12,BF} + P_3^{12,FB})\zeta_d + (P_3^{21,BF} - P_3^{21,FB})\chi_d.\end{aligned} \tag{80}$$

Для членов с R получится такое же выражение. Перемножая члены с R и P и усредняя, получаем

$$\langle \mathrm{str}_8\left[PW_a(\mathbf{r})\right]\mathrm{str}_8\left[RW_a(\mathbf{r}')\right]\rangle = \frac{4}{\pi\nu}\Omega_1 A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \frac{4}{\pi\nu}\Omega_2 A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'), \tag{81}$$

где

$$\Omega_1 = 2P_3^{12,BB}R_3^{21,BB} + 2P_3^{21,BB}R_3^{12,BB} - (P_3^{12,BF} + P_3^{12,FB})(R_3^{21,BF} - R_3^{21,FB}) \\ + (P_3^{21,BF} - P_3^{21,FB})(R_3^{12,BF} + R_3^{12,FB}); \quad (82)$$

$$\Omega_2 = -2P_2^{12,FF}R_2^{21,FF} - 2P_2^{21,FF}R_2^{12,FF} + (P_2^{12,BF} - P_2^{12,FB})(R_2^{21,BF} + R_2^{21,FB}) \\ - (P_2^{21,BF} + P_2^{21,FB})(R_2^{12,BF} - R_2^{12,FB}). \quad (83)$$

Введем новые матрицы

$$P_{ai} = \frac{1}{2}(P_i - \Sigma_3 P_i \Sigma_3), \quad P_{si} = \frac{1}{2}(P_i + \Sigma_3 P_i \Sigma_3), \quad (84)$$

$$\hat{P}_i = P_i - \gamma P_i^T \gamma^T, \quad (85)$$

$$\check{P}_i = P_i + \gamma P_i^T \gamma^T. \quad (86)$$

Используя эти матрицы, можно написать итоговое выражение для антисимметричнго вклада:

$$\langle \mathrm{str}_8 \left[PW_a(\mathbf{r}) \right] \mathrm{str}_8 \left[RW_a(\mathbf{r}') \right] \rangle = \frac{2}{\pi\nu} A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \,\mathrm{str}_4[\check{P}_{a3}\check{R}_{a3}] + \frac{2}{\pi\nu} A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \,\mathrm{str}_4[\hat{P}_{a2}\hat{R}_{a2}]. \quad (87)$$

2. Симметричный вклад

Вычислим снова след по пространству CC:

$$\mathrm{str}_4(P_2 c_s + P_3 d_s) = \mathrm{str}_2(P_2^{11}c_{11} + P_2^{22}c_{22} + P_3^{11}d_{11} + P_3^{22}d_{22}). \quad (88)$$

Используя явный вид матриц c и d, берем след по BF:

$$\mathrm{str}_4(P_2 c_s + P_3 d_s) = (P_2^{11,BB} - P_2^{22,BB})a_c + i(P_2^{22,FF} - P_2^{11,FF})b_c + (P_2^{11,BF} + P_2^{22,FB})\rho_c + (P_2^{22,BF} - P_2^{11,FB})\sigma_c \\ + (P_3^{11,BB} + P_3^{22,BB})a_d - i(P_3^{11,FF} + P_3^{22,FF})b_d + (P_3^{11,BF} - P_3^{22,FB})\rho_d - (P_3^{11,FB} + P_3^{22,BF})\sigma_d. \quad (89)$$

Перемножая члены с R и P и усредняя, получаем выражение

$$\langle \mathrm{str}_8 \left[PW_s(\mathbf{r}) \right] \mathrm{str}_8 \left[RW_s(\mathbf{r}') \right] \rangle = \frac{4}{\pi\nu} \left[\Omega_{11} A_{sd}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \Omega_{22} A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \right], \quad (90)$$

где

$$\Omega_{11} = (P_3^{11,BB} + P_3^{22,BB})(R_3^{11,BB} + R_3^{22,BB}) - (P_3^{11,FF} + P_3^{22,FF})(R_3^{11,FF} + R^{22,FF}) \\ + (P_3^{11,BF} - P_3^{22,FB})(R_3^{11,FB} + R_3^{22,BF}) - (P_3^{11,FB} + P_3^{22,BF})(R_3^{11,BF} - R_3^{22,FB}). \quad (91)$$

$$\Omega_{22} = (P_2^{11,BB} - P_2^{22,BB})(R_2^{11,BB} - R_2^{22,BB}) - (P_2^{22,FF} - P_2^{11,FF})(R_2^{22,FF} - R_2^{11,FF})$$
$$- (P_2^{11,BF} + P_2^{22,FB})(R_2^{22,BF} - R_2^{11,FB}) + (P_2^{22,BF} - P_2^{11,FB})(R_2^{11,BF} + R_2^{22,FB}). \quad (92)$$

Используя вновь (84) можем написать ответ для симметричнго вклада:

$$\langle \mathrm{str}_8 \left[PW_s(\mathbf{r})\right] \mathrm{str}_8 \left[RW_s(\mathbf{r}')\right]\rangle = \frac{2}{\pi\nu} A_{sd}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{str}_4 \left[\check{P}_{s3}\check{R}_{s3}\right] + \frac{2}{\pi\nu} A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{str}_4 \left[\hat{P}_{s2}\hat{R}_{s2}\right]. \quad (93)$$

Таким образом, суммируя полученные результаты (87) и (93), можно написать полную формулу для рассматриваемого правила слияния:

$$\langle \mathrm{str}_8 \left[PW(\mathbf{r})\right] \mathrm{str}_8 \left[RW(\mathbf{r}')\right]\rangle = \frac{2}{\pi\nu} A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{str}_4[\check{P}_{a3}\check{R}_{a3}] + \frac{2}{\pi\nu} A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{str}_4[\hat{P}_{a2}\hat{R}_{a2}]$$
$$+ \frac{2}{\pi\nu} A_{sd}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{str}_4 \left[\check{P}_{s3}\check{R}_{s3}\right] + \frac{2}{\pi\nu} A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{str}_4 \left[\hat{P}_{s2}\hat{R}_{s2}\right]. \quad (94)$$

4.3.2 Вычисление $\langle \mathrm{str}\left[PW(\mathbf{r})RW(\mathbf{r}')\right]\rangle$

Вновь разлагая P и R по матрицам τ_i пространства и беря след по N, получаем

$$\langle \mathrm{str}_8 \left[PW(\mathbf{r})RW(\mathbf{r}')\right]\rangle = 2\langle \mathrm{str}_4 (P_2c + P_3d)(R_2c + R_3d) + (P_0c - iP_1d)(R_0c - iR_1d)$$
$$- (P_2d - P_3c)(R_2d - R_3c) + (P_0d + iP_1c)(R_0d + iR_1c)\rangle. \quad (95)$$

Нам нужно вычислять средние вида

$$\langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c + \beta P_j d)(\alpha R_i c + \beta R_j d)\rangle = \langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_a + \beta P_j d_a)(\alpha R_i c_a + \beta R_j d_a)\rangle$$
$$+ \langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_s + \beta P_j d_s)(\alpha R_i c_s + \beta R_j d_s)\rangle, \quad (96)$$

где последнее равенство следует из независимого усреднения симметричных и антисимметричных мод.

1. Антисимметричный вклад

Упростим выражение для антисимметричной части

$$\langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_a + \beta P_j d_a)(\alpha R_i c_a + \beta R_j d_a)\rangle = \langle \mathrm{str}_4[\alpha^2 P_i c_a R_i c_a + \beta^2 P_j d_a R_j d_a]\rangle. \quad (97)$$

Используя явный вид матриц c и d, возьмем след по СС и оставим только неисчезающие средние:

$$\langle \alpha^2\, \mathrm{str}_2[P_i^{11} c_{12} R_i^{22} c_{21} + P_i^{22} c_{21} R_i^{11} c_{12}] + \beta^2\, \mathrm{str}_2[P_j^{11} d_{12} R_j^{22} d_{21} + P_j^{22} d_{21} R_j^{11} d_{12}]\rangle. \quad (98)$$

Усредняя, ответ запишется в виде

$$\langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_a + \beta P_j d_a)(\alpha R_i c_a + \beta R_j d_a)\rangle = \frac{\alpha^2}{\pi\nu} A_{ac}^{-1}\Gamma_1 + \frac{\beta^2}{\pi\nu} A_{ad}^{-1}\Gamma_2, \quad (99)$$

где

$$\Gamma_1 = 2P_i^{22,FF}R_i^{11,FF} - P_i^{11,FF}R_i^{22,BB} - P_i^{11,FB}R_i^{22,FB} - P_i^{11,BB}R_i^{22,FF} - P_i^{11,BF}R_i^{22,BF} \\ + 2P_i^{11,FF}R_i^{22,FF} - P_i^{22,FF}R_i^{11,BB} + P_i^{22,FB}R_i^{11,FB} - P_i^{22,BB}R_i^{11,FF} + P_i^{22,BF}R_i^{11,BF}; \quad (100)$$

$$\Gamma_2 = 2P_j^{22,BB}R_j^{11,BB} + 2P_j^{11,BB}R_j^{22,BB} - P_j^{22,FF}R_j^{11,BB} - P_j^{22,BF}R_j^{11,BF} - P_j^{22,FB}R_j^{11,FB} \\ - P_j^{22,BB}R_j^{11,FF} - P_j^{11,FF}R_j^{22,BB} + P_j^{11,BF}R_j^{22,BF} + P_j^{11,FB}R_j^{22,FB} - P_j^{11,BB}R_j^{22,FF}. \quad (101)$$

Эти выражения можно упростить, переписав через суперследы. Итоговое выражение:

$$\langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_a + \beta P_j d_a)(\alpha R_i c_a + \beta R_j d_a)\rangle = \frac{\alpha^2}{2\pi\nu}A_{ac}^{-1}[\mathrm{str}_4 P_i \,\mathrm{str}_4 R_i - \mathrm{str}_4 P_i\Sigma_3 \,\mathrm{str}_4 R_i\Sigma_3 - 2\,\mathrm{str}_4 P_i\overline{R}_{si}] \\ + \frac{\beta^2}{2\pi\nu}A_{ad}^{-1}[\mathrm{str}_4 P_j \,\mathrm{str}_4 R_j - \mathrm{str}_4 P_j\Sigma_3 \,\mathrm{str}_4 R_j\Sigma_3 + 2\,\mathrm{str}_4 P_j\overline{R}_{sj}]. \quad (102)$$

2. Симметричный вклад

Рассматривая теперь симметричную часть, снова берем след по СС, оставляя только неисчезающие средние:

$$\langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_s + \beta P_j d_s)(\alpha R_i c_s + \beta R_j d_s)\rangle = \langle \mathrm{str}_2[\alpha^2 P_i^{11}c_{11}R_i^{11}c_{11} + \beta^2 P_j^{11}d_{11}R_j^{11}d_{11} + \alpha^2 P_i^{12}c_{22}R_i^{21}c_{11} \\ + \beta^2 P_j^{12}d_{22}R_j^{21}d_{11} + \alpha^2 P_i^{21}c_{11}R_i^{12}c_{22} + \beta^2 P_j^{21}d_{11}R_j^{12}d_{22} + \alpha^2 P_i^{22}c_{22}R_i^{22}c_{22} + \beta^2 P_j^{22}d_{22}R_j^{22}d_{22}]\rangle. \quad (103)$$

Дальнейшая процедура аналогична вычислению антисимметричной части. Собирая выражения, полученные после усреднения, можно прийти к следующей формулу:

$$\langle \mathrm{str}_4(\alpha P_i c_s + \beta P_j d_s)(\alpha R_i c_s + \beta R_j d_s)\rangle = \frac{\alpha^2}{2\pi\nu}A_{sc}^{-1}[\mathrm{str}_4 P_i \,\mathrm{str}_4 R_i + \mathrm{str}_4 P_i\Sigma_3 \,\mathrm{str}_4 R_i\Sigma_3 - 2\,\mathrm{str}_4 P_i\overline{R_{ia}}] \\ + \frac{\beta^2}{2\pi\nu}A_{sd}^{-1}[\mathrm{str}_4 P_j \,\mathrm{str}_4 R_j + \mathrm{str}_4 P_j\Sigma_3 \,\mathrm{str}_4 R_j\Sigma_3 + 2\,\mathrm{str}_4 P_j\overline{R_{ja}}]. \quad (104)$$

Подставляя формулы (102) и (104) в (95) ,можно вычислить правило слияния. Общая формула очень громоздкая, поэтому проще ее иметь в виде правила вычислений средних вида (96).

4.3.3 Вычисление $\langle \mathrm{str}\left[PW^2(\mathbf{r})\right]\rangle$

Частным случаем общего правила слияния (95), который будет неоднократно использоваться ниже, является среднее $\langle \mathrm{str}_8\, PW^2\rangle$. Оно следует из (95), если R заменить единичной матрицей, т.е.

$R_i = \tau_0 \delta_{i0}$, так что среди всех членов в (95) остается только P_0. Используя формулы (102) и (104) и выражая P_0 через P из соотношения (76) ,можно получить

$$\langle \mathrm{str}_8\, P W^2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\pi\nu} \left[A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right] \mathrm{str}_8\, P, \tag{105}$$

где операторы A_{ac} и A_{ad} определены в уравнениях (65). Иными словами, имеет место равенство

$$\langle W^2(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{\pi\nu} \left[A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \right] \mathbb{1}_8. \tag{106}$$

Отметим, что особенностью рассматриваемой системы является ненулевое значение среднего $\langle W^2 \rangle$, в отличие от стандартных вигнер-дайсоновских классов симметрии. В последнем случае обращаются в нуль любые средние $\langle W^n \rangle$, гарантируя тождество $\langle Q \rangle = \Lambda$ [4]. В нашем случае поправки к средней плотности состояний не запрещены симметрией, проявлением чего является формула (106).

При отсутствии вихря параметр порядка и спектральный угол постоянны. В этом случае операторы A_{ac} и A_{ad} равны между собой и даются выражением $-D\nabla^2 + 2\Delta_0$. Тем самым, $\langle W^2 \rangle$ обращается в 0. При этом обратные операторы в совпадающих точках содержат большой логарифм от области двумерной диффузии: $A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \ln(\xi/l)/2\pi D$. В присутствии вихря операторы A_{ac} и A_{ad} различаются, а их обратные $A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ и $A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ отличаются от $\ln(\xi/l)/2\pi D$ числом под логарифмом порядка единицы, и это отличие существенно при $r \lesssim \xi$. Таким образом, в величине $\langle W^2(\mathbf{r}) \rangle$ присущий слабой локализации логарифм сокращается. Свойства правой части уранения (106) подробно разобраны в Приложении B.

5 Вычисление поправок к плотности состояний

Средняя плотность состояний для класса C дается выражением (44), отвечающему нульмерному пределу, когда пренебрегается вкладом массивных флуктуаций W. Этот вклад мал по $1/g$ и в этой главе мы вычислим его в ведущем порядке. Пертурбативный учет вклада массивных мод на фоне непертурбативного учета нулевых мод для металлической гранулы был проделан в работе Кравцова и Мирлина [6]. Мы в целом следуем их логике, но в силу специфики рассматриваемой задачи поправки возникают уже для самой плотности состояний, а не корреляционной функции.

Глобальную плотность состояний можно записать в виде

$$\langle \rho(E) \rangle = \frac{\nu}{4} \operatorname{Re} \int D\mathcal{Q}\, DW \int d\mathbf{r}\, \operatorname{str}(\tau_3 \Sigma_3 k Q) \exp\{-S[W] - S_E[\mathcal{Q}, W]\}, \tag{107}$$

где действие $S[W] = S^{(2)}[W] + S^{(3)}[W] + \dots$, включающее в себя как гауссову часть (69), так и нелинейные вершины, не зависит от «нулевой» матрицы $\mathcal{Q}$, а $S_E[\mathcal{Q}, W]$ дается выражением

$$S_E[\mathcal{Q}, W] = \frac{i\pi\nu E}{2} \int d\mathbf{r}\, \operatorname{str}(\tau_3 \Sigma_3 Q) = \frac{i\pi\nu E}{2} \int d\mathbf{r}\, \operatorname{str}[\tau_3 \Sigma_3 T^{-1} U^{-1} \tau_1 (1 + W + W^2/2 + \dots) UT]. \tag{108}$$

В низшем (однопетлевом) порядке по флуктуациям W можно выделить шесть типов поправок в нульмерному ответу для плотности состояний:

1. разложение до W^2 в предэкспоненте;

2. разложение до W^2 в S_E;

3. разложение до W и в предэкспоненте, и в S_E;

4. разложение до W в двух S_E;

5. разложение до W в предэкспоненте и до W^3 в нелинейном действии $S[W]$; этот вклад отвечает поправкам слабой локализации к коэффициенту диффузии;

6. аналогичное разложение, где W берется не в предэкспоненте, а в S_E.

В каждом из этих случаев возникают две или четыре матрицы W, которые требуется усреднить с гауссовым действием $S^{(2)}[W]$ согласно (70). Возникающие спаривания ообрабатываются по теореме Вика с учетом правил слияния, выведенных в разделе 4.3.

Для облегчения дальнейших вычислений удобно ввести матрицы $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = t\Sigma_3 t^{-1} \quad \tilde{\mathcal{Q}}' = t\Sigma_3 k t^{-1}. \tag{109}$$

5.1 Вклад от разложения предэкспоненты до W^2

Как мы увидим, вклады от разложения предэкспоненты до W^2 и от разложения S_E до W^2 имеют много общего. Первый из этих вкладов запишется с учетом (33) как:

$$\delta\rho(E)_{W^2} = \frac{\nu}{8}\int D\mathcal{Q}\ \mathrm{Re}\int d\mathbf{r}\langle \mathrm{str}(U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}\prime U^{-1}\tau_1 W^2(\mathbf{r}))\rangle \exp\left[-\frac{i\pi E}{2\omega_0}\mathrm{str}_4(\Sigma_3\mathcal{Q})\right]. \tag{110}$$

Выражение под средним имеет вид PW^2, поэтому используя (105) и явный вид матрицы P

$$U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1 = \frac{i}{2}\tau_2(\tilde{\mathcal{Q}} - \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}\Sigma_3) + \frac{i}{2}\tau_2\sin\theta^R(\tilde{\mathcal{Q}} + \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}\Sigma_3) + \frac{1}{2}\tau_0\cos\theta^R(\Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}} + \tilde{\mathcal{Q}}\Sigma_3), \tag{111}$$

напишем, чему равна поправка для плотности состояний:

$$\delta\rho(E)_{W^2} = \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}\cos\theta^R(\mathbf{r})(A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}))\,\mathrm{Re}\int D\mathcal{Q}\,\mathrm{str}_4(\Sigma_3 k\mathcal{Q})\exp\left[-\frac{i\pi E}{2\omega_0}\mathrm{str}_4(\Sigma_3\mathcal{Q})\right]. \tag{112}$$

Делая замену переменных $R = r/\xi$ в пространственном интеграле, получаем

$$\delta\rho(E)_{W^2} = \frac{C_2}{8\pi\Delta_0}\mathrm{Re}\int D\mathcal{Q}\,\mathrm{str}_4(\Sigma_3 k\mathcal{Q})\exp\left[-\frac{i\pi E}{2\omega_0}\mathrm{str}_4(\Sigma_3\mathcal{Q})\right], \tag{113}$$

где безразмерный коэффициент

$$C_2 = \int d\mathbf{R}\cos\theta^R(R)(A_{ad}^{-1}(\mathbf{R},\mathbf{R}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{R},\mathbf{R})) \tag{114}$$

определен через обезразмеренные операторы

$$A_{ac}(\mathbf{R}) = -\nabla_R^2 + \frac{\Delta}{\Delta_0}\sin\theta^R - \left[(\nabla_R\theta^R)^2 + \frac{\sin^2\theta^R}{R^2}\right]; \tag{115}$$

$$A_{ad}^{-1}(\mathbf{R}) = -\nabla_R^2 + \frac{\Delta}{\Delta_0}\sin\theta^R. \tag{116}$$

Итого, можно написать ответ через нульмерную среднюю плотность состояний в C классе (44)

$$\delta\rho(E)_{W^2} = \frac{\omega_0 C_2}{2\pi\Delta_0}\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle. \tag{117}$$

Заметим, что этот результат можно было бы получить сразу. Действительно, согласно (106), $\langle W^2\rangle$ это единичная матрица, поэтому единственное влияние усреднение оказывает на пространственное выражение, а именно $\int d\mathbf{r}\cos\theta^R \to \int \cos\theta^R(A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}))/2\pi\nu$. Поэтому можно сразу написать

$$\delta\rho(E)_{W^2} = \frac{\int\cos\theta^R(A_{ad}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}))}{2\pi\nu\int d\mathbf{r}\cos\theta^R}\langle\rho(E)\rangle = \frac{\omega_0 C_2}{2\pi\Delta_0}\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle. \tag{118}$$

Таким образом для отношения имеем

$$\frac{\delta\rho(E)_{W^2}}{\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle} = \frac{C_2\omega_0}{2\pi\Delta_0} = \frac{C_2}{\pi C_1}\frac{1}{g}. \tag{119}$$

Интеграл в (114) оценен в Приложении B и оказывается численно мал:

$$\frac{C_2}{C_1} \approx 0.013. \tag{120}$$

Для отношения теперь (119) можно написать оценку

$$\frac{\delta\rho(E)_{W^2}}{\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle} \approx 0.004\frac{1}{g}. \tag{121}$$

5.2 Вклад от разложения S_E до W^2

Поправка к плотности состояний будет выглядеть следующим образом:

$$\delta\rho(E)_{EW^2} = \frac{\nu^2\pi E}{16}\int D\mathcal{Q}\,\mathrm{Im}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{str}(\tau_3\Sigma_3 k Q_{zero}(\mathbf{r}))\int d\mathbf{r}'\langle \mathrm{str}\, U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1 W^2(\mathbf{r}')\rangle \exp[-S_E[Q_{zero}]]. \tag{122}$$

Используя (105), можно сразу провести усреднение. Останется лишь взять следы вида $\mathrm{str}\,\tau_3 k\mathcal{Q}$ и $\mathrm{str}\,\Sigma_3\mathcal{Q}$, которые уже были найдены при вычислении средней плотности состояний в C классе (44).

Тогда, для поправки к плотности состояний имеем

$$\delta\rho(E)_{EW^2} = \nu E\int d\mathbf{r}\cos\theta^R \times \int d\mathbf{r}'\cos\theta^R[A^{-1}_{ad}(\mathbf{r}',\mathbf{r}') - A^{-1}_{ac}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')] \\ \times \mathrm{Im}\int D\mathcal{Q}[1+\cos\theta + 2\zeta\eta(1-\cos\theta)][1-\cos\theta]\exp[-S_E[Q_{zero}]]. \tag{123}$$

Обратим внимание, что наличие множителя $(1-\cos\theta)$, пришедшего из S_E, при интегрировании скопенсирует большой множитель ν. В результате, поправка будет иметь тот же порядок, что и разобранная в разделе 5.1.

Сделаем замену $R = r/\xi$ в пространственных интегралах:

$$\delta\rho(E)_{EW^2} = \frac{E}{4\Delta_0\omega_0}C_2\,\mathrm{Im}\int D\mathcal{Q}[1+\cos\theta+2\zeta\eta(1-\cos\theta)][1-\cos\theta]\exp[-S_E[Q_{zero}]]. \tag{124}$$

Этот интеграл не содержит сингулярности, поэтому можно сразу проинтегрировать по грассманам. После взятия оставшегося интеграла по сфере получается ответ:

$$\delta\rho(E)_{EW^2} = \frac{C_2}{2\pi\Delta_0}\left[\frac{\sin 2\pi E/\omega_0}{2\pi E/\omega_0} - \cos 2\pi E/\omega_0\right]. \tag{125}$$

Так же как и для вклада от W^2 в экспоненте, здесь тоже можно сразу получить результат. $\langle W^2\rangle$ — единичная матрица, поэтому усреднение будет просто давать дополнительный коэффициент за счет пространственной структуры $\langle W^2(\mathbf{r})\rangle$. Поэтому без разницы, в каком суперследе будет стоять W^2. Перенося W^2 в суперслед в предэкспоненте, мы получаем выражение как в (110) но с дополнительным множителем $-S_E[Q_{zero}]$. Таким образом можем написать выражение для поправки в виде:

$$\delta\rho(E)_{EW^2} = E\frac{d}{dE}\delta\rho(E)_{W^2}. \tag{126}$$

Сложив (125) с поправкой (117) получаем выражение:

$$\delta\rho(E)_{W^2} + \delta\rho(E)_{EW^2} = \frac{C_2}{2\pi\Delta_0}\left(1 + E\frac{d}{dE}\right)\left(1 - \frac{\sin 2\pi E/\omega_0}{2\pi E/\omega_0}\right) = \frac{2C_2}{\pi C_1\omega_0}\frac{1}{g}\sin^2[\pi E/\omega_0]. \tag{127}$$

5.3 Вклад от W в предэкспоненте и в разложении S_E

Еще одним вкладом второго порядка по W^2 является вклад от W в предэкспоненте и в разложении S_E. Этот вклад записывается как

$$\delta\rho(E)_{WEW} = \frac{\nu^2\pi E}{8}\,\mathrm{Im}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\int D\mathcal{Q}\langle\langle \mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r}')]\rangle \exp[-S_E[Q_{zero}]]. \tag{128}$$

Под знаком усреднения стоит выражение вида $\langle \mathrm{str}_8\, PW\, \mathrm{str}_8\, RW\rangle$, поэтому для использования правила слияния (94) нужно выделить вклады, соотвествущие матрицам τ_2 и τ_3. Из (111) видно, что

$$P_2 = \frac{i}{2}(\tilde{\mathcal{Q}}' - \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3) + \frac{i}{2}\sin\theta^R(\tilde{\mathcal{Q}}' + \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3), \quad P_3 = 0; \tag{129}$$

$$R_2 = \frac{i}{2}(\tilde{\mathcal{Q}} - \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}\Sigma_3) + \frac{i}{2}\sin\theta^R(\tilde{\mathcal{Q}} + \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}\Sigma_3), \quad R_3 = 0. \tag{130}$$

Можно теперь использовать правило слияния (94), которое в этом случае выглядит следующим образом:

$$\langle \mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r}')]\rangle = \frac{2}{\pi\nu}\left[A^{-1}_{ac}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\hat{P}_{a2}\hat{R}_{a2}] + A^{-1}_{sc}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\hat{P}_{s2}\hat{R}_{s2}]\right]. \tag{131}$$

Так как $\tilde{\mathcal{Q}} - \gamma\tilde{\mathcal{Q}}^T\gamma^T = 2\tilde{\mathcal{Q}}$, можно упростить выражение:

$$\langle \mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r}')]\rangle = -\frac{8}{\pi\nu}A^{-1}_{ac}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_a\tilde{\mathcal{Q}}_a] - \\ - \frac{8}{\pi\nu}A^{-1}_{sc}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s\tilde{\mathcal{Q}}_s]\sin\theta^R(\mathbf{r})\sin\theta^R(\mathbf{r}'). \tag{132}$$

Остается вычислить суперследы в последнем выражении, используя параметризацию (36):

$$\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_a\tilde{\mathcal{Q}}_a] = \frac{1}{2}\mathrm{str}_4[k - \mathcal{Q}\Sigma_3\mathcal{Q}\Sigma_3 k] = 2 - [1 + \cos 2\theta + 2\zeta\eta(1 - \cos 2\theta)]; \tag{133}$$

$$\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s\tilde{\mathcal{Q}}_s] = \frac{1}{2}\mathrm{str}_4[k + \mathcal{Q}\Sigma_3\mathcal{Q}\Sigma_3 k] = 2 + [1 + \cos 2\theta + 2\zeta\eta(1 - \cos 2\theta)]. \tag{134}$$

Обозначим входящие в (128) пространственные интегралы как α и β, где

$$\alpha = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' A^{-1}_{sc}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\sin\theta(r)\sin\theta(r'), \qquad \beta = \int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' A^{-1}_{ac}(\mathbf{r},\mathbf{r}'). \tag{135}$$

Каждый из этих интегралов расходится как объем системы $\sim V$. Собирая все члены, для поправки к плотности состояний имеем:

$$\delta\rho(E)_{WEW} = -\nu E\,\mathrm{Im}\int D\mathcal{Q}\,[2(\alpha+\beta) - (\beta-\alpha)(1 + \cos 2\theta + 2\zeta\eta(1-\cos 2\theta))]\exp\left(-i\pi\frac{E}{\omega_0}(1-\cos\theta)\right). \tag{136}$$

За счет взятия мнимой части этот интеграл не содержит аномального вклада, возникающего от сингулярности меры $D\mathcal{Q}$. Поэтому можно сначала проинтегрировать по грассманам, а затем по сфере S^2. В итоге бесконечный вклад от расходящегося $\alpha+\beta$ пропадает, и получается ответ:

$$\delta\rho(E)_{WEW} = -\frac{2C_0}{\pi\Delta_0 C_1}\left(1 - \frac{\sin 2\pi E/\omega_0}{2\pi E/\omega_0}\right). \tag{137}$$

Хотя функциональная зависимость полученной поправки от энергии совпадает с нульмерным ответом $\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle$, она возникает за счет существенно другого интеграла по седловому многообразию: (136) содержит косинусы двойного аргумента.

Безразмерный коэффициент C_0 в уравнении (137) определяется обезразмериванием величины $\alpha-\beta$ (135):

$$C_0 = \int d\mathbf{R}[z(R)\sin\theta^R - y(R)], \tag{138}$$

а функции z и y определяются из решения уравнений

$$A_{sc}(\mathbf{R})z(R) = \left\{-\nabla^2_R + \frac{\Delta}{\Delta_0}\sin\theta^R + \frac{\cos 2\theta^R}{R^2}\right\} z(R) = \frac{1}{2}\sin\theta^R(R); \tag{139}$$

$$A_{ac}(\mathbf{R})y(R) = \left\{-\nabla^2_R + \frac{\Delta}{\Delta_0}\sin\theta^R - \left[(\nabla_R\theta^R)^2 + \frac{\sin^2\theta^R}{R^2}\right]\right\} y(R) = \frac{1}{2}. \tag{140}$$

Действительно, в (135) в β можно формальным образом произвести интегрирование по $\mathbf{r}'$. Такая свертка соответствует решению уравнения (140). Аналогично, для α и уравнения (139).

Интеграл в C_0 (138) посчитан в Приложении A. Таким образом отношение поправки (137) к нульмерной средней плотности состояний в классе C (44):

$$\frac{\delta\rho(E)_{WEW}}{\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle} = -\frac{4C_0}{\pi C_1^2}\frac{1}{g} \approx -0.25\frac{1}{g} \tag{141}$$

Полученная поправка имеет относительный порядок $1/g$, что соответствует логике квантовых поправок.

5.4 Поправка от дважды разложенного S_E

Последний вклад второго порядка по W^2 возникает, если разложить действие S_E до первого порядка по W, а затем саму экспоненту разложить до 2 порядка и усреднить по W. Такая поправка к плотности состояний запишется как:

$$\delta\rho(E)_{EW} = -\frac{\pi^2\nu^3E^2}{32}\,\mathrm{Re}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\int d\mathbf{r}''\int D\mathcal{Q}\,\mathrm{str}[\tau_3\Sigma_3 kQ_{zero}]$$
$$\langle\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1W(\mathbf{r}')]\,\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1W(\mathbf{r}'')]\rangle\exp[-S_E[Q_{zero}]]. \tag{142}$$

Используя (132) , можно вычислить среднее в предыдущем выражении.

$$\langle\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1W(\mathbf{r}')]\,\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}U^{-1}\tau_1W(\mathbf{r}'')]\rangle = -\frac{8}{\pi\nu}A^{-1}_{ac}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}_a\tilde{\mathcal{Q}}_a]-$$
$$-\frac{8}{\pi\nu}A^{-1}_{sc}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}_s\tilde{\mathcal{Q}}_s]\sin\theta^R(\mathbf{r}')\sin\theta^R(\mathbf{r}''). \tag{143}$$

Вычислим оставшиеся суперследы:

$$\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}_a\tilde{\mathcal{Q}}_a] = \frac{1}{2}\mathrm{str}_4[1-\mathcal{Q}\Sigma_3\mathcal{Q}\Sigma_3] = -(1-\cos 2\theta); \tag{144}$$

$$\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}_s\tilde{\mathcal{Q}}_s] = \frac{1}{2}\mathrm{str}_4[1+\mathcal{Q}\Sigma_3\mathcal{Q}\Sigma_3] = 1-\cos 2\theta. \tag{145}$$

Поправка к плотности состояний тогда будет:

$$\delta\rho(E)_{EW} = \pi^2\nu^3E^2\,\mathrm{Re}\int d\mathbf{r}\cos\theta^R(\mathbf{r})(\alpha-\beta)\int D\mathcal{Q}[1+\cos\theta+2\zeta\eta(1-\cos\theta)]][1-\cos 2\theta]$$
$$\exp[-S_E[Q_{zero}]] = \frac{\pi^2\nu^3E^2D^2C_1C_0}{4\Delta_0^3}\,\mathrm{Re}\int D\mathcal{Q}[1+\cos\theta+2\zeta\eta(1-\cos\theta)]][1-\cos 2\theta]\exp[-S_E[Q_{zero}]], \tag{146}$$

где α,β определены (135),а C_0 определен в (138).

Этот интеграл не содержит сингулярность. После его вычисления получаем:

$$\delta\rho(E)_{EW} = -\frac{2C_0}{\pi C_1 \Delta_0}\left(\frac{\sin 2\pi E/\omega_0}{2\pi E/\omega_0} - \cos^2 \pi E/\omega_0\right). \tag{147}$$

Эту поправку нужно сложить с поправкой (137):

$$\delta\rho(E)_{WEW} + \delta\rho(E)_{WE} = -\frac{2C_0}{\pi C_1 \Delta_0}\sin^2[\pi E/\omega_0] = -\frac{4C_0}{\pi C_1^2 \omega_0 g}\sin^2[\pi E/\omega_0]. \tag{148}$$

Мы видим, что как и для (127), функциональной зависимостью является $\sin^2 \pi E/\omega_0$.

Тем не менее, найденные поправки (127), (137) не содержат двумерного логарифма $\ln(\xi/l)$, что означает, что механизм проявления слаболокализационных поправок связан с членами более высоких порядков по W, см. разделы 5.5 и 5.6.

5.5 Поправка слабой локализации в предэкспоненте

Слабая локализация уменьшает плотность состояний уже на нулевой энергии, при этом она существует и для систем металлических, без параметра порядка. Поэтому появление логарифма ожидается за счет нелинейности в градиентном члене. В общем виде он может быть записан как

$$S^{(3)} = -\frac{\pi\nu D}{8}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{str}[(\nabla Q')^2 + 2(Q'\nabla Q' - \nabla Q' Q')\mathbf{J} + 2Q'\mathbf{J}Q'\mathbf{J} - 2\mathbf{J}^2], \tag{149}$$

где

$$\mathbf{J} = U\nabla U^{-1} = \frac{i}{2}\nabla\phi(\cos\theta^R \tau_1\Sigma_3 + \sin\theta^R\tau_3) - \frac{i}{2}\nabla\theta^R\tau_2\Sigma_3; \tag{150}$$

$$Q' = \tau_1(1 + W + W^2/2 + \ldots). \tag{151}$$

Первый и последний член в (11) не связаны со слаболокализационными вкладами. Рассмотрим среди членов в $\mathbf{J}$ только тот, что имеет $\nabla\theta$. В таком случае в члене $Q'\mathbf{J}Q'\mathbf{J}$ в одном Q' берется линейный член, в другом — квадратичный. Непосредственной проверкой можно увидеть, что след по N даст 0.

Единственный оставшийся член это $(Q'\nabla Q' - \nabla Q' Q')\mathbf{J}$. Распишем его, используя антикоммутативность W и τ_1

$$\mathrm{str}(Q'\nabla Q' - \nabla Q' Q')\mathbf{J} = \frac{1}{2}\mathrm{str}(\tau_1 W\tau_1 W\nabla W + \tau_1 W\tau_1\nabla W W + \tau_1 W^2\tau_1\nabla W - \tau_1\nabla W W\tau_1 W - \\ - \tau_1 W\nabla W\tau_1 W - \tau_1\nabla W\tau_1 W^2)\mathbf{J} = -W\nabla W W\mathbf{J}. \tag{152}$$

Рассмотрим среди членов в $\mathbf{J}$ только тот, что имеет $\nabla\theta$. Тогда, подставляя получившиеся выражение в действие (149), получаем:

$$S_{WL}^{(3)} = -\frac{i\pi\nu D}{8}\int d\mathbf{r}\nabla\theta^R\,\mathrm{str}[\tau_2\Sigma_3 W\nabla W W]. \tag{153}$$

Тогда поправка к действию запишется как

$$\delta\rho(E)_1 = \mathrm{Re}\,\frac{i\pi\nu^2 D}{32}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\nabla\theta^R(\mathbf{r}')\int D\mathcal{Q}\langle...\rangle\exp[-S_E[Q_{zero}]]; \tag{154}$$

$$\langle...\rangle = \langle\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[W(\mathbf{r}')\tau_2\Sigma_3 W(\mathbf{r}')\nabla W(\mathbf{r}')]\rangle. \tag{155}$$

Используя теорему Вика можно вычислить среднее, стоящие в последнем выражении. Среди 3 возможных спариваний слабую локализацию будет давать только одно: нужно спарить $W(\mathbf{r})$ с $\nabla W(\mathbf{r}')$. Слабая локализация возникает от обратных операторов (65) в совпадающих точках. Спаривание же $W(\mathbf{r}')$ с $\nabla W(\mathbf{r}')$ будет выдать производную такого оператора, т.е. величину, не содержащую логарифм (см. Приложение B).

Таким образом, мы можем применить правило слияния (94). Здесь имеем:

$$P_2 = \frac{i}{2}(\tilde{\mathcal{Q}}' - \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3) + \frac{i}{2}\sin\theta^R(\tilde{\mathcal{Q}}' + \Sigma_3\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3) = i\tilde{\mathcal{Q}}'_a + i\sin\theta^R\tilde{\mathcal{Q}}'_s; \tag{156}$$

$$R_2(\mathbf{r}') = c(\mathbf{r}')\Sigma_3 c(\mathbf{r}') - d(\mathbf{r}')\Sigma_3 d(\mathbf{r}'). \tag{157}$$

Правила (49) дают $\overline{R}_2 = -R_2$. Точно также $\overline{\tilde{\mathcal{Q}}'} = -\tilde{\mathcal{Q}}'$. Поэтому результат использования (94):

$$\langle\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[W(\mathbf{r}')\tau_2\Sigma_3 W(\mathbf{r}')\nabla W(\mathbf{r}')]\rangle = \frac{8i}{\pi\nu}\big([(\nabla_{\mathbf{r}'}A^{-1}_{ac}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_a R_{a2}(\mathbf{r}')]]+ \\ +\sin\theta^R(\mathbf{r})(\nabla_{\mathbf{r}'}A^{-1}_{sc}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2}(\mathbf{r}')]]\big). \tag{158}$$

Осталось использовать правила слияния (102) и (104). Как окажется, первый член в последнем выражении усредняяется в 0. Поэтому сразу перейдем ко второму. Нужно вычислить среднее

$$\langle\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2}(\mathbf{r}')]\rangle = \frac{1}{2}\langle\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s c\Sigma_3 c - \tilde{\mathcal{Q}}'_s d\Sigma_3 d + \tilde{\mathcal{Q}}'_s\Sigma_3 c\Sigma_3 c\Sigma_3 - \tilde{\mathcal{Q}}'_s\Sigma_3 d\Sigma_3 d\Sigma_3]\rangle. \tag{159}$$

Для каждого из 4 членов в последнем выражении можем использовать правило слияния (102). 1 и 3, а также 2 и 4 член в этом выражении дадут одинаковый результат.Для первого же члена в (159), такие члены входят с разным знаком, а значит будет 0. Результат использования (102) дает:

$$\langle\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2}(\mathbf{r}')]\rangle = \frac{1}{\pi\nu}\left[A^{-1}_{ac}(\mathbf{r}',\mathbf{r}') + A^{-1}_{ad}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\right]\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3]. \tag{160}$$

Таким образом усреднение дает формулу:

$$\frac{8i}{\pi^2\nu^2}\sin\theta^R(\mathbf{r})(\nabla_{\mathbf{r}'}A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\big[A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')+A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\big]\,\mathrm{str}_4\,\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3. \tag{161}$$

Поправка к плотности состояний запишется как:

$$\delta\rho(E)_1=-\,\mathrm{Re}\,\frac{D}{4\pi}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\sin\theta^R(\mathbf{r})(\nabla_{\mathbf{r}'}A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\nabla\theta^R(\mathbf{r}')\left[A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')+A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\right]$$
$$\int D\mathcal{Q}\,\mathrm{str}_4[\Sigma_3 k\mathcal{Q}]\exp[-S_E[Q_{zero}]]. \tag{162}$$

Рассмотрим пространственный интеграл в выражениии для поправки к плотности состояний:

$$\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\sin\theta^R(\mathbf{r})(\nabla_{\mathbf{r}'}A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\nabla\theta^R(\mathbf{r}')\big[A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')+A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\big]. \tag{163}$$

Выражение $\big[A_{ac}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')+A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\big]$ есть просто $\ln(\xi/l)/\pi D$. Интегрируя по частям, можно написать:

$$\frac{\ln(\xi/l)}{\pi D}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\sin\theta^R(\mathbf{r})A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(-\nabla^2\theta^R(\mathbf{r}'))=\frac{\ln(\xi/l)}{2\pi\xi^2\Delta_0^2}\int d\mathbf{R}'z(R')(-\nabla\theta^R(R'))=\frac{\ln(\xi/l)}{2\pi\Delta_0^2\xi^2}C_3, \tag{164}$$

где

$$C_3=\int d\mathbf{R}'z(R')(-\nabla^2\theta^R(R')). \tag{165}$$

Функция z определена в (139) и вычислена в Приложении A. Прежде чем считать численные коэффициенты, обсудим получившийся ответ. Поправку к плотности состояний можно выразить через среднюю плотность состояний в C классе (44). Итоговый ответ запишется как:

$$\frac{\delta\rho_1}{\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle}=-\frac{C_3\ln(\xi/l)\omega_0}{\pi^2\Delta_0}=-\frac{2C_3\ln(\xi/l)}{\pi^2 gC_1}. \tag{166}$$

Как мы видим, это — слабая локализация в чистом виде. Как известно, слабая локализация перенормирует коэффициент диффузии, которой входит в уравнении Узаделя (10) в двух членах: в члене $\nabla^2\theta^R$ и в члене с $(\nabla\phi)^2$. Мы получили результат, рассматривающий именно $\nabla^2\theta$.

Посмотрим, как можно учесть вклад от градиента фазы. В самом начале вычислений мы пренебрегли в $\mathbf{J}$ вкладом с фазой. Попробуем ее учесть.

Член подходивший до этого, а именно $Q'\nabla Q'-\nabla Q'Q'$, не будет давать вклада, так как будут появляется члены вида $(\nabla_{\mathbf{r}'}A^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))\nabla_{\mathbf{r}'}\phi f[\theta]$. Под $A^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ подразумевается какой-то из обратных операторов (65), а $f[\theta^R]$ обозначает какую-то функцию только от угла θ^R. Интегрируря такое выражение по частям, мы будем получать 0, так как $\nabla^2\phi=0, \nabla\theta^R\nabla\phi=0$, см. (25).

Тогда вновь рассмотрим член $Q'\mathbf{J}Q'\mathbf{J}$ в 3 порядке, оставляя в $\mathbf{J}$ только вклад с $\nabla\phi$. Вклад такого члена в действие запишется как:

$$-\frac{\pi\nu D}{4}\int d\mathbf{r}\,\mathrm{str}[\tau_1 W\mathbf{J}\tau_1 W^2\mathbf{J}]. \tag{167}$$

Поправка к плотности состояний будет

$$\delta\rho(E)_2 = \mathrm{Re}\,\frac{\pi\nu^2 D}{16}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\int D\mathcal{Q}\langle...\rangle\exp[-S_E[Q_{zero}]]; \tag{168}$$

$$\langle...\rangle = \langle\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[\tau_1 W\mathbf{J}\tau_1 W^2\mathbf{J}]\rangle. \tag{169}$$

По теореме Вика есть 3 вида спариваний. Начнем со спаривания, где спариваются линейные члены W в разных суперследах. Можем применить правило слияния (94). Здесь имеем:

$$P_2 = i\tilde{\mathcal{Q}}'_a + i\sin\theta^R\tilde{\mathcal{Q}}'_s; \tag{170}$$

$$R_2(\mathbf{r}') = -\frac{i}{4}(\nabla\phi)^2\cos\theta^R\sin\theta^R[\Sigma_3 c + \Sigma_3 c^2 + d\Sigma_3 d + \Sigma_3 d^2]. \tag{171}$$

Как мы видим c и d входят в R_2 с одинаковыми знаками. Использование (102) приводит к выражению, не дающего большой логарифм, т.к. будет содержать выражение $A^{-1}_{ad}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')-A^{-1}_{ac}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')$, в котором этот логарифм сокращается.

Два других спаривания W будут давать одинаковый вклад. Нам нужно спаривать W из предэкспоненты с одним из квадратичных W в (167). Для это случая R_2 равно

$$R_2(\mathbf{r}') = -\frac{i}{4}(\nabla\phi)^2\cos\theta^R\sin\theta^R[c\Sigma_3 c + \Sigma_3 c^2 + d\Sigma_3 d - \Sigma_3 d^2]. \tag{172}$$

Используя симметрию $\overline{R_2} = -R_2$, можем написать правило слияния (94):

$$\langle\mathrm{str}[U\tau_3\tilde{\mathcal{Q}}'U^{-1}\tau_1 W(\mathbf{r})]\,\mathrm{str}[\tau_1 W\mathbf{J}\tau_1 W^2\mathbf{J}]\rangle = \frac{8i}{\pi\nu}A^{-1}_{ac}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_a R_{a2}]+ \\ + \frac{8i}{\pi\nu}\sin\theta^R(\mathbf{r})A^{-1}_{sc}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2}]. \tag{173}$$

Далее нужно вычислять $\langle\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_a R_{a2}]\rangle$ и $\langle\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2}]\rangle$. Можем записать для симметричного вклада:

$$\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2} = \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{Q}}'_s[c\Sigma_3 c + \Sigma_3 c^2 + d\Sigma_3 d - \Sigma_3 d^2 + \Sigma_3 c\Sigma_3 c + c^2\Sigma_3 + \Sigma_3 d\Sigma_3 d_3 - d^2\Sigma_3]. \tag{174}$$

Для каждого из выражение можно применить (102). Итого получится:

$$\langle\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'_s R_{s2}]\rangle = \frac{i}{2\pi\nu}(\nabla_{\mathbf{r}'}\phi)^2\cos\theta^R(\mathbf{r}')\sin\theta^R(\mathbf{r}')A^{-1}_{ad}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_4[\tilde{\mathcal{Q}}'\Sigma_3]. \tag{175}$$

Антисимметричная часть даст 0. Полный результат усреднения от обоих типов спариваний будет:

$$\frac{8i}{\pi^2\nu^2}\sin\theta^R(\mathbf{r})A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(\nabla_{\mathbf{r}'}\phi)^2\cos\theta^R(\mathbf{r}')\sin\theta^R(\mathbf{r}')A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')\,\mathrm{str}_3\,\Sigma_3 k\mathcal{Q}. \tag{176}$$

Здесь $A_{ad}^{-1}(\mathbf{r}',\mathbf{r}')$, как обычно, это $\ln(\xi/l)/(2\pi)$.

Дальнейший расчет абсолютно анологичен тому,что был проведен выше для поправки $\delta\rho(E)_1$. В итоге приходим к выражению:

$$\frac{\delta\rho_2}{\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle}=-\frac{C_4\ln(\xi/l)\omega_0}{\pi^2\Delta_0}=-\frac{2C_4\ln(\xi/l)}{\pi^2 gC_1}, \tag{177}$$

где безразмерный коэффициент C_4 определяется как:

$$\int d\mathbf{R}'z(R')((\nabla_{\mathbf{R}}\phi)^2\sin\theta^R(R)\cos\theta^R(R)), \tag{178}$$

где, как уже было сказано выше, z определена в (139) а ее вычисление можно найти в Приложении A. Комбинируя поправки слабой локализации, мы приходим к ответу:

$$\frac{\delta\rho_{WL}}{\langle\rho_C(E)\rangle}=-\frac{(C_3+C_4)\ln(\xi/l)\omega_0}{\pi^2\Delta_0}=-\frac{2C\ln(\xi/l)}{\pi^2 gC_1}, \tag{179}$$

где

$$C=\int d\mathbf{R}'z(R')(-\nabla_R^2\theta^R+(\nabla_{\mathbf{R}}\phi)^2\sin\theta^R(R)\cos\theta^R(R))=\int d\mathbf{R}'z(R')(\frac{\Delta(R)}{\Delta_0}\cos\theta^R(R)). \tag{180}$$

Последнее равенство было написано, так как спектральный угол θ^R решает решает уравнение Узаделя на нулевой энергии (24). Численный коэффицент в последнем выражении равен

$$C=4.262. \tag{181}$$

Подставляя этот коэффицент в поправку (179), приходим к финальной формуле:

$$\frac{\delta\rho_{WL}}{\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle}=-0.087\frac{\ln(\xi/l)}{g}. \tag{182}$$

Этот результат не случаен. Как известно слабая локализация перенормирует коэффициент диффузии D уже на нулевой энергии. Посмотрим, как это влияет на плотность состояний в рамках уравнения Узаделя (10) на нулевой энергии. Будем считать изменения коэффицента диффузии δD малым. В первом порядке теории возмущений поправка к спектральному углу за счет изменения коэффицента диффузии будет даваться уравнением

$$(-D_0\nabla^2+D_0(\nabla\phi)^2\cos 2\theta^R+2\Delta\sin\theta^R)\delta\theta^R=\frac{\delta D}{D_0}(-D_0\theta^R\nabla^2+D_0(\nabla\phi)^2\sin\theta^R\cos\theta^R). \tag{183}$$

Это уравнение можно переписать как:

$$A_{sc}\delta\theta^R = \frac{\delta D}{D_0}(2\Delta(r)\cos\theta^R). \tag{184}$$

Мы можем решить это уравнение формальным образом. Его решение будет даваться выражением

$$\delta\theta^R(r) = \frac{\delta D}{D_0}\int d\mathbf{r}' A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(2\Delta(r')\cos\theta^R(r')). \tag{185}$$

Глобальная плотность состояний дается интегралом формулы (5).Таким образом, для поправки к плотности состояний имеем

$$\delta\rho = -2\nu\frac{\delta D}{D_0}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}'\sin\theta^R(r)A_{sc}^{-1}(\mathbf{r},\mathbf{r}')(2\Delta(r')\cos\theta^R(r')). \tag{186}$$

Интегрируя формально по $\mathbf{r}$ и делая замену переменных $R = r/\xi$, приходим к результату для отношения поправки плотности состояний к плотности состояний на нулевой энергии (26):

$$\omega_0\delta\rho = -2\frac{C}{C_1}\frac{\delta D}{D_0} \tag{187}$$

Обычно изменение $\delta D/D_0$ есть $-\ln(\xi/l)/\pi^2 g$. Подставляя это в последнее выражение, получается что это выражение в точности совпадает с ранее полученной формулой (179).

5.6 Поправка слабой локализации в действии S_E

С тем же успехом, что и в разделе 5.5, мы могли бы спаривать нелинейное действие (149) с W из разложения S_E, спущенного в предэкспоненту. Повторение вычислений не нужно, потому что, ровно так же, как было сказано в разделе 5.2, это вычисление просто дает результат:

$$\delta\rho = -\frac{2C\ln(\xi/l)}{\pi^2 gC_1}E\frac{d}{dE}\langle\rho(E)\rangle, \tag{188}$$

делая общую поправку слабой локализации равной

$$\delta\rho_{WL} = -\frac{2C\ln(\xi/l)}{\pi^2 gC_1}\left(1 + E\frac{d}{dE}\right)\langle\rho_{\mathrm{C}}(E)\rangle = -\frac{4C\ln(\xi/l)}{\pi^2 C_1 g\omega_0}\sin^2[\pi E/\omega_0]. \tag{189}$$

6 Перенормировка ω_0

Рассмотрим сумму всех шести вкладов, найденных выше. Суммируя (127), (148) и (189), мы приходим к следующему выражению:

$$\delta\langle\rho(E)\rangle = \frac{1}{g}\left[\frac{2C_2}{\pi C_1} - \frac{4C_0}{\pi C_1^2} - \frac{4C\ln(\xi/l)}{\pi^2 C_1}\right]\frac{\sin^2\pi E/\omega_0}{\omega_0}. \tag{190}$$

Фактически это выражение свидетельствует о перенормировке затравочной плотности состояний $\rho_0 = 1/\omega_0$. Действительно, пусть такая перенормировка имеет место быть: $\rho_0 \to \rho_0 + \delta\rho$. Тогда она должна согласованно приводить как к изменению абсолютной величины $\rho_{\mathrm{C}}(E)$, так и изменению периода осцилляций. Изменение плотности состояний в этом случае будет равняться:

$$\delta\langle\rho(E)\rangle = \delta\rho\frac{d}{d\rho_0}\langle\rho(E)\rangle = \frac{\delta\rho}{\rho_0}\,2\sin^2\pi E/\omega_0 \tag{191}$$

что полностью совпадает со структурой уравнения (190). Таким образом, мы приходим к выводу, что затравочная плотность состояний ρ_0 перенормируется согласно

$$\rho_0 \to \tilde{\rho}_0 = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} = \rho_0\left\{1 - \frac{1}{g}\left[\frac{2C\ln(\xi/l)}{\pi^2 C_1} + \frac{2C_0}{\pi C_1^2} - \frac{C_2}{\pi C_1}\right]\right\}. \tag{192}$$

Главный вклад в подавление ρ_0 и, соответственно, рост ω_0 дает слабая локализация, что происходит за счет уменьшения коэффициента диффузии, а следовательно, и размера кора.

Итак, все рассмотренные эффекты учитываются заменой $\omega_0 \to \tilde{\omega}_0$. После этого ответ для средней плотности состояний дается стандартной нульмерной формулой (44) с перенормированной $\tilde{\omega}_0$.

7 Заключение

Мы исследовали среднюю плотность состояний, локализованных в коре сверхпроводящего вихря в грязных сверхпроводящих пленках с безразмерным кондактансом $g \gg 1$. В пределе $g \to \infty$ она описывается нульмерным выражением, отвечающим случайным матрицам симметрийного класса C. В этом случае ответ является универсальным, поскольку определяется только симметрией системы.

Для того, чтобы найти поправки к нульмерному ответу исследована структура высших пространственных мод (купероны и диффузоны) на фоне вихревого решения. Выведены соответствующие правила слияния. Произведен пертурбативный учет вклада высших мод в среднюю плотность состояний, при этом нулевая мода учитывается точно.

В однопетлевом приближении по массивным модам имеются шесть различных диаграмм для плотности состояний, которые естественным образом комбинируются в три пары. В каждой паре вклады в $\langle \delta\rho(E) \rangle$ согласованным образом описывают как изменение абсолютной величины плотности состояний, так и изменение периода фриделевских осцилляций.

Таким образом, весь эффект флуктуаций в одной петле сводится к перенормировке средней затравочной плотности состояний ρ_0 или, что эквивалентно, среднего расстояния между уровнями $\omega_0 = 1/\rho_0$. Основной вклад в перенормировку дает слабая локализация, уменьшающая D, а вместе с ним и размер кора $\xi = \sqrt{D/2\Delta_0}$.

Модификации универсального нульмерного ответа в духе поправок Кравцова-Мирлина [6] нами не обнаружено. По всей видимости, она возникает в двух петлях, как и для стандартных вигнер-дайсоновских ансамблей.

Список литературы

[1] A. Altland и M. R. Zirnbauer. «Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures». В: *Physical Review B* 55 (1997), с. 1142.

[2] R. Bundschuh, C. Cassanello, D. Serban и M.R. Zirnbauer. «Localization of quasiparticles in a disordered vortex». В: *Nuclear Physics B* 532 (1998), с. 689.

[3] C. Caroli, P.G. De Gennes и J. Matricon. «Bound fermion states on a vortex line in a type II superconductor». В: *Physics Letters* 9 (1964), с. 307.

[4] K. Efetov. *Supersymmetry in Disorder and Chaos.* Cambridge University Press, 1996.

[5] A. A. Koulakov и A. I. Larkin. «Vortex density of states and absorption in clean layered superconductors». В: *Phys. Rev. B* 60 (1999), с. 14597.

[6] V. E. Kravtsov и A. D. Mirlin. «Level statistics in a metallic sample: corrections to the Wigner - Dyson distribution». В: *Письма в ЖЭТФ* 60 (1994), с. 645.

[7] R.J. Watts-Tobin и G.M. Waterworth. «Calculation of the vortex structure in a superconducting alloy». В: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and nuclei* 261 (1973), с. 249.

[8] М.А Скворцов. *диссертация на соискание ученой степени кандидата физикоматематических наук. Тема: «Статистика уровней и локализация в двумерных системах с киральным электронным спектром».* Черноголовка, 1998.

A Вычисление C_0

$$C_0 = \int d\mathbf{R}[z(R)\sin\theta^R - y(R)]. \tag{A.1}$$

В первую очередь целесообразно в принципе проверить конечность коэффицента C_0.

Расмотрим интеграл (138) на больших расстояниях,так как на малых функции z и y гарантированно конечны. На больших расстояних ($R \gg 1$) θ^R экспоненциально близко к $\pi/2$ [2].

$$\theta^R \approx \frac{\pi}{2} - be^{-R}, \quad b = \frac{const}{\sqrt{R}}. \tag{A.2}$$

Параметр порядка Δ же вблизи своего максимального значения Δ_0 раскладывается по степеням $\frac{1}{R}$. Имея это запишем

$$(\frac{\Delta(R \gg 1)}{\Delta_0} - \frac{1}{R^2} + a_1(R)e^{-R})z(R \gg 1) = \frac{1}{2} + a_2(R)e^{-R}; \tag{A.3}$$

$$(\frac{\Delta(R \gg 1)}{\Delta_0} - \frac{1}{R^2} + b_1(R)e^{-R})y(R \gg 1) = \frac{1}{2} + b_2(R)e^{-R}, \tag{A.4}$$

где функции a_1, a_2, b_1, b_2 - степенные. Подставляя (A.3) в (138), имеем,что все степенные члены сокращаются. Остаются только экспоненицально малые:

$$C_0 \sim \int d\mathbf{R}C(R)e^{-R}. \tag{A.5}$$

Таким образом, коэффицент C_0 конечен.

Перейдем к вычислению C_0. Как было сказано ранее, граничные условия для z — это

$$z(0) = 0 \quad z(\infty) = \frac{1}{2} \quad z(R \ll 1) = const\ R. \tag{A.6}$$

Так же как и уравнение (24), уравнение (139) неустойчивое, т.е. при отклонении от правильного наклона решение уходит на $\pm\infty$. Поэтому его удобно решать методом стрельбы.

Оператор A_{ac} (65) имеет нулевую моду $\cos\theta^R$. Как отмечалось в главе (4) , такая нулевая мода должна быть исключена из рассмотрения.Для этого спроектируем уравнение (140) на пространство собственных векторов без одного,который соответсвует нулевой моде:

$$A_{ac}(\mathbf{R})y(R) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\int d\mathbf{R}\cos\theta^R(R)}{\int d\mathbf{R}\cos^2\theta^R(R)}\cos\theta^R = \frac{1}{2} - \frac{2.6371}{2}\cos\theta^R. \tag{A.7}$$

Оператор A_{ac} несингулярен ,поэтому граничными условиями для y являются

$$y'(0) = 0 \quad y(\infty) = \frac{1}{2}. \tag{A.8}$$

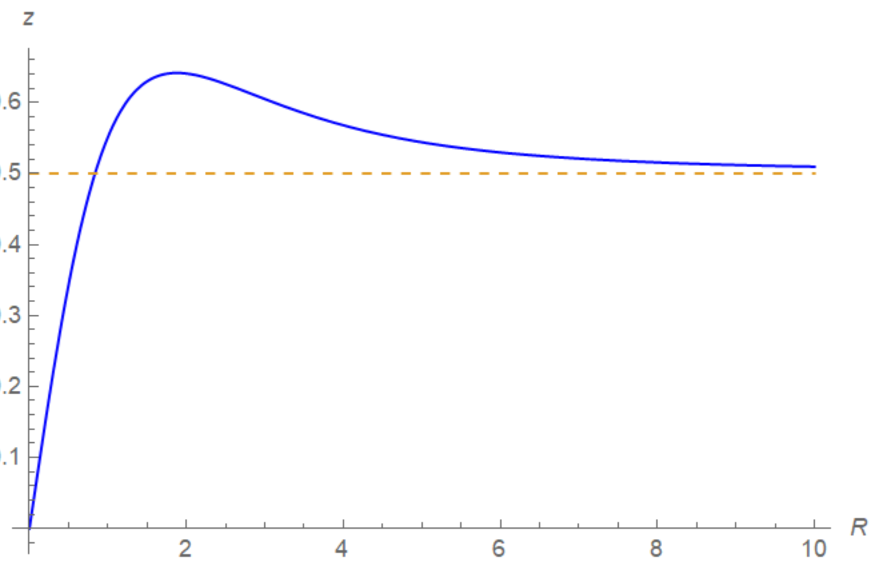

Рис. 2: Решение уравнения (139)

Решение этого уравнения имеют сложность,связанную с его неустойчивостью. Функция θ^R, а также коэффицент $\int d\mathbf{R}\cos\theta^R(R)/\int d\mathbf{R}\cos^2\theta^R(R)$ известны лишь приближенно, поэтому решение этого уравнения не будет выходить на правильную асимптотику. Чтобы решить эту проблему удобно ввести дополнительный параметр s, близкий к 1. Уравнение с этим параметром запишется как

$$A_{ac}(\mathbf{R})y(R) = \frac{1}{2} - s\frac{2.6371}{2}\cos\theta^R : \tag{A.9}$$

Функция $y(R)$ задается на пространстве собственных векторов A_{ac} без нулевой моды, поэтому y ортогональна нулевой моде.

Параметр $y(0)$ отрицателен и подбирается методом стрельбы так,чтобы перекрытие решения y с нулевой модой $\cos\theta^R$ было нулевым. Затем,варьируя s с точностью выше чем вычисляется коэффицент $\int d\mathbf{R}\cos\theta^R(R)/\int d\mathbf{R}\cos^2\theta^R(R)$, ищется оптимальное положение решения.

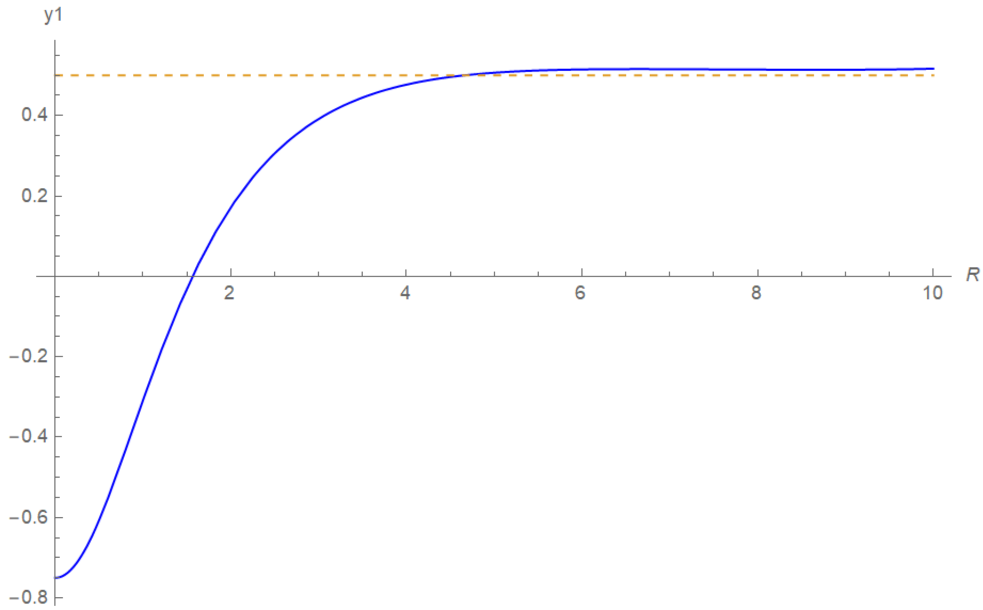

Рис. 3: Решение уравнения (A.9)

Важно отметить,что асимптотики (A.3) подходят к 1/2 сверху, что и можно увидеть на графиках (3),(2).

Подставляя найденные функции y и z в (138), получаем значение коэффициента C_0:

$$C_0 \approx 19.2. \tag{A.10}$$

B Структура обратных операторов A_{ac}^{-1} и A_{ad}^{-1}. Вычисление C_2

$$C_2 = \int d\mathbf{R} \cos\theta^R(R)(A_{ad}^{-1}(\mathbf{R},\mathbf{R}) - A_{ac}^{-1}(\mathbf{R},\mathbf{R})) \tag{B.1}$$

Интеграл в (114) сходится на расстояних порядка размера кора ξ, поэтому он конечен.Перейдем к рассмотрению стоящих в нем слагаемых.

В этом интеграле присустствуют обратные операторы в совпадющих точках. Рассмотрим сначало поведение операторов на больших расстояниях. Пользуясь (65) можем написать как выглядят операторы после замены переменных.

$$A_{ac}(\mathbf{R}) = -\nabla_R^2 + \frac{\Delta}{\Delta_0}\sin\theta^R - [(\nabla_R\theta^R)^2 + \frac{\sin^2\theta^R}{R^2}]; \tag{B.2}$$

$$A_{ad}(\mathbf{R}) = -\nabla_R^2 + \frac{\Delta}{\Delta_0}\sin\theta^R. \tag{B.3}$$

На больших расстояниях оба эти операторы выглядят как $-\nabla^2 + 1$. Функция грина такого оператора равна $K_0(R-R')/2\pi$ и она расходится в совпадаюших точках. Тем не менее нужно просто

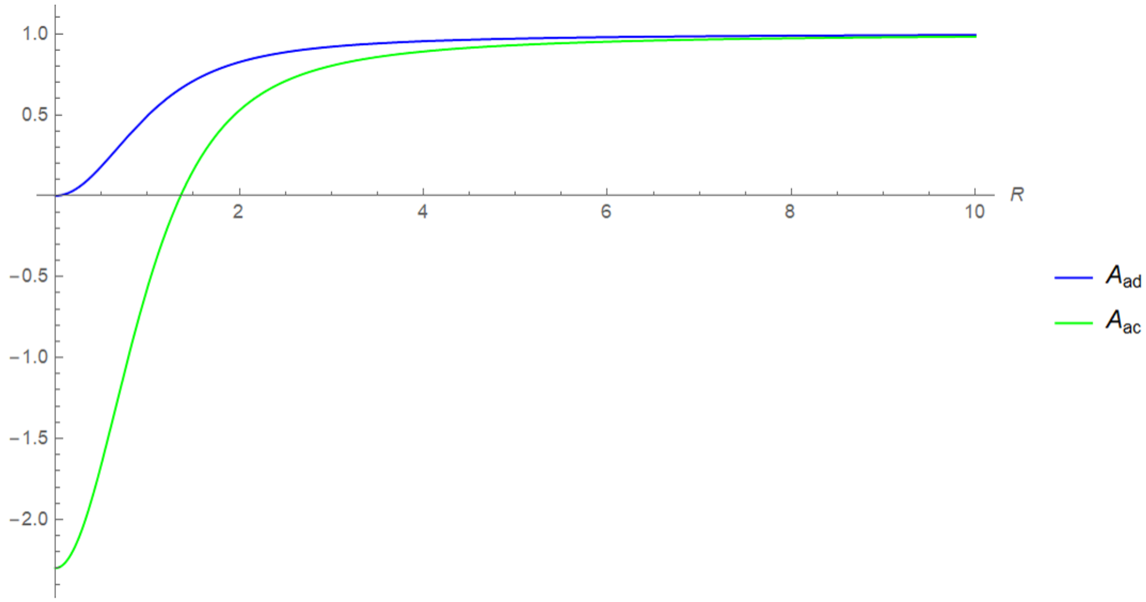

Рис. 4: Потенциальные части операторов A_{ac} и A_{ad}

обрезать на длине свободного пробега. В результате получается $\ln\frac{\xi}{l}/2\pi$. Здесь мы учитываем,что нулевая мода A_{ac} исключена, поэтому этот оператор можно спокойно обращать.

Обратим численно операторы A_{ac} и A_{ad}, не забывая исключить из оператора A_{ac} нулевую моду $A_{ac} - \frac{|0><0|}{\epsilon_0}$. $|0>$ - собственная функция , соответствующая наименьшему собственному значению ϵ_0. Отметим,что из-за численного счета ϵ_0 не равно тождественно нулю.

Как видно на рисунке (5), обратные операторы на расстояниях $R \gtrsim 1$ совпадают с $\ln\frac{\xi}{l}/2\pi$. На меньших расстояниях они слабо отличаются от $\ln\frac{\xi}{l}/2\pi$. Поэтому можно написать обратные операторы в следующем виде

$$(A_{ac})^{-1} = \ln\frac{\xi}{l}/2\pi + f_c(R), \quad (A_{ad})^{-1} = \ln\frac{\xi}{l}/2\pi + f_d(R), \tag{B.4}$$

где функции f_c, f_d на малых по сравнению с размером кора расстояниях отличаются от $\ln\frac{\xi}{l}/2\pi$ на величины порядка единицы. На больших расстояних обе функции стремятся к $\ln\frac{\xi}{l}/2\pi$.В связи с этим (114) можно записать как

$$C_2 = \int d\mathbf{R}\cos\theta^R(R)(f_d(R) - f_c(R)) \tag{B.5}$$

Если бы разница функций была равна единице ,то получилось бы C_1 . Запишем C_2 как

$$C_2 = aC_1, \tag{B.6}$$

где a порядка единицы.

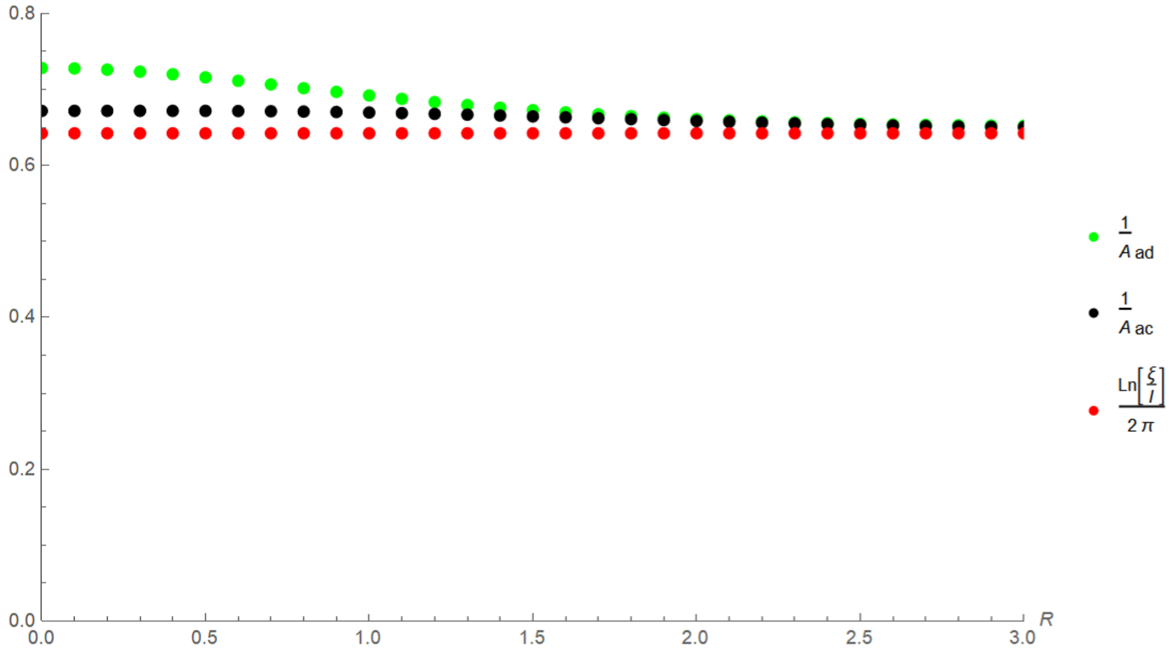

Рис. 5: Численное обращение операторов A_{ac}, A_{ad} сравнивается с обращением $-\nabla^2+1$ в совпадающих точках ($=\ln\frac{\xi}{l}/2\pi$)

Попробуем посчитать коэффицент C_2. Обращение операторов будем вести на сетке 71×71 ($n=35$)с шагом $h=0.1$. Для таких параметров обратные операторы будут определены вплоть до $R=hn=3.5$. Численное интегрирование C_1 на отрезке $[0,3.5]$ дает $\int d\mathbf{R}\cos\theta^R\approx 8.70948$. Интегрирование же по n точкам сетки методом трапеции дает результат ≈ 8.70358. Видно, что результаты очень близки, с относительной разницей 0.068%.

Вычислим C_2 методом трапеций. В результате получается $C_2\approx 0.11177$.

Таким образом, для коэффициента a имеем:

$$a=\frac{C_2}{C_1}\approx\frac{0.11177}{8.70358}\approx 0.013. \tag{B.7}$$