

---

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика

**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

## **НЕОДНОРОДНЫЕ СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СОСТОЯНИЯ В НИЗКОРАЗМЕРНЫХ СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ С СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ УПОРЯДОЧЕНИЕМ**

(бакалаврская работа)

**Студент:**

Анненков Дмитрий Сергеевич

\_\_\_\_\_  
(подпись студента)

**Научный руководитель:**

Мельников Александр Сергеевич,  
д-р физ.-мат. наук

\_\_\_\_\_  
(подпись научного руководителя)

**Консультант (при наличии):**

\_\_\_\_\_  
(подпись консультанта)

Москва 2025

# Аннотация

В работе изучается взаимовлияние сегнетоэлектричества и сверхпроводимости в Ван-дер-Ваальсовых структурах. Исследуемая модель предполагает наличие межслоевых сверхпроводящих корреляций, туннелирования между слоями, а также относительный сдвиг энергетических зон, индуцированный спонтанной сегнетоэлектрической поляризацией, направленной перпендикулярно слоям. Используя формализм уравнений Эйленбергера, демонстрируется, что возможно образование сверхпроводящего состояния, локализованного на сегнетоэлектрической доменной стенке, сопровождающееся повышением критической температуры. Изучено влияние туннелирования на образование локализованных состояний. Для случая однородной поляризации рассмотрено влияние внешнего магнитного поля, параллельного слоям, как на синглетные, так и на триплетные куперовские пары.

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Модель и основные уравнения</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Сверхпроводящие состояния, локализованные на сегнетоэлектрических доменных стенках</b>	<b>11</b>
3.1	Решение в случае однородного относительного сдвига зон . . . . .	12
3.2	Межслоевая сверхпроводимость в присутствии изолированной сегнетоэлектрической доменной стенки . . . . .	13
3.2.1	Спин-синглетный случай . . . . .	14
3.2.2	Спин-триплетный случай . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Влияние магнитного поля</b>	<b>22</b>
4.1	Орбитальный механизм . . . . .	22
4.2	Парамагнитный механизм . . . . .	23
4.2.1	Спин-синглетный случай . . . . .	24
4.2.2	Спин-триплетный случай . . . . .	25
4.3	Совместное влияние орбитального и парамагнитного механизмов . . . . .	28
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>32</b>
<b>A</b>	<b>Вывод уравнений Эйленбергера (2.11)</b>	<b>35</b>
<b>B</b>	<b>Вывод ядра (3.11)</b>	<b>38</b>
<b>C</b>	<b>Вывод уравнений (3.12)-(3.15)</b>	<b>45</b>
<b>D</b>	<b>Вывод ядра (3.20)</b>	<b>48</b>
<b>E</b>	<b>Вывод уравнений (3.21) - (3.24)</b>	<b>54</b>



# Глава 1

## Введение

Двумерные материалы, а также Ван-дер-Ваальсовы структуры на их основе являются объектом активных теоретических и экспериментальных исследований последние десятилетия [1]. Одним из свойств, которым могут обладать такие структуры, является наличие спонтанной электрической поляризации, направление которой может быть обращено во внешнем электрическом поле – сегнетоэлектричество [2]. В частности, уникальным для слоистых Ван-Дер-Ваальсовых материалов является интерфейсное сегнетоэлектричество («sliding ferroelectricity») [3], возникающее, например, когда в разных слоях друг над другом оказываются разные атомы (так называемый AB stacking). Такая ситуация проиллюстрирована на Рис. 1.1(a). При приложении внешнего электрического поля, за счёт параллельного смещения слоёв друг относительно друга, возможно перевести их в положение ВА, сменив направление поляризации на противоположное. В процессе такого проскальзывания возникает промежуточная ситуация, изображённая на Рис. 1.1(b), характеризующаяся наличием доменной стенки.

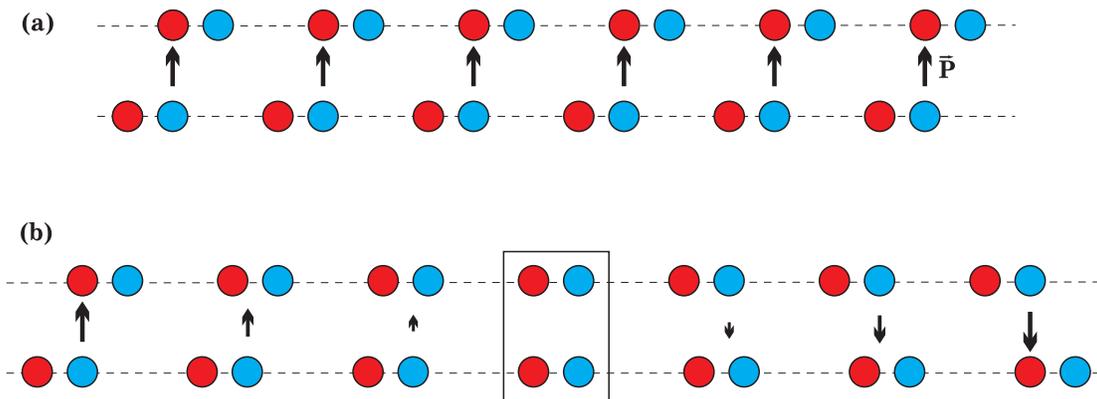


Рис. 1.1: Интерфейсное сегнетоэлектричество в АВ бислое. (a) Механизм возникновения поляризации. (b) Образование доменной стенки в процессе смены взаимного расположения слоёв с АВ на ВА.

Хотя интерфейсное сегнетоэлектричество интересно само по себе и может иметь практиче-

ские приложения, например, в устройствах памяти [3], важным оказывается также изучение влияния этого явления на электронные и транспортные (как нормальные, так и сверхпроводящие) свойства Ван-дер-Ваальсовых структур. Так, например, в недавнем эксперименте [4] было экспериментально обнаружено существенное повышение критической температуры сверхпроводящего перехода бислоя  $T_d$ - $\text{MoTe}_2$  вблизи сегнетоэлектрического переключения, см. Рис. 1.2. В качестве возможного теоретического объяснения в работе [5] рассматривается механизм усиления сверхпроводимости за счёт взаимодействия электронов с флуктуациями поляризации, которое может приводить к дополнительному притяжению электронов внутри слоя. Такое притяжение оказывается наиболее сильным в областях доменных стенок, а потому может существенно влиять на сверхпроводящие свойства материала именно вблизи сегнетоэлектрического переключения.

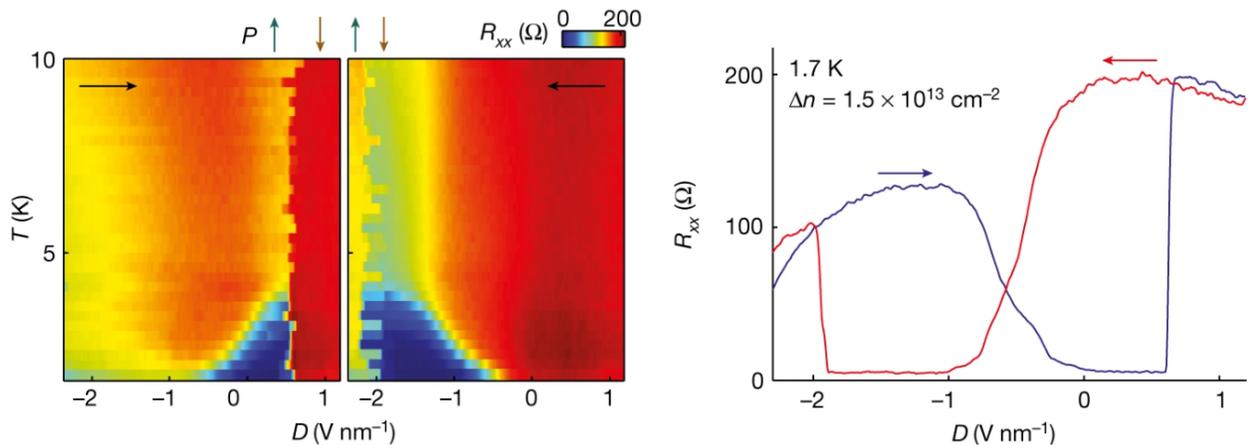


Рис. 1.2: Из работы [4]. Слева: фазовая диаграмма бислоя  $T_d$ - $\text{MoTe}_2$  в плоскости температуры  $T$  и поля смещения  $D$ , приложенного к образцу, синяя область соответствует сверхпроводящему состоянию. По мере приближения к сегнетоэлектрическому переключению (резкая граница около  $D = 1\text{nm}^{-1}$ ) наблюдается значительный рост критической температуры (образование купола). Справа: зависимость сопротивления образца при фиксированной температуре от поля смещения  $D$ . Стрелки отображают направление изменения внешнего электрического поля в ходе эксперимента. При увеличении поля смещения  $D$  (см. синюю кривую) сначала происходит резистивный переход в сверхпроводящую фазу, некоторое время образец пребывает в ней, после чего, в момент изменения направления поляризации на противоположное, происходит фазовый переход I рода в нормальную фазу. Красная кривая демонстрирует аналогичное поведение при изменении электрического поля в обратную сторону.

В более поздней работе [6] той же экспериментальной группы, были исследованы сверхпроводящие свойства бислоя  $T_d$ - $\text{MoTe}_2$  во внешнем магнитном поле. Обнаружено, что верхнее

критическое поле  $H_{c2}$ , параллельное слоям, в такой структуре сильно превышает парамагнитный предел, что может указывать на спин-триплетную сверхпроводимость, а также значительно анизотропно. Совокупность этих наблюдений может быть следствием наличия в системе спин-орбитального взаимодействия.

В данной дипломной работе предлагается взглянуть на эти эксперименты под другим углом, рассмотрев влияние сегнетоэлектрической поляризации и магнитного поля на сверхпроводящие состояния, образованные электронами из разных слоёв (обсуждение конкретных механизмов такого спаривания выходит за рамки нашей работы). При таком типе спаривания триплетные сверхпроводящие состояния не подавлены принципом Паули, а наличие доменных стенок, как мы продемонстрируем в дальнейшем, может приводить к повышению критической температуры сверхпроводящего перехода за счёт образования локализованных состояний. Стоит также отметить, что сама по себе идея межслоевого (и, в частности, триплетного) спаривания не нова и обсуждалась, например, в статье М. Козна и Д. Дугласса [7], а также была предложена в работе А.И. Ларкина и К.Б. Ефетова как объяснение превышения поля парамагнитного предела в слоистых сверхпроводниках [8].

Дальнейший текст организован следующим образом. В главе 2 описывается исследуемая модель и выводятся основные уравнения, используемые в дальнейшем. Глава 3 посвящена обсуждению влияния доменных стенок на межслоевую сверхпроводимость. В главе 4 анализируется влияние внешнего магнитного поля, и, наконец, в главе 5 резюмируются полученные результаты.

# Глава 2

## Модель и основные уравнения

В данной работе мы рассматриваем двуслойную модель, аналогичную использованной в [9], с туннельной связью между слоями, а также притяжением электронов из разных слоёв. Она схематично изображена на Рис. 2.1. Фокусируясь на эффектах, связанных с межслоевым спариванием электронов, мы пренебрегаем внутрислоевыми куперовскими парами.

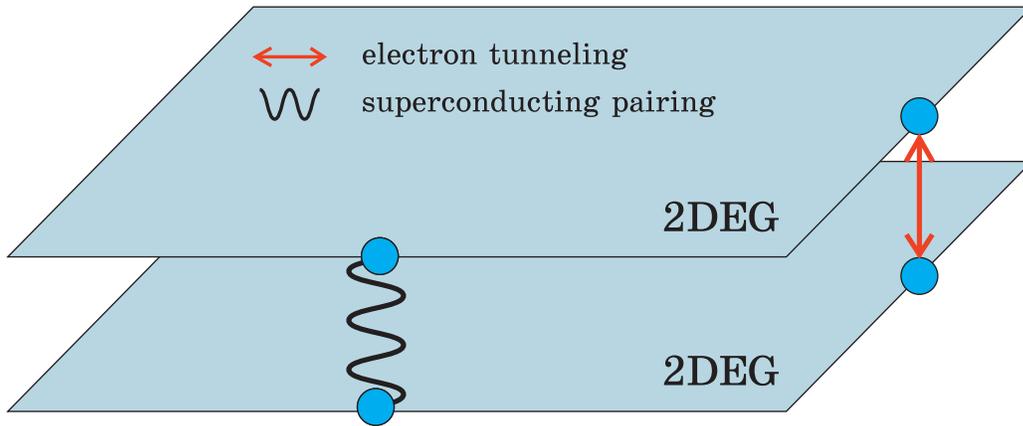


Рис. 2.1: Схематичное изображение рассматриваемой модели. Между слоями существует туннельная связь (обозначена красной стрелкой), а также предполагается притягивающее взаимодействие между электронами из разных слоёв (обозначено волнистой линией).

Гамильтониан, описывающий нашу систему имеет вид

$$H = H_1 + H_2 + H_t + H_{\text{int}}, \quad (2.1)$$

где

$$H_j = \int d^2\mathbf{r} \psi_{j\sigma}^\dagger(\mathbf{x}) \hat{\xi}_j \psi_{j\sigma}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

описывают изолированные двумерные слои, маркируемые индексом  $j = 1, 2$ ,  $\psi_{j\sigma}^\dagger(\mathbf{x})$  ( $\psi_{j\sigma}(\mathbf{x})$ ) – фермионные операторы рождения (уничтожения) в слое  $j$  в представлении Мацубары,

$\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \tau)$  где  $\tau$  – мнимое время в Мацубаровской технике,  $\sigma = \uparrow, \downarrow$  обозначают спиновую степень свободы (подразумевается суммирование по повторяющимся индексам),  $\hat{\xi}_j = \mathbf{P}_j^2/2m - \mu + U_j(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{P}_j = -i\nabla_{\mathbf{r}} - e\mathbf{A}_j/c$  есть оператор кинетического импульса,  $\mathbf{A}$  – вектор-потенциал;  $e$ ,  $c$ ,  $m$ ,  $\mu$  – заряд электрона, скорость света, эффективная масса и химический потенциал, соответственно. Мы также ввели потенциалы  $U_j(\mathbf{r})$ , чтобы учесть (возможно, неоднородный) относительный сдвиг зон проводимости в разных слоях, индуцированный наличием сегнетоэлектрического момента, перпендикулярного плоскости слоёв. Последние два слагаемых в гамильтониане (2.1) описывают сохраняющийся продольный импульс туннелирование

$$H_t = \int d^2\mathbf{r} \left[ t\psi_{1\sigma}^\dagger(\mathbf{x})\psi_{2\sigma}(\mathbf{x}) + t^*\psi_{2\sigma}^\dagger(\mathbf{x})\psi_{1\sigma}(\mathbf{x}) \right] \quad (2.3)$$

и межслоевое взаимодействие электронов

$$H_{\text{int}} = \frac{U_0}{2} \int d^2\mathbf{r} \psi_{1\sigma}^\dagger(\mathbf{x})\psi_{2\sigma'}^\dagger(\mathbf{x})\psi_{2\sigma'}(\mathbf{x})\psi_{1\sigma}(\mathbf{x}). \quad (2.4)$$

Здесь  $t$  – амплитуда туннелирования, а электрон-электронное взаимодействие подразумевается притягивающим  $U_0 = -|U_0|$ .

Наш анализ основывается на формализме Мацубаровских функций Грина. Мы вводим  $8 \times 8$  матричную функцию Грина в обобщённом пространстве слой – частица-дырка (Намбу) – спин

$$\underline{G}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \langle T_\tau \psi(\mathbf{x}_1) \psi^\dagger(\mathbf{x}_2) \rangle, \quad (2.5)$$

где угловые скобки означают термодинамическое усреднение,  $T_\tau$  – оператор  $\tau$ -упорядочения, и спинор  $\psi = (\psi_{1\uparrow}, \psi_{1\downarrow}, \psi_{1\uparrow}^\dagger, \psi_{1\downarrow}^\dagger, \psi_{2\uparrow}, \psi_{2\downarrow}, \psi_{2\uparrow}^\dagger, \psi_{2\downarrow}^\dagger)^T$ . Функция Грина (2.5) имеет следующую структуру в пространстве слоёв и Намбу

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} \check{G}_{11} & \check{G}_{12} \\ \check{G}_{21} & \check{G}_{22} \end{pmatrix}, \quad \check{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \hat{G}_{ij} & \hat{F}_{ij} \\ \hat{F}_{ij} & \hat{G}_{ij} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Мы также вводим матрицы Паули  $\underline{\eta}_i$ ,  $\check{\tau}_i$ , и  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = x, y, z$ ), действующие в слоевом, электрон-дырочном (Намбу) и спиновом пространстве, соответственно. В результате стандартных вычислений [10], мы получаем следующую систему уравнений Горькова (см. также [9])

$$\begin{pmatrix} -i\omega_n + \check{\xi}_1(\mathbf{r}) & \check{t}(\mathbf{r}) \\ \check{t}^\dagger(\mathbf{r}) & -i\omega_n + \check{\xi}_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \check{G}_{11}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \check{G}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ \check{G}_{21}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \check{G}_{22}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.7a)$$

$$\check{\xi}_j = \begin{pmatrix} \hat{\xi}_j(\mathbf{r}) & 0 \\ 0 & -\hat{\xi}_j^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2. \quad (2.7b)$$

Здесь  $\omega_n = 2\pi T(n + 1/2)$  – мацубаровская частота,  $T$  – температура, а звёздочка обозначает комплексное сопряжение. Здесь, и далее, мы опускаем мацубаровскую частоту, как аргумент

функций Грина для краткости. Межслоевая матрица связи

$$\check{t}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} t & \hat{\Delta}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \\ -\hat{\Delta}_{\text{int}}^*(\mathbf{r}) & -t^* \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

содержит межслоевую сверхпроводящую  $\hat{\Delta}_{\text{int}}$ , которая удовлетворяет уравнению самосогласования:

$$\hat{\Delta}_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \frac{|U_0|}{2} T \sum_{\omega_n} \hat{F}_{12}(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (2.9)$$

В настоящей работе мы рассматриваем случай, когда амплитуда туннелирования, относительный сдвиг зон и сверхпроводящая щель малы по сравнению с энергией Ферми в обоих слоях. Это позволяет пользоваться квазиклассическими уравнениями сверхпроводимости [11] и перейти от уравнений Горькова (2.7) к уравнениям Эйленбергера на квазиклассическую функцию Грина  $\underline{g}$ , определённую как

$$\underline{g}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = - \int \frac{d\xi}{i\pi} \check{\tau}_z \underline{G}(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi). \quad (2.10)$$

В выражении выше  $\underline{G}(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi)$  – функция Грина в смешанном представлении (после преобразования Вигнера), а интегрирование производится по энергии квазичастиц вблизи поверхности Ферми,  $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$  есть координата центра масс пары. Единичный вектор  $\mathbf{n}$  параметризует направление импульса  $\mathbf{p}$  вблизи поверхности Ферми  $\mathbf{p} = \mathbf{n}(p_F + \xi/v_F)$ ,  $\xi = p^2/2m - \mu$ ,  $p_F$  и  $v_F = p_F/m$  – импульс и скорость Ферми, соответственно. Полученные в результате преобразований уравнения Эйленбергера, а также уравнение самосогласования записываются как (подробности вывода содержатся в Приложении A, схожие вычисления в случае обычного спаривания можно найти в [12]):

$$\begin{aligned} -iv_F \mathbf{n} \nabla_{\mathbf{R}} \underline{g} - i\omega_n [\check{\tau}_z, \underline{g}] + \left[ \frac{1}{2} \left( \check{t} \check{\tau}_z \underline{\eta}_+ + \check{t}^\dagger \check{\tau}_z \underline{\eta}_- \right), \underline{g} \right] + \begin{pmatrix} 0 & -U_{12}(\mathbf{R}) \check{g}_{12} \\ U_{12}(\mathbf{R}) \check{g}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -\frac{e}{c} v_F \mathbf{n} \mathbf{A}_1 [\check{\tau}_z, \check{g}_{11}] & -\frac{e}{c} v_F \mathbf{n} (\mathbf{A}_1 \check{\tau}_z \check{g}_{12} - \mathbf{A}_2 \check{g}_{12} \check{\tau}_z) \\ -\frac{e}{c} v_F \mathbf{n} (\mathbf{A}_2 \check{\tau}_z \check{g}_{21} - \mathbf{A}_1 \check{g}_{21} \check{\tau}_z) & -\frac{e}{c} v_F \mathbf{n} \mathbf{A}_2 [\check{\tau}_z, \check{g}_{22}] \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\hat{\Delta}_{\text{int}}(\mathbf{R}) = -i\pi \lambda T \sum_{\omega_n} \int \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} \hat{f}_{12}(\mathbf{R}, \mathbf{n}). \quad (2.12)$$

Здесь мы переобозначили  $\underline{\eta}_\pm = \underline{\eta}_x \pm i\underline{\eta}_y$ ,  $U_{12}(\mathbf{R}) = U_1(\mathbf{R}) - U_2(\mathbf{R})$  и ввели безразмерную константу связи  $\lambda = -U_0 \nu_F / 2$ . Уравнения Эйленбергера (2.11) должны быть дополнены условием нормировки  $(\underline{\eta}_z \underline{g})^2 = \underline{1}$ , которое также обсуждается в Приложении A.

Чтобы также учесть парамагнитный эффект внешнего поля  $\mathbf{H}$ , необходимо произвести следующую замену  $-i\omega_n \check{\tau}_z \rightarrow (-i\omega_n \check{\tau}_z + \check{M})$  в уравнениях (2.11), где

$$\check{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}\hat{\sigma} & 0 \\ 0 & \mathbf{h}\hat{\sigma}^* \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

и  $\mathbf{h} = g\mu_B\mathbf{H}/2$ ,  $g$  есть  $g$ -фактор Ланде,  $\mu_B$  магнетон Бора,  $\hat{\sigma}$  обозначает вектор матриц Паули в спиновом пространстве. Уравнения (2.11) и (2.12) формируют базис нашего теоретического анализа эффектов межслоевого спаривания.

## Глава 3

# Сверхпроводящие состояния, локализованные на сегнетоэлектрических доменных стенках

В этой главе мы применяем формализм уравнений Эйленберга к модели бислоя в присутствии уединённой доменной стенки в нулевом внешнем магнитном поле. Сегнетоэлектрическая поляризация, перпендикулярная слоям может быть учтена через относительный сдвиг зон проводимости в различных слоях, а значит, должна приводить к подавлению межслоевых сверхпроводящих корреляций. Однако, вблизи доменной стенки эффективная поляризация меньше, что может сделать образование локализованных состояний более выгодным. Похожая ситуация возникает в ферромагнитных сверхпроводниках или бислоях сверхпроводник/ферромагнетик, где локализованные сверхпроводящие состояния образуются вблизи ферромагнитных доменных стенок [13, 14]. Стоит отметить, что в отсутствие туннелирования между слоями ( $t = 0$ ) такая аналогия является точной, при условии замены индексов слоя на спиновые. Мы ищем решение уравнений Эйленберга (2.11) на прямолинейных квази-частичных траекториях, пренебрегая, таким образом, нормальным отражением квазичастиц на неоднородностях потенциала. Это позволяет пользоваться известными выражениями для нормальных функций Грина  $g_{11} = \bar{g}_{11} = g_{22} = \bar{g}_{22} = -\text{sign}(\omega_n)$  при решении линеаризованных по параметру порядка уравнений Эйленберга, предполагая, что поправки малы по параметрам  $\chi/E_F, t/E_F \ll 1$ . Перед тем, как перейти к рассмотрению непосредственно задачи о доменной стенке, полезно рассмотреть задачу с однородной в пространстве поляризацией.

### 3.1 Решение в случае однородного относительного сдвига зон

Предполагая относительный сдвиг зон однородным,  $U_{12}(\mathbf{r}) = -2\chi$ , мы линеаризуем уравнения Эйленберга по сверхпроводящей щели с учётом предположений, сделанных выше. Итоговая система уравнений, определяющая аномальные функции Грина, имеет вид:

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n - 2\chi] \hat{f}_{12} - t (\hat{f}_{22} - \hat{f}_{11}) + 2\hat{\Delta}_{\text{int}} \text{sgn}(\omega_n) = 0, \quad (3.1a)$$

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n + 2\chi] \hat{f}_{21} + t (\hat{f}_{22} - \hat{f}_{11}) - 2\hat{\Delta}_{\text{int}}^{\text{T}} \text{sgn}(\omega_n) = 0, \quad (3.1b)$$

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n] \hat{f}_{11} + t (\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) = 0, \quad (3.1c)$$

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n] \hat{f}_{22} - t (\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) = 0. \quad (3.1d)$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что в отсутствие магнитного поля  $t = t^*$  из-за симметрии относительно обращения времени. Учитывая, что полученные уравнения чувствительны к спиновой структуре (синглетной или триплетной) межслоевого параметра порядка  $\hat{\Delta}_{\text{int}}$ , ниже обсуждаем эти случаи отдельно.

Спин-синглетная щель удовлетворяет соотношению  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = -\hat{\Delta}_{\text{int}}^{\text{T}}$ , используя его, спиновая структура в уравнениях (3.1) может быть снята, и однородное решение находится обычным образом:

$$\bar{f}_{12}^0 = \Delta_{\text{int}} \text{sgn}(\omega_n) \frac{\omega_n (\chi + i\omega_n) + it^2}{\omega_n (\chi^2 + \omega_n^2) + t^2}. \quad (3.2)$$

Подставляя его в уравнение самосогласования (2.12), мы получаем уравнение, описывающее критическую температуру сверхпроводящего перехода, в следующем виде

$$\log\left(\frac{T}{T_{c0}}\right) = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left[ \frac{\omega_n^2 + t^2}{\omega_n (\omega_n^2 + q^2)} - \frac{1}{\omega_n} \right], \quad (3.3)$$

где  $q^2 = \chi^2 + t^2$ , а  $T_{c0}$  обозначает критическую температуру в отсутствие туннелирования и относительного сдвига зон, которая определяется соотношением теории БКШ  $\lambda^{-1} = \ln(2\gamma\omega_D/T_{c0})$ , содержащим дебаевскую частоту  $\omega_D$  и постоянную Эйлера-Маскерони  $\gamma$  [11]. Вблизи  $T_{c0}$  решение уравнения (3.3) можно разложить по малым параметрам  $\chi/T_{c0}$ ,  $t/T_{c0}$ ,  $q/T_{c0} \ll 1$ :

$$\frac{T_c(\chi, t) - T_{c0}}{T_{c0}} = c_1 \left(\frac{q}{2\pi T_{c0}}\right)^2 + c_2 \left(\frac{q}{2\pi T_{c0}}\right)^4 + c_3 \left(\frac{q}{2\pi T_{c0}}\right)^6 + \dots, \quad (3.4a)$$

$$c_1 = \frac{\chi^2}{2q^2} \psi_2\left(\frac{1}{2}\right), \quad c_2 = \frac{c_1^2}{2} + \frac{\chi^2}{q^2} \left[ -c_1 \psi_2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4!} \psi_4\left(\frac{1}{2}\right) \right], \quad (3.4b)$$

$$c_3 = -\frac{c_1^3}{3} + c_1 c_2 + \frac{\chi^2}{q^2} \left[ \frac{1}{2} (3c_1^2 - 2c_2) \psi_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3!} c_1 \psi_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6!} \psi_6\left(\frac{1}{2}\right) \right]. \quad (3.4c)$$

Здесь  $\psi_n(x) = d^n \psi / dx^n$  есть  $n$ -ая производная дигамма функции  $\psi(x)$  [15]. Обратим внимание на то, что  $\psi_2(1/2) < 0$ , а значит, наличие однородного сдвига зон, как и ожидалось, приводит к подавлению сверхпроводимости. В случае произвольных параметров уравнение (3.3) может быть решено численно, типичное поведение  $T_c$  как функции  $\chi$  и  $t$  представлено на Рис. 3.1(a).

В случае спин-триплетного параметра порядка, например,  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \Delta_{\text{int}} \hat{\sigma}_x (i \hat{\sigma}_y)$ , имеем  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \hat{\Delta}_{\text{int}}^T$  и решение имеет другой вид:

$$f_{12}^x = \Delta_{\text{int}} \text{sgn}(\omega_n) \frac{\chi + i\omega_n}{\omega_n^2 + \chi^2 + t^2}. \quad (3.5)$$

Соответствующее уравнение на критическую температуру

$$\ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left[ \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + \chi^2 + t^2} - \frac{1}{\omega_n} \right]. \quad (3.6)$$

Аналитическое разложение в окрестности  $T_{c0}$  в спин-триплетном случае можно найти схожим образом

$$\frac{T_c(\chi, t) - T_{c0}}{T_{c0}} = b_1 \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 + b_2 \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^4 + b_3 \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^6 + \dots, \quad (3.7a)$$

$$b_1 = \frac{1}{2} \psi_2 \left( \frac{1}{2} \right), \quad b_2 = \frac{b_1^2}{2} - b_1 \psi_2 \left( \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4!} \psi_4 \left( \frac{1}{2} \right), \quad (3.7b)$$

$$b_3 = -\frac{b_1^3}{3} + b_1 b_2 + \frac{(3b_1^2 - 2b_2)}{2} \psi_2 \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{b_1}{3!} \psi_4 \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6!} \psi_6 \left( \frac{1}{2} \right). \quad (3.7c)$$

Результаты численного решения уравнения (3.6) приведены на Рис. 3.1(b).

Полученные фазовые диаграммы демонстрируют, что независимо от спиновой структуры сверхпроводящего параметра порядка, относительный сдвиг зон  $\chi$  подавляет межслоевую сверхпроводимость. Туннелирование между слоями восстанавливает сверхпроводимость при больших сдвигах зон в синглетном случае и дополнительно подавляет триплетные межслоевые корреляции из-за принципа Паули, который препятствует образованию внутрислоевых триплетных куперовских пар (с  $s$ -волновой структурой параметра порядка в плоскости слоёв). В силу упомянутой выше аналогии между нашей задачей и задачей сверхпроводника в Зеемановском поле, при  $t = 0$  реализуется неоднородное состояние (фаза ЛОФФ [16, 17, 18]). Вопрос о роде фазового перехода при  $t \neq 0$  требует дополнительного исследования нелинейной задачи.

## 3.2 Межслоевая сверхпроводимость в присутствии изолированной сегнетоэлектрической доменной стенки

В данном разделе мы обсуждаем влияние сегнетоэлектрической доменной стенки на зарождение сверхпроводимости. Вблизи критической области сверхпроводящая длина когерентности

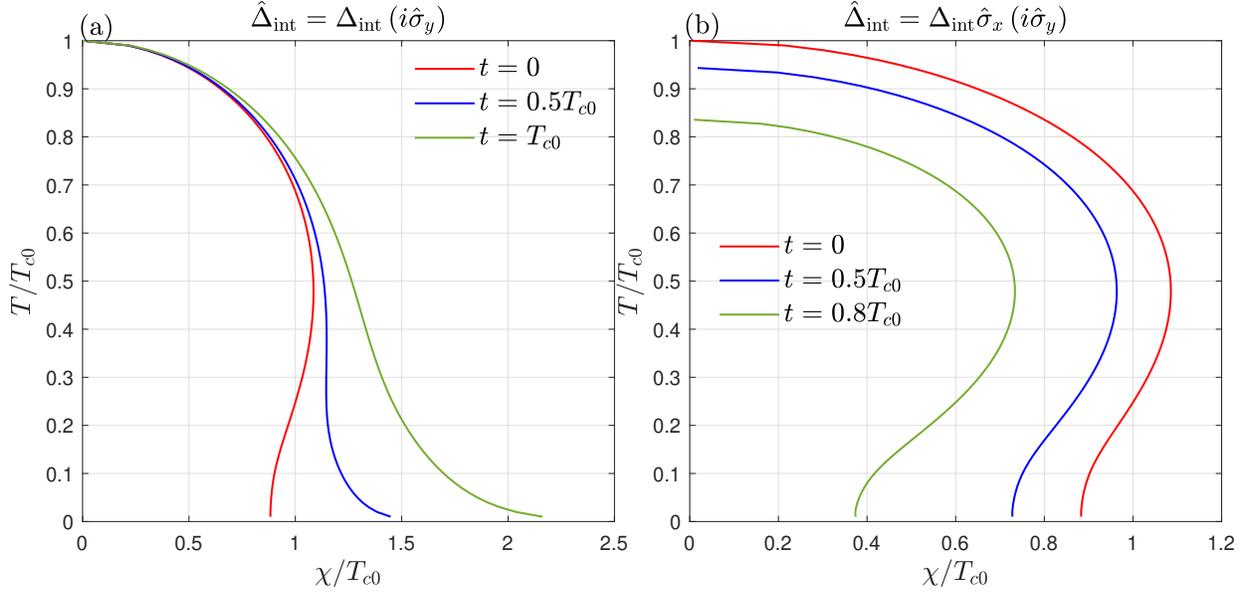


Рис. 3.1: Типичные зависимости критической температуры образования однородных межслоевых сверхпроводящих состояний  $T_c$  для спин-синглетного (а) и спин-триплетного спаривания (b) от относительного сдвига зон  $U_1 - U_2 = -2\chi$  при различных амплитудах туннелирования  $t$ .

расходится, поэтому мы предполагаем стенку тонкой и учитываем её через сдвиг зон, имеющий профиль ступеньки  $U_{12}(\mathbf{r}) = -2\chi \text{sgn}(x)$ , где  $x$  есть координата в направлении, перпендикулярном стенке. Соответствующие линейризованные уравнения Эйленберга записываются в виде

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n - 2\chi \text{sgn}(x)] \hat{f}_{12} - t (\hat{f}_{22} - \hat{f}_{11}) + 2\hat{\Delta}_{\text{int}}(\mathbf{r}) \text{sgn}(\omega_n) = 0, \quad (3.8a)$$

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n + 2\chi \text{sgn}(x)] \hat{f}_{21} + t (\hat{f}_{22} - \hat{f}_{11}) - 2\hat{\Delta}_{\text{int}}^T(\mathbf{r}) \text{sgn}(\omega_n) = 0, \quad (3.8b)$$

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n] \hat{f}_{11} + t (\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) = 0, \quad (3.8c)$$

$$[i\mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} + 2i\omega_n] \hat{f}_{22} - t (\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) = 0. \quad (3.8d)$$

Снова заметим, что решение этих уравнений зависит от спиновой структуры куперовских пар. Для удобства, мы выделяем обсуждение синглетного и триплетного случая в два отдельных подраздела.

### 3.2.1 Спин-синглетный случай

Используя симметрию спиновой части сверхпроводящего параметра порядка  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = -\hat{\Delta}_{\text{int}}^T$ , мы избавляемся от спиновой структуры в уравнениях (3.8). Для координатной части будем

искать решение в виде

$$\Delta_{\text{int}}(\mathbf{r}) = \Delta_{\text{int}}(x)e^{iq_y y}, \quad (3.9)$$

где  $q_y$  описывает возможные модуляции сверхпроводящей щели вдоль доменной стенки (фаза ЛОФФ [16, 17, 18]). Далее мы представляем результаты для случая  $q_y = 0$  и обсуждаем возможность продольных модуляций в конце подраздела. Введём угол  $\varphi$  между траекторией квазичастицы и осью  $x$ , после чего перепишем уравнения Эйленберга ( $v = v_F \cos \varphi$ )

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n \right] f_{11} + t(f_{12} - f_{21}) = 0, \quad (3.10a)$$

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n \right] f_{22} - t(f_{12} - f_{21}) = 0, \quad (3.10b)$$

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n - 2\chi \text{sgn}(x) \right] f_{12} - t(f_{22} - f_{11}) + 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) = 0, \quad (3.10c)$$

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n + 2\chi \text{sgn}(x) \right] f_{21} + t(f_{22} - f_{11}) + 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) = 0. \quad (3.10d)$$

Чтобы вывести уравнение на критическую температуру перехода в локализованное сверхпроводящее состояние, мы записываем решение данных уравнений в областях  $x > 0$  и  $x < 0$ , а затем непрерывно сшиваем их при  $x = 0$ . Найденное решение необходимо подставить в уравнение самосогласования (2.12). Выполняя эти вычисления, детали которых представлены в Приложении В, мы получаем следующую форму уравнения самосогласования, написанного на преобразование Фурье параметра порядка  $\Delta_{\text{int}}(k)$

$$\Delta_{\text{int}}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} K(k, k') \Delta_{\text{int}}(k'), \quad (3.11a)$$

$$K(k, k') = K_{\text{h}}(k)\delta(k - k') + K_{\text{inh}}(k, k'), \quad (3.11b)$$

$$K_{\text{h}}(k) = \pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \text{Re} \left\{ \frac{4t^2\omega_n}{q^2(\omega_n^2 + k^2v^2/4)} + \frac{4\chi^2(\omega_n - iq)}{q^2((\omega_n - iq)^2 + k^2v^2/4)} \right\}, \quad (3.11c)$$

$$K_{\text{inh}}(k, k') = \pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \text{Re} \left\{ v \frac{\chi^4}{q^4} \frac{4q^2}{(q^2 + (\omega_n - ik'v/2)^2)(q^2 + (\omega_n - ikv/2)^2)} + \right. \\ \left. + v \frac{4t^2\chi^2}{q^4} \frac{(q^2 + 2(\omega_n - ik'v/2)(\omega_n - ikv/2))(q^2 - (\omega_n - ik'v/2)(\omega_n - ikv/2))}{(q^2 + (\omega_n - ik'v/2)^2)(q^2 + (\omega_n - ikv/2)^2)(\omega_n - ik'v/2)(\omega_n - ikv/2)} \right\}. \quad (3.11d)$$

Для решения полученного уравнения самосогласования воспользуемся подходом, аналогичным использованному в [14]. Так как нас интересует критическая температура образования локализованного состояния  $T_{cw}(\chi, t)$ , то в однородной части ядра можно произвести разложение до второго порядка по импульсу  $k$ , получив тем самым линейаризованное уравнение Гинзбурга–Ландау в однородном случае, в котором оставшаяся неоднородная часть ядра

играет роль эффективного потенциала. Вблизи  $T_{c0}$  можно воспользоваться разделением пространственных масштабов: параметр порядка меняется на масштабах температурной длины когерентности  $\xi(T) \propto \sqrt{T_{c0}/(T_{c0} - T)} \rightarrow +\infty$  при  $T \rightarrow T_{c0}$ , характерным масштабом неоднородной части ядра в координатном пространстве является  $l \sim \hbar v_F/T_{c0} = \xi_0$  (наиболее явно это можно увидеть из выражений, приведённых в Приложении В). Такое различие пространственных масштабов позволяет положить  $k = k' = 0$  в неоднородной части ядра уравнения самосогласования, что равносильно замене эффективного потенциала в уравнении Гинзбурга – Ландау дельта-функцией с соответствующей нормировкой. С учётом вышесказанного, вблизи  $T_{c0}$  уравнение, определяющее критическую температуру образования локализованного состояния  $T_{cw}(\chi, t)$ , можно записать в виде

$$\frac{k^2}{2M} \Delta_{\text{int}}(k) - \frac{q^2}{4\pi T} \alpha \int \Delta_{\text{int}}(k') \frac{dk'}{2\pi} = E \Delta_{\text{int}}(k). \quad (3.12)$$

Коэффициенты  $M$ ,  $\alpha$ , и  $E$  выражаются следующим образом (детали их вывода содержатся в Приложении С)

$$\frac{1}{2M} = -\frac{v_F^2}{16} \left( \frac{\chi^2}{16\pi^3 T^3} \text{Re} \left[ \psi'' \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] - \frac{7\zeta(3)t^2}{8\pi^3 T^3} \right), \quad (3.13a)$$

$$E = -\frac{q^2}{4\pi T} \ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) + \frac{\chi^2}{4\pi T} \text{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right], \quad (3.13b)$$

$$\alpha = -\frac{v_F \chi^2}{4T T^2} \frac{\left[ \left( \frac{q}{T} \right)^3 + \left( \frac{q}{T} \right) \left( \frac{t}{T} \right)^2 (2 + \cosh \left( \frac{q}{T} \right)) - \left( \left( \frac{q}{T} \right)^2 + 3 \left( \frac{t}{T} \right)^2 \right) \sinh \left( \frac{q}{T} \right) \right]}{\left( \frac{q}{T} \right)^5 \cosh^2 \left( \frac{q}{2T} \right)}. \quad (3.13c)$$

При  $\chi/T_{c0}, t/T_{c0} \ll 1$  коэффициенты  $M$  и  $\alpha$  положительны, а значит уравнение (3.12) имеет вид уравнения Шрёдингера для движения частицы с массой  $M$  в поле одиночной дельта-ямы. Решение данной задачи известно, что позволяет переписать уравнение на  $T_{cw}(\chi, t)$  в следующей форме

$$E(T_{cw}) = -\frac{Mq^4 [\alpha(T_{cw})]^2}{32\pi^2 T_{cw}^2}. \quad (3.14)$$

Раскладывая его по малым параметрам  $\chi/T_{c0}, t/T_{c0}, q/T_{c0} \ll 1$ , можно найти отличие критической температуры образования локализованного зародыша  $T_{cw}(\chi, t)$  от критической температуры перехода в однородное сверхпроводящее состояние  $T_c(\chi, t)$  (последняя определяется уравнением (3.4a)). Опуская подробные вычисления, которые можно найти в Приложении С, приведём окончательный результат

$$\frac{T_{cw}(\chi, t) - T_c(\chi, t)}{T_{c0}} \approx \left( 0.016 - 0.01 \left( \frac{t}{T_{c0}} \right)^2 \right) \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 + 0.02 \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^6. \quad (3.15)$$

Данное уравнение является главным аналитическим результатом этого подраздела. Полученное разложение явно демонстрирует, что сверхпроводящие состояния, локализованные на

сегнетоэлектрической доменной стенке, могут иметь бóльшую критическую температуру, чем однородные состояния. Более того, увеличение амплитуды туннелирования между слоями  $t$  препятствует образованию локализованных состояний. Для полноты анализа приведём также выражение, определяющее пространственный профиль сверхпроводящей щели вблизи  $T_{cw}$

$$\Delta(x) \sim \exp\left(-\sqrt{\frac{32\pi^2}{7\zeta(3)\xi_0^2} \cdot \frac{T_{c0} - T}{T_{c0}}} |x|\right). \quad (3.16)$$

Отметим, что полученная зависимость согласуется с нашим предположением о разделении пространственных масштабов неоднородной части ядра и параметра порядка.

Уравнение самосогласования (3.11a) допускает численное решение, для этого исключим из него безразмерную константу связи  $\lambda$ , переписав его в виде

$$\Delta_{\text{int}}(k) \ln\left(\frac{T}{T_{c0}}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk' \tilde{K}(k, k') \Delta_{\text{int}}(k'), \quad (3.17)$$

где  $\tilde{K}(k, k') = K(k, k')/2\pi\lambda - 2\pi\delta(k - k')T \sum_{\omega_n > 0} 1/\omega_n$ . Полученное уравнение можно дискретизовать на сетке в импульсном пространстве, превратив в задачу на собственные значения. Тогда критическая температура перехода определяется условием обращения в нуль детерминанта следующей линейной системы

$$\sum_m \left[ \tilde{K}_{n,m} - \delta_{n,m} \ln\left(\frac{T}{T_{c0}}\right) \right] \Delta_{\text{int}}(k_m) = 0. \quad (3.18)$$

Результаты точного численного решения уравнения (3.17), численного решения уравнения (3.14) с использованием приближения ядра дельта-функцией, а также критические кривые перехода в однородное сверхпроводящее состояние приведены на Рис. 3.2.

Анализируя полученные графики можно заключить, что за счёт образования состояния, локализованного на доменной стенке, возможно существенное повышение критической температуры сверхпроводящего перехода, в особенности при больших значениях сдвига зон  $\chi$ . Увеличение амплитуды туннелирования, действительно, подавляет относительное повышение критической температуры, однако, вплоть до  $t \sim 2T_{c0}$  (момент, когда чёрная и красная кривые становятся едва различимы) остаются области, отвечающие  $T_{cw}(\chi, t) - T_c(\chi, t) > 0$ . Другим интересным наблюдением является то, что приближение неоднородной части ядра дельта-функцией оказывается справедливым в довольно широком диапазоне параметров.

Весь предыдущий анализ был посвящён случаю отсутствия модуляций параметра порядка в направлении, параллельном доменной стенке. Вообще говоря, необходимо решить задачу при произвольном  $q_y = 0$  и затем выбрать  $q_y^*$ , соответствующий максимальной критической температуре  $T_{cw}(\chi, t)$ , но можно воспользоваться аналогией с задачей о сверхпроводнике в присутствии Зеемановского поля (которая, напомним, является точной в пределе  $t \rightarrow 0$ ) и из

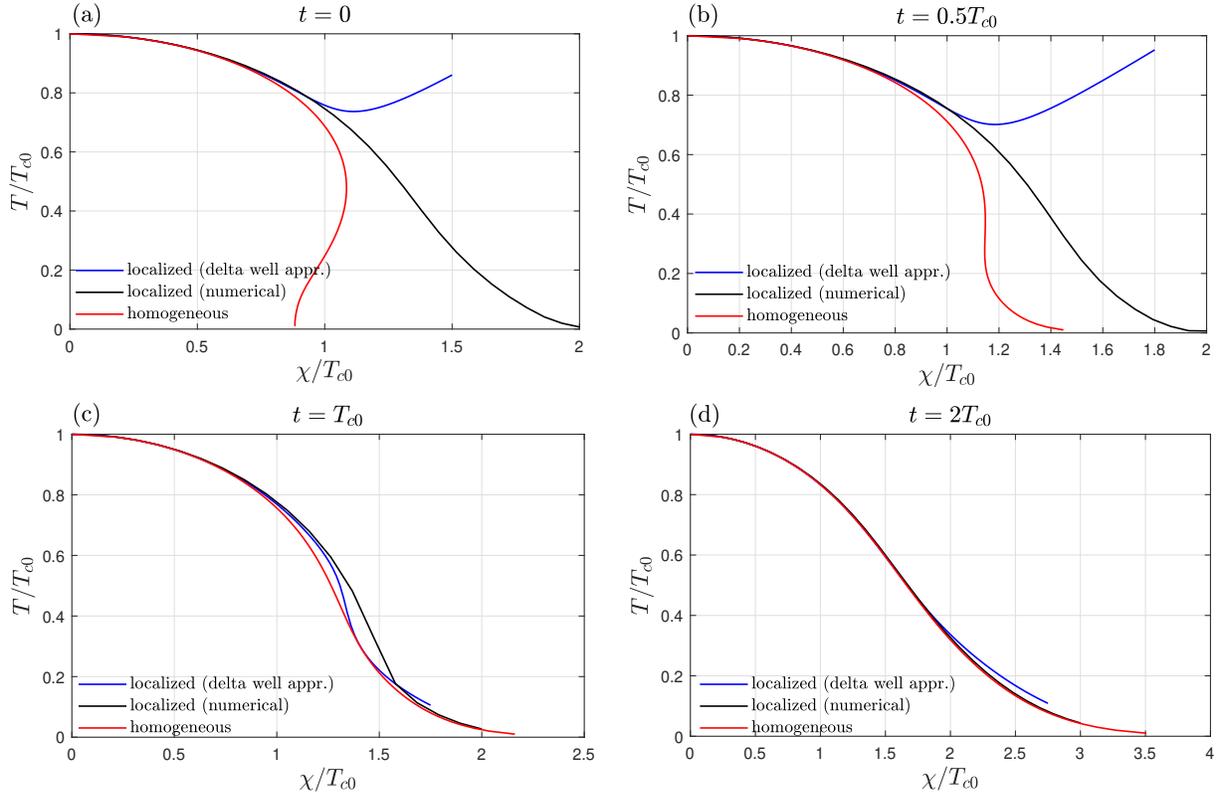


Рис. 3.2: Фазовые диаграммы при различных амплитудах туннелирования в случае спин-синглетного параметра порядка. Синие кривые соответствуют дельта-функциональному приближению и получены численным решением уравнения (3.14), чёрные кривые – точное численное решение уравнения (3.17). Красные кривые отвечают переходу в однородное сверхпроводящее состояние. Панели (a), (b), (c) и (d) отвечают  $t = 0$ ,  $t = 0.5T_{c0}$ ,  $t = T_{c0}$  и  $t = 2T_{c0}$ , соответственно.

вида чёрной кривой при  $t = 0$  предположить, что продольных модуляций параметра порядка не возникает. Чтобы учесть конечный продольный импульс  $q_y$ , необходимо произвести замену  $kv_x, k'v_x \rightarrow kv_x + q_y v_y, k'v_x + q_y v_y$  в ядре  $K(k, k')$  уравнения самосогласования (3.11a). Численным решением уравнения самосогласования с учётом конечного импульса, мы убедились, что максимальному значению  $T_{cw}$  соответствует  $q_y = 0$ . Примечательно, что в случае трёхмерной задачи при  $T = 0$  реализуется модулированное состояние [13].

### 3.2.2 Спин-триплетный случай

Перейдём к рассмотрению случая триплетной спиновой структуры межслоевого параметра порядка, удовлетворяющей соотношению  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \hat{\Delta}_{\text{int}}^T$ . Так как при решении используются те же методы, что и в прошлом подразделе, мы не будем повторно останавливаться на подробном их описании, приведя основные полученные результаты. Решение линейризованных уравнений Эйленбергера ( $v = v_F \cos \varphi$ )

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n \right] f_{11} + t(f_{12} - f_{21}) = 0, \quad (3.19a)$$

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n \right] f_{22} - t(f_{12} - f_{21}) = 0, \quad (3.19b)$$

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n - 2\chi \text{sgn}(x) \right] f_{12} - t(f_{22} - f_{11}) + 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) = 0, \quad (3.19c)$$

$$\left[ iv \frac{d}{dx} + 2i\omega_n + 2\chi \text{sgn}(x) \right] f_{21} + t(f_{22} - f_{11}) - 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) = 0. \quad (3.19d)$$

приводит к следующему интегральному ядру в уравнении самосогласования на преобразование Фурье параметра порядка (подробный вывод содержится в Приложении D)  $\Delta_{\text{int}}(k)$

$$\Delta_{\text{int}}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} K(k, k') \Delta_{\text{int}}(k'), \quad (3.20a)$$

$$K(k, k') = K_{\text{h}}(k)\delta(k - k') + K_{\text{inh}}(k, k'), \quad (3.20b)$$

$$K_{\text{h}}(k) = 4\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \text{Re} \left\{ \frac{(\omega_n - iq)}{((\omega_n - iq)^2 + k^2 v^2 / 4)} \right\}, \quad (3.20c)$$

$$K_{\text{inh}}(k, k') = \pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} v \frac{\chi^2}{q^2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} + \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right] \right\}. \quad (3.20d)$$

Можно заметить, что в предельном случае  $t = 0$  ядра в уравнении самосогласования в синглетном и триплетном случаях совпадают.

Разложение однородной части ядра вблизи  $T_{c0}$ , а также приближение неоднородной части ядра его значением в точке  $k = k' = 0$  вновь позволяет переписать уравнение самосогласования (3.20a) в виде

$$\frac{k^2}{2M} \Delta_{\text{int}}(k) - \frac{\beta}{4\pi T} \int \Delta_{\text{int}}(k') \frac{dk'}{2\pi} = E \Delta_{\text{int}}(k), \quad (3.21)$$

где коэффициенты определяются выражениями (подробности см. в Приложении E)

$$\frac{1}{2M} = -\frac{v_F^2}{16} \cdot \frac{1}{16\pi^3 T^3} \text{Re} \left[ \psi'' \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right], \quad (3.22a)$$

$$E = -\frac{1}{4\pi T} \ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) + \frac{1}{4\pi T} \text{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right], \quad (3.22b)$$

$$\beta = \frac{v_F}{4T} \frac{\left( \frac{\chi}{T} \right)^2 \left( \sinh \left( \frac{q}{T} \right) - \frac{q}{T} \right)}{\left( \frac{q}{T} \right)^3 \cosh^2 \left( \frac{q}{2T} \right)}. \quad (3.22c)$$

При малых  $\chi/T_{c0}$ ,  $t/T_{c0} \ll 1$  коэффициенты  $M$  и  $\beta$  положительны, откуда получаем уравнение на критическую температуру образования локализованного состояния

$$E(T_{cw}) = -\frac{M [\beta(T_{cw})]^2}{32\pi^2 T_{cw}^2}. \quad (3.23)$$

Раскладывая его по малым параметрам  $\chi/T_{c0}$ ,  $t/T_{c0}$ ,  $q/T_{c0} \ll 1$ , находим разложение для разницы между критической температурой образования локализованного зародыша  $T_{cw}(\chi, t)$  и критической температурой перехода в однородное сверхпроводящее состояние  $T_c(\chi, t)$  в триплетном случае

$$\frac{T_{cw}(\chi, t) - T_c(\chi, t)}{T_{c0}} \approx \left( 0.016 + 0.02 \left( \frac{t}{T_{c0}} \right)^2 \right) \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 + 0.02 \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^6. \quad (3.24)$$

В пределе  $t = 0$ , коэффициенты при  $(\chi/T_{c0})^4$  и  $(\chi/T_{c0})^6$  в уравнениях (3.15) и (3.24) совпадают, что находится в согласии с равенством ядер для синглетного и триплетного случаев в соответствующем пределе. Однако, теперь с увеличением амплитуды туннелирования не происходит подавления локализованных состояний. О том же свидетельствуют результаты численного решения уравнения самосогласования (3.20a), приведённые на Рис. 3.3.

Из полученных графиков можно увидеть, что с повышением амплитуды туннелирования, локализованные состояния становятся более энергетически выгодными в области низких температур. Отметим также, что так как при  $t = 0$  критические кривые, соответствующие образованию локализованного состояния в случае синглетной и триплетной спиновой структуры совпадают, то и в триплетном случае мы ожидаем отсутствия продольных модуляций сверхпроводящей щели при низких температурах.

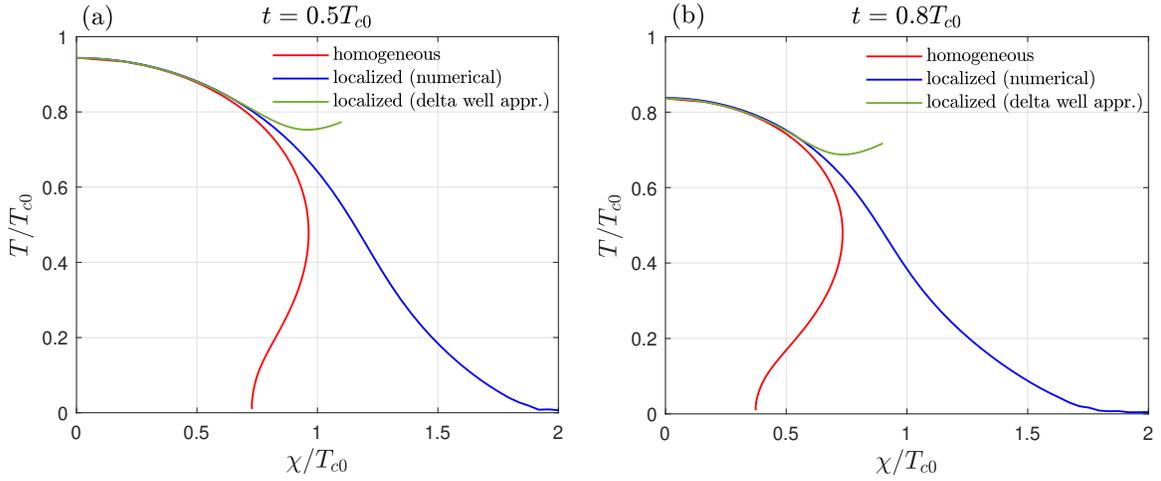


Рис. 3.3: Фазовые диаграммы при различных амплитудах туннелирования в случае спин-триплетного параметра порядка. Зелёные кривые соответствуют дельта-функциональному приближению и получены численным решением уравнения (3.23), синие кривые – точное численное решение уравнения (3.20a). Красные кривые отвечают переходу в однородное сверхпроводящее состояние. Панели (a), (b) отвечают  $t = 0.5T_{c0}$  и  $t = 0.8T_{c0}$ , соответственно.

# Глава 4

## Влияние магнитного поля

Данная глава посвящена исследованию подавления межслоевой сверхпроводимости внешним магнитным полем, ориентированным в плоскости слоёв. Относительный сдвиг зон при этом предполагается однородным  $U_{12}(\mathbf{r}) = -2\chi$ . Выберем калибровку вектор-потенциала  $\mathbf{A}$  так, чтобы он был перпендикулярен магнитному полю  $\mathbf{H}$  и зависел только от координаты  $z$ , перпендикулярной слоям. Тогда магнитное поле и соответствующие вектор-потенциалы внутри каждого слоя можно параметризовать следующим образом

$$\mathbf{H} = H \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = -\mathbf{A}_2 = \frac{Hd}{2} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где  $d$  – расстояние между слоями. Линеаризованные уравнения Эйленбергера, учитывающие как орбитальный, так и парамагнитный эффект магнитного поля имеют вид

$$2i\omega_n \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} \\ \hat{f}_{21} & \hat{f}_{22} \end{pmatrix} - \frac{2e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}_1) \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & 0 \\ 0 & -\hat{f}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t(\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) & t^*\hat{f}_{11} - t\hat{f}_{22} \\ -t^*\hat{f}_{11} + t\hat{f}_{22} & t^*(\hat{f}_{21} - \hat{f}_{12}) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$-2\chi \begin{pmatrix} 0 & \hat{f}_{12} \\ -\hat{f}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{f}_{11}\mathbf{h}\hat{\sigma}^* - \mathbf{h}\hat{\sigma}\hat{f}_{11} & \hat{f}_{12}\mathbf{h}\hat{\sigma}^* - \mathbf{h}\hat{\sigma}\hat{f}_{12} \\ \hat{f}_{21}\mathbf{h}\hat{\sigma}^* - \mathbf{h}\hat{\sigma}\hat{f}_{21} & \hat{f}_{22}\mathbf{h}\hat{\sigma}^* - \mathbf{h}\hat{\sigma}\hat{f}_{22} \end{pmatrix} + 2\text{sgn}(\omega_n) \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Delta}_{\text{int}} \\ -\hat{\Delta}_{\text{int}}^T & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

В следующих разделах мы обсудим сначала отдельно орбитальный и парамагнитный механизмы разрушения сверхпроводимости, а затем рассмотрим их совместное влияние.

### 4.1 Орбитальный механизм

В отсутствие Зеемановского поля  $\mathbf{h}$  можно избавиться от спиновой структуры, воспользовавшись симметрией параметра порядка в синглетном и триплетном случае. Рассматривая оставшуюся систему, как систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами, нетрудно

найти её решение, отвечающее синглетной и триплетной спиновой структуре, соответственно

$$f_{12}^0 = \Delta_{\text{int}} \text{sgn} \omega_n \frac{[(e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2 + \omega_n^2] [\chi + i\omega_n] + i|t|^2 \omega_n}{[(e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2 + \omega_n^2] [\chi^2 + \omega_n^2] + |t|^2 \omega_n^2} \quad (4.3a)$$

$$f_{12}^x = \Delta_{\text{int}} \text{sgn} \omega_n \frac{[(e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2 + \omega_n^2] [\chi + i\omega_n]}{[(e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2 + \omega_n^2] [\chi^2 + \omega_n^2] + |t|^2 \omega_n^2}. \quad (4.3b)$$

Подставляя полученные выражения в уравнение самосогласования, мы получаем уравнения, определяющие критическую температуру перехода в присутствии магнитного поля

$$\ln \left( \frac{T_{c0}}{T} \right) = 2\pi T \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{\omega_n > 0} \frac{\chi^2 (\omega_n^2 + (e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2)}{\omega_n [(\omega_n^2 + (e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2) (\chi^2 + \omega_n^2) + |t|^2 \omega_n^2]}, \quad (4.4a)$$

$$\ln \left( \frac{T_{c0}}{T} \right) = 2\pi T \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{\omega_n > 0} \frac{\chi^2 (\omega_n^2 + (e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2) + |t|^2 \omega_n^2}{\omega_n [(\omega_n^2 + (e(\mathbf{v}\mathbf{A}_1)/c)^2) (\chi^2 + \omega_n^2) + |t|^2 \omega_n^2]}. \quad (4.4b)$$

Можно заметить, что в приближении изотропного спектра квазичастиц орбитальный эффект магнитного поля изотропен, а также, что в обоих случаях внешнее магнитное поле приводит к подавлению туннелирования между слоями. Это понятно на качественном уровне: отличный от нуля вектор-потенциал раздвигает зоны электронов из разных слоёв в импульсном пространстве, что препятствует туннелированию, сохраняющему импульс. Важным следствием этого является то, что в триплетном случае это приводит к эффекту восстановления сверхпроводимости магнитным полем. В синглетном же случае, с учётом критических кривых на Рис. 3.1(a), можно ожидать, что при  $\chi < 1.086T_{c0}$  (это значение отвечает точке перегиба на красной кривой) верхнее критическое поле  $H_{c2}$  в отсутствие парамагнитного эффекта обращается в бесконечность. Другим важным наблюдением является, то, что в обоих случаях при  $t = 0$  вектор-потенциал выпадает из уравнений и орбитальный эффект вовсе отсутствует.

Проиллюстрируем упомянутые эффекты, получив кривые фазового перехода в сверхпроводящее состояние  $T_c(H, \chi, t)$  с помощью численного решения уравнений (4.4a) и (4.4b). Результаты численного счёта, приведённые на Рис. 4.1 подтверждают выводы, сделанные нами на основе аналитических выражений. Отметим также, что, хотя на Рис. 4.1(b) указана конкретная спиновая структура  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \Delta_{\text{int}} \hat{\sigma}_x (i\hat{\sigma}_y)$ , полученные кривые фазового перехода от неё не зависят и являются общими для произвольного триплетного параметра порядка.

## 4.2 Парамагнитный механизм

В данном разделе мы полагаем  $\mathbf{A}_1 = 0$  в уравнениях (4.2), а Зеемановское поле  $\mathbf{h}$  считаем лежащим в плоскости слоёв ( $h_z = 0$ ). Для решения уравнений удобно сделать замену  $\hat{f}_{ij} =$

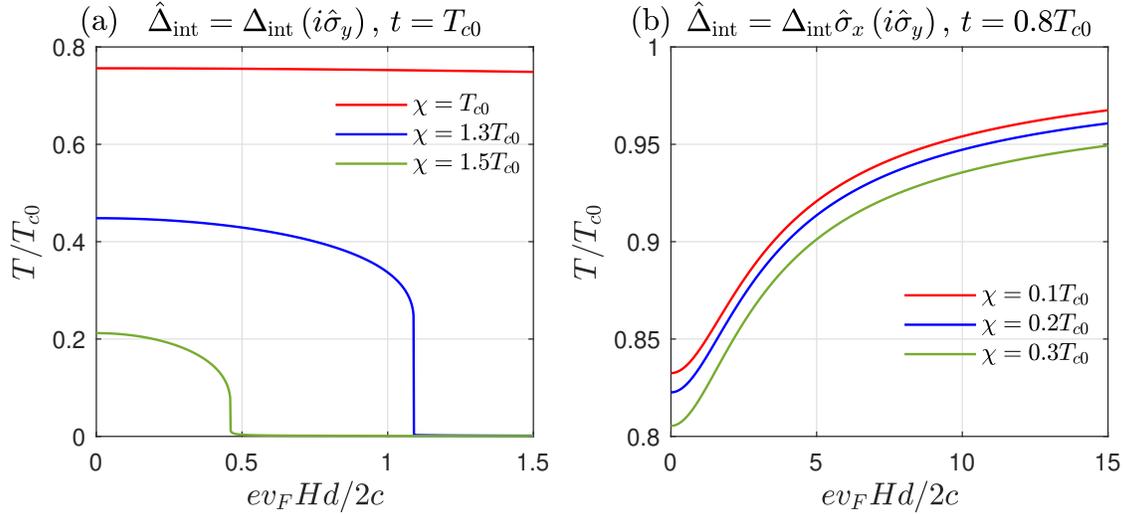


Рис. 4.1: Фазовые диаграммы во внешнем магнитном поле, параллельном слоям. Панель (а) соответствует синглетным межслоевым куперовским парам, а также амплитуде туннелирования  $t = T_{c0}$ . Панель (b) соответствует триплетным парам и  $t = 0.8T_{c0}$ .

$\hat{f}_{ij}(i\hat{\sigma}_y)$ ,  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \hat{\hat{\Delta}}_{\text{int}}(i\hat{\sigma}_y)$ , при этом, чтобы не перегружать обозначения, далее в формулах тильды будем опускать. Уравнения Эйленбергера (4.2) после такой замены примут вид

$$\begin{aligned}
& 2i\omega_n \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & \hat{f}_{12} \\ \hat{f}_{21} & \hat{f}_{22} \end{pmatrix} - 2\chi \begin{pmatrix} 0 & \hat{f}_{12} \\ -\hat{f}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t(\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) & t^*\hat{f}_{11} - t\hat{f}_{22} \\ -t^*\hat{f}_{11} + t\hat{f}_{22} & t^*(\hat{f}_{21} - \hat{f}_{12}) \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} \left\{ \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{11} \right\} & \left\{ \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{12} \right\} \\ \left\{ \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{21} \right\} & \left\{ \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{22} \right\} \end{pmatrix} = -2\text{sgn}(\omega_n) \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Delta}_{\text{int}} \\ -(i\hat{\sigma}_y)\hat{\Delta}_{\text{int}}^T(i\hat{\sigma}_y) & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

где  $\{\dots, \dots\}$  обозначает антикоммутатор. В следующих двух подразделах мы обсудим влияние парамагнитного эффекта магнитного поля как на синглетные, так и на триплетные межслоевые сверхпроводящие корреляции.

#### 4.2.1 Спин-синглетный случай

В синглетном случае (с учётом сделанных выше переобозначений)  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \Delta_{\text{int}}$ . Решение системы (4.5) будем искать в виде разложения по матрицам Паули

$$\hat{f}_{ij} = f_{ij}^0 + (\mathbf{h}\hat{\sigma}) f_{ij}^1. \tag{4.6}$$

Решение для аномального среднего  $f_{12}^0$ , входящего в уравнение самосогласования, имеет вид

$$f_{12}^0(\omega_n > 0) + f_{12}^0(-\omega_n) = 2i\omega_n \Delta_{\text{int}} \cdot \frac{P_0}{Q_0}, \tag{4.7a}$$

$$P_0 = |t|^4 + |t|^2 (2\omega_n^2 - 2h^2 + \chi^2) + (h^2 + \omega_n^2)(h^2 + \omega_n^2 + \chi^2), \tag{4.7b}$$

$$Q_0 = (h^2 + \omega_n^2) \left[ h^4 + 2h^2(\omega_n^2 - \chi^2) + (\omega_n^2 + \chi^2)^2 + |t|^4 + |t|^2(\omega_n^2 - h^2 + \chi^2) \right]. \tag{4.7c}$$

В полученные выражения входит только  $h^2$ , а значит в синглетном случае парамагнитный эффект изотропен. Подставим полученное выражение в уравнение самосогласования

$$\Delta_{\text{int}} = -i\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} (f_{12}^0(\omega_n > 0) + f_{12}^0(-\omega_n)) \quad (4.8)$$

и решим его численно. Результаты представлены на Рис. 4.2.

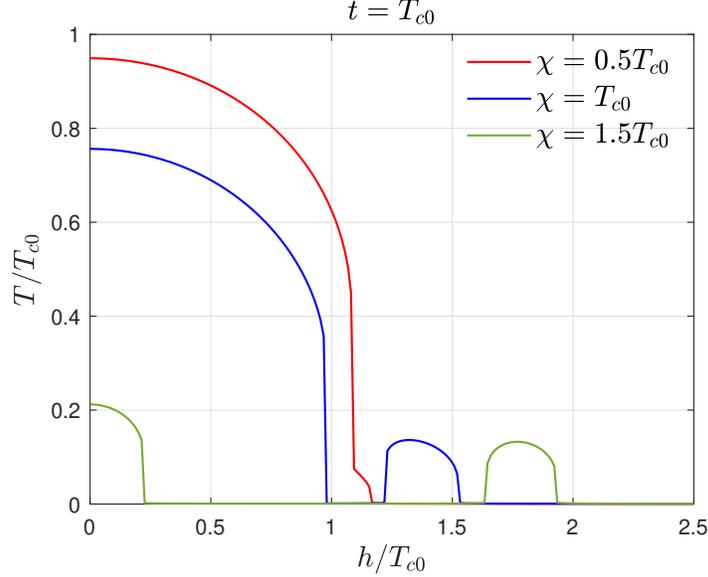


Рис. 4.2: Типичные зависимости  $T_c(h, \chi, t)$  при  $t = T_{c0}$  и различных  $\chi/T_{c0}$

Из полученных графиков видим, что увеличение магнитного поля сначала приводит к подавлению сверхпроводимости (парамагнитный предел Чандрасекара - Клогстона [18, 19, 20]), однако, дальнейшее увеличение поля приводит к появлению возвратной сверхпроводимости. Механизм её возникновения заключается в том, что относительный сдвиг зон квазичастиц компенсируется Зеемановской энергией. Схема спектров в случае  $t = 0$  приведена на Рис. 4.3. Изменение амплитуды туннелирования  $t$ , а также сдвига зон  $\chi$  влияют как на положение и форму пика возвратной фазы, так и на поле парамагнитного предела. Более подробное обсуждение можно найти в работах [21, 22], где подобная возвратная фаза была предсказана и исследована.

### 4.2.2 Спин-триплетный случай

В наиболее общем случае триплетного спаривания (с учётом переобозначений, сделанных в начале раздела)  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \Delta_{\text{int}}(\mathbf{d}\hat{\sigma})$ . Мы же рассмотрим случаи, когда вектор  $\mathbf{d}$  либо перпендикулярен плоскости слоёв, либо направлен параллельно ей.

Наиболее простым оказывается первый случай. Если от нуля отлична только компонента  $d_z$ , то в рассматриваемом нами случае  $h_z = 0$  слагаемое с  $\mathbf{h}$  выпадет из уравнений (4.5). Это

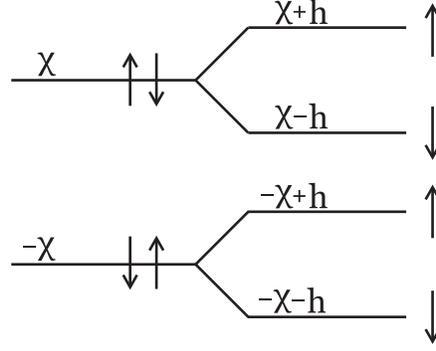


Рис. 4.3: Спектр электронов в разных слоях при  $t = 0$ . При спаривании электронов из разных слоёв с противоположными спинами, в поле  $h = \chi$  происходит компенсация сдвига зон за счёт Зеемановского расщепления.

соответствует тому, что спин таких куперовских пар лежит в плоскости слоёв, а значит наличие параллельного Зеемановского поля приведёт лишь к их подмагничиванию (ориентации по полю), не влияя на сверхпроводимость.

В случае, когда вектор  $\mathbf{d}$  параллелен слоям, будем считать, что его направление фиксировано в предположении наличия в структуре спин-орбитальных эффектов. Для определённости рассмотрим случай, когда от нуля отлична только компонента  $d_x$ . Решение уравнений (4.5) будем искать в виде

$$\hat{f}_{ij} = f_{ij}^0 + f_{ij}^x \hat{\sigma}_x + f_{ij}^y \hat{\sigma}_y, \quad (4.9)$$

что позволяет получить выражение для интересующего нас аномального среднего  $f_{12}^x$

$$f_{12}^x(\omega_n > 0) + f_{12}^x(-\omega_n) = 2i\omega_n \Delta_{\text{int}} \cdot \frac{P_x}{Q_x}, \quad (4.10a)$$

$$P_x = (h_y^2 + \omega_n^2)(h^2 + \omega_n^2) + (\chi^2 + |t|^2)(h_x^2 - 2h_y^2 + 2\omega_n^2) + (\chi^2 + |t|^2)^2, \quad (4.10b)$$

$$Q_x = (\omega_n^2 + \chi^2 + |t|^2) \left( (h^2 + \omega_n^2)^2 + 2(\chi^2 + |t|^2)(\omega_n^2 - h^2) + (\chi^2 + |t|^2)^2 \right), \quad (4.10c)$$

где  $h^2 = h_x^2 + h_y^2$ . Видим, что в отличие от синглетного случая, полученное выражение содержит  $h_x$  и  $h_y$ , что приводит к анизотропии критического магнитного поля. Чтобы убедиться в этом, решим уравнение самосогласования

$$\Delta_{\text{int}} = -i\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} (f_{12}^x(\omega_n > 0) + f_{12}^x(-\omega_n)) \quad (4.11)$$

численно. Типичные зависимости критической температуры  $T_c$  от угла  $\theta$  между направлениями вектора  $\mathbf{d}$  и вектора  $\mathbf{h}$  представлена на Рис. 4.4. В случае, когда поле  $\mathbf{h}$  параллельно вектору  $\mathbf{d}$ , оно приводит к наиболее сильному подавлению сверхпроводимости, в то время, как при  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  Зеемановское поле выпадает из уравнений и не влияет на сверхпроводимость вовсе. Такое поведение нетрудно объяснить:  $\theta = \pi/2, 3\pi/2$  соответствуют ситуации,

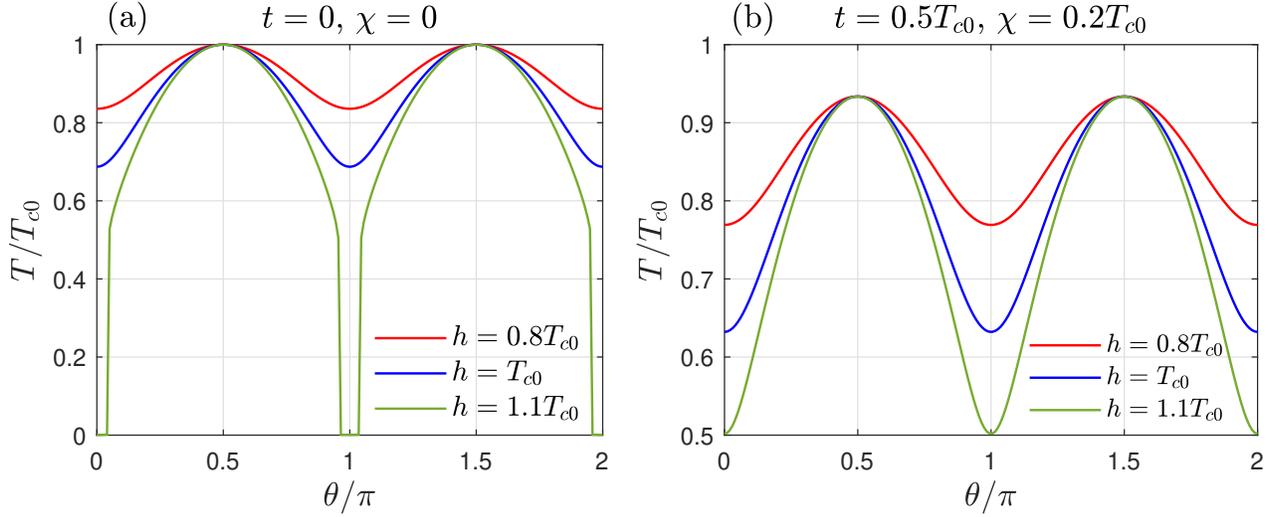


Рис. 4.4: Зависимость  $T_c$  от угла  $\theta$  между вектором  $\mathbf{h}$  и осью  $x$ . Панели (a), (b) отвечают случаям  $t = 0, \chi = 0$  и  $t = 0.5T_{c0}, \chi = 0.2T_{c0}$ , соответственно. Сравнение (a) и (b) демонстрирует, что учёт туннелирования и сдвига зон не меняет характер анизотропии.

аналогичной случаю вектора  $\mathbf{d}$ , перпендикулярного слоям, когда Зеемановское поле лежит в той же плоскости, что и спин исследуемых куперовских пар. Наличие у  $\mathbf{h}$  отличной от нуля  $x$ -компоненты приводит к тому, что за счёт ориентации спинов по полю, электроны выводятся из интересующего нас канала спаривания. Проще всего проиллюстрировать эту ситуацию, рассмотрев предел  $\chi = t = 0$  в уравнениях 4.10

$$f_{12}^x(\omega_n) = \Delta_{\text{int}} \text{sgn}(\omega_n) \frac{h_y^2 + \omega_n^2}{i\omega_n (h^2 + \omega_n^2)} \quad (4.12a)$$

$$f_{12}^0 = -\frac{i\omega_n}{h_y^2 + \omega_n^2} h_x f_{12,x}, \quad f_{12}^y = \frac{1}{i\omega_n} h_y f_{12,0}. \quad (4.12b)$$

Явно видно, что с уменьшением  $h_y$  (при условии постоянства  $h^2$ ) происходит уменьшение  $f_{12}^x$  и увеличение  $f_{12}^0$ .

На Рис. 4.5 представлена типичное поведение критической температуры  $T_c$ , как функции  $h$  при различных ориентациях поля в плоскости. Отметим, что верхнее критическое поле монотонно уменьшается при изменении  $\theta$  от  $\pi/2$  до нуля. При этом при  $\theta = \pi/2$  критическое поле обращается в бесконечность.

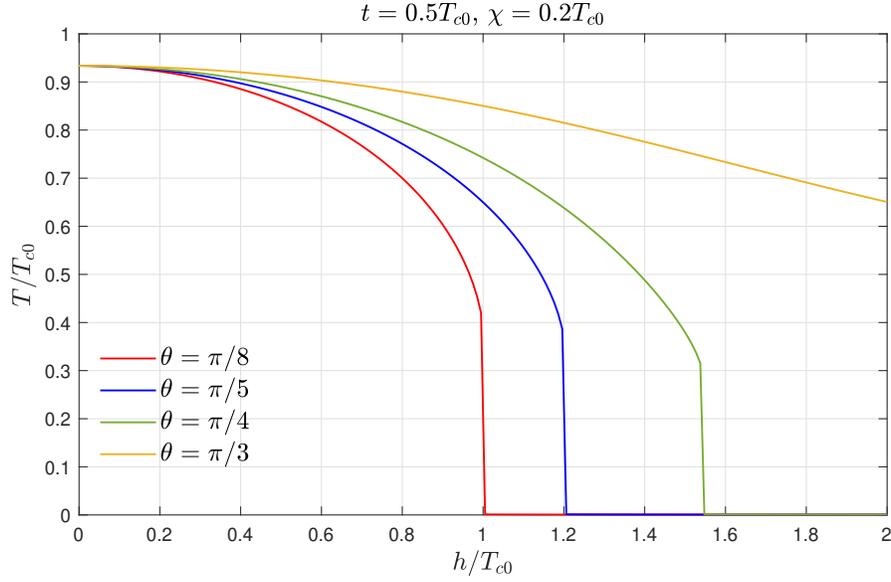


Рис. 4.5: Фазовые диаграммы при  $t = 0.5T_{c0}$ ,  $\chi = 0.2T_{c0}$  и различных углах ориентации Зеемановского поля  $\mathbf{h}$ .

### 4.3 Совместное влияние орбитального и парамагнитного механизмов

При учёте орбитального влияния магнитного поля уравнения 4.5 приобретают добавку, содержащую вектор-потенциал

$$-\frac{2e}{c}(\mathbf{v}\mathbf{A}_1) \begin{pmatrix} \hat{f}_{11} & 0 \\ 0 & -\hat{f}_{22} \end{pmatrix} - 2\chi \begin{pmatrix} 0 & \hat{f}_{12} \\ -\hat{f}_{21} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t(\hat{f}_{12} - \hat{f}_{21}) & t^*\hat{f}_{11} - t\hat{f}_{22} \\ -t^*\hat{f}_{11} + t\hat{f}_{22} & t^*(\hat{f}_{21} - \hat{f}_{12}) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

$$- \left( \begin{array}{c} \left\{ 2i\omega_n + \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{11} \right\} \\ \left\{ 2i\omega_n + \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{21} \right\} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \left\{ 2i\omega_n + \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{12} \right\} \\ \left\{ 2i\omega_n + \mathbf{h}\hat{\sigma}, \hat{f}_{22} \right\} \end{array} \right) = -2\text{sgn}(\omega_n) \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Delta}_{\text{int}} \\ -(i\hat{\sigma}_y) \hat{\Delta}_{\text{int}}^T (i\hat{\sigma}_y) & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение данных уравнений можно найти в виде

$$\hat{f}_{ij} = f_{ij}^0 + f_{ij}^x \hat{\sigma}_x + f_{ij}^y \hat{\sigma}_y, \quad (4.14)$$

после чего подставить в уравнение самосогласования

$$\hat{\Delta}_{\text{int}} = -i\pi\lambda\Gamma \sum_{\omega_n} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \hat{f}_{12}(\varphi, \omega_n). \quad (4.15)$$

Чтобы не нагружать текст громоздкими выражениями для  $f_{12}^0$  в синглетном и  $f_{12}^x$  в триплетном случаях, соответственно, обсуждение вывода и сами выражения вынесены в Приложение F. Здесь же мы обсудим результаты численного решения уравнения самосогласования.

Перед этим обратим внимание, что теперь магнитное поле входит в уравнение двумя разными способами, через  $h = g\mu_B H/2$  и величину  $q = ev_F Hd/2c$ . При численном счёте нам будет удобно задавать  $h$ , а потому необходимо ввести безразмерный параметр  $\beta$

$$\beta = ev_F d/2g\mu_B c \sim k_F d/g, \quad (4.16)$$

численное значение которого зависит, как от зонной структуры, так и от геометрических характеристик (напомним, что  $d$  – расстояние между слоями) материала. Можно было бы предположить, что значение данного параметра определяет какой из эффектов магнитного поля, парамагнитный или орбитальный, важнее, однако, это не совсем так. Как минимум потому, что он вовсе не содержит туннелирования  $t$ , а как мы уже знаем, независимо от спиновой структуры параметра порядка, при  $t = 0$  орбитальный эффект отсутствует. Тем не менее, как мы увидим из численных результатов,  $\beta$  всё же оказывает влияние на их относительный вклад.

В синглетном случае совместный эффект тоже оказывается изотропным, это сложно увидеть в аналитическом выражении, однако, мы убедились в этом численно. Типичные кривые  $T_c(h)$  при различных  $\beta$  приведены на Рис. 4.6. Обратимся к Рис. 4.6(a), неразличимость

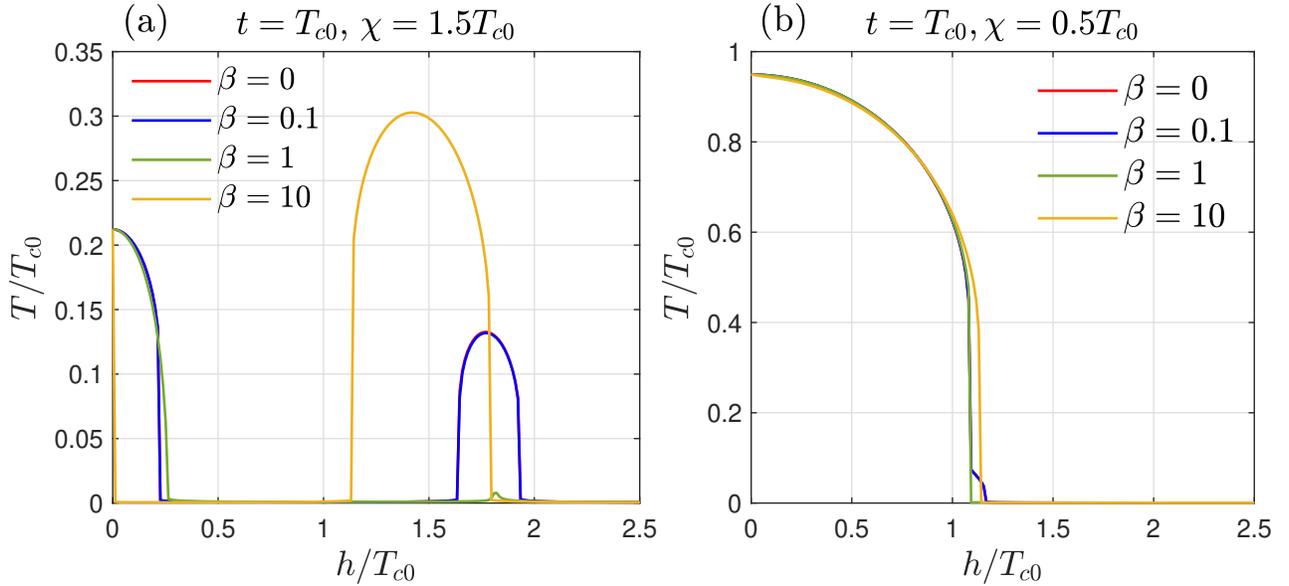


Рис. 4.6: Зависимость  $T_c(h)$  в синглетном случае при различных  $\beta$ . Панели (a), (b) отвечают случаям  $t = T_{c0}$ ,  $\chi = 1.5T_{c0}$  и  $t = T_{c0}$ ,  $\chi = 0.5T_{c0}$ , соответственно. В обоих случаях красная и синяя кривые неотличимы.

красной и синей кривых означает, что в случае малых  $\beta \ll 1$  орбитальным эффектом можно пренебречь. При больших  $\beta \gg 1$ , в области малых  $h$  подавление сверхпроводимости происходит уже за счёт орбитального эффекта, однако, возвратная фаза всё ещё присутствует.

Изменение положения и формы второго пика происходит за счёт полного подавления туннелирования. На Рис. 4.6(b) проиллюстрирована другая возможная ситуация. Красная и синяя кривые всё ещё неразличимы, но в силу того, что  $\chi < 1.086T_{c0}$  (см. Рис. 4.1 и обсуждение перед ним) подавление сверхпроводимости орбитальным эффектом невозможно. Всё его влияние сводится к изменению формы и положения купола возвратной фазы, а также величины поля парамагнитного предела за счёт подавления туннелирования.

В триплетном случае независимо от величины параметра  $\beta$  сохраняется анизотропия критического поля, см. Рис. 4.7. Сравнение Рис. 4.4(a) и Рис. 4.7(a) также свидетельствует о том,

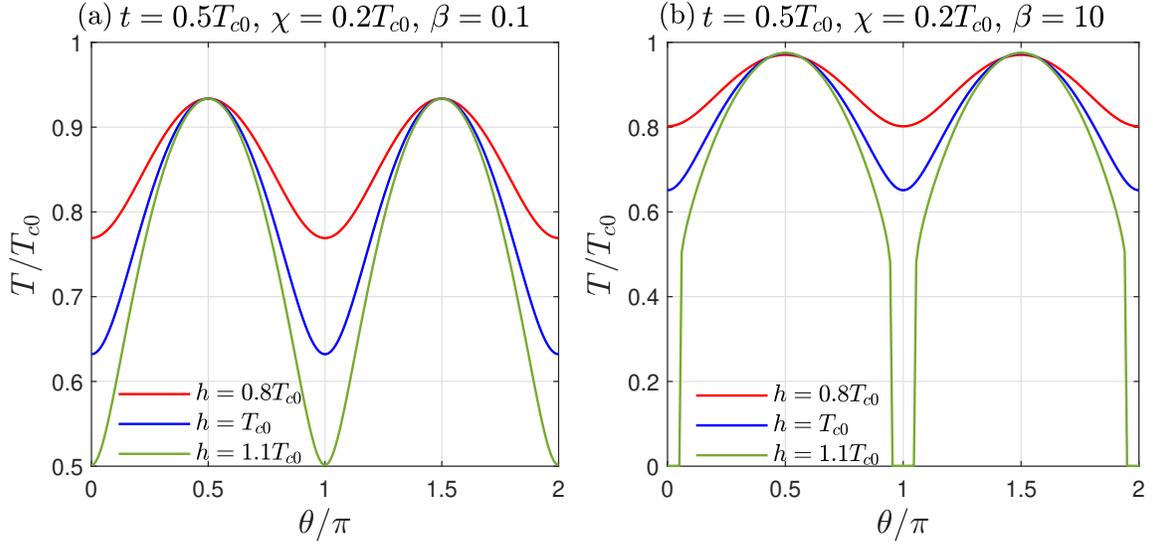


Рис. 4.7: Зависимость  $T_c$  от угла  $\theta$  между вектором  $\mathbf{h}$  и осью  $x$ . Панели (a), (b) отвечают случаям  $\beta = 0.1$  и  $\beta = 10$ , соответственно. Характер анизотропии аналогичен случаю чисто парамагнитного эффекта.

что при  $\beta \ll 1$  можно пренебречь влиянием орбитального эффекта магнитного поля. Характерные зависимости  $T_c(h)$  при различных  $\beta$  представлены на Рис. 4.8.

Видно, что при больших  $\beta$ , когда орбитальный эффект важен, наблюдается немонотонное поведение  $T_c$ , связанное с восстановлением сверхпроводимости за счёт подавления туннелирования, описанным в 4.1.

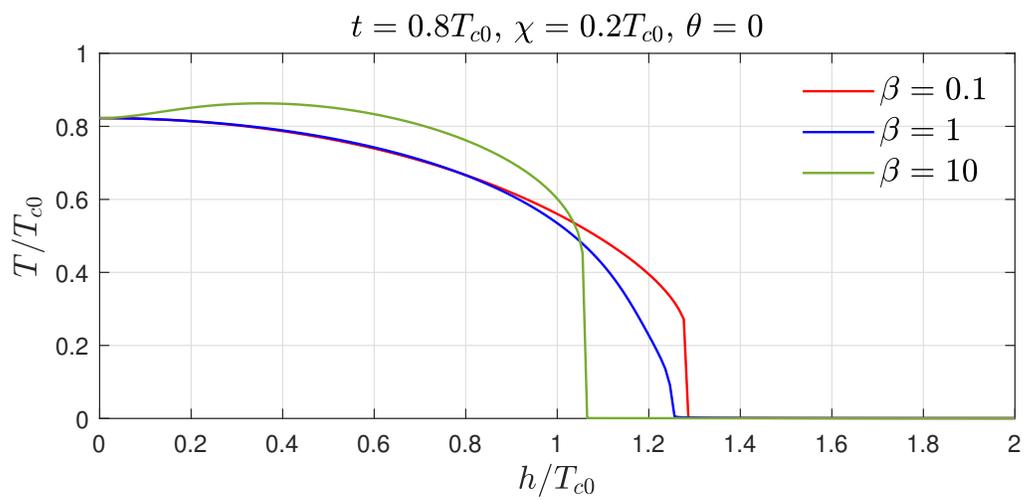


Рис. 4.8: Типичные зависимости  $T_c(h)$  при  $\theta = 0$  и различных значениях  $\beta$

# Глава 5

## Заключение

В данной работе было исследовано сосуществование сегнетоэлектричества и сверхпроводимости в Ван-дер-Ваальсовых бислоях в рамках модели, предполагающей наличие туннелирования между слоями, а также притяжения электронов из разных слоёв.

Для случая наличия уединённой сегнетоэлектрической стенки было аналитически и численно продемонстрирована возможность образования локализованных сверхпроводящих состояний, с критической температурой превышающей температуру перехода в однородное сверхпроводящее состояние. Получено, что в синглетном случае туннелирование подавляет локализованные состояния, в триплетном же – делает более энергетически выгодными. В предположении наличия в системе межслоевого спаривания, можно объяснить повышение критической температуры вблизи сегнетоэлектрического переключения за счёт образования состояний, локализованных на возникающих доменных стенках. Исчезновение доменов приводит к возвращению в нормальное состояние.

Для случая однородной поляризации, перпендикулярной слоям, изучено влияние внешнего магнитного поля, параллельного плоскости слоёв. Показано, что независимо от спиновой структуры параметра порядка, орбитальный эффект поля приводит к подавлению туннелирования между слоями. В случае синглетных пар это приводит к подавлению сверхпроводимости, в случае триплетных – к восстановлению. При учёте парамагнитного эффекта возможна немонотонная зависимость критической температуры  $T_c$  от поля  $h$  в триплетном случае. Получено, что в приближении изотропного спектра для синглетного параметра порядка влияние магнитного поля также изотропно. Продемонстрирована возможность возникновения возвратных (или индуцированных полем) сверхпроводящих фаз. В триплетном случае обнаружена сильная анизотропия критического поля, в зависимости от взаимного направления вектора магнитного поля  $\mathbf{H}$  и вектора  $\mathbf{d}$ , определяющего спиновую структуру куперовских пар. Полученный характер анизотропии схож с измеренным в [6].

# Список литературы

- [1] Twenty years of 2D materials, Nat. Phys. **20**, 1, <https://doi.org/10.1038/s41567-023-02381-0> (2024).
- [2] S. Li, F. Wang, Y. Wang, J. Yang, X. Wang, X. Zhan, J. He, Z. Wang, Van der Waals Ferroelectrics: Theories, Materials, and Device Applications. Adv. Mater. **36**, 2301472 (2024).
- [3] M. Wu and J. Li, Sliding ferroelectricity in 2D van der Waals materials: Related physics and future opportunities, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **118** (50) e2115703118, <https://doi.org/10.1073/pnas.2115703118> (2021).
- [4] A. Jindal, A. Saha, Z. Li, et al. Coupled ferroelectricity and superconductivity in bilayer Td-MoTe<sub>2</sub>. Nature **613**, 48–52 (2023).
- [5] G. Chaudhary and I. Martin, Superconductivity from Domain Wall Fluctuations in Sliding Ferroelectrics, Phys. Rev. Lett. **133**, 246001 (2024).
- [6] Z. Li, A. Jindal, A. Strasser, Twofold Anisotropic Superconductivity in Bilayer T<sub>d</sub>-MoTe<sub>2</sub>, Phys. Rev. Lett., **133**, 216002 (2024)
- [7] M. H. Cohen and D. H. Duglass, Jr., Superconductive Pairing Across Electron Barriers, Phys. Rev. Lett. **19**, 118 (1967).
- [8] K. B. Efetov and A. I. Larkin, Pairing with nonzero spin in layered and in quasi-one-dimensional superconductors, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **68**, 155 (1975).
- [9] A. A. Kopasov and A. S. Mel'nikov, Unconventional superconductivity and paramagnetic Meissner response triggered by nonlocal pairing interaction in proximitized heterostructures, Phys. Rev. B **110**, 094503 (2024).
- [10] N. Kopnin, *Theory of Nonequilibrium Superconductivity* (Oxford University Press, Oxford, 2001).
- [11] A. V. Svidzinski, *Space-Inhomogeneous Problems in the Theory of Superconductivity* (Nauka, Moscow, 1982).

- [12] G. A. Bobkov, D. S. Rabinovich, A. M. Bobkov, and I. V. Bobkova, Gate-tunable nonlocal Josephson effect through magnetic van der Waals bilayers, *Phys. Rev. B* **111**, 024506 (2025)
- [13] A. I. Buzdin, L. N. Bulaevskii, and S. V. Panyukov, Existence of superconducting domain walls in ferromagnets, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87**, 229 (1984).
- [14] M. Houzet and A. I. Buzdin, Theory of domain-wall superconductivity in superconductor/ferromagnet bilayers, *Phys. Rev. B* **74**, 214507 (2006).
- [15] *Handbook of Mathematical Functions*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series No. 55 (U.S. GPO, Washington, DC, 1965).
- [16] A. I. Larkin and Y. N. Ocvhinnikov, Nonuniform state of superconductors, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, 1136 (1964).
- [17] P. Fulde and R. A. Ferrel, Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field, *Phys. Rev.* **135**, A550 (1964).
- [18] D. Saint-James, G. Sarma, and E. J. Thomas, *Type II Superconductivity, Commonwealth and International Library. Liberal Studies Divi* (Elsevier, Science and Technology, New York, 1969).
- [19] B. S. Chandrasekhar, A note on the maximum critical field of high-field superconductors, *Appl. Phys. Lett.* **1**, 7 (1962).
- [20] A. M. Clogston, Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **9**, 266 (1962).
- [21] A. Buzdin, S. Tollis, and J. Cayssol, Field-Induced Superconductivity with an Enhanced and Tunable Paramagnetic Limit, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 167003 (2005).
- [22] X. Montiel and A. I. Buzdin, Field-induced superconducting phase in superconductor–normal metal and superconductor–superconductor bilayers, *Phys. Rev. B* **84**, 054518 (2011).

# Приложение А

## Вывод уравнений Эйленбергера (2.11)

Здесь мы представляем подробный вывод уравнений Эйленбергера (2.11) и уравнения самосогласования (2.12) в основном тексте. В конце данного приложения мы также обсудим условие нормировки. Следуя стандартному подходу [11], мы вводим функции Грина в смешанном представлении

$$\underline{G}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}) = \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} e^{i\boldsymbol{\rho}\mathbf{p}} \underline{G}(\mathbf{R}, \mathbf{p}), \quad (\text{A.1})$$

где  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  и  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ . «Левая» система уравнений Горькова для гриновских функций в смешанном представлении (A.1) имеет вид уравнения (2.7) со следующими подстановками:  $\nabla_{\mathbf{r}} \rightarrow (1/2)\nabla_{\mathbf{R}} + i\mathbf{p}$  и  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{R} + (i/2)\nabla_{\mathbf{p}}$ . В квазиклассическом приближении функции Грина медленно зависят от  $\mathbf{R}$  (на масштабах порядка сверхпроводящей длины когерентности  $\xi_0$ ), а импульс  $\mathbf{p}$  лежит вблизи поверхности Ферми

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \left( p_F + \frac{\xi}{v_F} \right), \quad \xi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{p_F^2}{2m}. \quad (\text{A.2})$$

Здесь единичный вектор  $\mathbf{n}$  параметризует направление импульса на поверхности Ферми,  $p_F$  и  $v_F = p_F/m$  есть импульс и скорость Ферми, соответственно, а  $\xi$  порядка критической температуры сверхпроводящего перехода. С учётом вышесказанного, операторы спектра квазичастиц внутри слоёв  $j = 1, 2$  можно записать как

$$\hat{\xi}_j(\mathbf{r}) \approx \xi - \frac{i}{2} v_F \mathbf{n} \nabla_{\mathbf{R}} - \frac{e}{c} v_F \mathbf{n} \mathbf{A}_j(\mathbf{R}) + U_j(\mathbf{R}). \quad (\text{A.3})$$

Таким образом, «левые» уравнения Горькова в квазиклассическом приближении запишутся как:

$$\left[ \begin{array}{c} -i\omega_n + \check{\tau}_z \left( \xi + U_1 - \frac{i}{2} \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}} - \check{\tau}_z \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}_1 \right) \\ \check{t}^\dagger \end{array} \quad \begin{array}{c} \check{t} \\ -i\omega_n + \check{\tau}_z \left( \xi + U_2 - \frac{i}{2} \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}} - \check{\tau}_z \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}_2 \right) \end{array} \right] \underline{G} = 1, \quad (\text{A.4})$$

где мы опустили аргументы  $(\mathbf{R}, \mathbf{p})$  у матричной функции Грина для краткости. Соответственно, «правые» уравнения:

$$\underline{G} \begin{bmatrix} -i\omega_n + \check{\tau}_z (\xi + U_1 + \frac{i}{2} \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}} - \check{\tau}_z \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}_1) & \check{t} \\ \check{t}^\dagger & -i\omega_n + \check{\tau}_z (\xi + U_2 + \frac{i}{2} \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}} - \check{\tau}_z \frac{e}{c} \mathbf{v} \mathbf{A}_2) \end{bmatrix} = 1. \quad (\text{A.5})$$

Далее, необходимо умножить уравнение (A.4) на  $\check{\tau}_z$  слева, а уравнение (A.5) справа. Составляя разность этих уравнений, а также определяя квазиклассическую функцию Грина как

$$\underline{g}(\mathbf{R}, \mathbf{n}) = \frac{i}{\pi} \int d\xi \check{\tau}_z \underline{G}(\mathbf{R}, \mathbf{n}, \xi) = \check{\tau}_z \underline{\tilde{g}}, \quad (\text{A.6})$$

мы приходим к уравнениям Эйленберга (2.11) в основном тексте. Используя введённые определения квазиклассических функций Грина, можно увидеть, что уравнение самосогласования (2.9) переходит в (2.12).

Ниже мы обсуждаем форму условия нормировки, а также вывод линеаризованных уравнений. Форма условия нормировки может быть получена непосредственно из решения уравнений Горькова (2.7) для однородного состояния. Конкретнее, мы решаем уравнения (2.7) для синглетного межслоевого спаривания  $\hat{\Delta}_{\text{int}} = \Delta_{\text{int}}(i\hat{\sigma}_y)$  и однородного сдвига зон  $U_1 - U_2 = -2\chi = \text{const}$ , после чего интегрируем их по энергии квазичастиц и переходим к пределу  $\Delta_{\text{int}} \rightarrow 0$  в конце. Используя определение (A.6), мы получаем следующие выражения для нормальных квазиклассических функций Грина

$$\tilde{g}_{12} = \frac{it}{2Q} \left[ \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 - iQ}{\tilde{\xi}} + \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 + iQ}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7a})$$

$$\bar{\tilde{g}}_{12} = \frac{-it^*}{2Q} \left[ \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 - iQ}{\tilde{\xi}} + \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 + iQ}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7b})$$

$$\tilde{g}_{21} = \frac{it^*}{2Q} \left[ \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 - iQ}{\tilde{\xi}} + \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 + iQ}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7c})$$

$$\bar{\tilde{g}}_{21} = \frac{-it}{2Q} \left[ \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 - iQ}{\tilde{\xi}} + \frac{\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2 + iQ}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7d})$$

$$\tilde{g}_{11} = \frac{i}{2Q} \left[ \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 + iQ) - \chi(\omega_n^2 - iQ)}{\tilde{\xi}} + \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 - iQ) - \chi(\omega_n^2 + iQ)}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7e})$$

$$\bar{\tilde{g}}_{11} = \frac{i}{2Q} \left[ \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 + iQ) + \chi(\omega_n^2 - iQ)}{\tilde{\xi}} + \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 - iQ) + \chi(\omega_n^2 + iQ)}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7f})$$

$$\tilde{g}_{22} = \frac{i}{2Q} \left[ \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 + iQ) + \chi(\omega_n^2 - iQ)}{\tilde{\xi}} + \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 - iQ) + \chi(\omega_n^2 + iQ)}{\tilde{\xi}^*} \right], \quad (\text{A.7g})$$

$$\bar{\tilde{g}}_{22} = \frac{i}{2Q} \left[ \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 + iQ) - \chi(\omega_n^2 - iQ)}{\tilde{\xi}} + \frac{i\omega_n(\chi^2 + |t|^2 - iQ) - \chi(\omega_n^2 + iQ)}{\tilde{\xi}^*} \right]. \quad (\text{A.7h})$$

Здесь мы переобозначили

$$\tilde{\xi} = \sqrt{-\omega_n^2 - |\Delta_{\text{int}}|^2 + \chi^2 + |t|^2 + 2iQ}, \quad Q = \sqrt{|t|^2(\omega_n^2 + |\Delta_{\text{int}}|^2) + \chi^2 \omega_n^2}. \quad (\text{A.8})$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что в пределе  $\Delta_{\text{int}} \rightarrow 0$  полученные выше выражения удовлетворяют условию  $(\underline{\eta}_z \check{\tau}_z \tilde{g})^2 = (\underline{\eta}_z g)^2 = 1$ , которое и является условием нормировки, указанном в тексте. С учётом уравнений выше, мы также находим, что нормальные квазиклассические функции Грина в пределе  $t, \chi \rightarrow 0$  имеют следующий вид:  $g_{11} = g_{22} = \bar{g}_{11} = \bar{g}_{22} = -\text{sgn}(\omega_n)$  и  $g_{ij} = \bar{g}_{ij} = 0$  для  $i \neq j$ . Подстановка данных выражений в уравнения (2.11) приводит нас к линеаризованным по щели уравнениям Эйленберга (3.1) и (3.8).

# Приложение В

## Вывод ядра (3.11)

В данном приложении мы приводим подробности вывода ядра в уравнении самосогласования (3.11) в синглетном случае. Для начала необходимо решить уравнения (3.10). Решение однородной системы ищем в виде  $f_{ij} \propto e^{\lambda x}$ , что приводит к характеристическому уравнению

$$(v_x \lambda + 2\omega_n)^2 [(v_x \lambda + 2\omega_n)^2 + 4(\chi^2 + t^2)] = 0. \quad (\text{B.1})$$

Решая уравнение выше на собственные значения и вычисляя собственные векторы, мы получаем однородное решение в виде

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = e^{-2\omega_n x/v_x} \left[ C_1 \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q} \begin{pmatrix} -\chi/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi/t \end{pmatrix} \right] + \quad (\text{B.2})$$

$$+ e^{(-2\omega_n + 2iq)x/v_x} C_3 \frac{t}{2q} \begin{pmatrix} 1 \\ t/(q - \chi) \\ -t/(q + \chi) \\ -1 \end{pmatrix} + e^{(-2\omega_n - 2iq)x/v_x} C_4 \frac{t}{2q} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/(q + \chi) \\ t/(q - \chi) \\ -1 \end{pmatrix},$$

где  $q = \sqrt{\chi^2 + t^2}$ , а  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные постоянные. Так как в рамках нашей модели мы пренебрегаем внутрислоевыми куперовскими парами, то  $C_1 = 0$ . Частные решения можно найти с помощью метода вариации постоянных, который приводит к следующему набору уравнений

$$-iv_x \frac{\partial C_2}{\partial x} = 4\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) \frac{t}{\sqrt{2}q} e^{2\omega_n x/v_x}, \quad (\text{B.3a})$$

$$-iv_x \frac{\partial C_3}{\partial x} = 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) \frac{\chi}{q} e^{(2\omega_n - 2iq)x/v_x}, \quad (\text{B.3b})$$

$$-iv_x \frac{\partial C_4}{\partial x} = 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}(\omega_n) \frac{\chi}{q} e^{(2\omega_n + 2iq)x/v_x}. \quad (\text{B.3c})$$

Выполняя интегрирование в уравнениях (B.3), мы находим частные решения

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} &= \frac{2i \operatorname{sgn}(\omega_n) t^2}{v_x q^2} \int_{c_2}^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{-2\omega_n(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} -\chi/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi/t \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i \operatorname{sgn}(\omega_n) \chi t}{v_x q^2} \int_{c_3}^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n+2iq)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_- \\ -t/q_+ \\ -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i \operatorname{sgn}(\omega_n) \chi t}{v_x q^2} \int_{c_4}^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n-2iq)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_+ \\ t/q_- \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Здесь  $q_{\pm} = q \pm \chi$  и  $c_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) – произвольные постоянные. Далее, необходимо записать полученные выше решения в областях постоянного сдвига зон (для  $x < 0$  и  $x > 0$ ) и затем непрерывно сшить их на доменной стенке (при  $x = 0$ ). Постоянные  $c_2$ ,  $c_3$ , и  $c_4$  в уравнениях (B.4) при этом выбираются таким образом, чтобы аномальные средние  $f_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) стремились к нулю в пределе  $|x| \rightarrow \infty$ .

Решение для положительных  $\omega_n$ ,  $v_x > 0$ , и при  $x < 0$  записывается в виде

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} &= \frac{2i t^2}{v_x q_L^2} \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2\omega_n u/v_x} \begin{pmatrix} -\chi_L/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_L/t \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i \chi_L t}{v_x q_L^2} \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2(\omega_n-iq_L)u} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{L-} \\ -t/q_{L+} \\ -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i \chi_L t}{v_x q_L^2} \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2(\omega_n+iq_L)u} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{L+} \\ t/q_{L-} \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Для  $\omega_n > 0$ ,  $v_x > 0$ , и  $x > 0$  решение может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} &= e^{-2\omega_n x/v_x} C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_R} \begin{pmatrix} -\chi_R/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_R/t \end{pmatrix} + e^{(-2\omega_n+2iq_R)x/v_x} C_3 \frac{t}{2q_R} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{R-} \\ -t/q_{R+} \\ -1 \end{pmatrix} + \\
&+ e^{(-2\omega_n-2iq_R)x/v_x} C_4 \frac{t}{2q_R} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{R+} \\ t/q_{R-} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{q_R^2} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{-2\omega_n(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} -\chi_R/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_R/t \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i\chi_R t}{v_x q_R^2} \times \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n+2iq_R)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{R-} \\ -t/q_{R+} \\ -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \frac{i\chi_R t}{v_x q_R^2} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n-2iq_R)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{R+} \\ t/q_{R-} \\ -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Требую непрерывности решений (B.5) и (B.6) в точке  $x = 0$ , мы получаем линейную систему на коэффициенты

$$-C_2 \frac{\chi_R}{\sqrt{2}q_R} + C_3 \frac{t}{2q_R} + C_4 \frac{t}{2q_R} = \frac{2i}{v_x} \frac{t}{q_L^2} \bar{d}_- (-\chi_L) + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_L t (\bar{d}_{--} + \bar{d}_{-+})}{q_L^2}, \tag{B.7a}$$

$$C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_R} + C_3 \frac{t^2}{2q_R q_{R-}} - C_4 \frac{t^2}{2q_R q_{R+}} = \frac{2i}{v_x} \frac{t^2 \bar{d}_-}{q_L^2} + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_L t^2}{q_L^2} \left( \frac{\bar{d}_{--}}{q_{L-}} - \frac{\bar{d}_{-+}}{q_{L+}} \right), \tag{B.7b}$$

$$C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_R} - C_3 \frac{t^2}{2q_R q_{R+}} + C_4 \frac{t^2}{2q_R q_{R-}} = \frac{2i}{v_x} \frac{t^2 \bar{d}_-}{q_L^2} + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_L t^2}{q_L^2 (\chi_L^2 + t^2)} \left( \frac{-\bar{d}_{--}}{q_{L+}} + \frac{\bar{d}_{-+}}{q_{L-}} \right). \tag{B.7c}$$

Где мы ввели следующие обозначения:

$$\bar{d}_- = \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(u) e^{2\omega_n u/v_x}, \quad \bar{d}_{-\mp} = \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(u) e^{2(\omega_n \mp iq_L)u/v_x}. \tag{B.8a}$$

Решая систему (B.7), мы находим

$$C_2 = \frac{2i}{v_x} \bar{d}_- \frac{2t(t^2 + \chi_L \chi_R)}{\sqrt{2}q_R q_L^2} + \frac{2i}{v_x} (\bar{d}_{--} + \bar{d}_{-+}) \frac{t\chi_L(\chi_L - \chi_R)}{\sqrt{2}q_R q_L^2}, \tag{B.9a}$$

$$C_3 = \frac{2i}{v_x} \frac{2t^2 \bar{d}_- (\chi_R - \chi_L)}{2q_R q_L^2} + \frac{2i}{v_x} \frac{\chi_L (t^2 + \chi_L \chi_R) (\bar{d}_{-+} + \bar{d}_{--}) + \chi_L q_R q_L (\bar{d}_{--} - \bar{d}_{-+})}{2q_R q_L^2}, \tag{B.9b}$$

$$C_4 = \frac{2i}{v_x} \frac{2t^2 \bar{d}_- (\chi_R - \chi_L)}{2q_R q_L^2} + \frac{2i}{v_x} \frac{\chi_L (t^2 + \chi_L \chi_R) (\bar{d}_{--} + \bar{d}_{-+}) - \chi_L q_R q_L (\bar{d}_{--} - \bar{d}_{-+})}{2q_R q_L^2}. \tag{B.9c}$$

Чтобы построить решения при  $\omega_n < 0$  и  $v_x < 0$  удобно воспользоваться симметрией исходных уравнений Эйленбергера (3.10) ( $i, j = 1, 2$ )

$$f_{ij}(x, v_x, \omega_n, t, \chi) = f_{ij}(x, -v_x, -\omega_n, -t, -\chi). \quad (\text{B.10})$$

В качестве следующего шага, мы записываем решения для отрицательных частот  $\omega_n$  и положительных проекций скорости  $v_x$ . Так, решение для  $\omega_n < 0$ ,  $v_x > 0$ , при  $x < 0$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} &= e^{2|\omega_n|x/v_x} C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_L} \begin{pmatrix} -\chi_L/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_L/t \end{pmatrix} + e^{(2|\omega_n|+2iq_L)x/v_x} C_3 \frac{t}{2q_L} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{L-} \\ -t/q_{L+} \\ -1 \end{pmatrix} + (\text{B.11}) \\ &+ e^{(2|\omega_n|-2iq_L)x/v_x} C_4 \frac{t}{2q_L} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{L+} \\ t/q_{L-} \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{(t^2 + \chi_L^2)} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{2|\omega_n|(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} -\chi_L/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_L/t \end{pmatrix} - \\ &- \frac{i}{v_x} \frac{\chi_L t}{q_L^2} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(2|\omega_n|+2iq_L)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{L-} \\ -t/q_{L+} \\ -1 \end{pmatrix} - \\ &- \frac{i}{v_x} \frac{\chi_L t}{q_L^2} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(2|\omega_n|-2iq_L)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{L+} \\ t/q_{L-} \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Решения для  $\omega_n < 0$ ,  $v_x > 0$ , и  $x > 0$ :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} &= \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{q_R^2} \int_0^{+\infty} du d_0(x+u) e^{-2|\omega_n|u/v_x} \begin{pmatrix} -\chi_R/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_R/t \end{pmatrix} + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_R t}{q_R^2} \times (\text{B.12}) \\ &\times \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(x+u) \left( e^{-(2|\omega_n|+2iq_R)u/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{q_{R-}} \\ -\frac{t}{q_{R+}} \\ -1 \end{pmatrix} + e^{-(2|\omega_n|-2iq_R)u/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t}{q_{R+}} \\ \frac{t}{q_{R-}} \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Сшивая по непрерывности решения (B.11) и (B.12) при  $x = 0$ , получаем следующую линейную

систему:

$$-C_2 \frac{\chi_L}{\sqrt{2}q_L} + C_3 \frac{t}{2q_L} + C_4 \frac{t}{2q_L} = \frac{2i}{v_x} \frac{t}{q_R^2} \bar{d}_+ (-\chi_R) + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_R t}{q_R^2} (\bar{d}_{+-} + \bar{d}_{++}), \quad (\text{B.13a})$$

$$C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_L} + C_3 \frac{t^2}{2q_L q_{L-}} - C_4 \frac{t^2}{2q_L q_{L+}} = \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{q_R^2} \bar{d}_+ + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_R t^2}{q_R^2} \left( \frac{\bar{d}_{+-}}{q_{R-}} - \frac{\bar{d}_{++}}{q_{R+}} \right), \quad (\text{B.13b})$$

$$C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_L} - C_3 \frac{t^2}{2q_L q_{L+}} + C_4 \frac{t^2}{2q_L q_{L-}} = \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{q_R^2} \bar{d}_+ + \frac{i}{v_x} \frac{\chi_R t^2}{q_R^2} \left( \frac{-\bar{d}_{+-}}{q_{R+}} + \frac{\bar{d}_{++}}{q_{R-}} \right), \quad (\text{B.13c})$$

где мы ввели

$$\bar{d}_+ = \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(u) e^{-2|\omega_n|u/v_x}, \quad \bar{d}_{\pm\pm} = \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(u) e^{(-2|\omega_n| \pm 2iq_R)u/v_x}. \quad (\text{B.14})$$

Решая систему (B.13), находим

$$C_2 = \frac{2i}{v_x} \frac{2t\bar{d}_+(t^2 + \chi_L\chi_R)}{\sqrt{2}q_L q_R^2} + \frac{2i}{v_x} \frac{t\chi_R(\chi_R - \chi_L)(\bar{d}_{+-} + \bar{d}_{++})}{\sqrt{2}q_L q_R^2}, \quad (\text{B.15a})$$

$$C_3 = \frac{2i}{v_x} \frac{2t^2\bar{d}_+(\chi_L - \chi_R)}{2q_L q_R^2} + \frac{2i}{v_x} \frac{\chi_R(t^2 + \chi_L\chi_R)(\bar{d}_{++} + \bar{d}_{+-}) - \chi_R q_R q_L (\bar{d}_{++} - \bar{d}_{+-})}{2q_L q_R^2}, \quad (\text{B.15b})$$

$$C_4 = \frac{2i}{v_x} \frac{2t^2\bar{d}_+(\chi_L - \chi_R)}{2q_L q_R^2} + \frac{2i}{v_x} \frac{\chi_R(t^2 + \chi_L\chi_R)(\bar{d}_{+-} + \bar{d}_{++}) + \chi_R q_R q_L (\bar{d}_{++} - \bar{d}_{+-})}{2q_L q_R^2}. \quad (\text{B.15c})$$

Непрерывное решение уравнения Эйленберга для  $\omega_n > 0$  и  $v_x < 0$  может быть получено использованием уравнений (B.11), (B.12), (B.15) а также симметричного соотношения (B.10).

Теперь необходимо подставить полученные решения уравнений Эйленберга в уравнение самосогласования (2.12). Удобно перейти к суммированию только по положительным Мацу-баровским частотам  $\omega_n > 0$  и положительным проекциям скорости  $v_x > 0$ . Для этого, ниже мы явно выпишем сумму полученных решений.

При  $x < 0$  получаем

$$\begin{aligned} f_{12}^-(x) &\equiv f_{12}(\omega_n > 0, v_x > 0, x < 0) + f_{12}(\omega_n > 0, v_x < 0, x < 0) \quad (\text{B.16}) \\ &+ f_{12}(\omega_n < 0, v_x > 0, x < 0) + f_{12}(\omega_n < 0, v_x < 0, x < 0) = \\ &= \frac{2i}{|v_x|} \int_{-\infty}^0 du \left( \frac{2t^2}{q_L^2} \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2|\omega_n|u/|v_x|} + \frac{\chi_L^2}{q_L^2} \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2|\omega_n|u/|v_x|} 2 \cos \left( \frac{2q_L u}{|v_x|} \right) \right) - \\ &- \frac{2i}{|v_x|} \int_0^x ds \left( \frac{2t^2}{q_L^2} \Delta_{\text{int}}(s) e^{2|\omega_n|(x-s)/|v_x|} + \frac{\chi_L^2}{q_L^2} \Delta_{\text{int}}(s) e^{2|\omega_n|(x-s)/|v_x|} 2 \cos \left[ \frac{2q_L(x-s)}{|v_x|} \right] \right) + \\ &+ e^{2|\omega_n|x/|v_x|} \frac{t}{\sqrt{2}q_L} 2C_2 + e^{(2|\omega_n|+2iq_L)x/|v_x|} C_3 (\chi_L/q_L) + e^{(2|\omega_n|-2iq_L)x/|v_x|} C_4 (\chi_L/q_L). \end{aligned}$$

В уравнении (B.16) выше, постоянные  $C_2$ ,  $C_3$ , и  $C_4$  определяются уравнениями (B.15). При-

ведём соответствующие выражения для них в случае  $\chi_L = -\chi_R = \chi$

$$\frac{t}{\sqrt{2}q_L} 2C_2 = \frac{2i}{v_x} \left[ \frac{2t^2(t^2 - \chi^2)}{q^4} \bar{d}_+ + \frac{2\chi^2 t^2}{q^4} (\bar{d}_{+-} + \bar{d}_{++}) \right], \quad (\text{B.17a})$$

$$C_3 \frac{\chi_L}{q_L} = \frac{2i}{v_x} \left\{ \frac{2t^2 \chi^2}{q^4} \bar{d}_+ - \frac{\chi^2 t^2}{q^4} \bar{d}_{+-} + \frac{\chi^4}{q^4} \bar{d}_{++} \right\}, \quad (\text{B.17b})$$

$$C_4 \frac{\chi_L}{q_L} = \frac{2i}{v_x} \left\{ \frac{2t^2 \chi^2}{q^4} \bar{d}_+ - \frac{\chi^2 t^2}{q^4} \bar{d}_{++} + \frac{\chi^4}{q^4} \bar{d}_{+-} \right\}. \quad (\text{B.17c})$$

При  $x > 0$  мы получаем

$$\begin{aligned} f_{12}^+(x) &\equiv f_{12}(\omega_n > 0, v_x > 0, x > 0) + f_{12}(\omega_n > 0, v_x < 0, x > 0) \\ &+ f_{12}(\omega_n < 0, v_x > 0, x > 0) + f_{12}(\omega_n < 0, v_x < 0, x > 0) = \\ &= \frac{2i}{|v_x|} \int_0^{+\infty} du \left( \frac{2t^2}{q_R^2} \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{-2|\omega_n|u/|v_x|} + \frac{\chi_R^2}{q_R^2} \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{-2|\omega_n|u/|v_x|} 2 \cos \left( \frac{2q_R u}{|v_x|} \right) \right) + \\ &+ \frac{2i}{|v_x|} \int_0^x ds \left( \frac{2t^2}{q_R^2} \Delta_{\text{int}}(s) e^{-2|\omega_n|(x-s)/|v_x|} + \frac{\chi_R^2}{q_R^2} \Delta_{\text{int}}(s) e^{-2|\omega_n|(x-s)/|v_x|} 2 \cos \left[ \frac{2q_R(x-s)}{|v_x|} \right] \right) + \\ &+ e^{-2|\omega_n|x/|v_x|} \frac{t}{\sqrt{2}q_R} 2C_2 + e^{(-2|\omega_n|+2iq_R)x/|v_x|} C_3 \frac{\chi_R}{q_R} + e^{(-2|\omega_n|-2iq_R)x/|v_x|} C_4 \frac{\chi_R}{q_R}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Постоянные  $C_2$ ,  $C_3$ , и  $C_4$  в выражении (B.18) определяются уравнениями (B.9). Приведём соответствующие выражения в случае  $\chi_L = \chi$  и  $\chi_R = -\chi$

$$\frac{2t}{\sqrt{2}q_R} C_2 = \frac{2i}{v_x} \left[ \frac{2t^2(t^2 - \chi^2)}{q^4} \bar{d}_- + \frac{2t^2 \chi^2}{q^4} (\bar{d}_{--} + \bar{d}_{-+}) \right], \quad (\text{B.19a})$$

$$C_3 \frac{\chi_R}{q_R} = \frac{2i}{v_x} \left\{ \frac{2t^2 \chi^2}{q^4} \bar{d}_- - \frac{\chi^2 t^2}{q^4} \bar{d}_{--} + \frac{\chi^4}{q^4} \bar{d}_{-+} \right\}, \quad (\text{B.19b})$$

$$C_4 \frac{\chi_R}{q_R} = \frac{2i}{v_x} \left\{ \frac{2t^2 \chi^2}{q^4} \bar{d}_- - \frac{\chi^2 t^2}{q^4} \bar{d}_{-+} + \frac{\chi^4}{q^4} \bar{d}_{--} \right\}. \quad (\text{B.19c})$$

Определённые выше функции  $f_{12}^\pm(x)$  входят в уравнение самосогласования следующим образом

$$\Delta_{\text{int}}(x > 0) = -i\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} f_{12}^+(x, \mathbf{n}), \quad (\text{B.20a})$$

$$\Delta_{\text{int}}(x < 0) = -i\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} f_{12}^-(x, \mathbf{n}). \quad (\text{B.20b})$$

Из подстановки выражений (B.16), (B.18) в уравнения (B.20) следует, что для  $\chi_L = -\chi_R = \chi$  и аномальная функция Грина  $f_{12}(x)$  и сверхпроводящая щель  $\Delta_{\text{int}}(x)$  являются чётными функциями координаты. Таким образом, в этом случае имеют место соотношения  $\bar{d}_- = \bar{d}_+$  и  $\bar{d}_{-\mp} = \bar{d}_{+\pm}$ . Подставляя выражения (B.16), (B.17), (B.18), и (B.19) в уравнения (B.20), а также переходя к преобразованиям Фурье функций

$$\Delta_{\text{int}}(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \Delta_{\text{int}}(k) e^{ikx}, \quad (\text{B.21})$$

мы приходим к следующему уравнению самосогласования в импульсном представлении

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{int}}(k) = & -i\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \Delta_{\text{int}}(k') 2\pi\delta(k - k') \left\{ \frac{4it^2}{q^2} \frac{\omega_n}{(\omega_n^2 + k^2 v_x^2/4)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4i\chi^2}{q^2} \text{Re} \left[ \frac{(\omega_n - iq)}{(\omega_n - iq)^2 + k^2 v_x^2/4} \right] \right\} \right. \\
& \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \Delta_{\text{int}}(k') \left\{ \frac{-2it^2 v_x}{q^2} \text{Re} \left[ \frac{1}{(\omega_n - ik'v_x/2)(\omega_n - ikv_x/2)} \right] - \frac{i\chi^2 v_x}{q^2} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \text{Re} \left[ \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} + \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right] \right\} \right. \\
& \left. + iv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \Delta(k') \text{Re} \left\{ \frac{2t^2(t^2 - \chi^2)}{q^4} \frac{1}{(\omega_n - ik'v_x/2)(\omega_n - ikv_x/2)} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{4t^2\chi^2}{q^4} \left[ \frac{(\omega_n - ik'v_x/2)}{(\omega_n - ikv_x/2)[(\omega_n - ik'v_x/2)^2 + q^2]} + \frac{(\omega_n - ikv_x/2)}{(\omega_n - ik'v_x/2)[(\omega_n - ikv_x/2)^2 + q^2]} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\chi^2 t^2}{q^4} \left[ \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} + \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\chi^4}{q^4} \left[ \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} + \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right] \right\} \right\}.
\end{aligned} \tag{B.22}$$

Итоговое уравнение самосогласования (B.22) можно привести к виду (3.11), представленному в основном тексте. Несложно увидеть, что неоднородная часть ядра обнуляется в пределе  $\chi \rightarrow 0$  при произвольной амплитуде туннелирования  $t$ . Мы также проверили, что выражения (B.22) согласуются с соответствующими формулами в отсутствие туннельной связи между слоями, которые мы вывели независимо из уравнений Эйленберга (3.10), способом аналогичным изложенному в этом приложении. Соответствующее уравнение самосогласования при  $t = 0$  и  $\chi_L = -\chi_R = \chi$  имеет вид, похожий на (3.11), но со следующим ядром

$$K(k, k') = 2\pi\delta(k - k')K_h(k) + \tag{B.23a}$$

$$+ 4\pi\lambda T \text{Re} \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\chi^2 v_F \cos \varphi}{\{[\omega_n + ikv_F \cos(\varphi)/2]^2 + \chi^2\} \{[\omega_n + ik'v_F \cos(\varphi)/2]^2 + \chi^2\}},$$

$$K_h(k) = 4\pi\lambda T \text{Re} \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{\omega_n + i\chi}{(\omega_n + i\chi)^2 + (k^2 v_F^2 \cos^2 \varphi)/4}. \tag{B.23b}$$

# Приложение С

## Вывод уравнений (3.12)-(3.15)

Здесь мы представляем вывод уравнений (3.12)-(3.15) в основном тексте. Во-первых, мы приводим детали вывода уравнения Гинзбурга – Ландау (3.12) и содержащихся в нём коэффициентов (3.13). Во-вторых, мы получаем уравнение на критическую температуру образования локализованного состояния (3.14) и разложение его решения вблизи  $T_{c0}$  (3.15).

Сначала необходимо выполнить градиентное разложение в однородной части ядра (3.11с), входящего в уравнение самосогласования (3.11а). Для удобства, мы определим функцию  $K_h(k)$ , как

$$K_h(k, k') = 2\pi\delta(k - k')K_h(k) . \quad (\text{C.1})$$

Раскладывая её по  $k$  до второго порядка, мы находим

$$\begin{aligned} K_h(k) &= 4\pi\lambda T \text{Re} \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{q^2} \left[ \frac{t^2\omega_n}{(\omega_n^2 + k^2v^2/4)} + \frac{\chi^2(\omega_n - iq)}{(\omega_n - iq)^2 + k^2v^2/4} \right] \\ &\approx 4\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \frac{1}{q^2} \left[ \frac{t^2}{\omega_n} + \frac{\chi^2\omega_n}{\omega_n^2 + q^2} - \frac{k^2v^2}{4} \left( \frac{t^2}{\omega_n^3} + \frac{\chi^2\omega_n(\omega_n^2 - 3q^2)}{(\omega_n^2 + q^2)^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Здесь  $q = \sqrt{\chi^2 + |t|^2}$  и  $v = v_F \cos(\varphi)$ . В уравнении (C.2) можно провести суммирование по Мацубаровским частотам, используя следующие соотношения

$$\sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\omega_n} \approx \frac{\ln(2\gamma\omega_D/\pi T)}{2\pi T}, \quad \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\omega_n^3} = \frac{7\zeta(3)}{8\pi^3 T^3}, \quad (\text{C.3a})$$

$$\sum_{\omega_n > 0} \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + q^2} \approx \frac{\ln(2\gamma\omega_D/\pi T)}{2\pi T} + \frac{1}{2\pi T} \text{Re} \left[ \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} - i\frac{q}{2\pi T}\right) \right], \quad (\text{C.3b})$$

$$\sum_{\omega_n > 0} \frac{\omega_n(\omega_n^2 - 3q^2)}{(\omega_n^2 + q^2)^3} = -\frac{1}{16\pi^3 T^3} \text{Re} \left[ \psi_2\left(\frac{1}{2} - i\frac{q}{2\pi T}\right) \right], \quad (\text{C.3c})$$

где  $\gamma \approx 1.78$ ,  $\omega_D$  – дебаевская частота,  $\zeta(x)$  дзета-функция Римана,  $\psi(x)$  обозначает дигамма-функцию, а  $\psi_2(x) = d^2\psi/dx^2$ . Подставляя выражения (C.3) в уравнение (C.2) и выполняя

несложное интегрирование по направлениям импульса, мы получаем искомое разложение однородной части ядра. Таким образом, в отсутствие доменной стенки (при однородном сдвиге зон), данное разложение приводит нас к линеаризованному уравнению самосогласования

$$\left[ -\frac{v_F^2 k^2}{16} \left( \frac{7\zeta(3)t^2}{8\pi^3 T^3} - \frac{\chi^2}{16\pi^3 T^3} \operatorname{Re} \left[ \psi_2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] \right) \right. \\ \left. - \frac{q^2}{4\pi T} \ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) + \frac{\chi^2}{4\pi T} \operatorname{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] \right] \Delta(k) = 0. \quad (\text{C.4})$$

Теперь перейдём к рассмотрению неоднородной части ядра  $K_{\text{inh}}(k, k') \equiv [K(k, k') - K_h(k, k')]$  в уравнении (3.11) и положим в ней  $k = k' = 0$

$$K_{\text{inh}}(0, 0) = 4\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi v \chi^2 (\omega_n^2 - t^2)}{2\pi \omega_n^2 (\omega_n^2 + q^2)^2}. \quad (\text{C.5})$$

Выполним суммирование по мацубаровским частотам в выражении (C.5)

$$\sum_{\omega_n} \frac{(\omega_n^2 - t^2)}{\omega_n^2 (\omega_n^2 + q^2)^2} = -\frac{q^3 + qt^2 (2 + \cosh(\frac{q}{T})) - (q^2 + 3t^2) T \sinh(\frac{q}{T})}{16q^5 T^2 \cosh^2(\frac{q}{2T})}, \quad (\text{C.6})$$

а также проинтегрируем по направлениям импульса, получив тем самым дополнительный вклад в линеаризованное уравнение самосогласования, описывающий дельта-функциональный вклад. Объединяя уравнения (B.22) и (C.1)-(C.6), мы приходим к уравнению самосогласования (3.12) в основном тексте с коэффициентами, определёнными в (3.13).

Пользуясь известным решением задачи для частицы в дельта-яме, мы получаем следующее уравнение, определяющее критическую температуру для локализованного состояния

$$\frac{q^2}{4\pi T} \ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) - \frac{\chi^2}{4\pi T} \operatorname{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] = \frac{2Mq^4 \alpha^2}{32\pi^2 T^2}. \quad (\text{C.7})$$

Теперь произведём в обеих частях уравнения разложение по малым  $\chi/T_{c0}$ ,  $t/T_{c0}$ ,  $q/T_{c0} \ll 1$ . Начнём с правой части:

$$2M\alpha^2 = \frac{\chi^4 [(q/T)^3 + (q/T)(t/T)^2(2 + \cosh(q/T)) - ((q/T)^2 + 3(t/T)^2 \sinh(q/T))]^2}{T^4 \left[ \frac{14\zeta(3)t^2}{16\pi^3 T^3} - \frac{\chi^2}{16\pi^3 T^3} \operatorname{Re} \left( \psi_2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right) \right] (q/T)^{10} \cosh^4(q/2T)}. \quad (\text{C.8})$$

Производя разложение в знаменателе, получим

$$\frac{14\zeta(3)t^2}{16\pi^3 T^3} - \frac{\chi^2}{16\pi^3 T^3} \operatorname{Re} \left( \psi_2 \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right) \approx \\ \approx -\frac{\psi_2}{4\pi T} \left( \frac{q}{2\pi T} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\chi}{2\pi T} \right)^2 \left( \frac{\psi_4}{2\psi_2} - \frac{1}{4!} \frac{\psi_6}{\psi_2} \left( \frac{q}{2\pi T} \right)^2 + \frac{1}{6!} \frac{\psi_8}{\psi_2} \left( \frac{q}{2\pi T} \right)^4 \right) + \dots \right]. \quad (\text{C.9})$$

Для правой части в целом, находим

$$\frac{2Mq^2 \alpha^2 \pi}{16\pi^2 T} \approx -\frac{1}{\psi_2} \left( \frac{\chi}{T} \right)^4 \left[ \frac{1}{36} - \frac{1}{60} \left( \frac{t}{T} \right)^2 - \frac{1}{90} \left( \frac{\chi}{T} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ 1 + \tilde{\chi}^2 \left[ \frac{\psi_4}{2\psi_2} - \frac{1}{4!} \frac{\psi_6}{\psi_2} \tilde{q}^2 + \frac{1}{6!} \frac{\psi_8}{\psi_2} \tilde{q}^4 \right] + \tilde{\chi}^4 \left[ \left( \frac{\psi_4}{2\psi_2} \right)^2 - \frac{\psi_4}{\psi_2} \frac{1}{4!} \frac{\psi_6}{\psi_2} \tilde{q}^2 \right] + \tilde{\chi}^6 \left( \frac{\psi_4}{2\psi_2} \right)^3 \right\}, \quad (\text{C.10})$$

где  $\tilde{\chi} = \chi/2\pi T_{c0}$ ,  $\tilde{q} = q/2\pi T_{c0}$ . Теперь необходимо подставить полученное разложение в уравнение самосогласования. Мы будем искать решение для критической температуры образования локализованного состояния в виде

$$\frac{T}{T_{c0}} = 1 + \epsilon ; \quad \epsilon = \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_6 , \quad (\text{C.11})$$

где  $\epsilon_{2,4,6}$  содержат слагаемые  $\propto (\chi/T_{c0})^n (t/T_{c0})^m$  с  $m+n = 2, 4$ , и  $6$ , соответственно. Используя следующие разложения

$$\ln(1 + \epsilon) \approx (\epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_6) - \frac{1}{2}(\epsilon_2^2 + 2\epsilon_2\epsilon_4) + \frac{1}{3}\epsilon_2^3, \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \approx 1 - 2(\epsilon_2 + \epsilon_4) + 3\epsilon_2^2, \quad \frac{1}{(1 + \epsilon)^4} \approx 1 - 4\epsilon_2, \quad (\text{C.13})$$

мы получаем следующее уравнение определяющее коэффициенты  $\epsilon_j$

$$\begin{aligned} & \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_6 - \frac{1}{2}(\epsilon_2^2 + 2\epsilon_2\epsilon_4) + \frac{1}{3}\epsilon_2^3 - \\ & - \frac{\chi^2}{q^2} \left[ \frac{\psi_2}{2} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 [1 - 2(\epsilon_2 + \epsilon_4) + 3\epsilon_2^2] - \frac{\psi_4}{4!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^4 (1 - 4\epsilon_2) + \frac{\psi_6}{6!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^6 \right] = \\ & = -\frac{4\pi^4}{\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 (1 - 4\epsilon_2) \left[ \frac{1}{36} - \frac{1}{60} \left( \frac{t}{T_{c0}} \right)^2 - \frac{1}{90} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^2 + \left( \frac{\chi}{2\pi T_{c0}} \right)^2 \frac{\psi_4}{2\psi_2} \frac{1}{36} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Приравнивая члены одинаковых порядков, находим

$$\epsilon_2 = \frac{\psi_2}{2} \left( \frac{\chi}{2\pi T_{c0}} \right)^2, \quad (\text{C.15a})$$

$$\epsilon_4 = -\frac{3}{2}\epsilon_2^2 - \frac{\psi_4}{4!} \left( \frac{\chi}{2\pi T_{c0}} \right)^2 \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 - \frac{\pi^2}{36\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4, \quad (\text{C.15b})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_6 = & -\epsilon_2\epsilon_4 + \frac{8}{3}\epsilon_2^3 + 4\epsilon_2 \frac{\psi_4}{4!} \left( \frac{\chi}{2\pi T_{c0}} \right)^2 \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 + 4\epsilon_2 \frac{\pi^2}{36\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 + \\ & + \frac{\pi^2}{60\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^2 + \frac{\pi^2}{90\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^6 - \frac{\pi^2\psi_4}{72\psi_2^2(2\pi)^2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^6. \end{aligned} \quad (\text{C.15c})$$

Будем отсчитывать её от критической температуры  $T_c(\chi, t)$  перехода в однородное состояние

$$\begin{aligned} \frac{T_{cw}(\chi, t) - T_c(\chi, t)}{T_{c0}} \approx & -\frac{\pi^2}{36\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 + \frac{\pi^2}{60\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 \left( \frac{t}{T_{c0}} \right)^2 + \\ & + \frac{\pi^2}{\psi_2} \left( \frac{1}{90} - \frac{\psi_4}{72\psi_2(2\pi)^2} + \frac{5\psi_2}{72(2\pi)^2} \right) \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^6. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Находя численные значения коэффициентов, мы получаем разложение (3.15) в основном тексте.

# Приложение D

## Вывод ядра (3.20)

Здесь мы приводим вывод ядра в уравнении самосогласования в триплетном случае. Ход действий аналогичен вычислениям в Приложении B. Решение однородной системы в уравнениях (3.19) такое же, как и в синглетном случае

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = e^{-2\omega_n x/v_x} \left[ \frac{C_1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q} \begin{pmatrix} -\chi/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi/t \end{pmatrix} \right] + \tag{D.1}$$

$$+ e^{(-2\omega_n+2iq)x/v_x} C_3 \frac{t}{2q} \begin{pmatrix} 1 \\ t/(q-\chi) \\ -t/(q+\chi) \\ -1 \end{pmatrix} + e^{(-2\omega_n-2iq)x/v_x} C_4 \frac{t}{2q} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/(q+\chi) \\ t/(q-\chi) \\ -1 \end{pmatrix},$$

где  $q = \sqrt{\chi^2 + t^2}$ , а  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) – произвольные постоянные. Пренебрегая куперовским спариванием электронов внутри отдельных слоёв, мы принимаем  $C_1 = 0$  в дальнейшем. Частное решение найдём методом вариации постоянных, который приводит к набору уравнений:

$$iv_x \frac{\partial C_2}{\partial x} = 0, \tag{D.2a}$$

$$iv_x \frac{\partial C_3}{\partial x} = -2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}\omega_n e^{(2\omega_n-2iq)x/v_x}, \tag{D.2b}$$

$$iv_x \frac{\partial C_4}{\partial x} = 2\Delta_{\text{int}}(x) \text{sgn}\omega_n e^{(2\omega_n+2iq)x/v_x}. \tag{D.2c}$$

Выполняя интегрирование, находим частные решения

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \frac{2i \operatorname{sgn}(\omega_n) t}{v_x} \frac{1}{2q} \int_{c_3}^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n + 2iq)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_- \\ -t/q_+ \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

$$- \frac{2i \operatorname{sgn}(\omega_n) t}{v_x} \frac{1}{2q} \int_{c_4}^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n - 2iq)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_+ \\ t/q_- \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \frac{t}{\sqrt{2q}} e^{-2\omega_n x/v_x} \begin{pmatrix} -\chi/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi/t \end{pmatrix},$$

где мы определили  $q_{\pm} = q \pm \chi$ , а  $c_i$  ( $i = 2, 3, 4$ ) есть произвольные постоянные. Теперь мы запишем решения в областях постоянного сдвига зон (для  $x > 0$  и  $x < 0$ ) и выполним их сшивку в  $x = 0$ . Постоянные  $c_i$  выбираем так, чтобы аномальные средние  $f_{ij}$  обнулялись при  $|x| \rightarrow \infty$ .

Решение для положительных  $\omega_n$ ,  $v_x > 0$  при  $x < 0$  есть

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \frac{2i t}{v_x 2q_L} \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2(\omega_n - iq_L)u/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{L-} \\ -t/q_{L+} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.4})$$

$$- \frac{2i t}{v_x 2q_L} \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2(\omega_n + iq_L)u/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{L+} \\ t/q_{L-} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Для  $\omega_n$ ,  $v_x > 0$  и  $x > 0$  имеем

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_R} e^{-2\omega_n x/v_x} \begin{pmatrix} -\chi_R/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_R/t \end{pmatrix} + e^{-2(\omega_n - iq_R)x/v_x} C_3 \frac{t}{2q_R} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{R-} \\ -t/q_{R+} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$+ e^{-2(\omega_n + iq_R)x/v_x} C_4 \frac{t}{2q_R} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{R+} \\ t/q_{R-} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2i t}{v_x 2q_R} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n + 2iq_R)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{R-} \\ -t/q_{R+} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{2i t}{v_x 2q_R} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{(-2\omega_n - 2iq_R)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{R+} \\ t/q_{R-} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Требуя непрерывности решений (D.4) и (D.5) в точке  $x = 0$ , получаем линейную систему на коэффициенты

$$-\frac{\chi_R}{\sqrt{2}q_R}C_2 + \frac{t}{2q_R}C_3 + \frac{t}{2q_R}C_4 = \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_L} \bar{d}_{--} - \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_L} \bar{d}_{-+}, \quad (\text{D.6a})$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}q_R}C_2 + \frac{t^2}{2q_Rq_{R-}}C_3 - \frac{t^2}{2q_Rq_{R+}}C_4 = \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_Lq_{L-}} \bar{d}_{--} + \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_Lq_{L+}} \bar{d}_{-+}, \quad (\text{D.6b})$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}q_R}C_2 - \frac{t^2}{2q_Rq_{R+}}C_3 + \frac{t^2}{2q_Rq_{R-}}C_4 = -\frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_Lq_{L+}} \bar{d}_{--} - \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{q_Lq_{L-}} \bar{d}_{-+}. \quad (\text{D.6c})$$

Здесь мы также ввели следующие величины:

$$\bar{d}_{-\mp} = \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(u) e^{2(\omega_n \mp iq_L)u/v_x}. \quad (\text{D.7})$$

Решая систему, мы находим

$$C_2 = \frac{2i}{v_x} (\bar{d}_{--} - \bar{d}_{-+}) \frac{t (q_{R+}^2 \chi_L - q_{L+} (q_{L+} - 2\chi_L) \chi_R - 2q_{R+} \chi_L \chi_R)}{\sqrt{2}q_L q_{R+} (q_L^2 - \chi_L^2)}, \quad (\text{D.8a})$$

$$C_3 = \frac{2i}{v_x} \frac{q_{R+} (q_{R+} - 2\chi_R) q_{L+} (q_L - \chi_L) (\bar{d}_{--} - \bar{d}_{-+})}{2q_R q_L (q_L^2 - \chi_L^2)} + \quad (\text{D.8b})$$

$$+ \frac{2i}{v_x} \frac{(q_{R+} - 2\chi_R) [(\bar{d}_{--} + \bar{d}_{-+}) (q_L q_{R+} - q_{L+} \chi_R) + 2\bar{d}_{--} \chi_L \chi_R]}{2q_R q_L (q_L^2 - \chi_L^2)},$$

$$C_4 = -\frac{2i}{v_x} \frac{q_{R+} (q_{R+} - 2\chi_R) q_{L+} (q_L - \chi_L) (\bar{d}_{-+} - \bar{d}_{--})}{2q_R q_L (q_L^2 - \chi_L^2)} \quad (\text{D.8c})$$

$$- \frac{2i}{v_x} \frac{q_{R+} (q_{R+} - 2\chi_R) [(\bar{d}_{--} + \bar{d}_{-+}) (q_L q_{R+} - q_{L+} \chi_R) + 2\bar{d}_{-+} \chi_L \chi_R]}{2q_R q_L (q_L^2 - \chi_L^2)}.$$

Чтобы построить решение для  $\omega_n < 0$  и  $v_x < 0$  можно воспользоваться симметрией уравнений Эйленберга (3.19) ( $i, j = 1, 2$ ) ( $i, j = 1, 2$ )

$$f_{ij}(x, v_x, \omega_n, t, \chi) = f_{ij}(x, -v_x, -\omega_n, -t, -\chi). \quad (\text{D.9})$$

Теперь найдём решения для отрицательных мацубаровских частот  $\omega_n$  и положительных проекций скорости  $v_x$ , при  $x > 0$  они имеют вид

$$\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} = \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_R} \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{-2(|\omega_n| + iq_R)u/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{R-} \\ -t/q_{R+} \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$- \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_R} \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{-2(|\omega_n| - iq_R)u/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{R+} \\ t/q_{R-} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При  $\omega_n < 0$ ,  $v_x > 0$  и  $x < 0$  имеем

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{21} \\ f_{22} \end{pmatrix} &= C_2 \frac{t}{\sqrt{2}q_L} e^{2|\omega_n|x/v_x} \begin{pmatrix} -\chi_L/t \\ 1 \\ 1 \\ \chi_L/t \end{pmatrix} + e^{2(|\omega_n|+iq_L)x/v_x} C_3 \frac{t}{2q_L} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{L-} \\ -t/q_{L+} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&+ e^{2(|\omega_n|-iq_L)x/v_x} C_4 \frac{t}{2q_L} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{L+} \\ t/q_{L-} \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_L} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{2(|\omega_n|+iq_L)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ t/q_{L-} \\ -t/q_{L+} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&- \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_L} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{2(|\omega_n|-iq_L)(x-s)/v_x} \begin{pmatrix} 1 \\ -t/q_{L+} \\ t/q_{L-} \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Непрерывно сшивая решения (D.11) и (D.10) при  $x = 0$ , получаем линейную систему, определяющую коэффициенты:

$$-\frac{\chi_L}{\sqrt{2}q_L} C_2 + \frac{t}{2q_L} C_3 + \frac{t}{2q_L} C_4 = \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_R} \bar{d}_{+-} - \frac{2i}{v_x} \frac{t}{2q_R} \bar{d}_{++}, \tag{D.12a}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}q_L} C_2 + \frac{t^2}{2q_L q_{L-}} C_3 - \frac{t^2}{2q_L q_{L+}} C_4 = \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_R q_{R-}} \bar{d}_{+-} + \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_R q_{R+}} \bar{d}_{++}, \tag{D.12b}$$

$$\frac{t}{\sqrt{2}q_L} C_2 - \frac{t^2}{2q_L q_{L+}} C_3 + \frac{t^2}{2q_L q_{L-}} C_4 = -\frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_R q_{R+}} \bar{d}_{+-} - \frac{2i}{v_x} \frac{t^2}{2q_R q_{R-}} \bar{d}_{++}. \tag{D.12c}$$

Здесь мы переобозначили

$$\bar{d}_{\pm\pm} = \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(u) e^{(-2|\omega_n| \pm 2iq_R)u/v_x}. \tag{D.13}$$

Решение данной системы:

$$C_2 = \frac{2i}{v_x} (\bar{d}_{+-} - \bar{d}_{++}) \frac{t (-q_R^2 \chi_L + q_{L+} (q_{L+} - 2\chi_L) \chi_R + 2q_{R+} \chi_L \chi_R)}{\sqrt{2}q_R q_L (q_R^2 - \chi_R^2)}, \tag{D.14a}$$

$$C_3 = \frac{2i}{v_x} \frac{q_{L+} (q_{L+} - 2\chi_L) q_{L+} q_R (\bar{d}_{+-} + \bar{d}_{++})}{2q_L q_R (q_R^2 - \chi_R^2)} + \tag{D.14b}$$

$$+ \frac{2i}{v_x} \frac{q_{L+} (q_{L+} - 2\chi_L) [\bar{d}_{+-} (q_{R+} - \chi_L) (q_R - \chi_R) - \bar{d}_{++} q_{R+} (q_R + \chi_L - \chi_R)]}{2q_L q_R (q_R^2 - \chi_R^2)},$$

$$C_4 = -\frac{2i}{v_x} \frac{q_{L+} (q_{L+} - 2\chi_L) [(\bar{d}_{+-} + \bar{d}_{++}) q_{L+} q_R]}{2q_L q_R (q_R^2 - \chi_R^2)} - \tag{D.14c}$$

$$\frac{2i}{v_x} \frac{q_{L+} (q_{L+} - 2\chi_L) [\bar{d}_{++} (q_{R+} - \chi_L) (q_R - \chi_R) - \bar{d}_{+-} q_{R+} (q_R + \chi_L - \chi_R)]}{2q_L q_R (q_R^2 - \chi_R^2)}.$$

Непрерывное решение для  $\omega_n > 0$  и  $v_x < 0$  может быть получено из уравнений (D.11), (D.10), (D.14) и симметричного соотношения (D.9). Для подстановки полученных решений в уравнение самосогласования, в котором суммирование происходит по положительным частотам  $\omega_n > 0$ , а интегрирование по области  $v_x > 0$ , запишем следующие суммы решений.

При  $x < 0$  имеем

$$\begin{aligned} f_{12}^-(x) &\equiv f_{12}(\omega_n > 0, v_x > 0, x < 0) + f_{12}(\omega_n > 0, v_x < 0, x < 0) \\ &\quad + f_{12}(\omega_n < 0, v_x > 0, x < 0) + f_{12}(\omega_n < 0, v_x < 0, x < 0) = \\ &= \frac{4i}{|v_x|} \int_{-\infty}^0 du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{2|\omega_n|u/|v_x|} \cos\left(\frac{2q_L u}{|v_x|}\right) + C_3 e^{2(|\omega_n|+iq_L)x/|v_x|} \\ &\quad - C_4 e^{2(|\omega_n|-iq_L)x/|v_x|} + \frac{4i}{v_x} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{2|\omega_n|(x-s)/|v_x|} \cos\left(\frac{2q_L(x-s)}{|v_x|}\right). \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

При этом постоянные  $C_3$  и  $C_4$  определяются уравнениями (D.14). Выпишем явные выражения для данных констант в случае  $\chi_L = -\chi_R = \chi$

$$C_3 = \frac{2i}{|v_x| q^2} [t^2 \bar{d}_{+-} + \chi^2 \bar{d}_{++}], \quad (\text{D.16a})$$

$$C_4 = -\frac{2i}{|v_x| q^2} [t^2 \bar{d}_{++} + \chi^2 \bar{d}_{+-}]. \quad (\text{D.16b})$$

При  $x > 0$  же находим

$$\begin{aligned} f_{12}^+(x) &\equiv f_{12}(\omega_n > 0, v_x > 0, x > 0) + f_{12}(\omega_n > 0, v_x < 0, x > 0) \\ &\quad + f_{12}(\omega_n < 0, v_x > 0, x > 0) + f_{12}(\omega_n < 0, v_x < 0, x > 0) = \\ &= \frac{4i}{|v_x|} \int_0^{+\infty} du \Delta_{\text{int}}(x+u) e^{-2|\omega_n|u/|v_x|} \cos\left(\frac{2q_R u}{|v_x|}\right) + C_3 e^{-2(|\omega_n|-iq_R)x/|v_x|} \\ &\quad - C_4 e^{-2(|\omega_n|+iq_R)x/|v_x|} + \frac{4i}{|v_x|} \int_0^x ds \Delta_{\text{int}}(s) e^{-2|\omega_n|(x-s)/|v_x|} \cos\left(\frac{2q_R(x-s)}{|v_x|}\right) \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

Постоянные  $C_3$  и  $C_4$  описываются равенствами (D.8). Соответствующие выражения в случае  $\chi_L = -\chi_R = \chi$

$$C_3 = \frac{2i}{|v_x| q^2} [t^2 \bar{d}_{--} + \chi^2 \bar{d}_{-+}], \quad (\text{D.18a})$$

$$C_4 = -\frac{2i}{|v_x| q^2} [\chi^2 \bar{d}_{--} + t^2 \bar{d}_{-+}]. \quad (\text{D.18b})$$

Итоговое уравнение самосогласования имеет вид

$$\Delta_{\text{int}}(x > 0) = -i\pi\lambda\Gamma \sum_{\omega_n > 0} \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} f_{12}^+(x, \mathbf{n}), \quad (\text{D.19})$$

$$\Delta_{\text{int}}(x < 0) = -i\pi\lambda\Gamma \sum_{\omega_n > 0} \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} f_{12}^-(x, \mathbf{n}). \quad (\text{D.20})$$

Для симметричного сдвига зон, имеющего профиль ступеньки, и аномальная функция Грина  $f_{12}(x)$  и сверхпроводящий параметр порядка  $\Delta_{\text{int}}(x)$  являются чётными функциями координаты. Значит в этом случае справедливы равенства  $\bar{d}_{-\mp} = \bar{d}_{+\pm}$ . Переходя к преобразованию Фурье сверхпроводящей щели

$$\Delta_{\text{int}}(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \Delta_{\text{int}}(k) e^{ikx}, \quad (\text{D.21})$$

мы находим следующее уравнение самосогласования в импульсном представлении

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{int}}(k) = & -i\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{v_x > 0} \frac{d\mathbf{n}}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \Delta_{\text{int}}(k') 2\pi\delta(k - k') 4i\text{Re} \left[ \frac{(\omega_n - iq)}{(\omega_n - iq)^2 + k^2 v_x^2 / 4} \right] \right. \\ & - iv_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk'}{2\pi} \Delta_{\text{int}}(k') \text{Re} \left\{ \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right\} \right. \\ & \left. - \frac{t^2}{q^2} \left[ \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} + \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right] \right. \\ & \left. - \frac{\chi^2}{q^2} \left[ \frac{1}{(\omega_n - iq - ik'v_x/2)(\omega_n + iq - ikv_x/2)} + \frac{1}{(\omega_n + iq - ik'v_x/2)(\omega_n - iq - ikv_x/2)} \right] \right\}, \quad (\text{D.22}) \end{aligned}$$

которое воспроизводит уравнение (3.20) в основном тексте.

# Приложение Е

## Вывод уравнений (3.21) - (3.24)

Здесь мы приводим вывод уравнения Гинзбурга – Ландау в случае триплетного параметра порядка. Для начала, мы раскладываем однородную часть  $K_h(k)$  ядра уравнения самосогласования (3.20), определённую как

$$K_h(k, k') = 2\pi\delta(k - k') K_h(k) \quad (\text{E.1})$$

до второго порядка по импульсу  $k$

$$\begin{aligned} K_h(k) &= 4\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{(\omega_n - iq)}{(\omega_n - iq)^2 + k^2 v_x^2 / 4} \right] \\ &\approx 4\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} \left[ \frac{\omega_n}{\omega_n^2 + q^2} - \frac{k^2 v_F^2 \cos^2 \varphi}{4} \cdot \frac{\omega_n (\omega_n^2 - 3q^2)}{(\omega_n^2 + q^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.2a})$$

Выполняя суммирование по мадубаровским частотам и интегрирование по направлениям импульса, аналогично Приложению С, мы получаем однородную часть линеаризованного уравнения самосогласования

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{4\pi T} \operatorname{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] + \frac{k^2 v_F^2}{16} \cdot \frac{1}{16\pi^3 T^3} \operatorname{Re} \left[ \psi'' \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] \right) \Delta_{\text{int}}(k) = \\ = \frac{1}{4\pi T} \ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) \Delta_{\text{int}}(k). \end{aligned} \quad (\text{E.3a})$$

Вычисляя неоднородную часть ядра  $K_{\text{inh}}(k, k') = K(k, k') - K_h(k, k')$  в точке  $k = k' = 0$

$$\begin{aligned} K_{\text{inh}}(0, 0) &= 4\pi\lambda T \sum_{\omega_n > 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{2\pi} v_F \cos \varphi \frac{\chi^2}{q^2} \cdot \frac{q^2}{(\omega_n^2 + q^2)^2} = \\ &= 4\pi\lambda T v_F \cdot \frac{\chi^2 \left( \sinh \left( \frac{q}{T} \right) - \frac{q}{T} \right)}{16\pi q^3 T \cosh^2 \left( \frac{q}{2T} \right)} = 4\pi\lambda T \frac{v_F}{T^2} \frac{\left( \frac{\chi}{T} \right)^2 \left( \sinh \left( \frac{q}{T} \right) - \frac{q}{T} \right)}{16\pi \left( \frac{q}{T} \right)^3 \cosh^2 \left( \frac{q}{2T} \right)}, \end{aligned} \quad (\text{E.4a})$$

и подставляя её обратно в уравнение самосогласования, мы записываем его в форме

$$\frac{k^2}{2M} \Delta_{\text{int}}(k) - \frac{\beta}{4\pi T} \int \Delta_{\text{int}}(k') \frac{dk'}{2\pi} = E \Delta_{\text{int}}(k), \quad (\text{E.5})$$

аналогичной уравнению (3.21). Зависящие от температуры коэффициенты имеют вид

$$\frac{1}{2M} = -\frac{v_F^2}{16} \cdot \frac{1}{16\pi^3 T^3} \operatorname{Re} \left[ \psi'' \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right], \quad (\text{E.6a})$$

$$\beta = \frac{v_F \left( \frac{\chi}{T} \right)^2 \left( \sinh \left( \frac{q}{T} \right) - \frac{q}{T} \right)}{4T \left( \frac{q}{T} \right)^3 \cosh^2 \left( \frac{q}{2T} \right)}, \quad (\text{E.6b})$$

$$E = -\frac{1}{4\pi T} \ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) + \frac{1}{4\pi T} \operatorname{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right]. \quad (\text{E.6c})$$

Используя известное решение задачи о частице в дельта-яме, находим уравнение, определяющее критическую температуру образования локализованного состояния  $T_{cw}(\chi, t)$

$$E(T_{cw}) = -\frac{M [\beta(T_{cw})]^2}{32\pi^2 T_{cw}^2}. \quad (\text{E.7})$$

Вблизи  $T_{c0}$  будем искать  $T_{cw}(\chi, t)$  в виде разложения по малым параметрам  $\chi/T_{c0}$ ,  $t/T_{c0}$ ,  $q/T_{c0} \ll 1$

$$\frac{T}{T_{c0}} = 1 + \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_6, \quad (\text{E.8})$$

где  $\epsilon_{2,4,6}$  содержат слагаемые  $\propto (\chi/T_{c0})^n (t/T_{c0})^m$  с  $m+n=2, 4$ , и  $6$ , соответственно. Раскладывая по малым параметрам обе части уравнения (E.7)

$$\ln \left( \frac{T}{T_{c0}} \right) - \operatorname{Re} \left[ \psi \left( \frac{1}{2} \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] = -\frac{\pi^2 \left( \frac{\chi}{T} \right)^4 \left( \sinh \left( \frac{q}{T} \right) - \frac{q}{T} \right)^2}{\operatorname{Re} \left[ \psi'' \left( \frac{1}{2} - i \frac{q}{2\pi T} \right) \right] \left( \frac{q}{T} \right)^6 \cosh^4 \left( \frac{q}{2T} \right)}, \quad (\text{E.9a})$$

получаем уравнение, определяющее  $\epsilon_j$

$$\begin{aligned} & \epsilon_2 + \epsilon_4 + \epsilon_6 - \frac{1}{2}(\epsilon_2^2 + 2\epsilon_2\epsilon_4) + \frac{1}{3}\epsilon_2^3 - \\ & - \left[ \frac{\psi_2}{2} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 \left[ 1 - 2(\epsilon_2 + \epsilon_4) + 3\epsilon_2^2 \right] - \frac{\psi_4}{4!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^4 (1 - 4\epsilon_2) + \frac{\psi_6}{6!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^6 \right] = \\ & = -\frac{\pi^2}{\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 (1 - 4\epsilon_2) \left[ \frac{1}{36} - \frac{1}{90} \left( \frac{q}{T_{c0}} \right)^2 + \frac{\psi_4}{2\psi_2} \frac{1}{36} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.10a})$$

Приравнивая слагаемых одинаковых порядков, находим значения  $\epsilon_{2,4,6}$

$$\epsilon_2 = \frac{\psi_2}{2} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2, \quad (\text{E.11a})$$

$$\epsilon_4 = -\frac{3\epsilon_2^2}{2} - \frac{\psi_4}{4!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^4 - \frac{\pi^2}{\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 \frac{1}{36} \quad (\text{E.11b})$$

$$\begin{aligned} \epsilon_6 = & -\frac{1}{3}\epsilon_2^3 - \epsilon_2\epsilon_4 + 3\epsilon_2^3 - 4\frac{\psi_4}{4!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^4 \epsilon_2 + \frac{4}{36} \frac{\pi^2}{\psi_2} \epsilon_2 \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 + \\ & + \frac{\psi_6}{6!} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^6 - \frac{\pi^2}{\psi_2} \left( \frac{\chi}{T_{c0}} \right)^4 \left[ -\frac{1}{90} \left( \frac{q}{T_{c0}} \right)^2 + \frac{\psi_4}{2\psi_2} \frac{1}{36} \left( \frac{q}{2\pi T_{c0}} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{E.11c})$$

которое приводит нас к следующему сдвигу критической температуры образования локализованного состояния в триплетном случае

$$\begin{aligned} \frac{T_{cw}(\chi, t) - T_c(\chi, t)}{T_{c0}} = & -\frac{\pi^2}{36\psi_2} \left(\frac{\chi}{T_{c0}}\right)^4 + \\ & + \frac{\pi^2}{\psi_2} \left[ \frac{5\psi_2}{72(2\pi)^2} + \frac{1}{90} - \frac{\psi_4}{72\psi_2(2\pi)^2} \right] \left( \left(\frac{\chi}{T_{c0}}\right)^4 \left(\frac{t}{T_{c0}}\right)^2 + \left(\frac{\chi}{T_{c0}}\right)^6 \right). \end{aligned} \quad (\text{E.12a})$$

Вычисление коэффициентов приводит нас к разложению (3.24) в основном тексте.

# Приложение F

## Общее решение уравнений Эйленбергера в магнитном поле

Здесь мы представляем решения уравнений Эйленбергера при учёте орбитального и парамагнитного эффектов, как для синглетного, так и для триплетного параметра порядка.

В синглетном случае, подставляя аномальные функции Грина в виде разложения ( $i, j = 1, 2$ )

$$\hat{f}_{ij} = (f_{ij}^0 + (\mathbf{h}\hat{\sigma}) f_{ij}^1) (i\hat{\sigma}_y), \quad (\text{F.1})$$

мы получаем линейную систему с постоянными коэффициентами из 8 уравнений, каждое из которых нетрудно выписать из общих уравнений Эйленбергера (4.2). Её решение имеет вид

$$f_{12}^0 (\omega_n > 0) + f_{12}^0 (-\omega_n) = 2i\omega_n \Delta_{\text{int}} \cdot \frac{P_0}{Q_0}, \quad (\text{F.2a})$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left( (h^2 - q^2)^2 + 2(h^2 + q^2)\omega_n^2 + \omega_n^4 \right) (h^2 + \omega_n^2 + \chi^2) + (h^2 + \omega_n^2) |t|^4 + \\ &\quad + |t|^2 \left( (2\omega_n^2 + \chi^2)(q^2 + \omega_n^2) + h^2(2q^2 + \chi^2) - 2h^4 \right), \\ Q_0 &= \left( h^4 + 2h^2(\omega_n^2 - q^2) + (q^2 + \omega_n^2)^2 \right) \left( h^4 + 2h^2(\omega_n^2 - \chi^2) + (\omega_n^2 + \chi^2)^2 \right) + \\ &\quad + 2|t|^2 \left( \chi^2(h^4 - h^2(q^2 - 2\omega_n^2) + \omega_n^2(\omega_n^2 + q^2)) - (h^2 + \omega_n^2)^2(h^2 - q^2 - \omega_n^2) \right) + \\ &\quad + (h^2 + \omega_n^2)^2 |t|^4. \end{aligned} \quad (\text{F.2b})$$

Здесь  $q = e\mathbf{v}_F \mathbf{A}_1 / c$ . Именно это выражение использовалось для численных расчётов в Разделе 4.3. Можно проверить, что подстановка  $h = 0$  или  $q = 0$  приводит к уравнениям (4.3a) и (4.7), соответственно.

В триплетном случае решение на функции Грина ищем в виде ( $i, j = 1, 2$ )

$$\hat{f}_{ij} = (f_{ij}^0 + f_{ij}^x \hat{\sigma}_x + f_{ij}^y \hat{\sigma}_y) \hat{\sigma}_x (i\hat{\sigma}_y), \quad (\text{F.3})$$

что приводит к линейной системе из 12 уравнений, которые также можно выписать непосредственно из (4.2). Соответствующее решение имеет вид

$$f_{12}^{(x)}(\omega_n > 0) + f_{12}^{(x)}(-\omega_n) = 2i\omega_n \Delta_{\text{int}} \frac{P_x}{Q_{x1} Q_{x2}}, \quad (\text{F.4a})$$

$$P_x = (q^2 + \omega_n^2) [h^4 - 2h^2(q^2 - \omega_n^2) + (q^2 + \omega_n^2)^2] \times \quad (\text{F.4b})$$

$$\times [h_y^4 - 2h_y^2(\chi^2 - \omega_n^2) + (\chi^2 + \omega_n^2)^2 + h_x^2(\chi^2 + h_y^2 + \omega_n^2)] + |t|^2 \left\{ h_x^6 \omega_n^2 + \right.$$

$$+ h_x^4 [q^2 \chi^2 - 2q^2 h_y^2 - (q^2 - 2\chi^2) \omega_n^2 + 4\omega_n^4] +$$

$$+ 2(q^2 + \omega_n^2) \left[ -h_y^6 + h_y^4(q^2 + \chi^2 - \omega_n^2) + \omega_n^2(q^2 + \omega_n^2)(\chi^2 + \omega_n^2) + \right.$$

$$+ h_y^2(-q^2 \chi^2 + 2(q^2 + \chi^2)\omega_n^2 + \omega_n^4) \left. \right] + h_x^2 [q^4 \chi^2 + q^2(2q^2 + \chi^2)\omega_n^2 + (3q^2 + 4\chi^2)\omega_n^4 +$$

$$+ 5\omega_n^6 - h_y^4(4q^2 + 3\omega_n^2) + h_y^2(2q^4 + 3q^2 \chi^2 - (q^2 - 4\chi^2)\omega_n^2 + 2\omega_n^4)] \left. \right\} +$$

$$+ |t|^4 \left\{ (h^2 + \omega_n^2) [h_y^2 q^2 + \omega_n^2(q^2 + \omega_n^2 + h^2)] \right\},$$

$$Q_{x1} = (q^2 + \omega_n^2)(\omega_n^2 + \chi^2) + \omega_n^2 |t|^2, \quad (\text{F.4c})$$

$$Q_{x2} = [(h^2 - q^2)^2 + 2(h^2 + q^2)\omega_n^2 + \omega_n^4] [(h^2 + \omega_n^2)^2 - 2(h^2 - \omega_n^2)\chi^2 + \chi^4] + \quad (\text{F.4d})$$

$$(h^2 + \omega_n^2)^2 |t|^4 - 2|t|^2 (h^2 - q^2 - \omega_n^2)(h^2 + \omega_n^2)^2 +$$

$$+ 2|t|^2 \chi^2 h^2 (h^2 - q^2) + 2|t|^2 \omega_n^2 \chi^2 (2h^2 + q^2) + 2|t|^2 \omega_n^4 \chi^2.$$

Данное выражение использовалось для численных расчётов в Разделе 4.3. Предел  $h = 0$  или  $q = 0$  приводит к уравнениям (4.3b) и (4.10), соответственно.