
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ЭЛЕКТРОННЫЕ СОСТОЯНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ГЕТЕРОСТРУКТУРЫ STIS

(бакалаврская работа)

Студент:

Харавинин Владислав Алексеевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Махлин Юрий Генрихович,
д-р физ.-мат. наук, доц., чл.-кор. РАН

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2025

Аннотация

В данной работе рассматривается влияние формы топологического джозефсоновского контакта на ток-фазовое соотношение. Для описания данной системы используются уравнения Боголюбова - де Жена. Эффекты искривленности учитывались введением криволинейной системы координат, относительно которой контакт имеет прямоугольный вид. Было получено, что дираковский гамильтониан в главном порядке нечувствителен к форме контакта. Главным результатом работы является получение поправки к спектру состояний в коре джозефсоновских вихрей, вызванной неоднородностью формы, и связанного с ней вклада в ток-фазовое соотношение.

Оглавление

1 Введение	4
2 Прямой STIS контакт	6
2.1 Состояния в нулевом магнитном поле	7
2.2 Состояния в коре джозефсоновских вихрей в постоянном однородном маг-	
нитном поле	10
3 Искривленный STIS контакт	12
3.1 Криволинейная система координат	12
3.2 Эрмитов оператор импульса	13
3.3 Влияние кривизны на спектр состояний в коре джозефсоновских вихрей	15
3.4 Влияние кривизны на ток-фазовое соотношение	19
4 Результаты и обсуждения	22

Глава 1

Введение

Работа А.Ю. Китаева [1] об устойчивых к ошибкам квантовым вычислениям привлекла внимание со стороны научного сообщества к системам, позволяющим создавать возбуждения с неабелевой статистикой и управлять ими. В сверхпроводящих системах такими возбуждениями являются майорановские нулевые моды - состояния с нулевой энергией, инвариантные относительно действия оператора зарядового сопряжения. С целью поиска этих состояний, исследовалось множество систем, наиболее изученные из которых: гибридные нанопроволоки в сильных магнитных полях (Majorana nanowires) [2], магнитные атомы на поверхности сверхпроводников (adatoms) [3] и топологические джозефсоновские контакты [4]. Однако, уверенное наблюдение всех признаков майорановских мод не было установлено ни в одной из них. Причиной этому является наличие множества факторов, с которыми можно спутать ожидаемые признаки этих состояний.

Так, в недавних экспериментах по измерению джозефсоновского тока в STIS контактах прямоугольной [5] и кольцевой [6] геометрий, наблюдались особенности зависимостей критического тока от магнитного поля, приложенного нормально к поверхности контакта. Отклонения от идеальной фраунгоферовской картины, а именно отличие от нуля критического тока при полях, соответствующих целому числу квантов потока, связывают как с майорановскими модами, так и с состояниями в коре джозефсоновских вихрей [7]. Помимо них, на критический ток в системе влияют различные дефекты, например, примеси в топологическом изоляторе [8], неоднородность сверхпроводников [9] и ширины контакта [10], а также сама форма контакта.

В настоящей работе исследуется влияние формы STIS контакта (см рис. 1.1) на температурную зависимость критического тока, полученные выражения позволяют оценить величину джозефсоновского диодного эффекта, связанного с асимметрией контакта.

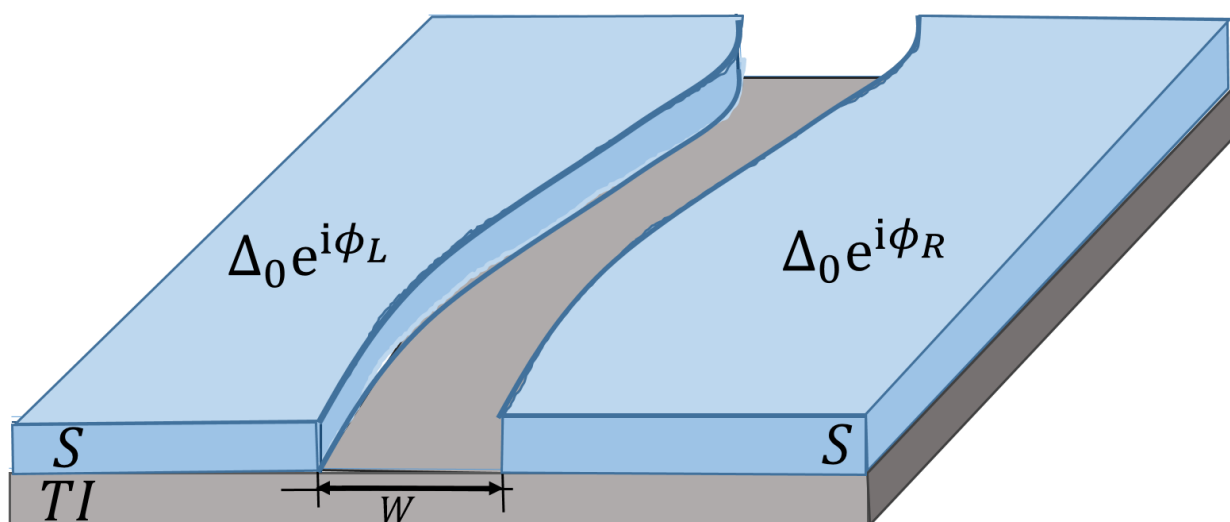


Рис. 1.1: Схема искривленного STIS контакта: голубым цветом обозначены сверхпроводящие области, серым цветом изображен топологический изолятор.

Глава 2

Прямой STIS контакт

В главе 2 представлена основная информация о STIS гетероструктурах. В разделе 2.1 описаны состояния, локализованные в области контакта в нулевом магнитном поле. В разделе 2.2 описаны состояния в коре джозефсоновских вихрей, возникающих при прохождении магнитного потока сквозь контакт, рассмотрен предел, когда вихри можно считать независимыми.

STIS гетероструктура представляет собой слоистую систему, в которой на поверхность топологического изолятора нанесены s - волновые сверхпроводники. Топологический изолятор отличается от обычного наличием поверхностных состояний с безмассовым дираковским спектром. В экспериментах используются такие сверхпроводники как Nb [5], $NbSe$ [9], Al/Ti [6], и изоляторы: Bi_2Se_3 [5], [9] Bi_2Te_3 [6]. В силу эффекта близости сверхпроводящий порядок от S - слоёв проникает в TI - слой, индуцируя сверхпроводимость в его поверхностных состояниях.

Формализм и основные обозначения

Состояния на поверхности гетероструктуры описываются гамильтонианом в представлении вторичного квантования $\hat{H}_{STIS} = \hat{\Psi}^\dagger H_{BdG} \hat{\Psi}$, где $\hat{\Psi} = ((\hat{\psi}_\uparrow, \hat{\psi}_\downarrow), (\hat{\psi}_\downarrow^\dagger, -\hat{\psi}_\uparrow^\dagger))^T$, а $\hat{\psi}_\sigma^\dagger$ - оператор рождения электрона со спином σ .

$$H_{BdG} = v\tau_z \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} - \tau_z \mu(\mathbf{r}) + \Delta_0(\mathbf{r})(\tau^+ e^{i\phi(\mathbf{r})} + \tau^- e^{-i\phi(\mathbf{r})}), \quad (2.1)$$

где v - наклон спектра поверхностных состояний топологического изолятора, $\boldsymbol{\sigma}$ - вектор матриц Паули в спиновом пространстве, $\boldsymbol{\tau}$ - вектор матриц Паули в пространстве Намбу, $\Delta_0(\mathbf{r})$ - модуль локального параметра порядка, $\phi(\mathbf{r})$ - его локальная фаза.

Гамильтониан H_{BdG} наследует симметрию по обращению времени и зарядовую симметрию полного гамильтониана $\hat{H}_{STIS}$. Операторы обращения времени $\mathcal{T}$ и зарядового сопряжения $\mathcal{C}$ уравнений Боголюбова де Жена принимают вид:

$$[\mathcal{T}, H_{BdG}] = 0, \quad \mathcal{T} = i\sigma^y \mathcal{K}, \quad \{\mathcal{C}, H_{BdG}\} = 0, \quad \mathcal{C} = \sigma^y \tau^y \mathcal{K}, \quad (2.2)$$

где $\mathcal{K}$ - оператор комплексного сопряжения.

В силу того, что $C^2 = 1$ и C антикоммутирует с гамильтонианом H_{BdG} , собственные состояния системы разбиваются на пары Ψ_E и $\Psi_{-E} = C\Psi_E$, которые соответствуют разноименным энергиям. Оператор C на языке электронных операторов $\hat{\psi}^\dagger, \hat{\psi}$ содержит эрмитово сопряжение, поэтому решения Ψ_E и $\Psi_{-E} = C\Psi_E$ описывают рождение и уничтожение одной и той же фермионной квазичастицы с энергией E . Двойной учет - следствие удвоения переменных, возникающего при введении пространства Намбу. Кроме пар Ψ_E и $\Psi_{-E} = C\Psi_E$ система может иметь зарядово-самосопряженные собственные состояния $\Psi_0 = C\Psi_0$. Именно эти решения называются майорановским нулевыми модами.

2.1 Состояния в нулевом магнитном поле

Рассмотрим случай прямоугольного контакта (см. рис. 2.1), иными словами, имеющего постоянную ширину W между сверхпроводящими областями, фазы параметров порядка в каждой из областей постоянны и равны ϕ_L, ϕ_R . В сверхпроводящих областях наведен химический потенциал μ_s , в области топологического изолятора химический потенциал равен μ_n . Введём декартову систему координат так, чтобы ось x была направлена вдоль контакта, а ось y была направлена поперёк. Тогда параметры системы: $\mu(\mathbf{r})$, $\Delta_0(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r})$ могут быть записаны следующим образом:

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu_s \cdot \theta\left(|y| > \frac{W}{2}\right) + \mu_n \cdot \theta\left(|y| < \frac{W}{2}\right), \quad \Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0 \cdot \theta\left(|y| > \frac{W}{2}\right), \quad (2.3)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_L \cdot \theta\left(y > \frac{W}{2}\right) + \phi_R \cdot \theta\left(y < -\frac{W}{2}\right).$$

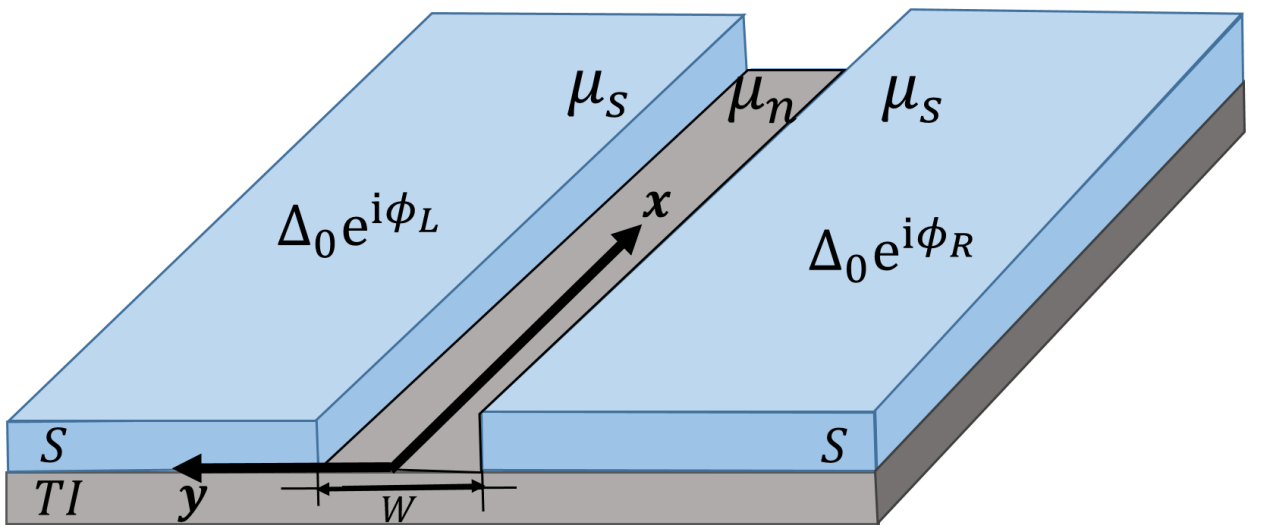


Рис. 2.1: Схема прямоугольного STIS контакта: голубым цветом обозначены сверхпроводящие области, серым цветом изображен топологический изолятор.

Легко увидеть, что эта задача эффективно одномерная, так как вдоль контакта имеется трансляционная инвариантность. Собственные состояния гамильтониана нумеруются собственным значением оператора импульса - p_x . Так как нас интересует низкоэнергетическая физика системы, будем описывать состояния $\Psi_{\pm E}$, как функции только координаты y , считая зависимость от координаты x - тривиальной: $p_x = 0$.

В отсутствие матрицы σ_x гамильтониан H_{BdG} (2.1) коммутирует с σ_y , поэтому матрицу Паули σ_y можно заменить на её собственное число: $s_y = \pm 1$ и параметризовать состояния системы энергией E и проекцией спина на ось y - s_y .

Для исследования состояний на STIS контакте решим задачу о волновых функциях и соответствующих им энергиях системы (2.3).

Поиск волновых функций:

Запишем общий вид состояний в каждой из областей и условие непрерывности на границах $y = \pm \frac{W}{2}$.

В сверхпроводящих областях имеется по 2 решения с энергией E , экспоненциально растущих (при $y < -\frac{W}{2}$) и затухающих (при $y > \frac{W}{2}$) со скоростью $\kappa = \frac{1}{v} \sqrt{\Delta_0^2 - E^2}$:

$$\Psi_{E,s_y} \left(y < -\frac{W}{2} \right) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_R \frac{-i\kappa v s_y + E}{\Delta_0}} |\sigma_y = s_y\rangle \\ |\sigma_y = s_y\rangle \end{pmatrix} e^{(i\frac{\mu s_y}{v} + \kappa)(y + \frac{W}{2})}, \quad (2.4)$$

$$\Psi_{E,s_y} \left(y > \frac{W}{2} \right) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_L \frac{i\kappa v s_y + E}{\Delta_0}} |\sigma_y = s_y\rangle \\ |\sigma_y = s_y\rangle \end{pmatrix} e^{(i\frac{\mu s_y}{v} - \kappa)(y - \frac{W}{2})}. \quad (2.5)$$

В области топологического изолятора есть 4 решения с энергией E :

$$\Psi_{E,s_y} \left(|y| < \frac{W}{2} \right) = A \begin{pmatrix} |\sigma_y = s_y\rangle \\ 0 \end{pmatrix} e^{is_y(\frac{\mu_n + E}{v})y} + B \begin{pmatrix} 0 \\ |\sigma_y = s_y\rangle \end{pmatrix} e^{is_y(\frac{\mu_n - E}{v})y}, \quad (2.6)$$

где A и B - произвольные комплексные коэффициенты, определяемые сшивкой на границах $y = \pm \frac{W}{2}$. Тогда условие непрерывности запишется следующим образом:

$$\exp \left(i\phi_L - i\phi_R - 2is_y \frac{E}{v} W \right) = \left(\frac{-i\kappa v s_y + E}{\Delta_0} \right)^2. \quad (2.7)$$

Для простоты исследования спектра рассмотрим предел $W \ll \frac{v}{\Delta_0}$. Условие непрерывности волновой функции (2.7) при этом упрощается до формы:

$$e^{i(\phi_L - \phi_R)} = e^{-2i\beta}, \quad (2.8)$$

где в силу тождества $\Delta_0^2 = E^2 + (\kappa v s_y)^2$ введены обозначения : $E = \Delta_0 \cos \beta$, а $\kappa v s_y = \Delta_0 \sin \beta$. Это условие одновременно описывает состояния системы как с энергией E , так и с энергией $-E$. Так, в случае, когда система находится в состоянии с энергией E условие принимает вид:

$$e^{-i\beta} = e^{i(\phi_L - \phi_R)}, \text{ что эквивалентно уравнениям } \begin{cases} \frac{E}{\Delta_0} = \cos \left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2} \right) \\ \frac{\kappa v s_y}{\Delta_0} = -\sin \left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2} \right) \end{cases}. \quad (2.9)$$

Из последнего уравнения системы следует, что для нормируемости волновой функции ($\kappa > 0$), соответствующей энергии E , из двух проекций спина на ось y необходимо выбрать $s_y = -\text{sgn}(\sin \frac{\phi_L - \phi_R}{2})$. В случае энергии системы $-E$ условие примет вид:

$$e^{-i\beta} = e^{i(\phi_L - \phi_R)}, \text{ что эквивалентно уравнениям } \begin{cases} -\frac{E}{\Delta_0} = \cos\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right) \\ \frac{\kappa v s_y}{\Delta_0} = \sin\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right) \end{cases}. \quad (2.10)$$

Аналогично, из последнего уравнения системы следует, что для нормируемости волновой функции ($\kappa > 0$), соответствующей энергии $-E$, из двух проекций спина на ось y необходимо выбрать $s_y = \text{sgn}(\sin \frac{\phi_L - \phi_R}{2})$.

Таким образом, мы получили, что условие нормируемости снимает спиновое вырождение состояний. При отсутствии зависимости волновой функции от переменной x - координаты вдоль канала, проекция спина состояния системы на ось y - сохраняется и зависит от разности фаз между сверхпроводящими областями.

Теперь выпишем явный вид волновых функций системы, соответствующих энергиям E и $-E$:

$$\begin{aligned} \Psi_E(y) = \sqrt{\frac{\kappa}{2(1+W\kappa)}} & \left[\begin{pmatrix} |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{i\sigma \frac{E}{2v} W} \\ |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{-i\sigma \frac{E}{2v} W} \end{pmatrix} e^{i\sigma \frac{\mu_n}{2v} W + (-i\sigma \frac{\mu_s}{v} + \kappa)(y + \frac{W}{2})} \theta\left(y < -\frac{W}{2}\right) + \right. \\ & + \begin{pmatrix} |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{-i\sigma \frac{E}{v} y} \\ |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{+i\sigma \frac{E}{v} y} \end{pmatrix} e^{-i\sigma \frac{\mu_n}{v} y} \theta\left(|y| < \frac{W}{2}\right) + \\ & \left. + \begin{pmatrix} |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{-i\sigma \frac{E}{2v} W} \\ |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{i\sigma \frac{E}{2v} W} \end{pmatrix} e^{-i\sigma \frac{\mu_n}{2v} W + (-i\sigma \frac{\mu_s}{v} - \kappa)(y - \frac{W}{2})} \theta\left(y > \frac{W}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{-E}(y) = \sqrt{\frac{\kappa}{2(1+W\kappa)}} & \left[\begin{pmatrix} |\sigma_y = \sigma\rangle e^{i\sigma \frac{E}{2v} W} \\ -|\sigma_y = \sigma\rangle e^{-i\sigma \frac{E}{2v} W} \end{pmatrix} e^{-i\sigma \frac{\mu_n}{2v} W + (i\sigma \frac{\mu_s}{v} + \kappa)(y + \frac{W}{2})} \theta\left(y < -\frac{W}{2}\right) + \right. \\ & + \begin{pmatrix} |\sigma_y = \sigma\rangle e^{-i\sigma \frac{E}{v} y} \\ -|\sigma_y = \sigma\rangle e^{i\sigma \frac{E}{v} y} \end{pmatrix} e^{i\sigma \frac{\mu_n}{v} y} \theta\left(|y| < \frac{W}{2}\right) + \\ & \left. + \begin{pmatrix} |\sigma_y = \sigma\rangle e^{-i\sigma \frac{E}{2v} W} \\ -|\sigma_y = \sigma\rangle e^{i\sigma \frac{E}{2v} W} \end{pmatrix} e^{i\sigma \frac{\mu_n}{2v} W + (i\sigma \frac{\mu_s}{v} - \kappa)(y - \frac{W}{2})} \theta\left(y > \frac{W}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.12)$$

где начало отсчета фазы было положено нулем $\phi_0 = \frac{\phi_L + \phi_R}{2} = 0$ и было введено обозначение $\sigma = \text{sgn}(\sin \frac{\phi_L - \phi_R}{2})$. Зависимость волновых функций от фазы ϕ_0 восстанавливается унитарным преобразованием $U_{\phi_0} = e^{i\frac{\phi_0}{2}\tau_z}$. Состояния (2.11) и (2.12) удовлетворяют тождеству $\Psi_{-E} = C\Psi_E$.

В простейшем случае, когда ширина области топологического изолятора равна нулю $W = 0$, и химический потенциал в сверхпроводящих областях равен нулю $\mu_s = 0$ волновые функции упрощаются до вида:

$$|\Psi_E\rangle = \sqrt{\kappa} |\tau_x = 1\rangle |\sigma_y = -\sigma\rangle e^{-\kappa|q_2|}, \quad |\Psi_{-E}\rangle = \sqrt{\kappa} |\tau_x = -1\rangle |\sigma_y = \sigma\rangle e^{-\kappa|q_2|}. \quad (2.13)$$

Исследование спектра:

Рассмотрим подробнее уравнения на спектр состояний. В случае произвольной ширины энергия E как функция разности фаз $E(\phi_L - \phi_R)$ обращается в ноль при $\phi_L - \phi_R$ равной нечетному целому числу π . Это означает, что $p_x = 0$, $\phi_L - \phi_R = \pi(2n + 1)$ соответствуют решению с нулевой энергией.

В общем случае уравнение на спектр невозможно исследовать аналитически, рассмотрим его в пределах $W \ll \frac{v}{\Delta_0}$ и $W \gg \frac{v}{\Delta_0}$. Первый случай решается точно, как показано выше. Спектр - пара уровней с энергиями $\pm \Delta_0 \cos\left(\frac{\phi_L - \phi_R}{2}\right)$. Рассмотрим второй предельный случай: считая, что энергия нижних уровней мала по сравнению с щелью (что мы после проверим), в уравнении на спектр мы можем положить $\beta \approx \pi(2n - 1)$, тогда спектр нижних уровней примет вид: $E \approx \frac{v}{W} \left(\pi(n - \frac{1}{2}) + \frac{\phi_L - \phi_R}{2} \right)$, что оправдывает предположение о малости их энергий по сравнению с Δ_0 . Из рассмотренных пределов следует, что нижние уровни при разности фаз $\phi_L - \phi_R \approx \pi$ отделены от остальных уровней энергетической щелью $\Delta_0 \min(1, \frac{v}{W\Delta_0})$.

Легко увидеть, что вблизи разности фаз $\phi_L - \phi_R = \pi$ спектр линейен, с ростом ширины W наклон уменьшается. Зависимость наклона от ширины имеет вид [11]:

$$\frac{\partial E}{\partial \phi} = -\frac{1}{2} \frac{v\kappa}{1 + W\kappa}. \quad (2.14)$$

2.2 Состояния в коре джозефсоновских вихрей в постоянном однородном магнитном поле

Ситуация меняется, когда в области контакта проходит постоянное однородное магнитное поле B . Здесь и далее джозефсоновские вихри означают наименьшие по энергии уровни, при разности фаз $\phi_L - \phi_R = \pi$.

Градиентно-инвариантная разность фаз $\varphi(x) = (\phi_L - \phi_R)(x)$ между сверхпроводниками приобретает зависимость от координаты вдоль контакта [12]. В настоящей работе мы рассматриваем лондоновский предел сверхпроводимости, поэтому локальная скорость изменения фазы определяется следующим выражением:

$$\frac{d}{dx} (\phi_L - \phi_R) = \frac{2\pi}{l_B}, \quad l_B = \frac{\Phi_0}{B(W + 2\lambda_L)}, \quad (2.15)$$

где λ_L - соответствует лондоновской длине проникновения магнитного поля в сверхпроводник.

Таким образом, разность фаз $\phi_L - \phi_R$ принимает значения нечетного целого числа π в точках на контакте, идущих с периодом l_B .

В предыдущем разделе мы исследовали нижние по энергии уровни, считая, что волновые функции не зависят от x - координаты вдоль контакта. При достаточно слабых магнитных полях $l_B \gg \frac{v}{\Delta_0 \min(1, \frac{v}{\Delta_0 W})}$, таких, что переходами через верхние уровни

можно пренебречь, слагаемое $\tau_z \sigma_x p_x$ в гамильтониане H_{BdG} (2.1) достаточно учесть в первом порядке теории возмущений, что будет рассмотрено далее.

Проектируя весь гамильтониан H_{BdG} (2.1) на состояния (2.11) и (2.12), получим эффективный гамильтониан, описывающий низкоэнергетическую физику системы:

$$H_{\text{эфф}} = E(\varphi)\rho_z + v_x(-i\hbar\partial_x)\sigma\rho_x, \quad (2.16)$$

где ρ_x, ρ_y, ρ_z - матрицы Паули в пространстве состояний $|\Psi_{\pm E}\rangle$, а скорость v_x равна:

$$v_x = \frac{v^2\kappa}{1+W\kappa} \left(\frac{\sin\left(\frac{W\mu_n}{v}\right)}{\mu_n} + \frac{v\kappa \cos\left(\frac{W\mu_n}{v}\right) - \mu_s \sin\left(\frac{W\mu_n}{v}\right)}{v^2\kappa^2 + \mu_s^2} \right). \quad (2.17)$$

В простейшем случае ($W = 0, \mu_s = 0$) гамильтониан $H_{\text{эфф}}$ (2.16) принимает вид:

$$H_{\text{эфф}} = \Delta_0 \cos \frac{\varphi}{2} \rho_z + v(-i\hbar\partial_x)\sigma\rho_x. \quad (2.18)$$

Пусть x_k - координата положения k -го вихря. Тогда рассмотрим эффективный гамильтониан простейшего случая в окрестности точки x_k :

$$H_k = -\Delta_0 \frac{\pi}{l_B} (x - x_k) \sigma \rho_z + v(-i\hbar\partial_x) \sigma \rho_x. \quad (2.19)$$

Представим координату и импульс через операторы рождения и уничтожения гармонического осциллятора.

$$(x - x_k) = \sqrt{\frac{\hbar v l_B}{\pi \Delta_0}} \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}, \quad (-i\hbar\partial_{q_1}) = \sqrt{\frac{\pi \Delta_0}{\hbar v l_B}} i \frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}}. \quad (2.20)$$

Тогда гамильтониан в окрестности точки x_k , примет вид:

$$H_k = \frac{\hbar\omega}{2} \sigma \left(-(a^\dagger + a)\rho_z + i(a^\dagger - a)\rho_x \right), \quad (2.21)$$

где $\hbar\omega = \sqrt{2} \frac{\hbar v}{\lambda_B}$ - характерный масштаб энергии состояний, $\lambda_B = \sqrt{l_B \xi}$ - масштаб волновых функций по координате x , а $\xi = \frac{\hbar v}{\pi \Delta_0}$ - длина когерентности в сверхпроводниках.

Тогда спектр состояний в коре джозефсоновских вихрей и волновые функции гамильтониана (2.21) могут быть представлены в виде:

$$E_{k,\pm n} = \pm \hbar\omega \sqrt{n}, \quad (2.22)$$

$$|\psi_{\pm n}\rangle = \frac{|n\rangle |\sigma_y = -1\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \pm \sigma \frac{|n-1\rangle |\sigma_y = 1\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_0\rangle = |0\rangle |\sigma_y = -1\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad (2.23)$$

где $|n\rangle$ собственная функция гармонического осциллятора, определяемая условием: $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$.

Состояния $|\psi_{\pm n}\rangle$ выбраны зарядово сопряженными друг другу, а $|\psi_0\rangle$ - майорановское, при этом оператор зарядового сопряжения приобретает вид $C = \rho_x \mathcal{K}$.

Таким образом, при прохождении постоянного однородного магнитного поля в области STIS контакта, вдоль него возникает цепочка джозефсоновских вихрей, в коре которых есть как майорановская нулевая мода, так и пары состояний со спектром $E_{k,\pm n} = \pm \hbar\omega \sqrt{n}$ (2.22).

Глава 3

Искривленный STIS контакт

В главе 3 рассмотрено, как искривленность контакта проявляется в наблюдаемых характеристиках: спектре состояний в коре джозефсоновских вихрей и ток-фазовом соотношении. В разделе 3.1 приведено описание криволинейной системы координат, в которой контакт имеет прямоугольный вид. В разделе 3.2 получено выражение для оператора импульса в криволинейной системе координат. В разделе 3.3 получено выражение для гамильтониана искривленного STIS контакта в системе координат, рассмотренной в разделе 3.1. После сравнения его с гамильтонианом прямоугольного контакта, получена поправка к спектру состояний в коре джозефсоновских вихрей. В разделе 3.4 описан вклад в ток-фазовое соотношение, вызванный неоднородностью формы контакта.

3.1 Криволинейная система координат

Рассмотрим как изменится спектр гамильтониана Боголюбова де Жена H_{BdG} (2.1), в случае когда контакт имеет искривленную форму (см. рис. 3.2).

Следуя обозначениям [13], параметризуем каждую точку на плоскости координатами (q_1, q_2) , где q_1 - натуральный параметр кривой:

$$\mathbf{R}(q_1, q_2) = \mathbf{a}(q_1) + q_2 \mathbf{n}(q_1), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{a}(q_1)$ - координата точки на кривой, $\frac{d\mathbf{a}}{dq_1} = \mathbf{t}(q_1)$ - единичный вектор касательной к кривой в этой точке, $\mathbf{n}(q_1)$ - единичный вектор нормали к кривой, который выбран так, чтобы вектор $\mathbf{n}$ имел фазу на $\pi/2$ больше по сравнению с вектором $\mathbf{t}$. Пример криволинейных координат приведен на рис. 3.1.

Запишем, с какой скоростью изменяются касательный вектор и вектор нормали при движении вдоль кривой:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dq_1} \mathbf{t} \\ \frac{d}{dq_1} \mathbf{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(q_1) \\ \kappa(q_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где $\kappa(q_1)$ - локальная кривизна кривой.

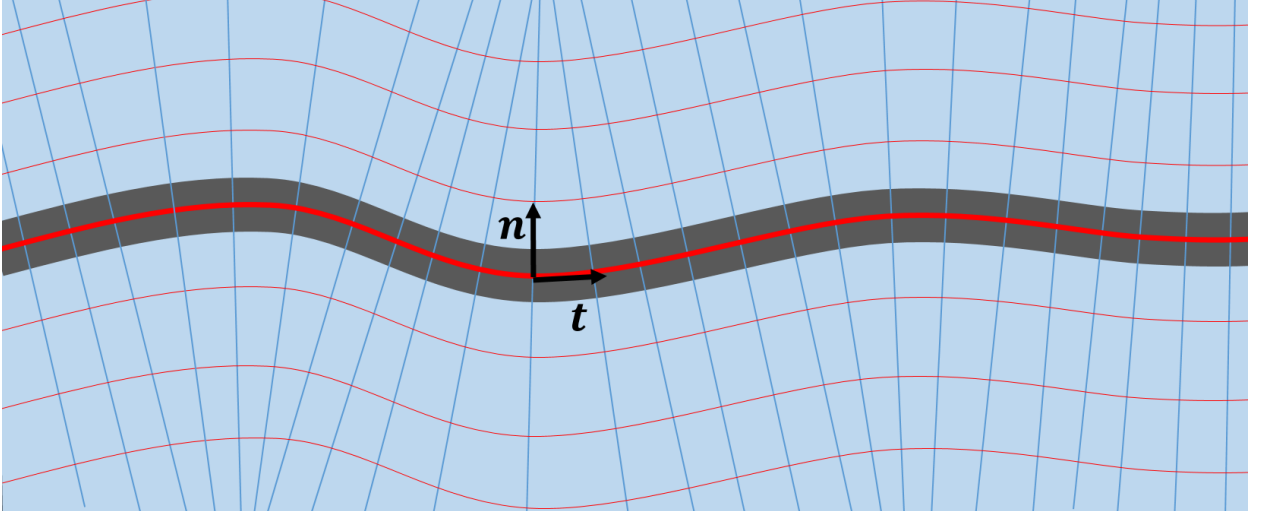


Рис. 3.1: Криволинейная система координат искривленного STIS контакта: голубым цветом обозначены сверхпроводящие области, серым цветом изображен топологический изолятор. Голубыми линиями обозначены уровни постоянного q_1 , красными линиями - уровни постоянного q_2 . Большой красной линией обозначен уровень $q_2 = 0$.

Введем несколько промежуточных величин, чтобы определить якобиан замены переменных, а также эрмитов оператор импульса в криволинейной системе координат: векторы касательных к координатам $\mathbf{u}_i$:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} = \partial_i \mathbf{R}, \quad \mathbf{u}_1 = \partial_1 \mathbf{R} = \mathbf{t}(1 + q_2 \kappa(q_1)), \quad \mathbf{u}_2 = \partial_2 \mathbf{R} = \mathbf{n}, \quad (3.3)$$

метрический тензор G_{ij} :

$$G_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j, \quad G_{ij} = \begin{pmatrix} (1 + q_2 \kappa(q_1))^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\det G_{ij}} = 1 + q_2 \kappa(q_1), \quad (3.4)$$

обратный метрический тензор G^{ij} :

$$G^{ij} G_{jk} = \delta_k^i, \quad G^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1 + q_2 \kappa(q_1))^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

ковекторы $\mathbf{u}^i$:

$$\mathbf{u}^k = G^{ki} \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{u}^1 = \frac{\mathbf{t}}{1 + q_2 \kappa(q_1)}, \quad \mathbf{u}^2 = \mathbf{n}. \quad (3.6)$$

Введение системы координат изменяет вид скалярного произведения, а именно, появляется якобиан замены переменных:

$$\langle \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle = \int dx dy \psi_\alpha^* \psi_\beta = \int dq_1 dq_2 \sqrt{\det G_{ij}} \psi_\alpha^* \psi_\beta. \quad (3.7)$$

3.2 Эрмитов оператор импульса

При переходе от декартовой к криволинейной системе координат возникают вопросы с определением эрмитовости квантово-механических операторов [14]. Оператор

импульса $\mathbf{p} = \sum_k \mathbf{u}^k (-i\hbar \partial_{q_k})$ является эрмитовым в смысле скалярного произведения (3.7). Убедимся в этом факте явно:

$$\langle \psi_\alpha | \mathbf{p} \psi_\beta \rangle = \langle \mathbf{p} \psi_\alpha | \psi_\beta \rangle + \langle \psi_\alpha | \sum_k \frac{i\hbar}{\sqrt{\det G_{ij}}} \partial_{q_k} (\mathbf{u}^k \sqrt{\det G_{ij}}) | \psi_\beta \rangle. \quad (3.8)$$

Эрмитовость оператора импульса $\mathbf{p} = \sum_k \mathbf{u}^k (-i\hbar \partial_{q_k})$ эквивалентна равенству нулю выражения:

$$\sum_k \frac{i\hbar}{\sqrt{\det G_{ij}}} \partial_{q_k} (\mathbf{u}^k \sqrt{\det G_{ij}}) = 0. \quad (3.9)$$

Рассмотрим это тождество (3.9) в частном случае выбора координат, которые введены выше (3.1):

$$\sum_k \frac{i\hbar}{\sqrt{\det G_{ij}}} \partial_{q_k} (\mathbf{u}^k \sqrt{\det G_{ij}}) = \sum_k \left(\partial_{q_k} \mathbf{u}^k + \mathbf{u}^k \frac{1}{\sqrt{\det G_{ij}}} \partial_{q_k} \sqrt{\det G_{ij}} \right) = \quad (3.10)$$

$$\partial_{q_1} \left(\frac{\mathbf{t}(q_1)}{1 + q_2 \kappa(q_1)} \right) + \partial_{q_2} \mathbf{n}(q_1) + \frac{\mathbf{t}}{(1 + q_2 \kappa(q_1))^2} \partial_{q_1} (1 + q_2 \kappa(q_1)) + \frac{\mathbf{n}}{(1 + q_2 \kappa(q_1))} \partial_{q_2} (1 + q_2 \kappa(q_1)) = 0.$$

Разделим оператор импульса $\mathbf{p} = \mathbf{u}^1 (-i\hbar \partial_{q_1}) + \mathbf{u}^2 (-i\hbar \partial_{q_2})$ на два эрмитовых оператора компонент импульса движения вдоль координат q_1 и q_2 : $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, используя тождество (3.9):

$$\mathbf{p} = -i\hbar \left(\mathbf{u}^1 \partial_{q_1} + \frac{1}{2\sqrt{\det G_{ij}}} \partial_{q_1} (\mathbf{u}^1 \sqrt{\det G_{ij}}) \right) - i\hbar \left(\mathbf{u}^2 \partial_{q_2} + \frac{1}{2\sqrt{\det G_{ij}}} \partial_{q_2} (\mathbf{u}^2 \sqrt{\det G_{ij}}) \right). \quad (3.11)$$

Переписывая выражения для $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ в виде антикоммуторов, можно убедиться в их эрмитовости:

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2\sqrt{\det G_{ij}}} \left\{ \mathbf{u}^1 \sqrt{\det G_{ij}}, (-i\hbar \partial_{q_1}) \right\}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2\sqrt{\det G_{ij}}} \left\{ \mathbf{u}^2 \sqrt{\det G_{ij}}, (-i\hbar \partial_{q_2}) \right\}. \quad (3.12)$$

Подставим явные выражения ковекторов (3.6) и корня детерминанта (3.4) в формулу (3.12):

$$\mathbf{p}_1 = \frac{1}{2(1 + q_2 \kappa(q_1))} \{ \mathbf{t}(q_1), (-i\hbar \partial_{q_1}) \}, \quad \mathbf{p}_2 = \frac{1}{2(1 + q_2 \kappa(q_1))} \{ \mathbf{n}(q_1)(1 + q_2 \kappa(q_1)), (-i\hbar \partial_{q_2}) \}. \quad (3.13)$$

Таким образом мы получили выражения для оператора импульса в криволинейной системе координат, разделили его на операторы импульса, отвечающие движению вдоль и поперёк контакта. А так же явно убедились в их эрмитовости относительно скалярного произведения.

3.3 Влияние кривизны на спектр состояний в коре джозефсоновских вихрей

Введение координат q_1 и q_2 позволяет записать параметры системы $\mu(\mathbf{r})$, $\Delta_0(\mathbf{r})$, $\phi(\mathbf{r})$ в виде, аналогичном прямоугольному (2.3) с одной лишь заменой y на q_2 :

$$\begin{aligned}\mu(\mathbf{r}) &= \mu_s \theta\left(|q_2| > \frac{W}{2}\right) + \mu_n \theta\left(|q_2| < \frac{W}{2}\right), \quad \Delta_0(\mathbf{r}) = \Delta_0 \theta\left(|q_2| > \frac{W}{2}\right), \\ \phi(\mathbf{r}) &= \phi_L \theta\left(q_2 < -\frac{W}{2}\right) + \phi_R \theta\left(q_2 > \frac{W}{2}\right).\end{aligned}\quad (3.14)$$

Однако, это упрощение изменяет вид оператора импульса и скалярного произведения. Как показано в строке (3.12) ко векторы $\mathbf{u}^1$ и $\mathbf{u}^2$ в операторах компонент импульса имеют координатную зависимость в отличие от прямоугольного случая. Вспомним, что $\mathbf{t}(q_1)$ и $\mathbf{n}(q_1)$ - единичные векторы. Тогда угол между вектором сигма матриц спинного пространства и вектором импульса $\theta(q_1)$ можно определить как:

$$t^+ = t_x + it_y = e^{i\theta}, \quad t^- = t_x - it_y = e^{-i\theta}, \quad n^+ = n_x + in_y = ie^{i\theta}, \quad n^- = n_x - in_y = -ie^{-i\theta}. \quad (3.15)$$

Чтобы восстановить вид спиновой зависимости гамильтониана искривленного контакта до случая прямоугольной геометрии, совершим унитарное преобразование, локально подкручивающее спиновое пространство на угол $\theta(q_1)$ в каждой точке:

$$U_\theta = e^{-i\sigma_z \theta(q_1)/2}. \quad (3.16)$$

Введение координат q_1 и q_2 также изменяет вид скалярного произведения, как показано в выражении (3.7). Чтобы восстановить его до интеграла с единичным гамильтониана совершим ещё одно унитарное преобразование:

$$\tilde{\psi} = \sqrt[4]{\det G_{ij}} \psi, \quad \tilde{A} = \sqrt[4]{\det G_{ij}} A \frac{1}{\sqrt[4]{\det G_{ij}}}. \quad (3.17)$$

Перед тем как подействовать описанными выше унитарными преобразованиями на гамильтониан системы, рассмотрим, как изменяется вид дираковского гамильтониана на плоскости $H_D = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}$ под действием унитарных преобразований (3.16) и (3.17).

Так, после унитарных преобразований, которые подкручивают спиновое пространство и восстанавливают скалярное произведение с единичным якобианом, дираковский гамильтониан приобретает вид:

$$\tilde{H}_D = \sigma_x \frac{1}{\sqrt{1 + q_2 \varkappa(q_1)}} (-i\hbar \partial_{q_1}) \frac{1}{\sqrt{1 + q_2 \varkappa(q_1)}} + \sigma_y (-i\hbar \partial_{q_2}). \quad (3.18)$$

Легко увидеть, что на самой кривой ($q_2 = 0$) дираковский гамильтониан восстанавливает свой вид, что согласуется со статьей [13]. Однако, мы будем учитывать как кривую, так и её окрестность для вычисления влияния искривленности на спектр.

Рассмотрим теперь гамильтониан H_{BdG} (2.1) искривленного STIS контакта (см. рис. 3.2)

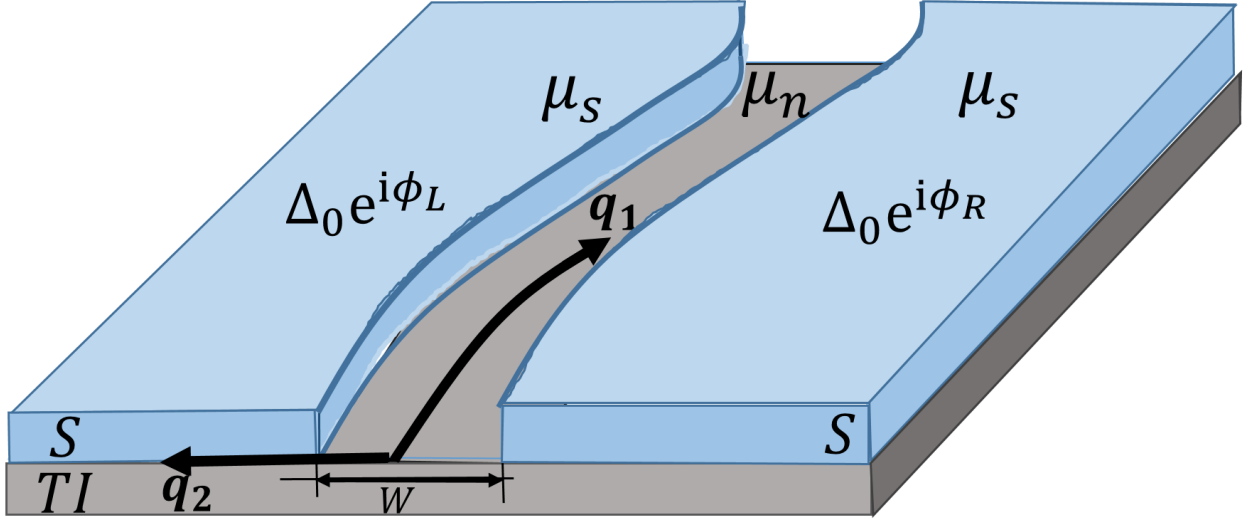


Рис. 3.2: Схема искривленного STIS контакта: голубым цветом обозначены сверхпроводящие области, серым цветом изображен топологический изолятор.

Проведем с ним унитарные преобразования спинного поворота (3.16) и восстановления скалярного произведения с единичным якобианом (3.17), получим:

$$\tilde{H}_{\text{STIS}} = v\tau_z\sigma_x \frac{1}{\sqrt{1+q_2\kappa(q_1)}} (-i\hbar\partial_{q_1}) \frac{1}{\sqrt{1+q_2\kappa(q_1)}} + v\tau_z\sigma_y (-i\hbar\partial_{q_2}) - \mu(\mathbf{r})\tau_z + \Delta_0(\mathbf{r})\tau_\phi. \quad (3.19)$$

Сравнивая гамильтониан H_{BdG} (2.1) и параметры (2.3) в декартовой системе координат с преобразованным гамильтонианом $\tilde{H}_{\text{STIS}}$ (3.19) и параметрами (3.14) в криволинейной системе, мы видим, что q_1 играет роль переменной x - координаты вдоль контакта, а q_2 - переменной y . Их отличие заключается в удлинении оператора компоненты импульса, соответствующей координате q_1 .

Рассмотрим подробнее оператор $\frac{1}{\sqrt{1+q_2\kappa(q_1)}} (-i\hbar\partial_{q_1}) \frac{1}{\sqrt{1+q_2\kappa(q_1)}}$, считая, что волновые функции локализованы в окрестности кривой в направлении нормали к ней на расстояниях много меньше локального радиуса кривизны ($q_2\kappa(q_1) \ll 1$), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{1+q_2\kappa(q_1)}} (-i\hbar\partial_{q_1}) \frac{1}{\sqrt{1+q_2\kappa(q_1)}} \approx \\ & \left(1 - \frac{q_2\kappa(q_1)}{2} + \frac{3q_2^2\kappa^2(q_1)}{8}\right) (-i\hbar\partial_{q_1}) \left(1 - \frac{q_2\kappa(q_1)}{2} + \frac{3q_2^2\kappa^2(q_1)}{8}\right) = \\ & = (-i\hbar\partial_{q_1}) - \frac{q_2}{2} \{\kappa(q_1), (-i\hbar\partial_{q_1})\} + \frac{q_2^2}{2} \{\kappa^2(q_1), (-i\hbar\partial_{q_1})\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При прохождении магнитного поля B сквозь искривленный контакт, уравнение, описывающее изменение разности фаз, (2.15) модернизируется [15]:

$$\nabla(\phi_L - \phi_R) = \frac{2\pi}{\Phi_0}(W + 2\lambda_L)[\mathbf{B}, \mathbf{n}] \Rightarrow \frac{d}{dq_1}(\phi_L - \phi_R) = \frac{2\pi}{l_B}. \quad (3.21)$$

Таким образом, разность фаз изменяется вдоль кривой, линейно по натуральному параметру.

Рассматривая выражение для гамильтониана $\tilde{H}_{\text{STIS}}$ в криволинейной системе координат (3.19), параметров системы (3.14), скорости изменения разности фаз относительно натурального параметра (3.21), легко можно заметить почти полное совпадение со случаем прямоугольной геометрии. Аналогично этому случаю, будем считать зависимость волновых функций от натурального параметра медленной. Это условие обеспечивается рассмотрением предела слабого магнитного поля $l_B \gg \frac{v}{\Delta_0 \min(1, \frac{v}{\Delta_0 W})}$ и малой кривизны контакта $\kappa \xi \ll 1$.

Это позволяет учитывать оператор (3.20) в первом порядке теории возмущений. Волновые функции Ψ_E и Ψ_{-E} при этом будут полностью совпадать со случаем прямоугольной геометрии (2.11), (2.12) при замене y на q_2 .

После проецирования гамильтониана $\tilde{H}_{\text{STIS}}$ (3.19) на эти состояния эффективный гамильтониан низкоэнергетической физики системы приобретает вид:

$$H_{\text{эфф}} = E(\varphi)\rho_z + \frac{1}{2} \{v_x, (-i\hbar\partial_{q_1})\} \sigma\rho_x + \frac{1}{2} \{v_y, (-i\hbar\partial_{q_1})\} \rho_y. \quad (3.22)$$

Скорости v_x, v_y содержат средние $\langle \tau_z \sigma_x q_2^n \rangle$ из разложения (3.20) четных и нечетных степеней соответственно. Приведем явный вид первых членов разложения v_x, v_y по средним:

$$v_x = v \left(\langle \tau_z \sigma_x \rangle + \kappa^2(q_1) \langle \tau_z \sigma_x q_2^2 \rangle + \dots \right), \quad v_y = v \left(-\kappa(q_1) \langle \tau_z \sigma_x q_2 \rangle + \dots \right), \quad (3.23)$$

$$\langle \tau_z \sigma_x \rangle = \frac{v\kappa}{1+W\kappa} \left(\frac{\sin\left(\frac{W\mu_n}{v}\right)}{\mu_n} + \frac{v\kappa \cos\left(\frac{W\mu_n}{v}\right) - \mu_s \sin\left(\frac{W\mu_n}{v}\right)}{v^2\kappa^2 + \mu_s^2} \right), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \langle \tau_z \sigma_x q_2 \rangle &= \frac{v\kappa}{4(1+W\kappa)} \left[2 \frac{W\mu_n \cos\left(\frac{W\mu_n}{v}\right) - v \sin\left(\frac{W\mu_n}{v}\right)}{\mu_n^2} + \right. \\ &\quad \left. + i \frac{e^{iW\frac{\mu_n}{v}} (v + vW\kappa - iW\mu_s)}{(v\kappa - i\mu_s)^2} - i \frac{e^{-iW\frac{\mu_n}{v}} (v + vW\kappa + iW\mu_s)}{(v\kappa + i\mu_s)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \langle \tau_z \sigma_x q_2^2 \rangle &= \frac{v\kappa}{8(1+W\kappa)} \left[\frac{e^{iW\frac{\mu_n}{v}} (v(1-i+W\kappa) - iW\mu_s)(v(1+i+W\kappa) - iW\mu_s)}{(v\kappa - i\mu_s)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e^{-iW\frac{\mu_n}{v}} (v(1-i+W\kappa) + iW\mu_s)(v(1+i+W\kappa) + iW\mu_s)}{(v\kappa + i\mu_s)^3} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{2vW\mu_n \cos\left(\frac{W\mu_n}{v}\right) + (W^2\mu_n^2 - 2v^2) \sin\left(\frac{W\mu_n}{v}\right)}{\mu_n^3} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В простейшем случае ($W = 0, \mu_s = 0$), гамильтониан $H_{\text{эфф}}$ (3.22) упрощается до формы:

$$H_{\text{эфф}} = \Delta_0 \cos \frac{\varphi}{2} \rho_z + \frac{1}{2} \{v_x, (-i\hbar\partial_{q_1})\} \sigma\rho_x, \quad \text{где} \quad v_x = v \left(1 + \frac{\kappa^2(q_1)}{2\kappa^2} + \dots \right). \quad (3.27)$$

Остановимся на рассмотрении спектра эффективного гамильтониана простейшего случая. По аналогии со случаем прямоугольной геометрии введем координату k -ого вихря на кривой, а H_k - эффективный гамильтониан простейшего случая в окрестности точки $q_{1,k}$. Он имеет вид:

$$H_k = -\Delta_0 \frac{\pi}{l_B} (q_1 - q_{1,k}) \sigma \rho_z + v(-i\hbar \partial_{q_1}) \sigma \rho_x. \quad (3.28)$$

Представим координату и импульс через операторы рождения и уничтожения гармонического осциллятора:

$$(q_1 - q_{1,k}) = \sqrt{\frac{v\hbar l_B}{\Delta_0 \pi}} \frac{a^\dagger + a}{\sqrt{2}}, \quad (-i\hbar \partial_{q_1}) = \sqrt{\frac{\Delta_0 \pi}{v\hbar l_B}} i \frac{a^\dagger - a}{\sqrt{2}}. \quad (3.29)$$

Тогда гамильтониан в окрестности точки $q_{1,k}$, примет вид:

$$H_k = \frac{\hbar \omega}{2} \sigma \left(-(a^\dagger + a) \rho_z + i(a^\dagger - a) \rho_x \right). \quad (3.30)$$

Аналогично случаю прямоугольной геометрии спектр состояний в коре джозефсоновских вихрей и волновые функции гамильтониана (3.30) могут быть представлены в виде:

$$E_{k,\pm n} = \pm \hbar \omega \sqrt{n}, \quad (3.31)$$

$$|\psi_{\pm n}\rangle = \frac{|n\rangle |\downarrow_y\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \pm \sigma \frac{|n-1\rangle |\uparrow_y\rangle e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}, \quad |\psi_0\rangle = |n\rangle |\downarrow_y\rangle e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (3.32)$$

Состояния выбраны зарядово симметричные, при этом оператор зарядового сопряжения приобретает вид $C = \rho_x \mathcal{K}$.

Вернемся к простейшему случаю эффективного гамильтониана $H_{\text{эфф}}$ (3.27). В нём слагаемые v_x и $\cos \frac{\varphi}{2}$ отличаются от константы и линейной функции соответственно:

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sigma \frac{\pi}{l_B} (q_1 - q_{1,k}) \left(1 - \frac{(q_1 - q_{1,k})^2}{6} \left(\frac{\pi}{l_B} \right)^2 + \dots \right), \quad (3.33)$$

$$v_x = v \left(1 + \frac{\varkappa^2(q_1)}{2\kappa^2(\varphi)} + \dots \right), \quad \kappa(\varphi) = \frac{\Delta_0}{v} \left(1 - \frac{(q_1 - q_{1,k})^2}{2} \left(\frac{\pi}{l_B} \right)^2 + \dots \right).$$

Таким образом в $H_{\text{эфф}}$ (3.27) есть поправки к H_k (3.30) разной природы. Поправка к спектру от искривленности контакта определяется выражением:

$$\delta E_{k,\pm n} = \pm \hbar \omega \sqrt{n} \frac{\varkappa^2(q_{1,k}) v^2}{4\Delta_0^2}. \quad (3.34)$$

При выборе масштаба $\varkappa^{-1} \ll l_B$ вклад в спектр состояний от искривленности контакта будет главным среди всех поправок.

Теперь спектр состояний явно зависит от положения на кривой, что ведет к появлению джозефсоновского тока, индуцированного кривизной.

3.4 Влияние кривизны на ток-фазовое соотношение

Пользуясь полученным в предыдущем разделе выражением для спектра наименьших состояний по энергии $E_{k,n}$ (3.34), вычислим величину джозефсоновского тока в пределе низких температур $T \leq \hbar\omega$. Каждый отдельный вихрь даёт вклад в ток, однако мы будем описывать суммарный:

$$I(T) = \sum_k \sum_{n \geq 1} \tanh\left(\frac{E_{k,n}}{2T}\right) \frac{\partial E_{k,n}}{\partial \varphi}. \quad (3.35)$$

Чтобы явно выделить температурную зависимость джозефсоновского тока, будем рассматривать разность токов при температуре T и $T = 0$:

$$I(T) - I(T = 0) = \sum_k \sum_{n \geq 1} \left(\tanh\left(\frac{E_{k,n}}{2T}\right) - 1 \right) \frac{\partial E_{k,n}}{\partial \varphi}. \quad (3.36)$$

Считая, что главная зависимость спектра от разности фаз идёт от поправки (3.34), получим:

$$I(T) - I(T = 0) = \frac{l_B}{\Phi_0} \frac{\omega v^2}{4\Delta_0^2} \sum_k \varkappa(q_{1,k}) \varkappa'(q_{1,k}) \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \left(\tanh\left(\frac{\hbar\omega\sqrt{n}}{2T}\right) - 1 \right). \quad (3.37)$$

В пределе низких температур сумму по $n \geq 0$ можно приближенно заменить интегралом и вычислить его:

$$I(T) - I(T = 0) \approx -\frac{3\zeta(3)}{2} \frac{l_B}{\Phi_0} \frac{\omega v^2}{\Delta_0^2} \frac{T^3}{\hbar^3 \omega^3} \sum_k \varkappa(q_{1,k}) \varkappa'(q_{1,k}). \quad (3.38)$$

Видим, что кривизна, а точнее производная квадрата кривизны даёт вклад в ток-фазовое соотношение.

Полный джозефсоновский ток в системе определяется суммой вкладов от андреевских уровней и от дискретных состояний в коре джозефсоновских вихрей.

Максимальный ток вклада андреевских уровней обращается в нуль при полях, создающих поток сквозь контакт, равный целому числу квантов потока [16]. Характерная зависимость максимального тока - фраунгоферовская картина, приведена на рис. 3.3

Полученный вклад в ток-фазовое соотношение 3.38 не обращается в ноль при магнитных полях, соответствующих целому числу квантов потока, а значит и суммарный максимальный джозефсоновский ток тоже.

Оценим величину диодного эффекта. Величины максимального по модулю положительного тока и максимального по модулю отрицательного тока пропорциональны максимальным положительным и отрицательным наклонам функции $\varkappa^2(q_1)$. Таким образом для контакта, пусть искривленного, но симметричного относительно натурального параметра q_1 , максимальный и минимальный токи равны по модулю.

Для иллюстрации диодного эффекта рассмотрим вид кривой с одним локализованным асимметричным искривлением (см рис. 3.4).

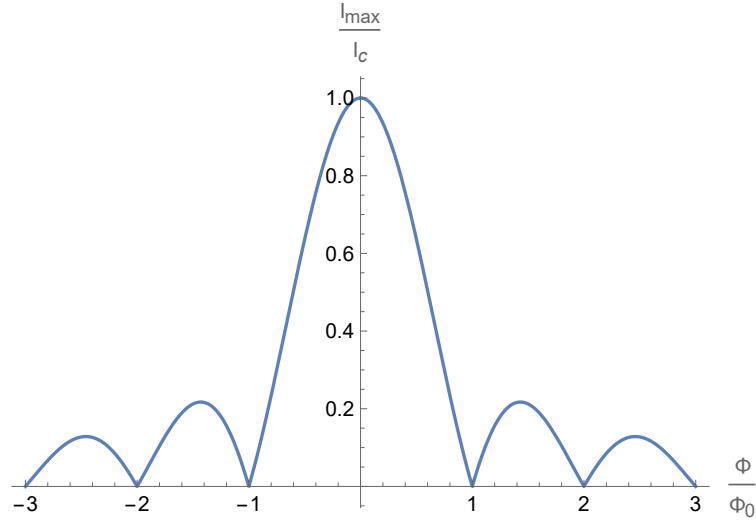


Рис. 3.3: Фраунгоферовская картина, зависимость максимального джозефсоновского тока от магнитного потока, проникающего сквозь контакт.

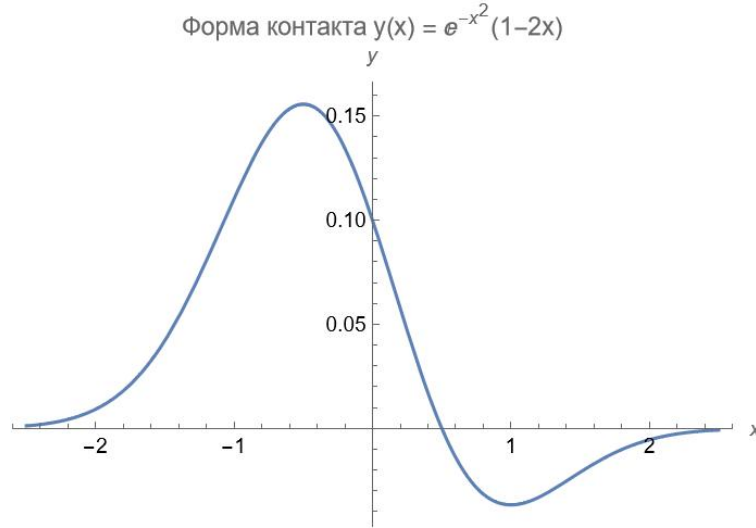


Рис. 3.4: Форма искривленного STIS контакта.

Зная выражение для формы кривой, мы можем вычислить её кривизну по формуле:

$$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}. \quad (3.39)$$

Построим выражение $\kappa(x)\kappa'(x)$ - пропорциональное разности токов при температуре T и $T = 0$ (см. рис. 3.5).

Из рисунка 3.5 можно заметить, что максимальный и минимальный токи различаются, а значит будет наблюдаться джозефсоновский диодный эффект.

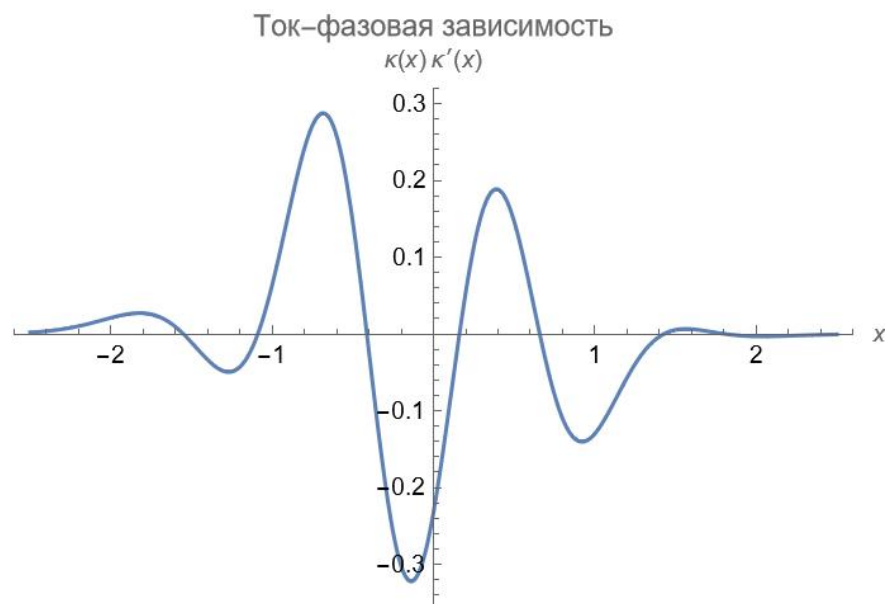


Рис. 3.5: Величина $\kappa(x)\kappa'(x)$, пропорциональная ток-фазовой зависимости.

Глава 4

Результаты и обсуждения

В работе исследовалась гетероструктура STIS произвольной формы, которая выражается через $\kappa(q_1)$ - локальную кривизну как функцию натурального параметра. Сквозь гетероструктуру проходит поток магнитного поля, создавая одномерную решетку джозефсоновских вихрей. Кривизну и магнитное поле мы считаем достаточно малой, чтобы не учитывать переходы через верхние андреевские уровни, останавливаясь на рассмотрении низкоэнергетической физики системы.

В ходе работы были получены следующие результаты:

- Было получено выражение для операторов компонент импульса (3.13) в криволинейной системе координат, в которой контакт имеет прямоугольный вид. Было показано, что дираковский гамильтониан остается инвариантным при его проекции на кривую, относительно самого вида кривой (3.18).
- Было получено выражение для гамильтониана STIS гетероструктуры произвольной формы $\kappa(q_1)$ и параметров W, μ_n, μ_s в виде разложения по средним $\langle \tau_z \sigma_x q_2^n \rangle$ (3.22).
- В простейшем случае ($W = 0, \mu_s = 0$) была получена добавка к спектру, пропорциональная квадрату кривизны в точке расположения джозефсоновского вихря на кривой. (3.34).
- Получен вклад в ток-фазовое соотношение в пределе низких температур (3.38), вызванный неоднородностью формы контакта. Этот вклад не обращается в нуль при полях, соответствующих целому числу квантов потока, что означает отличие максимального суммарного джозефсоновского тока от фраугоферовской картины. Было показано, что в асимметричном относительно натурального параметра контакте может присутствовать джозефсоновский диодный эффект.

В дальнейшей работе планируется исследовать джозефсоновский ток при произвольных параметрах μ_n , μ_s , W .

Литература

- [1] A. Kitaev, *Fault-tolerant quantum computation by anyons*, Annals of Physics **303** (2003).
- [2] J. Alicea, *New directions in the pursuit of majorana fermions in solid state systems*, Reports on Progress in Physics Science **75** (2012).
- [3] B. W. Heinrich, J. I. Pascual and K. J. Franke, *Single magnetic adsorbates on s-wave superconductors*, Progress in Surface Science **93** (2018).
- [4] L. Fu and C. Kane, *Superconducting proximity effect and majorana fermions at the surface of a topological insulator*, Phys. Rev. Lett **100** (2008).
- [5] Guang Yue et al., *Signatures of majorana bound states in the diffraction patterns of extended superconductor-topological insulator-superconductor josephson junctions*, Phys. Rev. B **109** (2024).
- [6] Yunxiao Zhang et al., *A c josephson effect in corbino-geometry josephson junctions constructed on Bi_2Te_3 surface*, Chinese Physics B **31**(2022).
- [7] A. Potter and L. Fu, *Anomalous supercurrent from majorana states in topological insulator josephson junctions*, Phys. Rev. B **88** (2013).
- [8] P. A. Ioselevich, P. M. Ostrovsky, M. V. Feigel'man., *Majorana state on the surface of a disordered 3d topological insulator*, Phys. Rev. B **86** (2012).
- [9] A. Kudriashov et al., *Non-reciprocal current-phase relation and superconducting diode effect in topological-insulator-based josephson junctions*, preprint, ArXiv (2025).
- [10] Kiryl Piasotski, Omri Lesser, Adrian Reich, Pavel Ostrovsky, Eytan Grosfeld, Yuriy Makhlin, Yuval Oreg and Alexander Shnirman, *Current flow in topological insulator josephson junctions due to imperfections*, Phys. Rev. B **111** (2025).
- [11] S. Backens and A. Shnirman, *Current-phase relation in a topological josephson junction: Andreev bands versus scattering states*, Phys. Rev. B **103** (2021).
- [12] M. Tinkham, *Introduction to superconductivity*, International series in pure and applied physics (1996).

- [13] M. S. Shikakhwa and N.Chair, *Hamiltonian, geometric momentum and force operators for a spin zero particle on a curve: physical approach*, Eur. Phys. J. Plus **139** (2024).
- [14] F. E. Meijer, A. F. Morpurgo, and T. M. Klapwijk., *One-dimensional ring in the presence of rashba spin-orbit interaction: Derivation of the correct hamiltonian*, Phys. Rev. B **66** (2002).
- [15] И. О. Кулик и И.К. Янсон, *Современные проблемы физики*, Издательство «Наука» (1970).
- [16] A.A.Golubov, M.Yu.Kupriyanov, E. Il'ichev, *The current-phase relation in josephson junctions*, Reviews of Modern Physics **76** (2004).