

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

КАФЕДРА ПРОБЛЕМ ТЕОРИТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**Связанные состояния магнонов в гетероструктурах  
сверхпроводник–киральнй ферромагнетик**

(Дипломная работа бакалавра)

**Выполнил: Денис Сергеевич Катков**

**Научный руководитель: Игорь Сергеевич Бурмистров**

г. Долгопрудный

2023

## Аннотация

В данной работе исследуется влияние поля от сверхпроводящего вихря в бислой сверхпроводник-киральная ферромагнетик на спектр спиновых волн (магнонов). Задача о нахождении спектра сводится к решению двумерного бозонного гамильтониана типа Боголюбова - Де Жена, в котором потенциал определяется возмущением магнитного порядка. Обнаруживаются и исследуются в различных пределах связанные состояния, оценивается положение низколежащих и высоколежащих уровней, их количество. Затем анализируется задача рассеяния с использованием различных приближений. Получаются оценки для обычного и транспортного сечений рассеяния.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
1.1	Энергия кирального ферромагнетика . . . . .	4
1.2	Теория рассеяния спиновых волн на возмущении магнитного порядка . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Связанные состояния магнонов</b>	<b>8</b>
2.1	Водородоподобные связанные состояния магнонов . . . . .	8
2.2	Приближенный потенциал для больших расстояний . . . . .	10
2.3	Связанные состояния вблизи магнонного континуума . . . . .	13
2.3.1	Квазиклассические высоколежащие уровни . . . . .	13
2.3.2	Предел мелкой ямы . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Рассеяние магнонов (непрерывный спектр)</b>	<b>17</b>
3.1	Борновское приближение . . . . .	17
3.2	Фазовая теория рассеяния . . . . .	19
3.2.1	Условие применимости WKБ . . . . .	21
3.2.2	Скачок квазиклассического интеграла . . . . .	23
3.2.3	Направление рассеяния . . . . .	24
3.3	Рассеяние при малых энергиях . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Вывод</b>	<b>28</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Приложения</b>	<b>32</b>
5.1	Учет изменения магнитного поля внутри кора вихря . . . . .	32
5.2	WKБ интеграл для высоколежащих энергий . . . . .	32
5.2.1	Способ 1: разложение в ряд и почленное интегрирование . . . . .	32
5.2.2	Способ 2: разделение на области интегрирования . . . . .	33

# 1 Введение

Гетероструктуры сверхпроводник-ферромагнетик вызывают интерес у физиков-экспериментаторов и физиков-теоретиков, поскольку демонстрируют достаточно богатую физику. Например, присутствие скирмиона и его параметры могут существенно влиять на эффект Джозефсона в S-F-S контакте, включая многократное изменение величины критического тока [17]. Также теоретически предсказано, что в бислое сверхпроводник-киральнй ферромагнетик присутствие скирмиона может создавать в сверхпроводнике связанные состояния, аналогичные состояниям Ю-Шибы-Русинова [11]. Экспериментально обнаружено влияние сверхпроводника на транспорт спиновых волн, когда в бислое сверхпроводник-ферромагнетик наблюдался гибридный транспорт спиновых волн и мейснеровского тока [5]. Кроме того, теоретически предсказано, что в таких бислоях присутствие сверхпроводящего вихря может радикально влиять на свойства неелевского скирмиона, такие как радиус и киральность [3]. На парах скирмион-вихрь могут образовываться майорановские связанные состояния ([16, 13]), что было предложено использовать как платформу для квантовых вычислений [10].

В настоящей работе мы обратимся к вопросу о влиянии сверхпроводящего вихря на магنونный спектр. Взаимодействие между спиновыми волнами и решеткой сверхпроводящих вихрей было обнаружено экспериментально [7]. Теоретически исследовано, что другое возмущение магнитного порядка ферромагнетика, а именно скирмион, ведет к возникновению связанных магنونных состояний (локализованных колебаний магнитного порядка) и нетривиальному рассеянию падающих плоских волн [14]. Здесь мы будем использовать аналогичную технику для изучения связанных состояний и задачи рассеяния на возмущении магнитного порядка, вызванном вихрем.

## 1.1 Энергия кирального ферромагнетика

В работе исследуется тонкая ферромагнитная пленка, взаимодействующая с магнитным полем вихря в тонкой пленке сверхпроводника (пирловский случай). Выражение для свободной энергии в непрерывном пределе имеет вид [3]:

$$\mathcal{F} = d_F \int \left( A(\vec{\nabla}\vec{m})^2 + K(1 - m_z^2) + D[m_z(\vec{\nabla}\vec{m}) - (\vec{m}\vec{\nabla})m_z] - M_s\vec{m}\vec{B}_{v+} \right) d^2r \quad (1)$$

$$\vec{B}_{v+} = \phi_0 \vec{\nabla} \int \frac{\exp(-qz + i\vec{q}\vec{r})}{q(1 + 2q\lambda)} (d^2\vec{q}); \quad \lambda = \frac{\lambda_L^2}{d_S} \gg \lambda_L; \quad z > 0 \quad (2)$$

Здесь  $A$  соответствует обменному взаимодействию,  $K$  - эффективной одноосной анизотропии,  $D$  - члену Дзялошинского - Морри,  $M_s$  - намагниченность насыщения,  $B_{v+}$  - магнитное поле от

пирловского вихря в полуплоскости  $z > 0$ ,  $\vec{m}$  - единичный вектор направления вектора намагниченности,  $d_F$  - ширина пленки ферромагнетика,  $d_S$  - толщина пленки сверхпроводника,  $\lambda_L$  - Лондоновская глубина проникновения магнитного поля,  $\lambda$  - эффективная длина экранировки в сверхпроводнике в Пирловском случае,  $\phi_0 = hc/2e$  - квант магнитного потока в сверхпроводнике. Для краткости используется обозначение  $(d^2\vec{q}) = d^2\vec{q}/(2\pi)^2$ .

Задача имеет симметрию относительно поворота вокруг оси вихря, так что осмысленно ввести параметры направления вектора намагниченности  $\theta$  и  $\varphi$ , такие что

$$\vec{m}_0 = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (3)$$

В то же время будем параметризовать плоскость пленки координатой  $\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\chi) \\ \rho \sin(\chi) \end{pmatrix}$ . Подставляя выражение (3) в выражение для энергии (1) и минимизируя его по  $\theta(\rho)$  получаем уравнение Эйлера-Лагранжа для  $\theta(\rho)$  в присутствии внешнего магнитного поля[3].

$$\frac{l_w^2}{\rho} \partial_\rho [\rho \partial_\rho \theta(\rho)] - \frac{l_w^2 + \rho^2}{2\rho^2} \sin(2\theta(\rho)) + 2\epsilon \frac{l_w \sin^2(\theta(\rho))}{\rho} + \gamma [b_z(\rho) \sin(\theta(\rho)) - b_r(\rho) \cos(\theta(\rho))] = 0 \quad (4)$$

$$l_w = \sqrt{\frac{A}{K}}; \quad \epsilon = \frac{D}{2\sqrt{AK}}; \quad \gamma = \frac{l_w M_s \phi_0}{\lambda 8\pi A}; \quad \vec{B}_{v+} = -\frac{\phi_0}{4\pi l_w \lambda} [b_r(\rho) \vec{e}_r + b_z(\rho) \vec{e}_z] \quad (5)$$

Здесь  $l_w$  - ширина доменной стенки,  $\epsilon$  - мера силы взаимодействия Дзялошинского-Мории,  $\gamma \ll 1$  - мера силы магнитного поля от вихря, и малый параметр нашей задачи,  $b_{r,z}$  - компоненты обезразмеренного магнитного поля.

Мы считаем параметр силы магнитного поля  $\gamma$  малым, и, как следствие, малым возмущение магнитного порядка  $\theta(\rho)$ . В таком случае мы можем линеаризовать уравнение для основного состояния и решить его. Для расстояний много меньше пирловской длины для магнитного поля справедливо выражение  $b_{r,z}(\xi \ll \rho \ll \lambda) \approx l_w/\rho$ . Тогда в случае  $\gamma \ll 1$  получается следующее выражение для  $\theta(\rho)$  [3]:

$$\theta_\gamma(\rho) \approx \gamma \left[ K_1 \left( \frac{\rho}{l_w} \right) - \frac{l_w}{\rho} \right] \quad (6)$$

Здесь  $K_1$  - функция Макдональда. Следует также обратить внимание, что выражение аналитично в нуле  $\theta(\rho \rightarrow 0) \rightarrow 0$  и убывает на бесконечности как  $\theta(\rho \gg l_w) \approx \gamma l_w/\rho$ . Теперь, когда найден возмущенный магнитный порядок в присутствии вихря (новое основное состояние с учетом магнитного поля вихря), можно перейти к обсуждению движения магнонов (возбуждений на фоне магнитного порядка, определяемого  $\theta(\rho)$ ).

## 1.2 Теория рассеяния спиновых волн на возмущении магнитного порядка

Чтобы исследовать теорию рассеяния спиновых волн, воспользуемся приемом, использованным в работе [14] для исследования рассеяния магнонов на скирмионе. У нас имеется установленный внешним полем магнитный порядок  $\vec{m}_0(\vec{r})$ , соответствующий невозмущенному состоянию ферромагнетика в присутствии внешнего магнитного поля. Будем исследовать магноны как малую поправку к установленному магнитному порядку  $\delta\vec{m}(\vec{r}) = \vec{m}(\vec{r}) - \vec{m}_0(\vec{r})$ . Введем в каждой точке локальную систему координат из трех ортонормированных векторов таких, что  $\vec{e}_3(r) \parallel \vec{m}_0(r)$

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x; \quad \vec{e}_2 = [\vec{m}_0 \times \vec{e}_x]; \quad \vec{e}_3 = \vec{m}_0 \quad (7)$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ -\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Кроме того, введем  $\vec{e}_\pm = (\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)/\sqrt{2}$ . Тогда можно параметризовать вектор магнитного порядка, вводя комплексное поле  $\psi(\vec{r}, t)$

$$\vec{m}(\vec{r}) = \vec{e}_3(\vec{r})\sqrt{1 - 2\psi(\vec{r})\psi^*(\vec{r})} + \vec{e}_+(\vec{r})\psi(\vec{r}) + \vec{e}_-(\vec{r})\psi^*(\vec{r}) \quad (9)$$

Подстановка такого анзаца в лагранжиан (1) в нулевом порядке по  $\psi$  дает энергию основного состояния с учетом возмущения от магнитного поля, в линейном порядке по  $\psi$  сокращается, что естественно, поскольку  $\vec{m}_0$  соответствует стационарному решению (минимуму функционала энергии). Квадратичные же члены разложения лагранжиана по  $\psi$  должны дать волновую теорию (как обычно, второй порядок разложения по малому отклонению дает волновую теорию). Однако, в разложении второго порядка по  $\psi$  возникают аномальные слагаемые вида  $\psi\psi$  и  $\psi^*\psi^*$ . В таком случае можно ввести спинор  $\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^* \end{pmatrix}$ , что дает лагранжиан вида

$$\mathcal{L}_2 = \frac{K}{2}(\vec{\psi}^\dagger \sigma^z \hbar \partial_t \vec{\psi} + \vec{\psi}^\dagger \hat{H} \vec{\psi}) \quad (10)$$

То есть уравнение сводится к бозонному гамильтониану типа Боголюбова-де-Женна:

$$\hat{H} |\psi\rangle = E\sigma^z |\psi\rangle; \quad H = -l_w^2 \Delta + 2\sigma^z i U_z \partial_\chi + \sigma^x U_x + U_0 \quad (11)$$

$$U_z(\theta(\rho)) = \frac{l_w^2}{\rho^2} \cos(\theta) - \frac{l_w \epsilon}{\rho} \sin(\theta) \quad (12)$$

$$U_x(\theta(\rho)) = \frac{\sin^2(\theta)}{2} + \frac{l_w \epsilon}{2\rho} \sin(2\theta) + \frac{l_w^2}{2\rho^2} \sin^2(\theta) - l_w \epsilon \theta' - \frac{l_w^2}{2} (\theta')^2 \quad (13)$$

$$U_0(\theta(\rho)) = \left(1 + \frac{l_w^2}{\rho^2}\right) \left(\frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{4}\right) - \gamma b_z \cos(\theta) - \gamma b_r \sin(\theta) - \frac{3l_w \epsilon}{2\rho} \sin(2\theta) - l_w \epsilon \theta' - \frac{l_w^2}{2} (\theta')^2 \quad (14)$$

Уравнение на собственные значения гамильтониана – стационарные состояния магнитного порядка  $\hat{H}\psi = \varepsilon\sigma^z\psi$ . Гамильтониан (11) обладает симметрией  $H = \sigma^x K H \sigma^x K$ , где линейный оператор  $K$  соответствует комплексному сопряжению. Отсюда следует, что для каждого решения  $\psi$  с собственной энергией  $E$  есть пара  $\psi' = \sigma^x K \psi$  с собственной энергией  $-E$ . То есть спектр гамильтониана симметричен относительно  $E = 0$ . Здесь можно использовать анзац сферических гармоник в двумерии:  $\vec{\psi} = e^{im\chi} \vec{\eta}_m(\rho)$ .

В таком случае гамильтониан сводится к радиальному, включающему в себя

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(\theta) \quad (15)$$

$$\hat{H}_0 = l_w^2 \left( -\partial_\rho^2 - \frac{\partial_\rho}{\rho} + \frac{(m - \sigma^z)^2}{\rho^2} \right) + 1 \quad (16)$$

$$\hat{V}(\theta) = \sigma^0 \left( U_0(\theta) - \frac{l_w^2}{\rho^2} - 1 \right) + \sigma^x U_x(\theta) - 2\sigma^z m \left( U_z(\theta) - \frac{l_w^2}{\rho^2} \right) \quad (17)$$

$$\hat{V}(\theta) = \sigma^0 V_0(\theta) + \sigma^x V_x(\theta) - 2m\sigma^z V_z(\theta); \quad V(0) = 0 \quad (18)$$

Отметим, что слагаемое  $\hat{H}_0$  не зависит от возмущения порядка  $\theta$ , в то время как слагаемое  $V(\theta)$  зануляется при ферромагнитном порядке  $\theta(\vec{r}) = const = 0$ . Для удобства введем обозначения

$$V_0(\theta) = \left( U_0(\theta) - \frac{l_w^2}{\rho^2} - 1 \right); \quad V_x(\theta) = U_x(\theta); \quad V_z(\theta) = -2m \left( U_z(\theta) - \frac{l_w^2}{\rho^2} \right) \quad (19)$$

$$V(\theta) = \sigma^0 V_0(\theta) + \sigma^x V_x(\theta) + \sigma^z V_z(\theta); \quad V_x(0) = V_y(0) = V_z(0) = 0 \quad (20)$$

При отсутствии возмущения магнитного порядка гамильтониан  $\hat{H} = \hat{H}_0$  оказывается диагональным по индексам спинора и представляет из себя двумерный лапласиан в анзаце сферических волн с точностью до замены  $m \rightarrow m \pm 1$  и добавления щели. Соответствующие собственные числа и собственные значения (для любого  $k > 0$ ):

$$\vec{\eta}_{m,k,u} = \begin{pmatrix} J_{m-1}(k\rho) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\eta}_{m,k,d} = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{m+1}(k\rho) \end{pmatrix}; \quad E = \pm(1 + l_w^2 k^2). \quad (21)$$

## 2 Связанные состояния магнонов

Теперь рассмотрим задачу о движении магнонов в присутствии возмущения основного состояния магнитного порядка, вызванном вихрем. Как сказано выше, в линейном приближении по параметру малости поля  $\gamma$  имеется следующее возмущение [3]:

$$\theta(\vec{r}) = \gamma \left( K_1 \left( \frac{\rho}{l_w} \right) - \frac{l_w}{\rho} \right); \quad b_z = b_r = \frac{l_w}{\rho} \quad (22)$$

Для малого отклонения параметра порядка и, как следствие, слабого потенциала можно ожидать, что ключевую роль играет асимптотика потенциала, соответствующая большому расстоянию до центра. В таком случае разлагая выражения для потенциала по малости параметра  $\gamma$ , получаем выражение для дальней асимптотики потенциала ( $\rho \rightarrow \infty$ )

$$V_x \approx \frac{l_w^2}{\rho^2} (\gamma^2/2 - 2\gamma\epsilon), \quad V_z \approx -2m \frac{l_w^2}{\rho^2} \gamma\epsilon, \quad V_0 \approx -\frac{\gamma l_w}{\rho} + \frac{l_w^2}{\rho^2} (2\gamma\epsilon - \gamma^2). \quad (23)$$

Таким образом, на больших расстояниях главный вклад  $V_0 \approx \gamma l_w / \rho$ , возникающий от слагаемого с  $b_z$  в потенциале  $V_0$ . Далее нас в основном будет интересовать случай

$$\zeta = \frac{\gamma \lambda}{l_w} = \frac{M_s \phi_0}{8\pi A} \gg 1.$$

Заметим, что параметр  $\zeta$  зависит исключительно от параметров ферромагнетика. Так, например, для структуры  $[\text{Ir}_1\text{Fe}_{0.5}\text{Co}_{0.5}\text{Pt}_1]$  из работы [12] значение параметра составляет  $\zeta = 8.3$ .

### 2.1 Водородоподобные связанные состояния магнонов

Изучим гамильтониан Боголюбова - Де Жена, оставив только главную дальнюю асимптотику. В этом случае его можно записать в виде

$$\hat{H} \simeq \hat{H}_0 - \frac{\gamma l_w}{\rho}. \quad (24)$$

Такой гамильтониан диагонален по индексам спинора  $\vec{\psi}$ , поэтому пока что будем рассматривать только решения вида  $\vec{\eta}_{m,k,u} = \begin{pmatrix} \eta_{m-1}(\rho) \\ 0 \end{pmatrix}$ . Чтобы не беспокоиться о сдвиге проекции углового момента введем обозначение  $m' = m - 1$ . В таком случае эффективный гамильтониан для  $\eta_{m-1}$  примет вид

$$\hat{H} = 1 - l^2 \Delta - \frac{\gamma l_w}{\rho}. \quad (25)$$

Это задача движения в двумерном кулоновском потенциале, где масса частицы  $M = 1/(2l^2)$ , произведение зарядов ядра и частицы  $e^2 = -\gamma l_w$ , и, следовательно, борковский радиус равен  $a_B = 2l_w/\gamma$ . Задача решается точно, и для данного  $m$  решение задачи на собственные числа следующее:

$$\eta_{n_r, m'}(r) = C_1 e^{-2r/a_n} \left(\frac{r}{a_n}\right)^{|m'|} {}_1F_1(-n_r, 2|m'| + 1, 2r/a_n) = C_2 e^{-2r/a_n} \left(\frac{r}{a_n}\right)^{|m'|} L_{n_r}^{(2|m'|)}\left(\frac{2r}{a_n}\right) \quad (26)$$

$$a_n = \frac{2n_r l_w}{\gamma} = n_r a_B; \quad E_n = 1 - \frac{\gamma^2}{n^2}; \quad n = 2n_r + 2|m'| + 1 \quad (27)$$

Здесь  ${}_1F_1$  - гипергеометрическая функция,  $L_n^{(\alpha)}(x)$  - обобщенный полином Лаггера (Полином Сонина-Лаггера),  $C_{1,2}$  - нормировочные коэффициенты. Характерный размер волновой функции оказывается порядка  $n^2 a_B$ .

Следует обратить внимание на то, что характерный размер состояния действительно соответствует дальней асимптотике  $a_B \gg l_w$  при малых значениях  $\gamma \ll 1$ . Таким образом мы получаем бесконечное число уровней под щелью, но на небольшом расстоянии  $\sim \gamma^2$  от непрерывного спектра. Учтем следующие члены порядка  $\rho^{-2}$  в разложении (23) по теории возмущений. Для этого воспользуемся теоремой Гельмана-Фейнмана:

$$\frac{\partial H}{\partial m} = \frac{2ml^2}{\rho^2} \quad \Rightarrow \quad \langle \eta_{n,m} | \frac{1}{\rho^2} | \eta_{n,m} \rangle = \frac{1}{2ml^2} \frac{\partial E_{n_r, m}}{\partial m} = \frac{\gamma^2 \text{sign}(m)}{4mn^3 l^2} \quad (28)$$

$$E_{n,m} = 1 - \frac{\gamma^2}{n^2} - \frac{4\gamma^3 \epsilon}{n^3} \text{sign}(m) + O(\gamma^4) \quad (29)$$

Интересно обратить внимание, что первый вклад от члена Дзялошинского-Мория в главной поправке  $\gamma^3 \epsilon$  не зависит от величины момента, а только от направления завихренности (киральности) скирмиона.

Конечно, такой метод нельзя применять при  $m' = 0$ , поскольку  $m'$  в знаменателе делает поправку бесконечно большой. В действительности это разрешается тем, что при нулевом моменте волновая функция имеет большую плотность вблизи нуля, из-за чего и возникает расходимость у сингулярности  $1/\rho^2$ . Однако вблизи нуля само разложение для потенциала (23) не применимо. Поэтому, чтобы получить асимптотику, просто обрежем интеграл на  $\rho = \rho_0 \sim l_w$ . На промежуточных масштабах  $l_w \ll \rho \ll a_B$  волновую функцию можно считать константой, с учетом нормировки равной  $\eta \approx 1/(2n+1)^{3/2}$ . Тогда к поправке добавляется дополнительный большой множитель  $\ln(\gamma)$ .

$$\langle \eta_{n,0} | \frac{1}{\rho^2} | \eta_{n,0} \rangle = \int_{\rho_0}^{\infty} \frac{\eta^2(\rho)}{\rho^2} \rho d\rho \approx -\frac{\gamma^2}{l_w^2 (2n_r + 1)^3} \ln\left(\frac{\rho_0 \gamma}{l_w}\right), \quad \frac{\rho_0 \gamma}{l_w} \ll 1 \quad (30)$$

$$E_{n, m'=0} = 1 - \frac{\gamma^2}{n^2} + \frac{4\gamma^3 \epsilon}{l_w^2 n^3} \ln\left(\frac{\rho_0 \gamma}{l_w}\right) + O(\gamma^4) \quad (31)$$

Кроме того, следует обратить внимание на то, что магнитное поле  $b_z$  вовсе не всегда равно  $1/\rho$  (см. Приложение(5.1)).

## 2.2 Приближенный потенциал для больших расстояний

Для высоколежащих состояний, как будет показано ниже, важно то, что магнитное поле пирловского вихря (2) не ведет себя, как  $b_{r,z} \approx \frac{l_w}{\rho}$  на масштабах много больше Пирловской экранировки. Вообще говоря, точное выражение для магнитного поля Пирловского вихря при конечной толщине сверхпроводящей пленки выражается через функции Бесселя [6]

$$B_r(\rho, z > 0) = -\frac{\phi_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{q J_1(q\rho)}{F(q)} e^{-qz} dq \quad (32)$$

$$B_z(\rho, z > 0) = -\frac{\phi_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{q J_0(q\rho)}{F(q)} e^{-qz} dq \quad (33)$$

$$F(q) = \lambda_L^2 \tau \frac{(q + \tau)^2 e^{\tau ds} - (q - \tau)^2 e^{-\tau ds}}{(q + \tau) e^{\tau ds} + (q - \tau) e^{-\tau ds} - 2q} \quad (34)$$

$$\tau = \sqrt{q^2 + \lambda_L^{-2}} \quad (35)$$

Если пренебречь толщиной сверхпроводящей пленки  $d_S = 0$  и рассматривать плоскость ферромагнетика  $z = +0$ , то точное выражение для магнитного поля  $b_z$  (в нашем случае, как мы увидим далее, это и есть ведущее слагаемое в выражении для потенциала) известно в литературе как Stern-Howard potential [9]. Представление в импульсном и реальном пространстве следующие для  $z$ -компоненты магнитного поля:

$$b_z(q) = \frac{4\pi l_w \lambda}{1 + 2\lambda q}; \quad ; \quad b_z(\rho) = \frac{l_w}{\rho} \left( 1 - \frac{\pi \rho}{4\lambda} \left[ H_0 \left( \frac{\rho}{2\lambda} \right) - N_0 \left( \frac{\rho}{2\lambda} \right) \right] \right). \quad (36)$$

Здесь  $H_0$  обозначает функцию Струве, а  $N_0$  - функцию Неймана. Несмотря на некоторые известные точные результаты для такого потенциала, он довольно сложен для анализа, потому мы будем использовать приближенный потенциал, предложенный в работе Christian Tanguy [15]

$$b_z(\rho) = \frac{l_w}{\rho \left( 1 + \frac{\rho}{2\lambda} \right)^2}. \quad (37)$$

Так, потенциал (37) воспроизводит ближнюю и дальнюю асимптотики потенциала (36), а также близко воспроизводит промежуточное поведение, как видно на Рис (1).

Теперь убедимся, что слагаемое с  $b_z$  действительно является главным вкладом в потенциал. Для этого вновь обратимся к Линеализованному уравнению Эйлера-Лагранжа (4) на возмущение магнитного порядка

$$l_w^2 \theta'' + \frac{l_w^2}{\rho} \theta' - \frac{l_w^2 + \rho^2}{\rho^2} \theta - \gamma b_r(\rho) = 0 \quad (38)$$

Отсюда видно, что для дальней асимптотики  $\theta(\rho \rightarrow \infty) = \gamma b_r(\rho \rightarrow \infty)$ . Дальняя асимптотика радиальной компоненты магнитного поля  $b_r(\rho \gg \lambda) = 2\lambda l_w / \rho^2$ , откуда следует, что  $\theta(\rho \gg \lambda) \approx$

$2\gamma\lambda l_w/\rho^2$ . Подставляя такое возмущение магнитного порядка в выражение для потенциала (17), получаем дальние асимптотики потенциалов

$$V_{\approx} - \frac{6l_w^2\gamma\epsilon\lambda}{\rho^3}, \quad V_z \approx 2m\frac{3l_w^2\gamma\epsilon\lambda}{\rho^3}, \quad V_0 \approx \frac{2l_w\gamma\lambda}{\rho^3}(\epsilon l_w - \lambda). \quad (39)$$

Казалось бы, слагаемые с  $\theta$  также дают вклад в ведущую асимптотику  $\rho^{-3}$ . Однако, эти вклады малы по сравнению с вкладом от  $b_z$  по параметру  $\lambda/l_w$

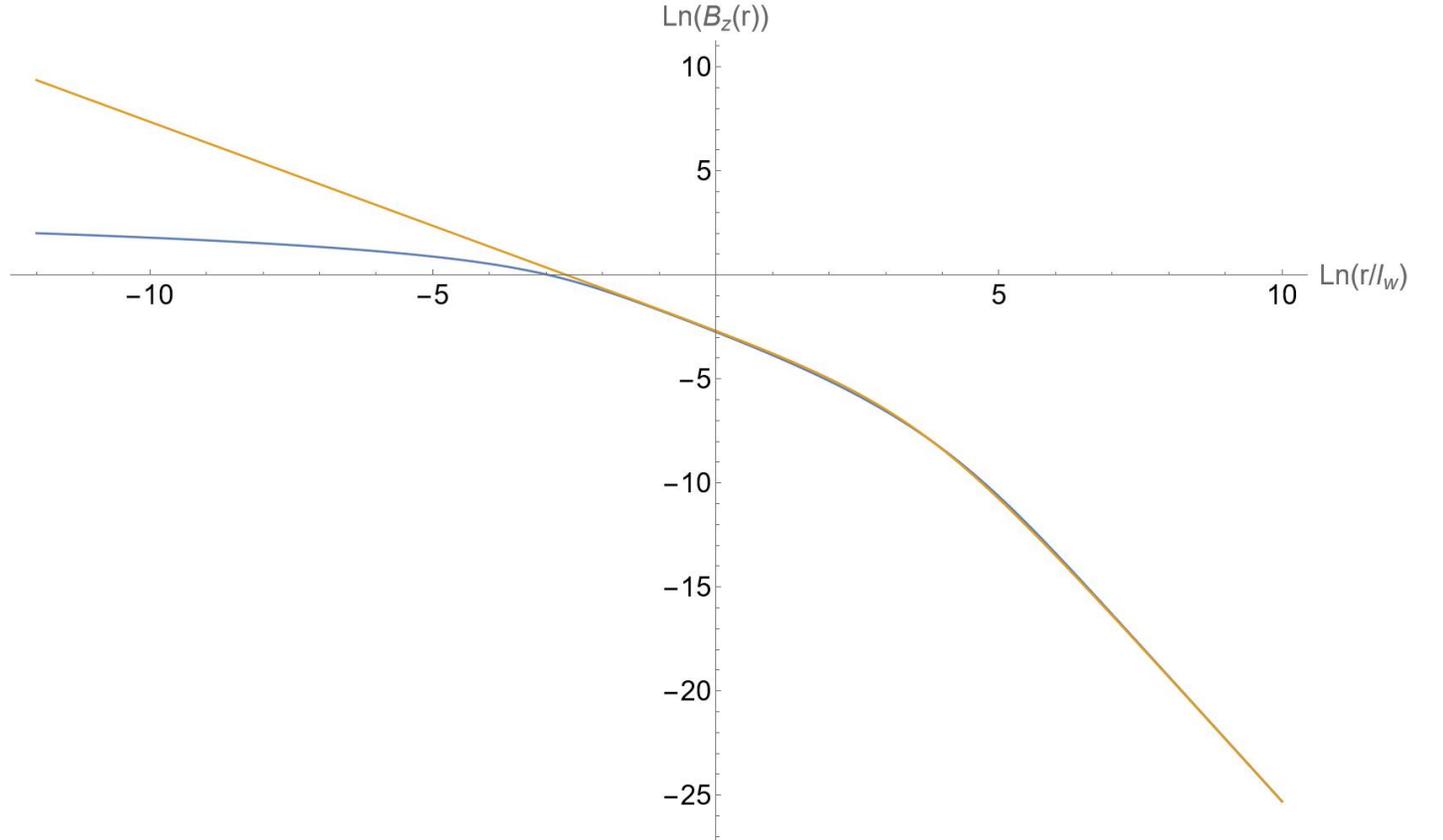


Рис. 1: Логарифмический график: сравнение магнитного точного выражения (33) для  $b_z$ (синий) и приближенного (37) (желтый). Значения параметров  $d_S = 0.1l_w$ ,  $\lambda_L = 1.4l_w$ . Видно расхождение только на масштабах порядка  $\rho \leq d_S \ll l_w$

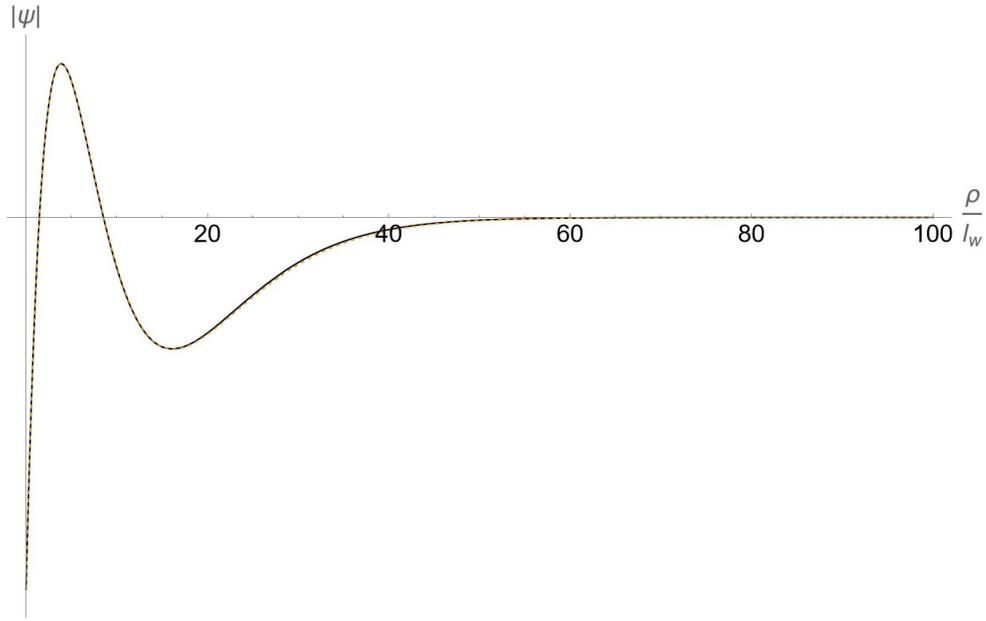


Рис. 2: Сравнение численного счета для потенциала (37) (черная линия) и водородоподобного решения (27) (желтая штрихованая линия) для  $n_r = 3$  при  $m' = 0$ . Параметры  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = 100l_w$ . Видно, что для достаточно низкого состояния численное решение практически совпадает с решением для кулоновского потенциала.

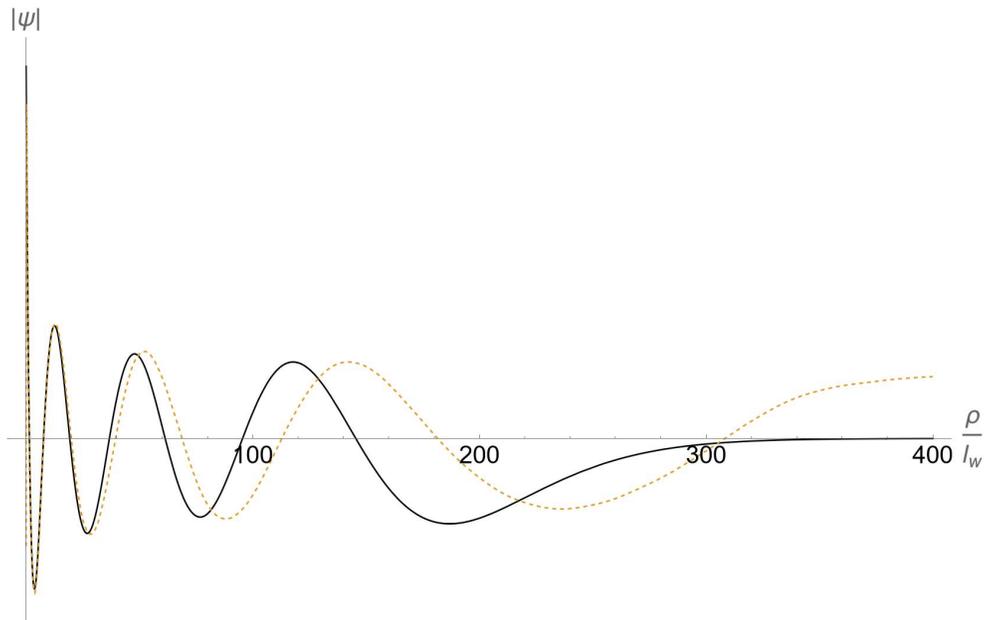


Рис. 3: Сравнение численного счета для потенциала (37) (черная линия) и водородоподобного решения (27) (желтая штрихованая линия) для  $n_r = 8$  при  $m' = 0$ . Параметры  $\gamma = 1$ ,  $\lambda = 100l_w$ . Видно, что для достаточно высоколежащих уровней численное решение существенно отличается от решения для кулоновского потенциала и локализовано на масштабах порядка  $\lambda$ .

## 2.3 Связанные состояния вблизи магнетонного континуума

Поскольку высоколежащие водородоподобные состояния имеют растущий с ростом номера характерный размер  $a_B n^2$ , для высоколежащих состояний потенциал становится существенно неводородоподобным, когда характерный размер волновой функции достигает размеров порядка пирловской экранировки  $\lambda = \frac{\lambda_L^2}{d_S}$ , что видно на рис. (2) и (3). Обсуждая высоколежащие состояния мы будем учитывать только вклад в потенциал от магнитного поля  $V_0 = b_z$ , поскольку он главный. Итого, мы имеем движение в двумерном притягивающем потенциале.

$$\hat{H} = 1 - l_w^2 \Delta - \frac{\gamma l_w}{\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right)^2}. \quad (40)$$

Асимптотика потенциала на расстояниях много больше пирловской длины  $\rho \gg \lambda$  имеет вид  $\rho^{-3}$ . У такого квантового потенциала, как и у кулоновского, бесконечное число уровней. Однако, если в кулоновском потенциале уровни бесконечно плотно "прижимаются" к области непрерывного спектра, то в потенциале  $\rho^{-3}$  наоборот имеется бесконечное число уровней сколь угодно большой глубины, локализованных вблизи нуля. Таким образом, у кулоновского потенциала большинство уровней на больших  $\rho$ , где он больше неприменим, а у потенциала  $\rho^{-3}$  наоборот, много уровней вблизи нуля, где он также неприменим. В результате имеется ситуация, когда число уровней конечно, и большинство из них расположено на масштабах порядка переходной области  $\rho \sim \lambda$ .

### 2.3.1 Квазиклассические высоколежащие уровни

Найдем высоколежащие состояния с помощью квазиклассического приближения (правила Бора-Зоммерфельда):

$$\pi n_r = \int \sqrt{2M(E - U)} d\rho = \frac{\gamma}{\sqrt{|E|}} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1}{r(1 + r/\Lambda)^2} - 1} \right\} dr = \frac{\gamma}{\sqrt{|E|}} I(\Lambda); \quad \Lambda = \frac{2|E|\lambda}{l_w \gamma}. \quad (41)$$

Уточним, что пределы интегрирования не равны точкам остановки, поскольку функция  $\operatorname{Re}$  от подинтегрального выражения и так отрежет только область, где выражение под корнем положительное, то есть область движения над потенциалом. Для  $\Lambda \geq 1$  интеграл  $I(\Lambda) \approx \pi/2$ , что воспроизводит ответ для уровней атома водорода. С другой стороны, для высоколежащих уровней  $\Lambda \ll 1$ . Взятие двух ведущих асимптотик интеграла в этом пределе приведено в приложении (5.2).

$$I(\Lambda \ll 1) \approx \pi \sqrt{\Lambda} (1 - \beta \Lambda^{1/6}); \quad \beta = \frac{\Gamma(5/6)}{\sqrt{\pi} \Gamma(4/3)} \approx 0.713. \quad (42)$$

Подставляя ответ (42) в правило квантования Бора-Зоммерфельда (41) получаем уровни энергии и число состояний  $N$ .

$$E_n = 1 - \frac{l_w \gamma}{2\lambda \beta^6} \left( 1 - \frac{n}{\sqrt{2\frac{\gamma\lambda}{l_w}}} \right)^6 \Rightarrow N_0 \approx \sqrt{2\frac{\gamma\lambda}{l_w}} = \sqrt{2\zeta} \gg 1. \quad (43)$$

Теперь рассмотрим, что происходит, когда мы добавляем член, соответствующий угловому моменту в лапласиане. Такой член, вообще говоря, есть всегда, поскольку для двумерного лапласиана это  $(m'^2 + 1/4)/(\rho^2/l_w^2)$ . Число состояний в квазиклассическом приближении дается как

$$N(m') = \frac{\sqrt{2M}}{\pi} \int \sqrt{-U - \frac{m'^2 - 1/4}{2M\rho^2}} d\rho = \frac{1}{\pi} \sqrt{2\frac{\gamma\lambda}{l_w}} \int_{x_-}^{x_+} \sqrt{\frac{1}{x(1+x)^2} - \frac{G^2}{x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{2\frac{\gamma\lambda}{l_w}} J(G), \quad (44)$$

$$G^2 = \frac{m'^2 - 1/4}{2} \frac{l_w}{\lambda\gamma}, \quad x_{\pm} = \frac{1 - G^2 \pm \sqrt{1 - 4G^2}}{2G^2}. \quad (45)$$

Интеграл оказывается точно берущимся  $J(G) = \pi(1 - 2G)$  и ответ для числа состояний, согласующийся с выражением (43)

$$N(m') = \sqrt{2\frac{\gamma\lambda}{l_w}} \left( 1 - \sqrt{2(m'^2 - 1/4) \frac{l_w}{\gamma\lambda}} \right) = \sqrt{2\zeta} (1 - \sqrt{2\zeta(m'^2 - 1/4)}) \quad (46)$$

Теперь можно посчитать суммарное число состояний, для этого в квазиклассическом случае надо просто проинтегрировать по значениям момента

$$N = \sum_{m'} N(m') \approx \int_{-m_0}^{m_0} N(m') dm' = \frac{\gamma\lambda}{l_w} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{l_w}{\gamma\lambda} \right) + O(1) = \zeta - \frac{1}{2} \ln(\zeta) + O(1) \quad (47)$$

Все рассуждения о связанных состояниях были проделаны для спектра положительной энергии. Как сказано ранее, есть также идентичный спектр отрицательных энергий, симметричный относительно нулевой энергии.

Суммируя поправки от момента и номера уровня, можно оценить уровни энергии вблизи непрерывного спектра  $n \ll \sqrt{\zeta}$  при малых моментах  $m \ll \sqrt{\zeta}$ , как

$$E_{n,m} \approx 1 - \frac{l_w \gamma}{2\lambda \beta^6} \left( 1 - 2G - \frac{n}{\sqrt{2\frac{\gamma\lambda}{l_w}}} \right)^6 \quad (48)$$

Характерный вид спектра связанных состояний, представлен на рис. (5) и (6). Сравнение связанных уровней, получаемых с помощью численного поиска собственных функций с теоретическими формулами представлены на рис. (4)

### 2.3.2 Предел мелкой ямы

Для полноты картины рассмотрим обратный предел  $\zeta \ll 1$ , или  $\gamma \gg \lambda/l_w$ , что в терминах квазиклассики, как видно из (46), соответствует малому числу состояний  $N \ll 1$ . Здесь мы можем воспользоваться приближением двумерной мелкой ямы. Для того чтобы получить точное значение потенциала, воспользуемся импульсным представлением, которое известно точно.

$$E = 1 - \# \frac{l_w^2}{\lambda^2} \exp\left(-4\pi l_w^2 \left| \int U(r) d^2 r \right|^{-1}\right) = 1 - \# \frac{l_w^2}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{4\pi l_w^2}{U(k=0)}\right) = 1 - \# \frac{l_w^2}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{1}{\zeta}\right). \quad (49)$$

Обратим внимание, что эта формула верна с экспоненциальной точностью, то есть содержит неизвестный предэкспоненциальный численный фактор  $\#$ .

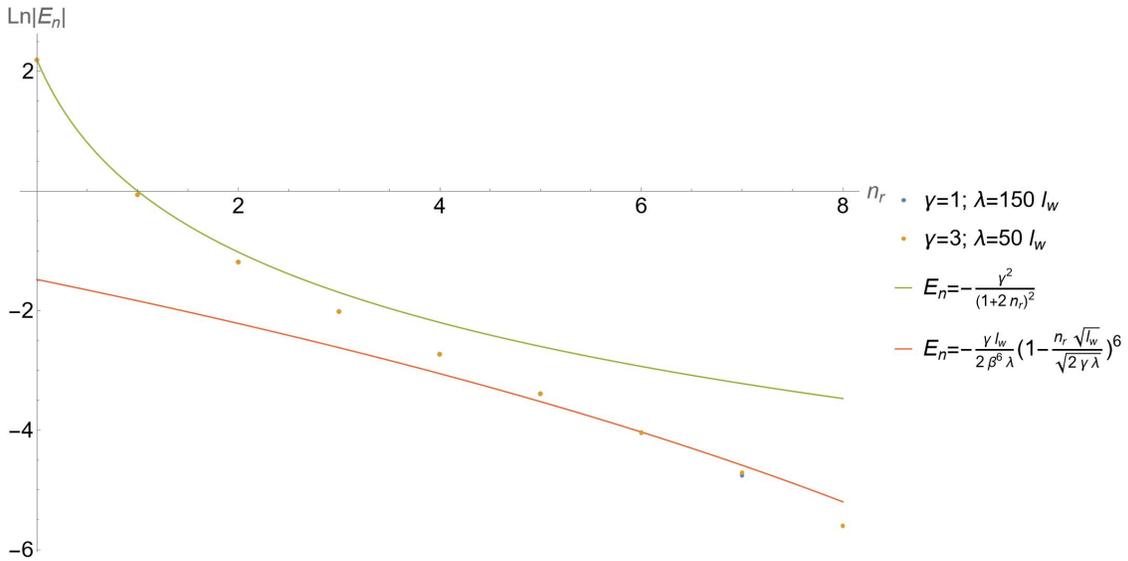


Рис. 4: Сравнение теории и численного счета для зависимости энергии связанного состояния от номера состояния. По оси ординат отложен логарифм энергии для удобства изучения зависимостей на разных масштабах по энергии. Зеленая кривая соответствует водородоподобным состояниям (27) для  $\gamma = 3, \lambda = 50 l_w$ . Красная кривая соответствует квазиклассическому решению (43) для тех же параметров. Желтые точки соответствуют численно найденным связанным состояниям. Видно, что численное решение близко к водородоподобным уровням для низколежащих состояний и близко к квазиклассическим решениям для высоколежащих состояний. Синие точки соответствуют численному счету с параметрами  $\gamma = 1, \lambda = 150 l_w$ . В таком случае энергия должна быть ровно в 9 раз меньше, так что соответствующие точки сдвинуты по оси энергии на  $\ln(9)$ . Видно, что численные решения, как и ожидалось, практически совпадают, кроме нескольких последних точек, что связано с ограничениями точности вычислений при малых значениях энергии. Угловой момент  $m' = 0$ .

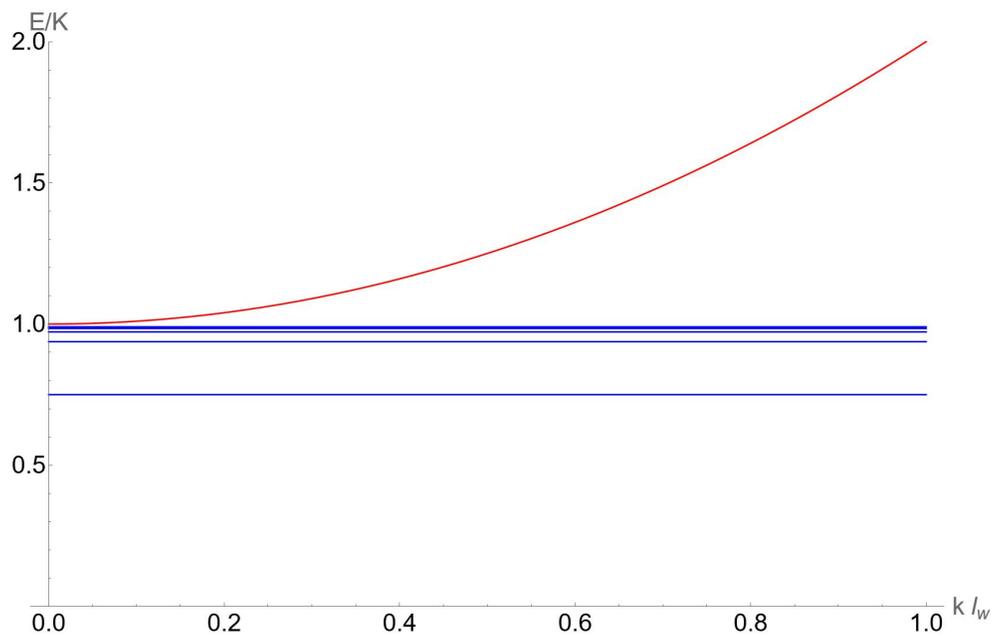


Рис. 5: Характерный вид спектра: закон дисперсии для непрерывного спектра (красный) и уровни связанных состояний (синий)

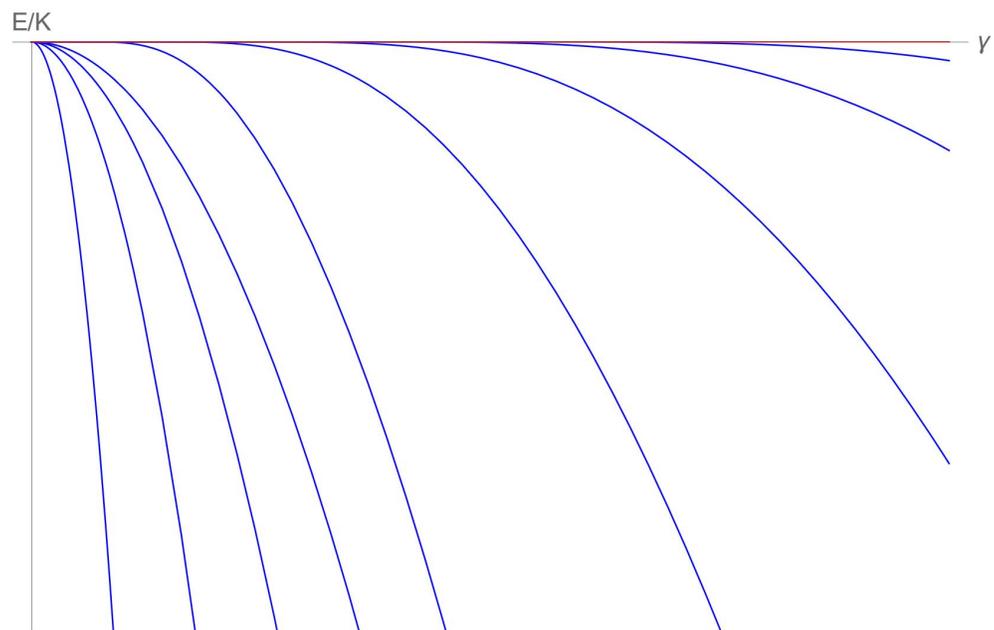


Рис. 6: Характерный вид спектра связанных состояний в зависимости от  $\gamma$ . Низколежащие водородоподобные уровни выходят из  $\gamma = 0$ , в то время как высоколежащие уровни появляются по мере увеличения  $\gamma$ .

### 3 Рассеяние магнонов (непрерывный спектр)

Рассмотрим теперь непрерывный спектр. Кулоновский потенциал медленно убывает, и потому имеет бесконечное сечение рассеяния [8]:

$$\sigma(\varphi) = \frac{\gamma \tanh[\gamma\pi/(2l_w k)]}{4l_w k^2 \sin^2(\varphi/2)}. \quad (50)$$

Таким образом, необходимо рассматривать сразу более "точный" гамильтониан

$$\hat{H} = 1 - l_w^2 \Delta - \frac{\gamma l_w}{\rho \left(1 + \frac{\rho}{2\lambda}\right)^2}. \quad (51)$$

#### 3.1 Борновское приближение

Для начала можно рассмотреть борновское приближение. Борновское приближение в двумерии дает для амплитуды рассеяния формулу  $f(\varphi) = \frac{M}{\sqrt{2\pi k}} V(2k \sin(\varphi/2))$  (в нашем случае масса  $M = (2l^2)^{-1}$ ), так что нам нужен фурье-образ потенциала рассеяния  $V(q)$ . К счастью, фурье-образ магнитного поля для пирловского вихря известен точно:

$$V(q) = \gamma b_z(q) = \frac{4\pi\gamma l_w \lambda}{1 + 2q\lambda} \quad (52)$$

$$\lim_{k \rightarrow k'} V(k - k') = 4\gamma\pi\lambda l_w; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} V(k) = \frac{2\pi l_w \gamma}{k} \quad (53)$$

Заметно, что при высоких энергиях  $k \rightarrow \infty$  мы получаем ответ, как в случае рассеяния на кулоновском потенциале [8]. Можно теперь посчитать в борновском приближении полное сечение рассеяния. Интеграл оказывается точно берущимся:

$$\sigma_{Born}(k) = \frac{M^2}{2\pi k} \int |V(\varphi)|^2 d\varphi = 2\pi \frac{\gamma^2 \lambda^2}{l_w^2 k} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1 + 4\lambda k \sin(\varphi/2))^2} = \quad (54)$$

$$= 2\pi \frac{\gamma^2 \lambda^2}{l_w^2 k} \frac{4 \arccos(4\lambda k) - 16\lambda k \sqrt{1 - 16\lambda^2 k^2}}{(1 - 16\lambda^2 k^2)^{3/2}}; \quad k\lambda < 1/4 \quad (55)$$

$$\sigma_{Born}(k) = \frac{\gamma^2 \lambda^2}{l_w^2 k} \frac{16\lambda k \sqrt{16\lambda^2 k^2 - 1} - 4 \arccos(4\lambda k)}{(16\lambda^2 k^2 - 1)^{3/2}}; \quad \lambda k > 1/4 \quad (56)$$

Асимптотики сечения рассеяния в борновском приближении:

$$\sigma_{Born}(k \ll \lambda^{-1}) \approx \frac{4\pi^2}{k} \frac{\gamma^2 \lambda^2}{l_w^2} = \frac{4\pi^2 \zeta^2}{k}; \quad \sigma_{Born}(k \gg \lambda^{-1}) \approx 2\pi \frac{\gamma^2 \lambda}{k^2 l_w^2} = 2\pi \frac{\zeta^2}{\lambda k^2} \quad (57)$$

Теперь можно поинтересоваться значением транспортного сечения рассеяния. Важное различие в том, что даже для кулоновского потенциала ( $\lambda \rightarrow \infty$ ) транспортное сечение рассеяния оказыва-

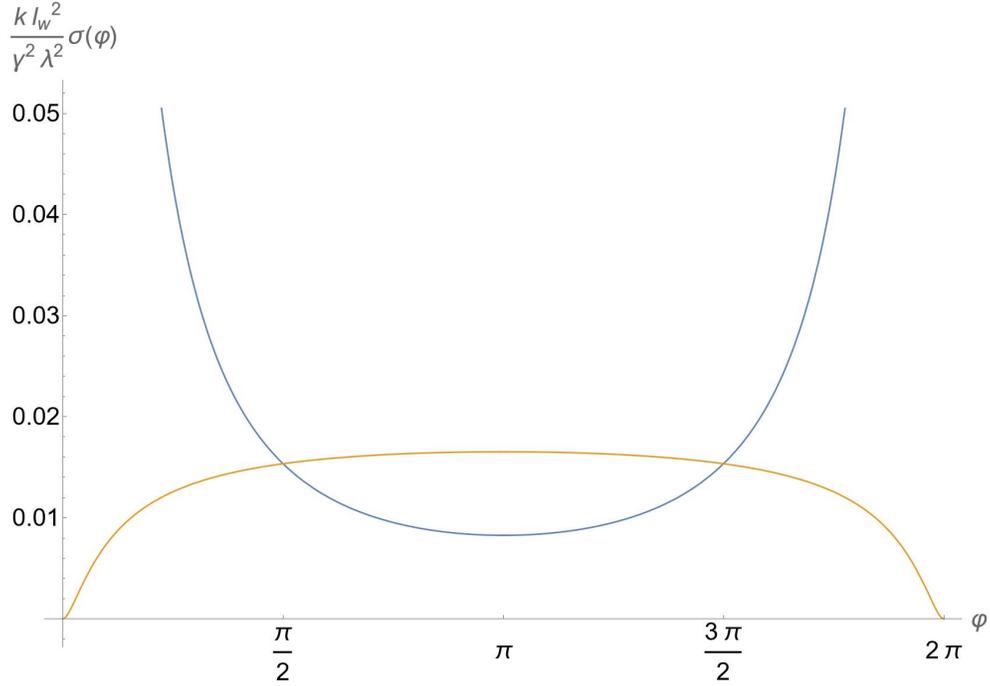


Рис. 7: Зависимость обычного (синий) и транспортного (желтый) Борновского сечения рассеяния от направления при  $\lambda k = 2.5$ .

ется конечным:

$$\sigma_{Born}^{tr}(k) = \frac{M^2}{2\pi k} \int |V(\varphi)|^2 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi = 2\pi \frac{\gamma^2 \lambda^2}{l_w^2 k} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos(\varphi)) d\varphi}{(1 + 4\lambda k \sin(\varphi/2))^2} = \quad (58)$$

$$= 2\pi \frac{\gamma^2 (1 - \sqrt{16k^2 \lambda^2} (8k\lambda + \pi(1 - 16k^2 \lambda^2)) + (64k^2 \lambda^2 - 2) \arccos(4\lambda k))}{4k^3 l_w^2 (1 - 16k^2 \lambda^2)^{3/2}}; \quad k\lambda < 1/4 \quad (59)$$

$$\sigma_{Born}^{tr}(k) = -2\pi \frac{\gamma^2 (\sqrt{16k^2 \lambda^2 - 1} (8k\lambda + \pi(16k^2 \lambda^2 - 1)) + (2 - 64k^2 \lambda^2) \arccos(4\lambda k))}{4k^3 l_w^2 (16k^2 \lambda^2 - 1)^{3/2}}; \quad \lambda k > 1/4 \quad (60)$$

Асимптотики транспортного сечения рассеяния:

$$\sigma_{Born}^{tr}(k \ll \lambda^{-1}) \approx \frac{4\pi^2}{k} \frac{\gamma^2 \lambda^2}{l_w^2} = \frac{4\pi^2 \zeta^2}{k}; \quad \sigma_{Born}^{tr}(k \gg \lambda^{-1}) \approx \frac{\pi^2 \gamma^2}{2k^3 l_w^2} = \frac{\pi^2 \zeta^2}{2\lambda^2 k^3} \quad (61)$$

Видно, что для низких энергий  $k\lambda \ll 1$  ответ остался без изменений, в то время как для высоких энергий  $k\lambda \gg 1$  мы имеем другую асимптотику именно из-за того, что для двумерного атома водорода транспортное сечение конечно,  $\lambda$  выпадает из асимптотики для высоких энергий и ответ становится в точности таким же, как для кулоновского потенциала [8]. На рис (7) видно, что обычное рассеяния происходит на высоких энергиях в основном вперед, в то время как транспортное рассеяния относительно равномерно во все стороны, с подавлением рассеяния вперед.

Поскольку формула Борна это теория возмущений, условие применимости борновского приближения записывается как малость поправки к волновой функции:

$$|\chi| = \left| \frac{M}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{e^{ikr' + i\vec{k}\vec{r}'}}{\sqrt{kr'}} V(\vec{r} + \vec{r}') d\vec{r}' \right| \ll 1 \quad (62)$$

В случае медленных частиц заменяем экспоненту на единицу, и получаем:

$$1 \gg \frac{1}{l_w^2} \int \frac{l\gamma r dr}{\sqrt{kr}r(1+r/(2\lambda))^2} \Rightarrow \frac{\gamma}{l_w} \sqrt{\frac{\lambda}{k}} = \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda k}} \ll 1 \quad (63)$$

Для быстрых частиц надо еще домножить (63) на угол, внутри которого нет быстрых осциллирующих экспоненты. условие  $kr'(1 - \cos(\theta)) \sim 1$ , то есть угол  $\theta \sim 1/\sqrt{\lambda k}$ , так что имеем по итогу

$$\frac{\gamma}{l_w k} = \frac{\zeta}{(\lambda k)} \ll 1 \quad (64)$$

Получается, итоговое условие применимости формулы борновского приближения дается

$$\lambda k \gg \zeta \quad (65)$$

Из этого следует, что выписанный в (57) предел  $k \ll \lambda^{-1}$  вообще говоря бесполезен, поскольку там не реализуется условие применимости борновского приближения в рассматриваемом нами случае  $\zeta \gg 1$ .

### 3.2 Фазовая теория рассеяния

Теперь применим фазовую теорию рассеяния в двумерии. Выражение для фазы рассеяния в двумерии дается формулой [2]:

$$\delta_m = \int_{\rho_0}^{\infty} \left( \sqrt{k^2 - \frac{m_{eff}^2}{\rho^2} - 2MV} - k \right) dr - k\rho_0 + \frac{\pi m'}{2}; \quad m_{eff}^2 = m'^2 - 1/4 \quad (66)$$

Здесь  $\rho_0$  - квазиклассическая точка остановки, получается из условия  $k^2 - m_{eff}^2/\rho^2 - 2MV = 0$ . Если таких решений несколько, то нужно брать самое далекое от нуля. Тут вновь нетрудно видеть, что для кулоновского потенциала при любом значении  $m$  интеграл расходится. Безразмерный вид интеграла следующий:

$$\frac{\delta_m}{2\lambda k} = \int \left( \sqrt{1 + \frac{g}{x(1+x)^2} - \frac{\alpha^2}{x^2}} - 1 \right) dx - x_0 + \frac{\pi\alpha}{2}; \quad (67)$$

$$g = \frac{\gamma}{4\lambda l k^2} = \frac{\zeta}{(2k\lambda)^2}; \quad \alpha = \frac{m_{eff}}{2\lambda k} \quad (68)$$

Предел  $g \ll 1$  нам особо не интересен, поскольку он уже изучен в борновском приближении. Тогда посмотрим на обратный предел  $g \gg 1$ , соответствующий низким энергиям. Видно, что в выражении (67) от значения момента зависит только  $\alpha$ , Так что нужно понять, как правая часть (67) зависит от  $\alpha$ . Соответствующий результат численного счета для различных значений  $g$  представлен на Рис. (8):

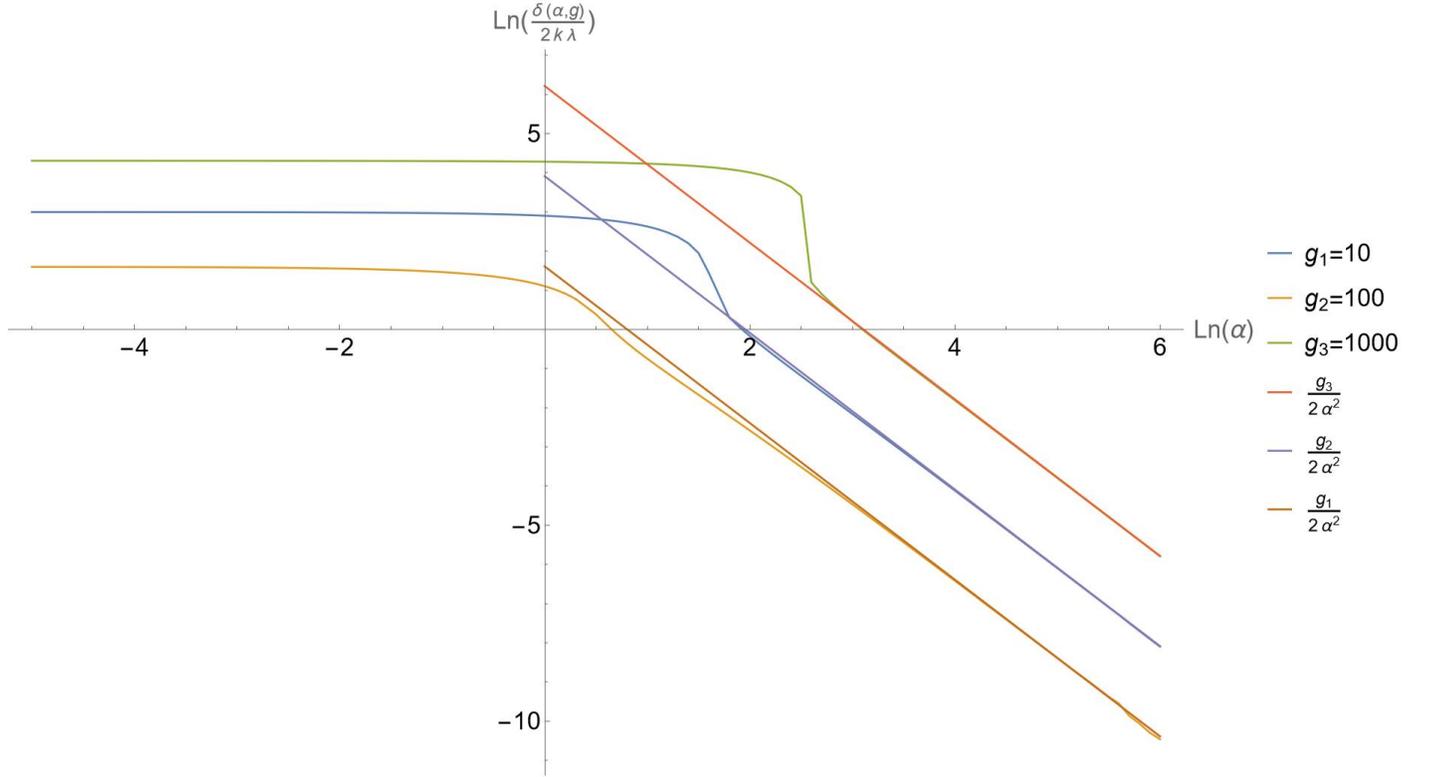


Рис. 8: Логарифмический графк результатов численного счета для правой части выражения (67) для различных значений  $g$ , а также их дальние асимптотики  $\frac{g}{2\alpha^2}$

Для случая  $1 \ll k\lambda \ll \sqrt{\zeta}$  можно заменить квазиклассическое выражение для фазы на асимптотику  $g/(2\alpha^2)$ , а затем заменить суммирование на интегрирование в выражении для сечения рассеяния

$$\sigma_{WKB}(1 \ll k\lambda \ll \sqrt{\zeta}) = \frac{4}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sin^2(\delta_m) = \frac{8}{k} \int_0^{\infty} \sin^2\left(\frac{g\lambda k}{\alpha^2}\right) dm = 4\sqrt{\frac{\pi\zeta\lambda}{k}} \quad (69)$$

В обратном пределе  $k\lambda \gg 1$  нельзя заменять сумму на интеграл ведь  $\alpha(m) - \alpha(m+1) \gg 1$ . Тем не менее, по-прежнему верно что при малых значениях фазы рассеяния

$$\delta \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \delta \sim \frac{\zeta k\lambda}{m^2} \quad \Rightarrow \quad m \geq \sqrt{\zeta k\lambda} \quad (70)$$

Таким образом, при  $k\lambda \ll 1$  по-прежнему можно оценить, что при  $m \leq \sqrt{\zeta k\lambda}$  значения  $\delta \gg 1$ , а значит  $\sin^2(\delta)$  в среднем равен  $1/2$ , в то время как при  $m \geq \sqrt{\zeta k\lambda}$ , применима асимптотика  $\delta \approx \frac{\zeta k\lambda}{m^2}$ .

Тогда оценка сечения рассеяния

$$\sigma_{WKB}(\zeta^{-1} \ll k\lambda \ll 1) \approx \frac{4}{k} \left( \sum_{m=-\sqrt{\zeta k\lambda}}^{\sqrt{\zeta k\lambda}} \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=\sqrt{\zeta k\lambda}}^{\infty} \frac{\zeta^2 k^2 \lambda^2}{m^4} \right) \approx \frac{20}{3} \sqrt{\frac{\zeta \lambda}{k}} \quad (71)$$

Для сравнения, на Рис. (9) Представлен график оценки по формуле (71) и численного счета сечения рассеяния при соответствующих условиях.

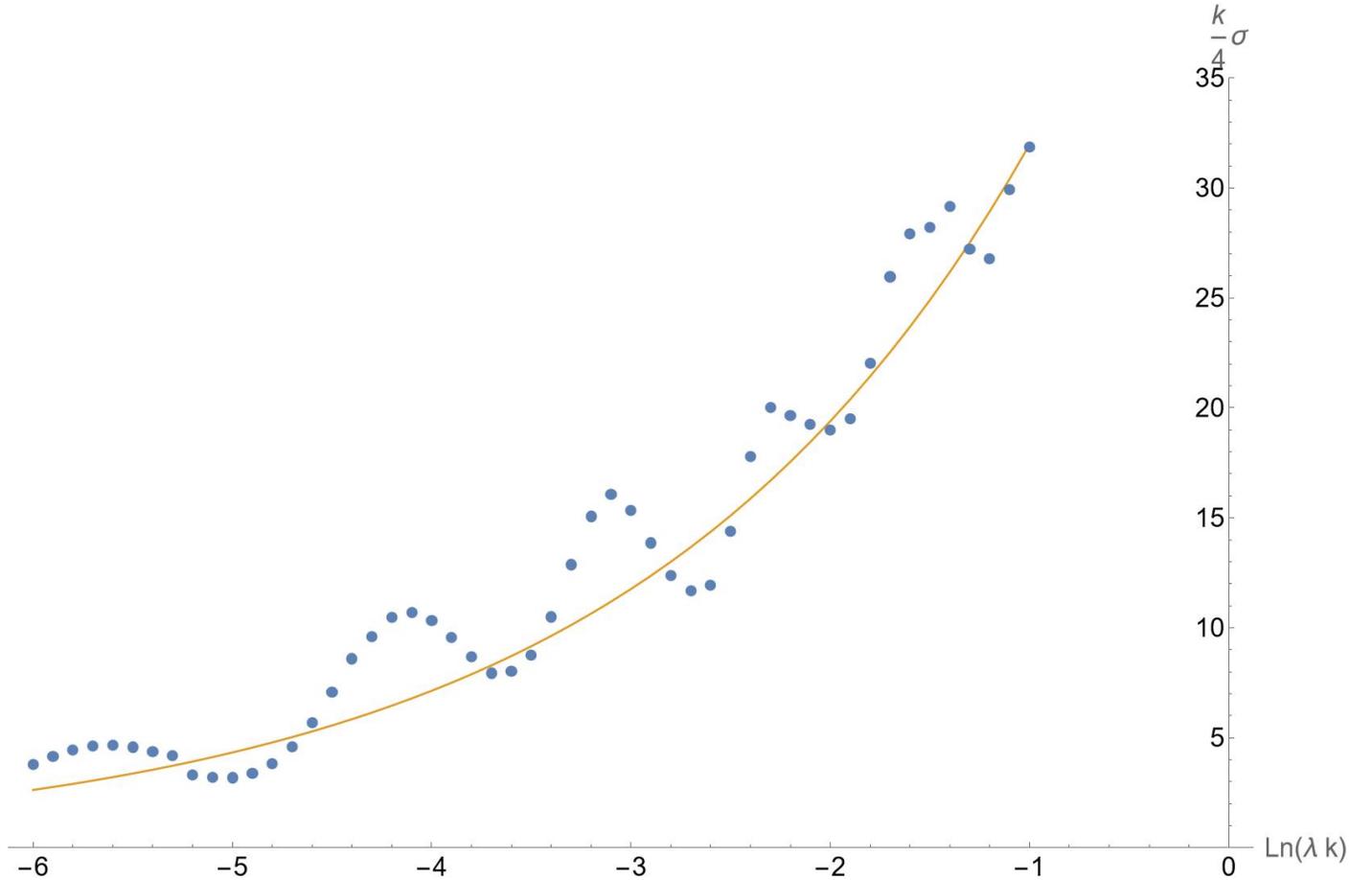


Рис. 9: Сравнение численного счета для сечения рассеяния при  $k\lambda \ll 1$  (синий) и оценки по формуле (71) (желтый) для  $\zeta = 10^3$

### 3.2.1 Условие применимости WKБ

Получим условие применимости WKБ формул. Обычное условие применимости квазиклассики можно записать как:

$$1 \gg M \left| \frac{\partial V / \partial \rho}{p^3} \right| \sim \frac{l_w (\partial V / \partial \rho)}{E^{3/2}} \quad (72)$$

Найдем точку остановки в пределе низких энергий  $k\lambda \ll 1$

$$k^2 l_w^2 \sim \frac{l_w \gamma (2\lambda)^2}{\rho_0^3} \Rightarrow \rho_0 \sim \lambda \left( \frac{\zeta}{(k\lambda)^2} \right)^{1/3} \gg \lambda \quad (73)$$

Оценим производную потенциала на масштабах  $\rho \geq \rho_0$

$$\frac{\partial V}{\partial \rho} = -\frac{4l_w \gamma \lambda^2 (3\rho + 2\lambda)}{\rho^2 (\rho + 2\lambda)^3} \sim \frac{l_w \gamma \lambda^2}{\rho^4} \quad (74)$$

Считаем что  $k^2 l_w^2 = E \sim E - V$ , что нарушается вблизи точки остановки.

$$\frac{l_w (\partial V / \partial \rho)}{E^{3/2}} \sim \frac{\gamma \lambda^2}{l_w k^3 \rho^4} \geq \frac{1}{(k\lambda \zeta)^{1/3}} \ll 1 \quad (75)$$

Откуда следует условие  $k\lambda \gg \zeta^{-1}$ . Аналогично расчет для условия применимости WKВ при высоких энергиях  $k\lambda \gg 1$  (точка остановки кулоновская) аналогичные расчеты дает:

$$\rho_0 \sim \frac{\gamma}{k^2 l_w} \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \rho} \sim \frac{k^4 l_w^3}{\gamma} \quad (76)$$

Таким образом второе условие применимости квазиклассического приближения:

$$\frac{l_w (\partial V / \partial \rho)}{E^{3/2}} \sim \frac{l_w k}{\gamma} \sim \frac{k\lambda}{\zeta} \ll 1 \Rightarrow k\lambda \ll \zeta \quad (77)$$

Сводную картинку областей применимости можно увидеть на рис. (10)

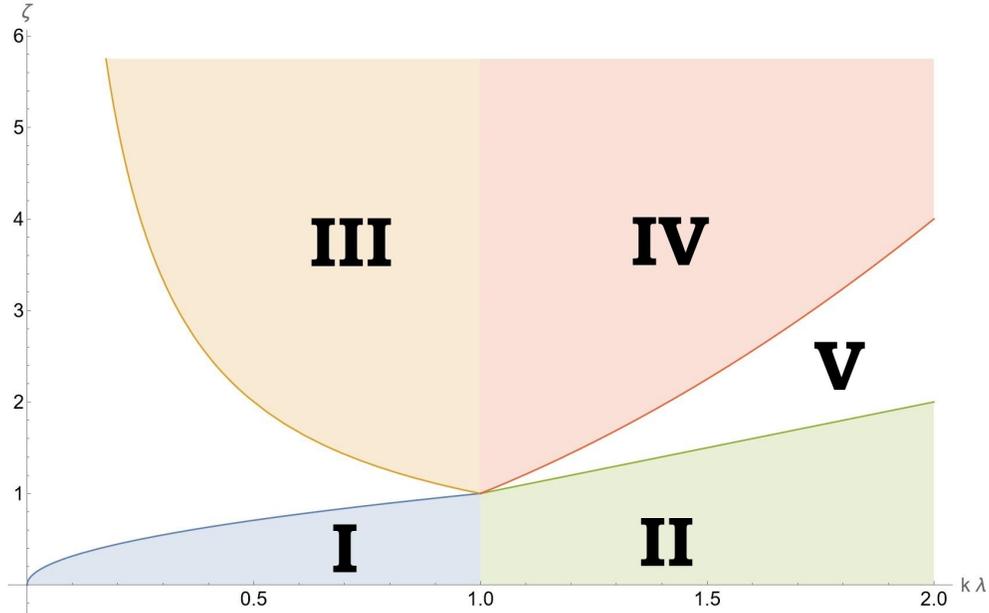


Рис. 10: Граница применимости борновского приближения (57):  $\zeta \ll \sqrt{k\lambda}$  и  $k\lambda < 1$  (область I), или  $\zeta \ll (k\lambda)$ , когда  $k\lambda > 1$  (область II). Выше желтой и красной линии находятся область применимости WKВ формул. При  $\zeta \gg \frac{1}{k\lambda}$  и  $k\lambda \ll 1$  (область III) работает формула (71), при  $\zeta \gg (k\lambda)^2$  и  $k\lambda \gg 1$  (область IV) работает формула (69). Наконец,  $k\lambda \ll \zeta \ll (k\lambda)^2$  (область V) характеризуется применимостью квазиклассики (66), но не применимостью (69).

### 3.2.2 Скачок квазиклассического интеграла

Оказывается, по мере монотонного изменения значения  $m_{eff}$  (или, эквивалентно,  $\alpha$ ), происходит скачок значения квазиклассического интеграла (67), что связано с перегибом подкорневой функции, из-за чего появляется несколько точек останова. Подинтегральное выражение имеет несколько нулей при

$$\alpha \geq \alpha_c = \sqrt{\frac{37 + 14\sqrt{7}}{3}} \approx 4.97 \quad (78)$$

Исследуем этот скачок в пределе  $\alpha \gg 1$ . Тогда подинтегральную функцию можно описать

$$0 = 1 + \frac{g}{x_0(1+x_0)^2} - \frac{\alpha^2}{x_0^2} \quad \Rightarrow \quad g(\alpha, x_0) = -\frac{(x_0+1)^2(x_0^2 - \alpha^2)}{x_0} \quad (79)$$

$$g(x_0 \ll 1) = \frac{\alpha^2}{x_0}; \quad g(x_0 \sim \alpha \gg 1) = x_0(\alpha^2 - x_0^2) \quad (80)$$

При наличии нескольких точек останова нам нужно выбирать самую дальнюю, поскольку волновая функция экспоненциально затухает под барьером и вид потенциала за первой точкой останова для квазиклассики не важен. Таким образом, при достаточно большом  $g \gg 1$  мы по мере увеличения  $\alpha$  сначала находимся на асимптотике  $x_0 \ll 1$ , а затем перескакиваем на другую асимптотику. Получается

$$x_0(\alpha < \alpha_J) = \frac{\alpha^2}{g}; \quad x_0(\alpha > \alpha_J) = \frac{2(3)^{1/3}\alpha^2 + 2^{1/3}(-9g + \sqrt{81g^2 - 12\alpha^6})^{2/3}}{6^{2/3}(-9g + \sqrt{81g^2 - 12\alpha^6})^{1/3}} \quad (81)$$

$$\alpha_J = \left(g \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{1/3} \quad (82)$$

Такой скачок явно виден на рис. (8). Для зеленой кривой  $g = 10^3$  при  $\ln(\alpha_J) \approx 2.6$  происходит скачок и переход на асимптотику  $\delta/(2\lambda k) \approx g/(2\alpha^2)$ . Причем асимптотика возникает из-за сдвига точки останова  $x_0 \approx \alpha - g/(2\alpha^2)$ . Таким образом, можно считать что явление скачка уже учтено в выводе формулы (69). В то же время для низких энергий  $\lambda k \ll 1$  явление скачка отсутствует, поскольку изначально  $\alpha = m_{eff}/2\lambda k > \alpha_c$ .

В квазиклассическом случае существует физическая интерпретация условия  $\alpha > \alpha_c$ . Запишем выражение для прицельного параметра  $b$

$$b = \frac{m}{k} \sim 2\lambda\alpha \quad \Rightarrow \quad b_c = 2\alpha_c\lambda \approx 10\lambda \quad (83)$$

То есть по мере увеличения прицельного параметра  $b$  угол рассеяния непрерывно изменяется, а затем испытывает скачок при  $b = b_c$ . Впрочем, следует обратить внимание, что значение  $b_c \approx 10\lambda$  очень большое.

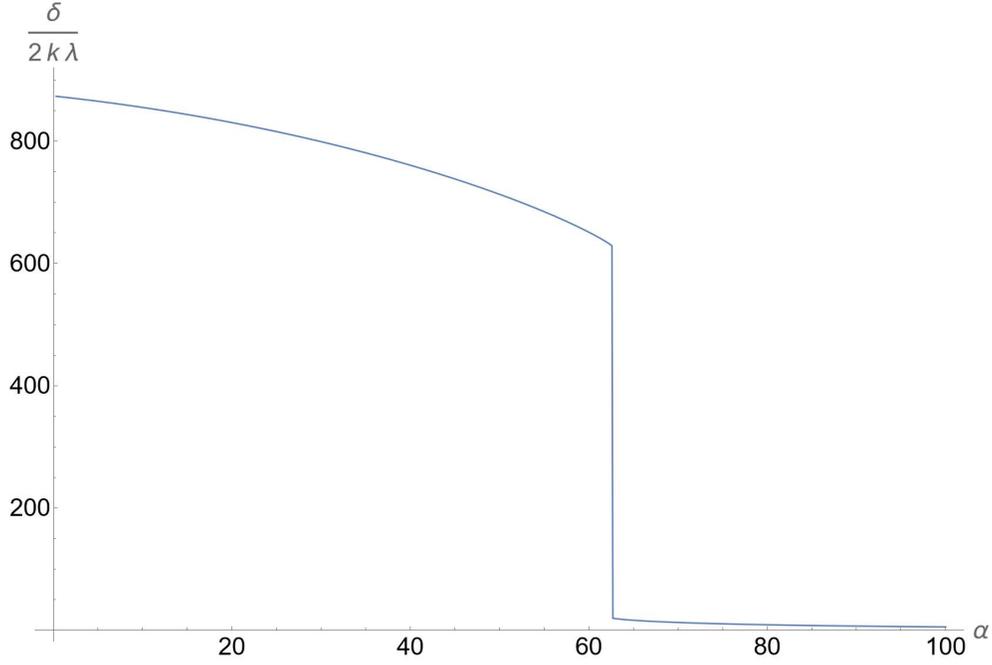


Рис. 11: Пример зависимости фазы рассеяния от  $\alpha \propto m_{eff}$  при наличии скачка. Здесь  $g = 10^5$ , следовательно  $\alpha_J \approx 63.8$ , что близко к реальному значению положения скачка.

### 3.2.3 Направление рассеяния

В этом разделе мы будем интересоваться значением величины  $|f(\varphi)|^2$ , определяющим направление рассеяния на потенциале. Согласно двумерной фазовой теории рассеяния [1]:

$$f(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} f'(\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\delta_m} \sin(\delta_m) e^{im\varphi} \quad (84)$$

Здесь  $f$  - обыкновенная амплитуда рассеяния, а  $f'$ , это обезразмеренная указанным выше способом амплитуда рассеяния, для того чтобы ей было удобнее пользоваться при построении графиков.

Направление рассеяния в квазиклассическом приближении можно получить по формуле [2]:

$$\varphi = 2 \frac{d\delta}{dm} \quad (85)$$

Нетрудно видеть, что производная фазы, как и сама фаза, испытывает разрыв в точке  $\alpha_J$ , и можно было бы предположить, что может существовать область углов, куда нет рассеяния, или оно сильно подавлено. Однако, это не так. Рассмотрим, как меняется производная фазы рассеяния по моменту (рис. (12)). Вблизи  $\alpha = 0$ , выражение (67) в случае  $g \gg 1$  ведет себя как

$$\delta(\alpha \rightarrow 0) \approx \pi(\sqrt{\zeta} - m/2) \quad (86)$$

Таким образом получается, что фазы рассеяния до момента скачка вносят вклад в рассеяние на все углы, в то время как длинный хвост после скачка дает большой вклад в рассеяние вперед. Примеры зависимости квадрата амплитуды рассеяния от угла представлены на Рис. (13) и (14).

Учитывая, что для транспортного сечения рассеяния рассеяние вперед подавлено, то для оценки транспортного сечения при  $g \gg 1$  можно отбросить длинный хвост и считать слагаемые до скачка  $\alpha_J$ , а учитываемые фазы считать случайными:

$$\sigma_{tr} = \frac{2}{\pi k} \int |f'(\varphi)|^2 (1 - \cos(\varphi)) d\varphi \approx \frac{2}{\pi k} \frac{\alpha_J}{2} \quad (87)$$

Для  $g = 10^4$  такая оценка дает ошибку  $\sim 7\%$ , а для  $g = 10^5$ , ошибка  $\sim 15\%$

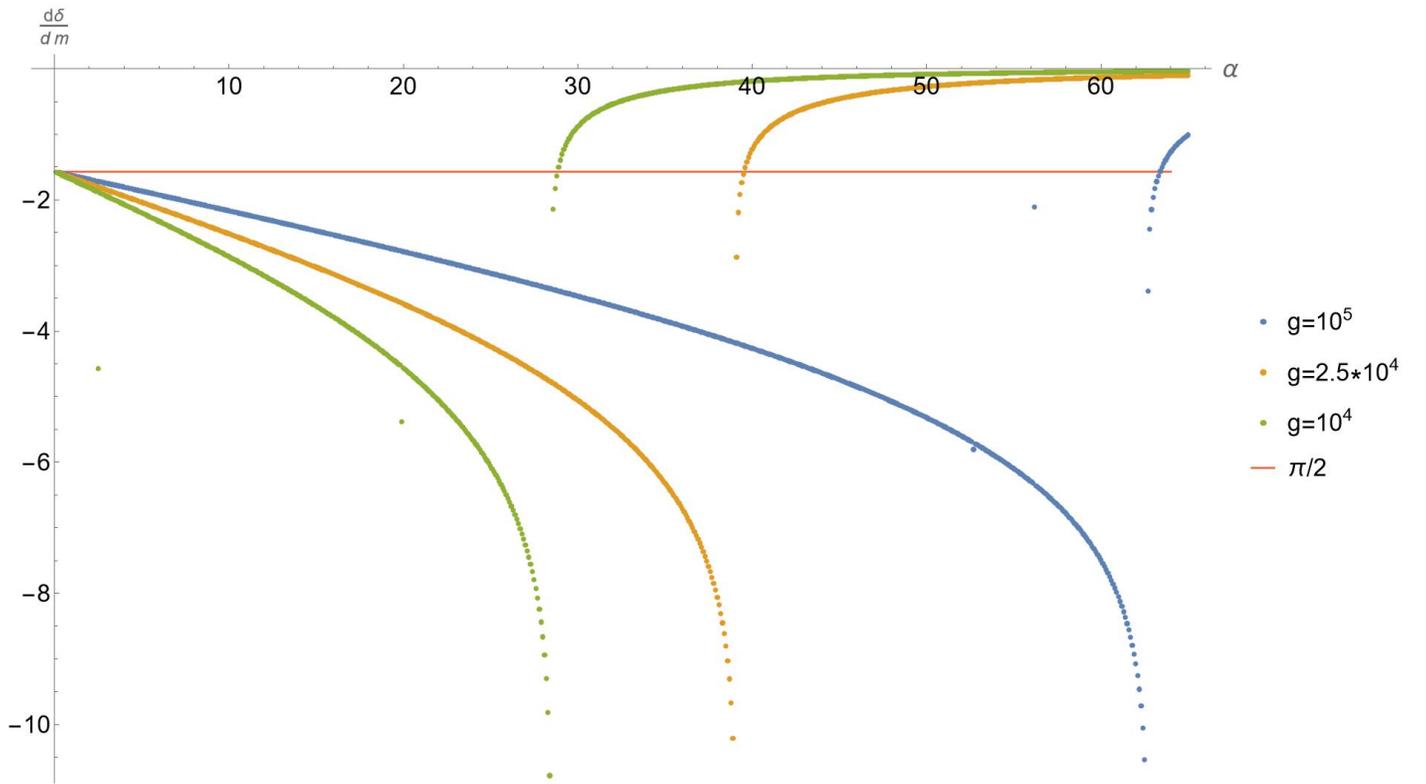


Рис. 12: Зависимость производной фазы от параметра  $\alpha$  для разных значений параметра  $g$ . Видно, что все кривые выходят из точки  $-\pi/2$ , что соответствует рассеянию назад  $\varphi = \pi$ . Далее кривые идут вниз, покрывая все возможные углы  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , а затем происходит скачок, после которого рассеяние быстро локализуется вблизи малых углов  $\varphi \ll 1$

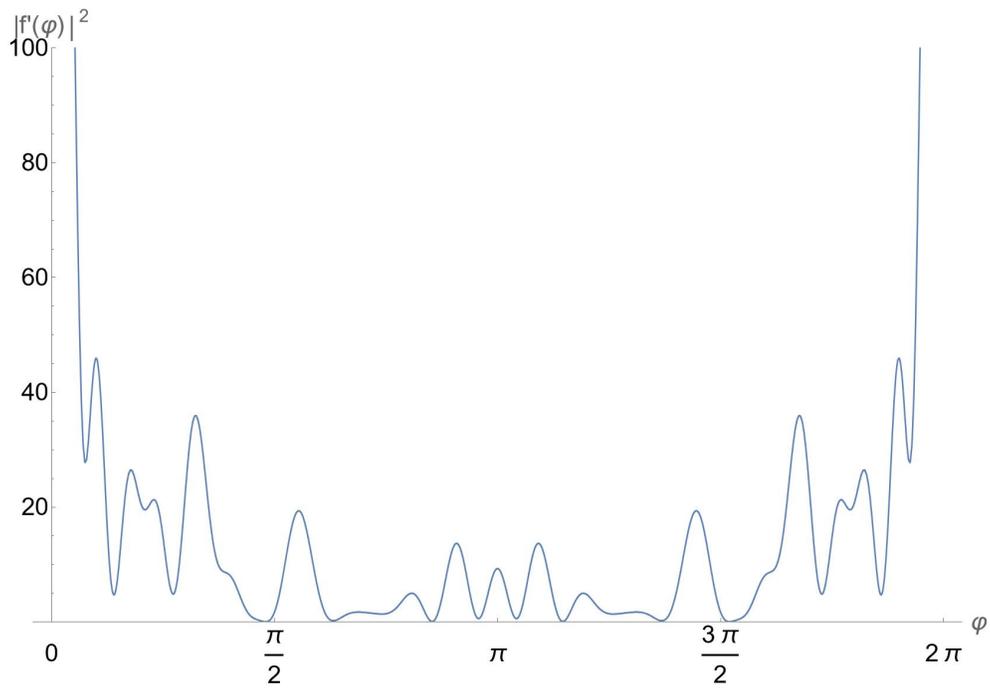


Рис. 13: Зависимость интенсивности рассеяния от направления  $|f'(\varphi)|^2$  для  $g = 10^3$ , и  $2k\lambda = 1$

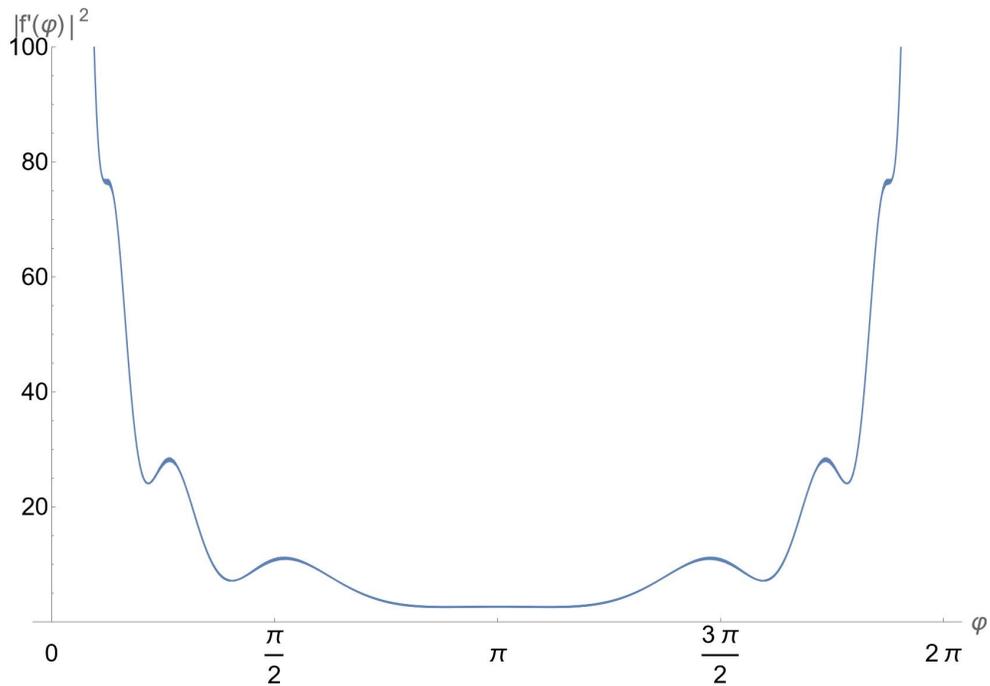


Рис. 14: Зависимость интенсивности рассеяния от направления  $|f'(\varphi)|^2$  для  $g = 0.1$ , и  $2k\lambda = 100$

### 3.3 Рассеяние при малых энергиях

В случае рассеяния при малых энергиях вклад дает только  $s$ -канал. В таком случае применима формула [4]:

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left[ \ln\left(\frac{2i}{k}\right) - C + \frac{1}{B_\rho} \right]^{-1}; \quad \psi(\rho \rightarrow \infty) = 1 + B_\rho \ln(\rho) \quad (88)$$

Здесь  $C = 0.577\dots$  число Эйлера - Маскерони, а  $\psi(\rho)$  - точное решение при нулевой энергии, имеющее нормировку, чтобы получить правильную асимптотику. Может показаться, что здесь имеется логарифм размерной величины  $k$ , однако, как мы увидим далее, искомая величина  $B_\rho$  также содержит логарифм размерной величины, и при объединении этих двух логарифмов эти размерности сократятся. В нашем случае при нулевой энергии существует точное решение [15]:

$$\psi_0'' + \frac{\psi_0'}{\rho} + \frac{2\zeta}{\rho} \frac{\rho_s}{(\rho_s + \rho)^2} \psi_0 = 0; \quad \rho_s = 2\lambda \quad (89)$$

Точное решение, вводя безразмерное расстояние  $x = \rho/\rho_s = \rho/(2\lambda)$ , можно записать в виде:

$$\psi_0(x) = \#(1 + 2x + x^2)^{\frac{1}{4}(1 + \sqrt{1 + 8\zeta})} {}_2F_1\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8\zeta}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 8\zeta}}{2}, 1 + \sqrt{1 + 8\zeta}, -\sqrt{1 + 2x + x^2}\right). \quad (90)$$

С неизвестной нормировочной константой  $\#$ . Предполагая, что асимптотика решения (90) имеет вид, как (88), только еще с неизвестным префактором, нетрудно получить выражение для величины  $B$ :

$$B_x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\psi_0'(x)}{\psi_0(x) - x \ln(x)\psi_0'(x)}, \quad (91)$$

$$\psi_0(x \rightarrow \infty) = \frac{\Gamma(2z)}{\Gamma^2(z)} \ln(x) - \frac{2\Gamma(2z)}{\Gamma^2(z)} (C + \Psi(z)), \quad z = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\zeta}}{2}. \quad (92)$$

Здесь  $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ . Отсюда можно получить точное выражение для  $B_x$ , упрощенное выражение для целых  $\zeta$  и асимптотику  $B_x$  на больших  $\zeta$ :

$$\frac{1}{B_x(\zeta)} = -2(C + \Psi(z)) = -2\left(C + \Psi\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 8\zeta}}{2}\right)\right) \quad (93)$$

$$\frac{1}{B_x(\zeta \rightarrow \infty)} = -\ln(2\zeta) - 2C + O(1/\zeta) \quad (94)$$

Важно, что  $B_x \neq B_\rho$ , поскольку после замены  $x = \rho/\rho_s$  было найдено решение в виде  $\psi_0 = 1 + B_x \ln(x)$ , в то время как нужно  $\psi_0 = 1 + B_\rho \ln(\rho) = 1 + B_\rho(\ln(x) + \ln(\rho_s))$ . Впрочем, нетрудно получить связь

$$B_\rho = \frac{1}{\frac{1}{B_x} - \ln(\rho_s)} \quad (95)$$

В результате для амплитуды рассеяния в  $s$ -канале имеем:

$$f_0 = -\sqrt{\frac{\pi}{2k}} \left[ \ln\left(\frac{i}{2k\lambda\zeta}\right) - 3C \right]^{-1} \quad (96)$$

Такой результат принципиально отличается от случая неэкранированного Кулона, в котором точное решение (50) дает всегда зависимость от  $\varphi$ , то есть рассеяние всегда происходит не только в  $s$ -канале.

## 4 Вывод

В рамках работы было исследовано поведение спиновых волн в киральном ферромагнетике с учетом возмущения магнитного порядка, вызванного присутствием поля от вихря в тонкой сверхпроводящей пленке (пирловский случай). Для этого с помощью анзатца (9) в выражении для свободной энергии задача была сведена к квантовому бозонному гамильтониану типа Боголюбова - де Жена (16), в котором потенциал частицы определяется возмущением магнитного порядка.

Для связанных состояний на потенциале (локализованных колебаний намагниченности) был рассмотрен предел низких и высоких энергий. Для низких энергий задача была сведена в главном порядке к двумерному кулоновскому потенциалу (27), также к ней посчитаны поправки в следующем порядке малости (29). Для высоколежащих уровней энергии связанных состояний был использован приближенный потенциал, в котором с помощью квазиклассического приближения найдены высоколежащие уровни энергии (43) и их количество (47).

Далее была исследована задача рассеяния на приближенном квантовом потенциале. Получены ответы в борновском приближении для различных пределов по энергии обычного (57) и транспортного (61) сечений рассеяния, и пределы применимости борновского приближения ((62), (64)). Также была использована фазовая теория рассеяния в квазиклассическом приближении. С её помощью найдены выражения для сечения рассеяния в различных пределах по энергиям ((69), (71)). В квазиклассической фазовой теории рассеяния изучена зависимость амплитуды рассеяния от направления рассеяния и получена формула для оценки транспортного сечения рассеяния для случая сильного потенциала (87). Также исследован случай очень низких энергий волн, когда рассеяние происходит в  $s$ -канале ((88), (90)).

В дальнейшем планируется исследовать задачу о поведении магнонов в присутствии сверхпроводящего вихря и скирмиона. Известно, что даже в отсутствие сверхпроводящей пленки на скирмионе могут возникать связанные состояния [14], однако присутствие сверхпроводящего вих-

ря может существенно влиять на параметры скирмиона [3]. Предполагается исследовать связанные состояния и задачу рассеяния магнонов на такой системе скирмион-вихрь.

## Список литературы

- [1] Sadhan K. Adhikari. “Quantum scattering in two dimensions”. В: *American Journal of Physics* 54.4 (апр. 1986), с. 362—367. DOI: [10.1119/1.14623](https://doi.org/10.1119/1.14623).
- [2] Sadhan K. Adhikari и Mahir S. Hussein. “Semiclassical scattering in two dimensions”. В: *American Journal of Physics* 76.12 (дек. 2008), с. 1108—1113. DOI: [10.1119/1.2970054](https://doi.org/10.1119/1.2970054).
- [3] S. S. Apostoloff и др. “Chirality inversion and radius blowup of a néel-type Skyrmion by a Pearl Vortex”. В: *Physical Review B* 107.22 (июнь 2023). DOI: [10.1103/physrevb.107.1220409](https://doi.org/10.1103/physrevb.107.1220409).
- [4] В. Ya. Balagurov. “On the theory of elastic scattering of slow particles at a 2D potential”. В: *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 114.6 (июнь 2012), с. 906—912. DOI: [10.1134/s1063776112040036](https://doi.org/10.1134/s1063776112040036).
- [5] M. Borst и др. “Observation and control of hybrid spin-wave–meissner-current transport modes”. В: *Science* 382.6669 (окт. 2023), с. 430—434. DOI: [10.1126/science.adj7576](https://doi.org/10.1126/science.adj7576).
- [6] Gilson Carneiro и Ernst Helmut Brandt. “Vortex lines in films: Fields and interactions”. В: *Physical Review B* 61.9 (март 2000), с. 6370—6376. DOI: [10.1103/physrevb.61.6370](https://doi.org/10.1103/physrevb.61.6370).
- [7] O. V. Dobrovolskiy и др. “Magnon–Fluxon interaction in a ferromagnet/superconductor heterostructure”. В: *Nature Physics* 15.5 (февр. 2019), с. 477—482. DOI: [10.1038/s41567-019-0428-5](https://doi.org/10.1038/s41567-019-0428-5).
- [8] Qiong-gui Lin. *Scattering by a Coulomb field in two dimensions*. Окт. 1997. URL: <https://doi.org/10.1119/1.18694>.
- [9] Adam J. Makowski. “Quantum and classical solutions for statically screened two-dimensional Wannier-Mott excitons”. В: *Physical Review A* 84.2 (авг. 2011). DOI: [10.1103/physreva.84.022108](https://doi.org/10.1103/physreva.84.022108).
- [10] Jonas Nothhelfer и др. “Steering Majorana braiding via skyrmion-vortex pairs: A scalable platform”. В: *Phys. Rev. B* 105 (22 июнь 2022), с. 224509. DOI: [10.1103/PhysRevB.105.224509](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.224509). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.105.224509>.
- [11] Sergey S. Pershoguba, Sho Nakosai и Alexander V. Balatsky. “Skyrmion-induced bound states in a superconductor”. В: *Physical Review B* 94.6 (авг. 2016). DOI: [10.1103/physrevb.94.064513](https://doi.org/10.1103/physrevb.94.064513).
- [12] A. P. Petrović и др. “Skyrmion-(anti)vortex coupling in a chiral magnet-superconductor heterostructure”. В: *Physical Review Letters* 126.11 (март 2021). DOI: [10.1103/physrevlett.126.117205](https://doi.org/10.1103/physrevlett.126.117205).

- [13] Stefan Rex, Igor V. Gornyi и Alexander D. Mirlin. “Majorana bound states in magnetic skyrmions imposed onto a superconductor”. В: *Phys. Rev. B* 100 (6 авг. 2019), с. 064504. DOI: [10.1103/PhysRevB.100.064504](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.100.064504). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.100.064504>.
- [14] Christoph Schütte и Markus Garst. “Magnon-Skyrmion scattering in chiral magnets”. В: *Physical Review B* 90.9 (сент. 2014). DOI: [10.1103/physrevb.90.094423](https://doi.org/10.1103/physrevb.90.094423).
- [15] Christian Tanguy. *Counting the Number of Bound States of Two-dimensional Screened Coulomb Potentials: A Semiclassical Approach*. 2001. arXiv: [cond-mat/0106184](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0106184) [[cond-mat.mtrl-sci](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0106184)].
- [16] Guang Yang и др. “Majorana bound states in magnetic skyrmions”. В: *Phys. Rev. B* 93 (22 июнь 2016), с. 224505. DOI: [10.1103/PhysRevB.93.224505](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.93.224505). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.93.224505>.
- [17] Takehito Yokoyama и Jacob Linder. “Josephson effect through magnetic skyrmions”. В: *Physical Review B* 92.6 (авг. 2015). DOI: [10.1103/physrevb.92.060503](https://doi.org/10.1103/physrevb.92.060503).

## 5 Приложения

### 5.1 Учет изменения магнитного поля внутри кора вихря

Так, на масштабах меньше толщины сверхпроводящей пленки  $\rho \leq d_S$ , приближение для магнитного поля перестает работать и потенциал становится логарифмическим. Учтем разность  $l_w/\rho$  и  $\ln(\rho/l_w)$  по теории возмущений. Поскольку возмущение в центре, то наибольшая поправка будет к состоянию с нулевы моментом:

$$\langle \eta | (c - 1/\rho) \theta(d_S - |\rho|) | \eta \rangle \approx \frac{\gamma^2}{(2n+1)^3} \int_0^{d_S/l_w} (c - 1/\rho) \rho d\rho \approx \frac{\gamma^2}{(2n_r+1)^3} \frac{d_S}{l_w} \quad \Rightarrow \quad \delta E \propto E \gamma \frac{d_S}{a_B} \quad (97)$$

Таким образом, получается сильный параметр малости этой поправки  $\gamma \frac{d_S}{a_B} \sim \gamma^2 \frac{d_S}{l_w} \ll 1$ , что делает её малозначительной для всех уровней.

### 5.2 WKБ интеграл для высоколежащих энергий

Вычисляем квазиклассический интеграл

$$\int_0^\infty \text{Re} \left\{ \sqrt{\frac{1}{r(1+r/\Lambda)^2} - 1} \right\} dr = \pi \sqrt{\Lambda} \left( 1 - \frac{\Gamma(5/6)}{\sqrt{\pi} \Gamma(4/3)} \Lambda^{1/6} \right); \quad \Lambda \ll 1 \quad (98)$$

#### 5.2.1 Способ 1: разложение в ряд и почленное интегрирование

$$\frac{I}{\sqrt{\Lambda}} = \int \sqrt{\frac{1}{r(1+r)^2} - \Lambda} dr = \int \frac{1}{\delta} = \int \frac{\sqrt{1 - \Lambda \frac{(\delta+1)^2}{\delta^3}}}{\sqrt{\delta}(1+\delta)} d\delta \quad (99)$$

$$\frac{\sqrt{1 - \Lambda \frac{(\delta+1)^2}{\delta^3}}}{\sqrt{\delta}(1+\delta)} = \frac{\sum_{n=0}^\infty \binom{1/2}{n} \left( -\Lambda \frac{(\delta+1)^2}{\delta^3} \right)^n}{\sqrt{\delta}(\delta+1)} \quad (100)$$

$$\int_{\Lambda^{1/3}}^\infty \frac{\left( -\Lambda \frac{(\delta+1)^2}{\delta^3} \right)^n}{\sqrt{\delta}(\delta+1)} d\delta = -i \Lambda^n B \left( -\frac{1}{\Lambda^{1/3}}; n+1/2, 2n \right) = \frac{(-\Lambda)^n \Gamma(1/2 - 3n) \Gamma(1/2 + n)}{\Gamma(1 - 2n)} + \frac{2(-1)^n \Lambda^{1/6}}{6n-1} + O(\sqrt{\Lambda}) \quad (101)$$

Важную роль играет первый член при  $n = 0$  и дает  $I(\Lambda = 0) = \pi$ , в то время как сумма второго члена при всех  $n$  дает поправку  $\pi \beta \Lambda^{1/6}$

$$-\pi \beta = \sum_{n=0}^\infty \binom{1/2}{n} \frac{2(-1)^n}{6n-1} = -\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(5/6)}{\Gamma(4/3)} \approx -2.2405 \quad (102)$$

### 5.2.2 Способ 2: разделение на области интегрирования

Произведем несколько замен переменных в интеграле:

$$\frac{I}{\sqrt{\Lambda}} = \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{1}{x(1+x)^2} - \Lambda} = \int_1^\infty \sqrt{\frac{1}{y^2(1-y)} - \Lambda} dy = \quad (103)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{\frac{z^3}{1-z} - \Lambda} \frac{dz}{z^2} = \int_0^{\sin^2(\phi)} \sqrt{1 - \Lambda \frac{\cos^2(\phi)}{\sin^6(\phi)}} d\phi = \quad (104)$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\phi) \sin^2(\phi)} - \frac{\Lambda}{\sin^8(\phi)}} \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \Lambda \frac{\cos^2(\phi)}{\sin^6(\phi)}} d\phi \quad (105)$$

Теперь в таких переменных возьмем интеграл, разделив его на области интегрирования и применив в них свои приближения. Разделение масштабов при  $\phi_\Lambda$ , таком что  $\frac{\Lambda \cos^2 \phi_\Lambda}{\sin^6 \phi_\Lambda} = 1$ , то есть  $\phi_\Lambda \approx \Lambda^{1/6}$ .

$$\frac{I}{\sqrt{\Lambda}} = \text{Re} \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{1}{x(1+x)^2} - \Lambda} = 2 \text{Re} \int_0^{\pi/2} d\phi \sqrt{1 - \frac{\Lambda \cos^2 \phi}{\sin^6 \phi}} = \quad (106)$$

$$= 2 \int_{\phi_\Lambda}^{\pi/2} d\phi + 2 \int_{\phi_\Lambda}^{\pi/2} d\phi \left[ \sqrt{1 - \frac{\Lambda \cos^2 \phi}{\sin^6 \phi}} - 1 \right] \simeq \pi - 2\Lambda^{1/6} + 2 \int_{\Lambda^{1/6}}^\infty d\phi \left[ \sqrt{1 - \frac{\Lambda}{\phi^6}} - 1 \right] = \quad (107)$$

$$= \pi - 2\Lambda^{1/6} + 2\Lambda^{1/6} \left( 1 - \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(5/6)}{2\Gamma(4/3)} \right) = \pi \left( 1 - \frac{\Gamma(5/6)}{\sqrt{\pi}\Gamma(4/3)} \Lambda^{1/6} \right) \quad (108)$$