Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Пиннинг вихрей в тонких пленках за пределами приближения жесткого кора

Автор:
Студент 107 группы
Князев Матвей Сергеевич

Научные руководители:
Николай Анатольевич Степанов
Михаил Андреевич Скворцов

Москва 2025

Аннотация

Получена концентрация устойчивых положений (минимумов энергии пиннинга) для одиночного вихря в двумерной сверхпроводящей пленке вблизи критической температуры в присутствии слабого гауссового беспорядка в квадратичном члене функционала Гинзбурга-Ландау в первых двух порядках теории возмущений по слабости беспорядка. В первом порядке теории возмущений (не учитывая изменение формы вихря, т.н. "жесткий вихрь") также найдено распределение вторых производных (кривизн) энергии в минимумах. Используемый в первом порядке метод решения оказался не применим напрямую для второго порядка из-за наличия нулевых мод в уравнении на первую поправку к профилю вихря. Показано, как тем не менее можно модифицировать используемый подход, если ввести некоторый функционал, характеризующий меру отклонения формы вихря от начальной. Выбор этого функционала достаточно произвольный, но аналитически проверено, что получаемый ответ для концентрации от этого выбора не зависит.

Содержание

1 Введение

В сверхпроводниках второго рода в присутствии магнитного поля образуются вихри. При протекании тока на эти вихри действует поперечная сила Лоренца, которая может привести к движению вихрей и диссипации энергии. Наличие дефектов в образце может привести т.н. пиннингу вихрей на этих дефектах, позволяя току протекать без потери энергии, из-за чего задача нахождения энергии пиннинга представляет определенный интерес.

В последние годы были развиты технологии, позволяющие наблюдать одиночные вихри и измерять энергию пиннинга. Так, в [4] описан метод SOT (SQUID-on-tip), который позволяет измерять сдвиг положения вихря в зависимости от действующей на вихрь силы (возникающей за счет протекания тока). В работе [3] исследуется вопрос о том, на какой доле пространства можно измерить энергию пиннинга таким методом для различных типов профиля пиннинга.

В данной работе мы будем исследовать профиль пиннинга феноменологически, вблизи критической температуры, для слабого беспорядка в коэффициенте перед квадратичным членом энергии Гинзбурга-Ландау (для микроскопического обоснования см. [5]). В работе [6] обсуждается пиннинг вихрей и находится критический ток для более общей модели, в которой также имеет случайную добавку коэффициент перед градиентным членом.

Основной целью работы будет нахождение средней концентрации минимумов энергии пиннинга (нежели например критического тока). Для этого мы будем использовать метод, описанный в [1, 2], который позволяет найти концентрацию минимумов профиля F через распределение первых и вторых производных в произвольной (т.е. не обязательно экстремуме) точке.

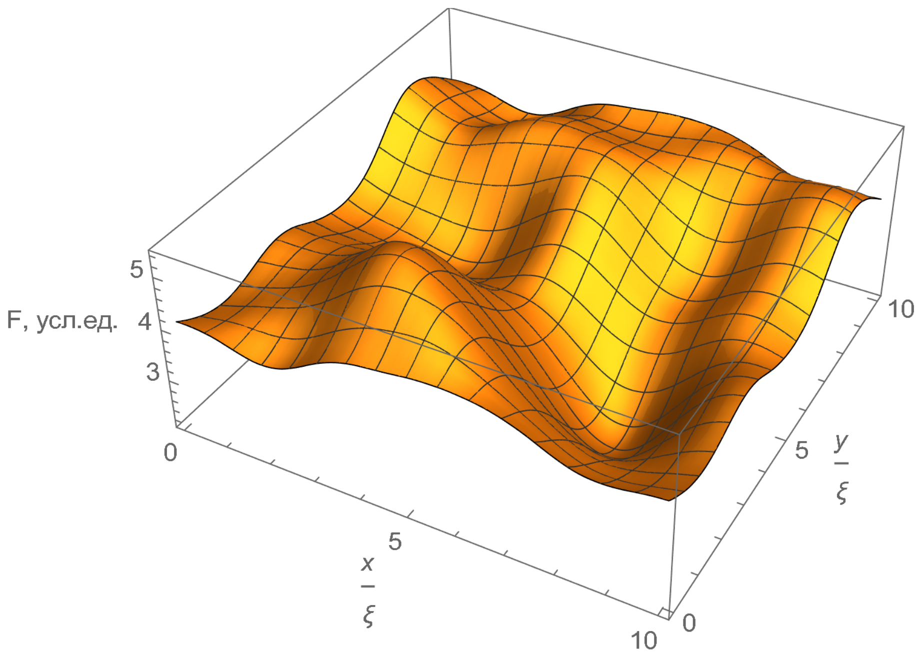

Рис. 1: Типичный гауссовый профиль энергии пиннинга F в первом порядке по беспорядку. Энергия измеряется в условных единицах, координаты – в корреляционых длинах ξ

2 Постановка задачи

Мы рассматриваем сверхпроводящую тонкую двумерную пленку вблизи критической температуры и исследуем среднюю концентрацию устойчивых положений одиночного вихря в присутствии слабого беспорядка. Усреднение имеется в виду по реализациям беспорядка. Беспорядок мы моделируем как распределенную по Гауссу поправку α к коэффициенту α_0 в свободной энергии Гизбурга-Ландау перед $|\Delta|^2$. Т.к. при $T \to T_c$ корреляционная длина велика, мы считаем беспорядок локальным:

$$\langle \alpha(\mathbf{r})\, \alpha(\mathbf{r}') \rangle = A\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\,. \tag{1}$$

Беспорядок будем считать малым, т.е. $A \ll \alpha_0^2 \xi^2$.

Основной целью работы является нахождение концентрации устойчивых положений вихря в первом и втором порядке малости по слабости беспорядка. Кроме этого, мы находим концентрации максимумов энергии и седловых точек, а в первом порядке мы также находим распределение вторых производных энергии (кривизн) в минимумах.

Мы будем также считать, что эффективная длина проникновения магнитного поля λ_{eff} много больше корреляционной длины ξ: $\kappa = \lambda_{\text{eff}}/\xi \gg 1$. Это позволит нам пренебречь магнитной энергией вихря: действительно, отношение магнитной энергии вихря к энергии конденсации кора есть $\ln\kappa$, а отношение характерных масштабов локализации этих энергий есть κ, поэтому отношений производных энергии (сил) будет $(\ln\kappa)/\kappa \ll 1$. Т.к. условие на экстремумы и минимумы содержит только производные энергии, а не саму энергию, то магнитное поле мы не будем учитывать.

Таким образом, мы будем искать среднюю концентрацию $n_{\min}$ минимумов функционала Гинзбурга-Ландау:

$$F = \int d^2\mathbf{r} \left(-\left(\alpha_0 + \alpha(\mathbf{r})\right) |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4 + \gamma \left|\partial_i \Delta\right|^2 \right), \tag{2}$$

где $\alpha(\mathbf{r})$ распределена по Гауссу с коррелятором (1).

3 Вывод выражения для концентрации минимумов через плотность распределения первых и вторых производных в произвольной точке

Следуя [1] и [2], покажем, как можно находить среднюю концентрацию минимумов.

Пусть мы знаем как энергия F вихря с центром в $\mathbf{r}$ зависит от $\mathbf{r}$ и от реализации беспорядка α. Для нахождения средней концентрации минимумов оказывается полезным знать функцию распределения $\rho\left(f_i,f_{ij};\mathbf{r}\right) \equiv \rho\left(f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy};\mathbf{r}\right)$ первых и вторых производных $f_i = \partial_i F$, $f_{ij} = \partial_{ij} F$ в произвольной точке $\mathbf{r}$. Здесь и далее латинские индексы из середины алфавита пробегают значения $i = x$, y и $ij = xx$, xy, yy (ij не принимает значения yx, т.к. смешанные производные f_{xy} и f_{yx} равны, и соответственно в $\rho\left(f_i,f_{ij};\mathbf{r}\right)$ мы указываем только одно из них). В силу однородности, $\rho\left(f_i,f_{ij};\mathbf{r}\right)$ от r зависеть не будет. Покажем, как из $\rho\left(f_i,f_{ij};\mathbf{r}\right)$ находить интересующие нас величины.

Пусть мы хотим найти концентрацию экстремумов профиля энергии $F\left(\mathbf{r}\right)$. Рассмотрим область площади Area. Количество экстремумов в ней можно записать как

$$N_{\text{extr}} = \int dx\, dy\, \delta\left(f_x\right) \delta\left(f_y\right) \left|\det H\right| \tag{3}$$

где H – гессиан:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Усредняя по реализациям беспорядка, найдем концентрацию экстремумов n_{extr}:

$$n_{\text{extr}} = \frac{\langle N_{\text{extr}} \rangle}{\text{Area}} = \left\langle \delta\left(f_x\right) \delta\left(f_y\right) \left|\det H\right| \right\rangle \tag{5}$$

Т.к. мы усредняем по беспорядку величину, зависящую только от f_i и f_{ij}, то это усреднение можно производить в два этапа: сначала найти плотность распределения $\rho\left(f_i,f_{ij}\right)$, а затем усреднить $\delta\left(f_x\right)\delta\left(f_y\right)\det H$ по этой плотности:

$$n_{\text{extr}} = \int df_i \int df_{ij} \rho\left(f_i,f_{ij}\right) \delta\left(f_x\right) \delta\left(f_y\right) \left|\det H\right| = \int df_{ij} \rho\left(f_i = 0,f_{ij}\right) \left|\det H\right| \tag{6}$$

где для краткости мы обозначаем $\int df_i = \int df_x df_y$, $\int df_{ij} = \int df_{xx} df_{yy} df_{xy}$. Таким образом, концентрация экстремумов действительно выражается через плотность распределения первых и вторых производных $\rho\left(f_i,f_{ij}\right)$.

Представим теперь что мы хотим найти концентрацию минимумов. Для этого достаточно в усредняемое выражение добавить $\theta_{\min} = \theta\left(f_{xx}\right)\theta\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)$, которое равно 1 для минимумов и 0 для остальных экстремумов:

$$N_{\min} = \int dx\, dy\, \theta\left(f_{xx}\right) \theta\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) \delta\left(f_x\right) \delta\left(f_y\right) \det H \tag{7}$$

$$n_{\min} = \int df_{ij} \rho\left(f_i = 0,f_{ij}\right) \theta\left(f_{xx}\right) \theta\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) \det H \tag{8}$$

Аналогичные выражения можно написать для концентрации максимумов и седловых точек, добавляя $\theta_{\max} = \theta\left(-f_{xx}\right)\theta\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)$ и $\theta_{\text{saddle}} = \theta\left(-f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2\right)$ соответственно.

Из $\rho\left(f_i,f_{ij}\right)$ можно также извлечь более детальную информацию, а именно найти функцию распределения вторых производных в минимумах $\rho^{(\min)}\left(f_{ij}\right)$. Для этого нам нужно усреднить дельта-функции от вторых производных по минимумам:

$$\rho^{(\min)}\left(f_{xx},f_{yy},f_{xy}\right)=\left\langle\delta\left(f_{xx}-f'_{xx}\right)\delta\left(f_{yy}-f'_{yy}\right)\delta\left(f_{xy}-f'_{xy}\right)\right\rangle_{\min}=$$
$$=\frac{1}{n_{\min}}\int df'_{ij}\rho\left(f_i=0,f'_{ij}\right)\theta_{\min}\mathrm{det}H\delta\left(f_{xx}-f'_{xx}\right)\delta\left(f_{yy}-f'_{yy}\right)\delta\left(f_{xy}-f'_{xy}\right)=$$
$$=\frac{1}{n_{\min}}\rho\left(f_i=0,f_{ij}\right)\theta_{\min}\mathrm{det}H \quad (9)$$

4 Первый порядок (жесткий вихрь)

4.1 Теория возмущений

Найдем, как меняется энергия и форма вихря при заданной реализации беспорядка $\alpha(\mathbf{r})$. Варьируя (2) по $\overline{\Delta}$, получим уравнение Гинзбурга-Ландау:

$$(\alpha_0 + \alpha(r))\,\Delta - \beta\,|\Delta|^2\,\Delta + \gamma\partial^2\Delta = 0 \tag{10}$$

Ищем решение в виде ряда по малости добавки α. Имея в виду дальнейшее применение в части 5, будем искать поправки к энергии с точностью до второго порядка. Для формы вихря пишем

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots \tag{11}$$

В нулевом и первом порядках уравнение (10) дает

$$\alpha_0\Delta_0 - \beta\,|\Delta_0|^2\,\Delta_0 + \gamma\partial^2\Delta_0 = 0 \tag{12}$$

$$\alpha_0\Delta_1 + \alpha(\mathbf{r})\,\Delta_0 - \beta\left(\Delta_0^2\overline{\Delta}_1 + 2\,|\Delta_0|^2\,\Delta_1\right) + \gamma\partial^2\Delta_1 = 0 \tag{13}$$

Как известно, уравнение (12) имеет вихревое решение, которое записывается в полярных координат как

$$\Delta_0(r,\phi) = |\Delta_0|\,(r)\,e^{i\phi} \tag{14}$$

Профиль невозмущенного вихря $|\Delta_0|$ изображен на рисунке 2.

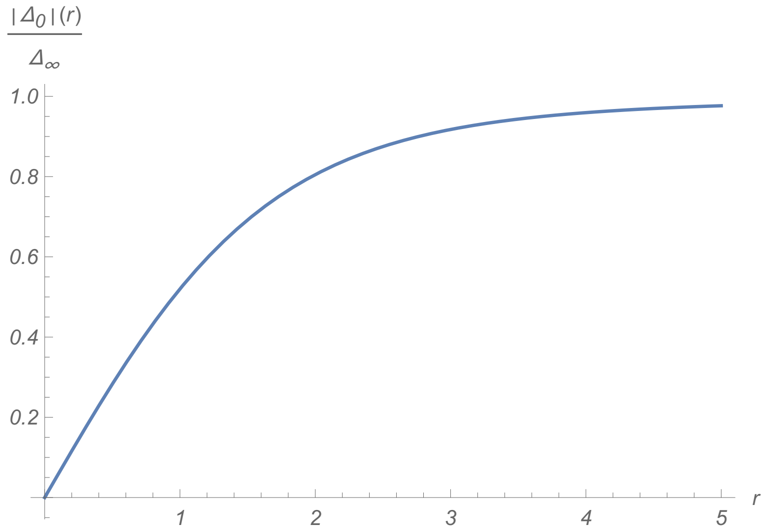

Рис. 2: Профиль невозмущенного вихря. Здесь $\Delta_\infty = \sqrt{\alpha_0/\beta}$ – модуль параметра порядка вдалеке от вихря

Уравнение на Δ_2 мы не пишем, т.к. оно оказывается ненужным для нахождения поправки к энергии второго порядка F_2.

Для разложения энергии $F = F_0 + F_1 + F_2$ с точностью до второго порядка получим

$$F_0 = \int d^2\mathbf{r}\left(-\alpha_0\,|\Delta_0|^2 + \frac{\beta}{2}\,|\Delta_0|^4 + \gamma\partial_i\Delta_0\partial_i\overline{\Delta}_0\right) \tag{15}$$

$$F_1 = \int d^2\mathbf{r}\left[-\alpha\,|\Delta_0|^2 - \alpha_0\Delta_0\overline{\Delta}_1 - \alpha_0\overline{\Delta}_0\Delta_1 + \beta\Delta_0\Delta_1\overline{\Delta}_0^2 + \beta\overline{\Delta}_0\overline{\Delta}_1\Delta_0^2 + \gamma\partial\Delta_0\partial\overline{\Delta}_1 + \gamma\partial\overline{\Delta}_0\partial\Delta_1\right] \tag{16}$$

$$F_2=\int d^2\mathbf{r}\left[-\alpha\left(\Delta_0\overline{\Delta}_1+\overline{\Delta}_0\Delta_1\right)-\alpha_0\left(\Delta_0\overline{\Delta}_2+\overline{\Delta}_0\Delta_2+\Delta_1\overline{\Delta}_1\right)+\frac{\beta}{2}\Delta_0^2\left(2\overline{\Delta}_0\overline{\Delta}_2+\overline{\Delta}_1^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\beta}{2}\overline{\Delta}_0^2\left(2\Delta_0\Delta_2+\Delta_1^2\right)+2\beta\left|\Delta_0\right|^2\left|\Delta_1\right|^2+\gamma\left(\partial\Delta_0\partial\overline{\Delta}_2+\partial\overline{\Delta}_0\partial\Delta_2+\partial\overline{\Delta}_1\partial\overline{\Delta}_1\right)\right]\quad(17)$$

Используя уравнения (12) и (13), выражения для F_1 и F_2 можно существенно упростить до

$$F_1=-\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\left|\Delta_0\right|^2\quad(18)$$

$$F_2=-\frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}\alpha\left(\Delta_0\overline{\Delta}_1+\overline{\Delta}_0\Delta_1\right)\quad(19)$$

4.2 Распределение первых и вторых производных

Перейдем теперь к нахождению распределения производных $\rho\left(f_i,f_{ij}\right)$. В первом порядке по шуму добавка к энергии есть просто усреднение добавки к функционалу по невозмущенному вихрю:

$$F\left(\mathbf{R}\right)\approx F_1\left(\mathbf{R}\right)=-\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\left(\mathbf{r}\right)\Phi\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right)\quad(20)$$

где мы ввели обозначение

$$\Phi\left(\mathbf{r}\right)=\left|\Delta_0^2\left(\mathbf{r}\right)\right|\quad(21)$$

Дифференцируя по $\mathbf{R}$, получим для первых и вторых производных

$$f_i=\frac{\partial}{\partial R_i}F_1=\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\,\partial_i\Phi\quad(22)$$

$$f_{ij}=\frac{\partial}{\partial R_j}\frac{\partial}{\partial R_i}F_1=-\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\,\partial_{ij}\Phi\quad(23)$$

Т.к. f_i и f_{ij} линейно зависят от гауссовой α, то и они сами будут распределены по Гауссу, т.е. плотность распределения $\rho\left(f_i,f_{ij}\right)$ имеет вид

$$\rho\left(f_\mu\right)=\frac{\sqrt{\det B}}{\left(2\pi\right)^{5/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}f_\mu B_{\mu\nu}f_\nu\right)\quad(24)$$

где греческие индексы пробегают значения x, y, xx, yy, xy. Матрицу B можно восстановить по средним $\langle f_\mu f_\nu\rangle$:

$$\left(B^{-1}\right)_{\mu\nu}=\langle f_\mu f_\nu\rangle\quad(25)$$

поэтому далее мы переходим к отысканию этих средних.

Обозначим через s_μ четность количества индексов в μ: $s_\mu=-1$ для $\mu=x$, y и $s_\mu=+1$ для $\mu=xx$, yy, xy. Тогда уравнения (22) и (23) можно записать единым образом как

$$f_\mu=-s_\mu\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\,\partial_\mu\Phi\quad(26)$$

и средние будут

$$\langle f_\mu f_\nu\rangle=\left\langle s_\mu\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\left(\mathbf{r}\right)\partial_\mu\Phi\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right)\,s_\nu\int d^2\mathbf{r}'\,\alpha\left(\mathbf{r}'\right)\partial_\nu\Phi\left(\mathbf{r}'-\mathbf{R}\right)\right\rangle=As_\mu s_\nu\int d^2\mathbf{r}\partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi\quad(27)$$

Т.к. Φ является четной функцией, то ее первые производные $\partial_i\Phi$ будут нечетными, а вторые производные $\partial_{jk}\Phi$ – четными. Тогда интеграл от произведения первой и второй производных будет нулевым, и соответственно $\langle f_i f_{jk} \rangle = 0$. Из этого следует, что распределение первых производных и распределение вторых производных оказываются независимыми: $\rho(f_i, f_{ij}) = \rho_1(f_i)\,\rho_2(f_{ij})$.

Ненулевыми оказываются следующие средние:

$$\langle f_x f_x \rangle = \langle f_y f_y \rangle = \pi A \int_0^\infty dr\, r\, (\partial_r \Phi)^2 = A c_1 \tag{28}$$

$$\frac{1}{3}\langle f_{xx} f_{xx} \rangle = \frac{1}{3}\langle f_{yy} f_{yy} \rangle = \langle f_{xx} f_{yy} \rangle = \langle f_{xy} f_{xy} \rangle = A\frac{\pi}{4}\int_0^\infty dr\, r\left(\frac{1}{r^2}(\partial_r \Phi)^2 + \left(\partial_r^2 \Phi\right)^2\right) = A c_2 \tag{29}$$

где c_1 и c_2 находятся численно как

$$c_1 = \pi \int_0^\infty dr\, r\, (\partial_r \Phi)^2 \approx 1.24 \Delta_\infty^4 \tag{30}$$

$$c_2 = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty dr\, r\left(\frac{1}{r^2}(\partial_r \Phi)^2 + \left(\partial_r^2 \Phi\right)^2\right) \approx 0.371 \frac{\Delta_\infty^4}{\xi^2} \tag{31}$$

Здесь $\Delta_\infty = \sqrt{\alpha_0/\beta}$ – модуль параметра порядка вдалеке от вихря, $\xi = \sqrt{\gamma/\alpha_0}$ – корреляционная длина.

Обращая матрицу средних, для плотности распределения первых и вторых производных получаем в итоге:

$$\rho_0(f_\mu) = \frac{\left(8c_1^2 c_2^3 A^5\right)^{-1/2}}{(2\pi)^{5/2}} \exp\left(-\frac{f_x^2 + f_y^2}{2Ac_1}\right) \exp\left(-\frac{3}{16Ac_2}\left(f_{xx}^2 + f_{yy}^2\right) + \frac{1}{8Ac_2} f_{xx} f_{yy} - \frac{1}{2Ac_2} f_{xy}^2\right) \tag{32}$$

4.3 Концентрация экстремумов и минимумов

Получив $\rho_0(f_\mu)$, можем перейти к вычислению концентрации экстремумов. Подставляя ρ_0 в (6) и обезразмеривая полученный интеграл, получим

$$n_{\mathrm{extr}} = \frac{1}{16\pi^{5/2}} \frac{c_2}{c_1} \int df_{xx} df_{xy} df_{yy} \left| f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \right| \exp\left(-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2 + f_{yy}^2\right) + \frac{1}{8} f_{xx} f_{yy} - \frac{1}{2} f_{xy}^2\right) \tag{33}$$

Этот интеграл мы вычисляем в приложении, он оказывается равным $32\pi^{3/2}/\sqrt{3}$, и выражение для n_{extr} принимает вид

$$n_{\mathrm{extr}} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \frac{c_2}{c_1} \approx \frac{0.110}{\xi^2} \tag{34}$$

Как и следует ожидать, в этом порядке ответ не зависит от силы беспорядка A (т.к. увеличение A в k раз приводит лишь к изменению профиля энергии как целого в такое же число раз, не меняя число экстремумов).

Концентрации минимумов, максимумов и седел можно получить из n_{extr} из следующих соображений. Во-первых, как известно, средняя концентрация седел равна сумме концентраций минимумов и максимумов:

$$n_{\mathrm{saddle}} = n_{\mathrm{min}} + n_{\mathrm{max}} \tag{35}$$

Во-вторых, реализации $\alpha(r)$ и $-\alpha(r)$ одинаково вероятны, но в первом порядке теории возмущений, когда энергия линейно зависит от α, минимумы одной реализации будут соответствовать максимумам другой, и наоборот, поэтому

$$n_{\mathrm{min}} = n_{\mathrm{max}} \tag{36}$$

Тогда концентрации минимумов, максимумов и седел соотносятся с концентрацией экстремумов как

$$n_{\mathrm{min}} = n_{\mathrm{max}} = \frac{1}{4} n_{\mathrm{extr}} = \frac{0.0276}{\xi^2} \tag{37}$$

$$n_{\mathrm{saddle}} = \frac{1}{2} n_{\mathrm{extr}} = \frac{0.0551}{\xi^2} \tag{38}$$

В приложении мы также проверяем это напрямую из интегральных выражений для n_{min}, n_{max} и n_{saddle}.

Отметим, что численный префактор в n_{min} оказывается довольно малым, и характерное расстоянием между устойчивыми положениями вихря оказывается

$$\frac{1}{\sqrt{n_{\mathrm{min}}}} = 6.02\xi \tag{39}$$

4.4 Распределение средней и Гауссовой кривизны в минимумах

Подставляя (32) в (9), получим распределение кривизн в минимумах:

$$\rho^{(\mathrm{min})}\left(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}\right) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} c_2^{5/2} A^{5/2}} \exp\left(-\frac{3}{16 A c_2}\left(f_{xx}^2 + f_{yy}^2\right) + \frac{1}{8 A c_2} f_{xx} f_{yy} - \frac{1}{2 A c_2} f_{xy}^2\right) \left|f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right| \theta_{\mathrm{min}} \tag{40}$$

Отсюда можем найти распределение средней кривизны $h = \left(f_{xx} + f_{xy}\right)/2$ и гауссовой кривизны $k = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$. Распределение средней кривизны выражается через $\rho^{(\mathrm{min})}\left(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}\right)$ как

$$\rho_h(h) = \int df_{ij} \delta\left(h - \frac{f_{xx} + f_{yy}}{2}\right) \rho^{(\mathrm{min})}\left(f_{ij}\right) \tag{41}$$

После подстановки $\rho^{(\mathrm{min})}$ и замены

$$f_{xx} = h + \sqrt{A c_2} \rho \cos\theta \tag{42}$$

$$f_{xy} = \sqrt{A c_2} \rho \sin\theta \tag{43}$$

интеграл сведется к

$$\rho_h(h) = \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 A c_2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{h^2}{A c_2} - \frac{1}{2} \rho^2\right) \left|\frac{h^2}{A c_2} - \rho^2\right| \\ \theta\left(h + \sqrt{A c_2} \rho \cos\theta\right) \theta\left(\frac{h^2}{A c_2} - \rho^2\right) \tag{44}$$

Произведение θ-функций равно единице в области $\rho < h/\sqrt{A c_2}$, $0 < \theta < 2\pi$, поэтому интегрирование по θ сводится к умножению на 2π. После взятия интеграла по ρ, получим

$$\rho_h(h) = \theta(h) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2 A c_2}} \left[2 \exp\left(-\frac{3}{4} \frac{h^2}{A c_2}\right) + \left(\frac{h^2}{A c_2} - 2\right) \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{h^2}{A c_2}\right)\right] \tag{45}$$

График этой функции изображен на рис. 3.

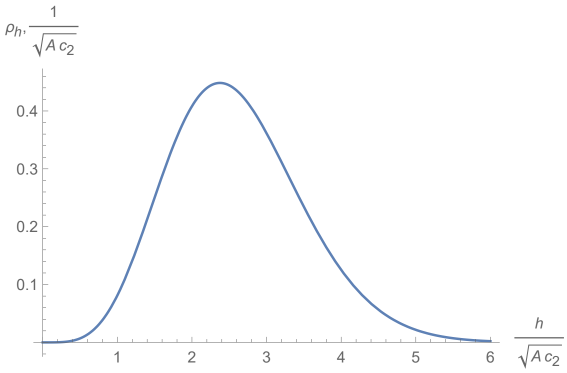

Рис. 3: Распределение средней кривизны $h = (f_{xx} + f_{yy})/2$ в минимумах

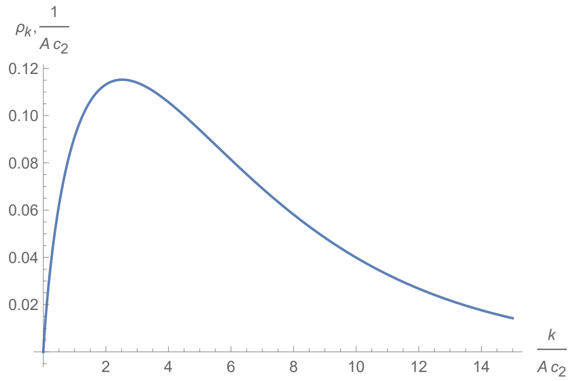

Рис. 4: Распределение гауссовой кривизны $k = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ в минимумах

Найдем теперь распределение ρ_k гауссовой кривизны $k = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$. Оно выражается через $\rho^{(\min)}(f_{xx}, f_{yy}, f_{xy})$ как

$$\rho_k(k) = \int df_{ij} \delta\left(k - \left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\right) \rho^{(\min)}(f_{ij}) \tag{46}$$

После перехода к h, ρ, θ:

$$f_{xx} = \sqrt{Ac_2}\,(h + \rho\cos\theta) \tag{47}$$
$$f_{yy} = \sqrt{Ac_2}\,(h - \rho\cos\theta) \tag{48}$$
$$f_{xy} = \sqrt{Ac_2}\,\rho\sin\theta \tag{49}$$

интеграл (46) запишется как

$$\rho_k(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_0^\infty 2\rho d\rho \int_0^\infty dh \int_0^{2\pi} d\theta \delta\left(k - Ac_2\left(h^2 - \rho^2\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{4}h^2 - \frac{1}{2}\rho^2\right) \left(h^2 - \rho^2\right) \theta\left(h^2 - \rho^2\right) \tag{50}$$

Интегрирование по θ дает 2π, интегрирование по h снимает дельта-функцию, и оставшийся интеграл по ρ сводится к erfc:

$$\rho_k(k) = \frac{\theta(k)}{Ac_2} \frac{k}{4Ac_2} \exp\left(\frac{k}{2Ac_2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{k}{Ac_2}}\right) \tag{51}$$

График этой функции изображен на рис. 4.

Отметим также, что область, в которой гессиан положительно определен (и которую можно исследовать методом SOT [4]), можно найти с помощью (32) как

$$\int df_\mu \rho_0(f_\mu)\, \theta(f_{xx})\, \theta\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}, \tag{52}$$

что находится в соответствии с [3] (где исследовались более общие профили энергии).

4.5 Концентрация минимумов в случае наличия внешней силы

Найдем, как изменится концентрация минимумов, если теперь на вихри дополнительно действует постоянная внешняя сила с компонентами $f_x^{(\text{внешн})}$, $f_y^{(\text{внешн})}$. Через f_x и

f_y будем по-прежнему обозначать производные (без минуса, присутствующего в определении силы) энергии F, которая не учитывает наличие внешней силы. В этом случае вихрь будет находиться в равновесии при условии

$$f_i = f_i^{(\text{внешн})} \tag{53}$$

Для этой ситуации можно повторить рассуждения, аналогичные рассуждениям из части 3, но заменяя теперь $\delta(f_i)$ на $\delta\left(f_i - f_i^{(\text{внешн})}\right)$ в уравнении (3). Такая замена приведет только к тому, что в формуле (8) нужно использовать $\rho\left(f_i = f_i^{(\text{внешн})}, f_{ij}\right)$ вместо $\rho(f_i = 0, f_{ij})$. Это приведет к тому, что в $n_{\min}$ добавится экспонента:

$$n_{\min}\left(f^{(\text{внешн})}\right) = \frac{0.0276}{\xi^2}\exp\left(-\frac{\left(f^{(\text{внешн})}\right)^2}{2Ac_1}\right) \tag{54}$$

4.6 Совместная плотность распределения производных и энергии

Для поиска концентрации минимумов значение энергии не важно, достаточно знать только распределение производных. Однако в первом порядке энергия линейная по α и мы можем довольно легко найти распределение $\rho_F(F, f_i, f_{ij})$ не только производных, но и самой энергии. Использовать непосредственно F нельзя, т.к. ее средний квадрат расходится:

$$\langle FF \rangle = \int_0^\infty dr\, 2\pi r\, \Phi^2 = \infty \tag{55}$$

поэтому мы вместо этого будем рассматривать относительный выигрыш в энергии, по сравнению со средним (для данной реализации беспорядка) уровнем энергии:

$$f = F + \int d^2r\, \alpha(\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}\, (1 - \Phi)\, \alpha \tag{56}$$

Для нахождения распределения $\rho_F(f, f_i, f_{ij})$ нам нужно найти средние между f и другими величинами. Средние $\langle f f_i \rangle$ будут нулевыми по четности. Средние $\langle ff \rangle$ и $\langle f f_{ij} \rangle$ будут равны

$$\langle ff \rangle = 2\pi A \int_0^\infty dr\, r\, (1 - \Phi)^2 = Ac_3 \tag{57}$$

$$\langle f f_{xx} \rangle = \langle f f_{yy} \rangle = \pi A \int_0^\infty dr\, \Phi\left(\partial_r \Phi + r\partial_r^2 \Phi\right) = -Ac_1 \tag{58}$$

$$\langle f f_{xy} \rangle = 0 \tag{59}$$

где

$$c_3 = 2\pi \int_0^\infty dr\, r\, (1 - \Phi)^2 \approx 6.26\Delta_\infty^4 \xi^2 \tag{60}$$

Обращая матрицу средних, найдем плотность распределения:

$$\rho_F = \frac{\left(4c_1^2 c_2^2 \left(2c_2c_3 - c_1^2\right) A^6\right)^{-1/2}}{(2\pi)^3} \exp\left[-\frac{c_2}{2c_2c_3 - c_1^2}\frac{f^2}{A} - \frac{f_x^2 + f_y^2}{2c_1 A} - \frac{f_{xx}^2 + f_{yy}^2}{2A}\frac{3c_2c_3 - c_1^2}{4c_2\left(2c_2c_3 - c_1^2\right)}\right.$$
$$\left. - \frac{f_{xy}^2}{2c_2 A} - \frac{c_1}{2c_2c_3 - c_1^2}\frac{f\left(f_{xx} + f_{yy}\right)}{2A} + \frac{f_{xy}\left(f_{xx} + f_{yy}\right)}{A}\frac{c_2c_3 - c_1^2}{4c_2\left(2c_2c_3 - c_1^2\right)}\right] \tag{61}$$

Т.к. $\langle f f_{xx} \rangle$ оказывается отрицательной, то более глубокие минимумы (у которых f большой отрицательный) обладают большей кривизной, чем менее глубокие.

5 Второй порядок (нежесткий вихрь)

5.1 Нулевые моды

Для нахождения $\rho\left(f_i, f_{ij}\right)$ с учетом второго порядка полученные формулы (19), (13) для F_2 непригодны. Это связано с тем, что полученные формулы дают поправки к энергии F_2 и форме вихря Δ_1 только в точках $\mathbf{R}$, соответствующих минимумам энергии F_1; в произвольной же точке уравнение (13) не будет иметь решений. Действительно, если мы рассмотрим вихрь в некоторой точке $\mathbf{R}$ и сдвинем его на $\delta\mathbf{R}$ (что соответствует $\Delta_1 = -\delta\mathbf{R}\,\boldsymbol{\partial}\Delta_0$), его энергия изменится на

$$\delta F = \delta\left(F_1 + F_2\right) = \delta\mathbf{R}\frac{\partial F_1}{\partial\mathbf{R}} + \delta\mathbf{R}\frac{\partial F_2}{\partial\mathbf{R}} \tag{62}$$

Если $\partial F_1/\partial\mathbf{R} \neq 0$, то второе слагаемое будет много меньше первого, и при сдвиге вдоль $-\boldsymbol{\partial}F_1$ энергия будет уменьшаться. Тогда для минимизации энергии можно брать $\Delta_1 = -\delta\mathbf{R}\boldsymbol{\partial}\Delta_0 = s\left(\boldsymbol{\partial}F_1, \boldsymbol{\partial}\Delta_0\right)$ и увеличивать параметр s; при этом энергия будет уменьшаться до тех пор, пока вихрь не отойдет настолько далеко от начального положения, что теория возмущений перестанет работать.

Математически описанная проблема проявляется в наличии нулевых мод у уравнения (13). Т.к. удобнее рассматривать линейные уравнения, а уравнение (13) не является линейным относительно Δ_1 (ибо содержит $\overline{\Delta_1}$), запишем уравнение (13) и сопряженное ему в матричном виде:

$$\hat{D}\begin{pmatrix}\Delta_1\\ \overline{\Delta_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\alpha\left(r\right)\Delta_0\\ -\alpha\left(r\right)\overline{\Delta_0}\end{pmatrix} \tag{63}$$

где $\hat{D}$ – эрмитов оператор, равный

$$\hat{D} = \begin{pmatrix}\gamma\partial^2 + \alpha_0 - 2\beta\left|\Delta_0\right|^2 & -\beta\Delta_0^2\\ -\beta\overline{\Delta_0^2} & \gamma\partial^2 + \alpha_0 - 2\beta\left|\Delta_0\right|^2\end{pmatrix} \tag{64}$$

Сходный оператор L^{-1} возникал в работе [7], где строилась теория возмущений по беспорядку для параметра порядка при протекании сверхтока. В нашем случае, однако, оператор D будет необратим.

Из-за наличия трансляционной симметрии у невозмущенной задачи, оператор $\hat{D}$ будет обладать нулевыми модами. Действительно, т.к. $\Delta_0\left(r\right)$ и $\Delta_0\left(r+\delta r\right)$ оба являются решениями невозмущенного уравнения (12), то набор поправок $\Delta_1 = \delta r_i\partial_i\Delta_0$, $\Delta_2 = \frac{1}{2}\delta r_i\delta r_j\partial_i\partial_j\Delta_0$, ..., будет удовлетворять уравнениям, полученным из теории возмущений, с нулевым беспорядком $\alpha = 0$. Таким образом, столбцы

$$\begin{pmatrix}\partial_x\Delta_0\\ \partial_x\overline{\Delta_0}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\partial_y\Delta_0\\ \partial_y\overline{\Delta_0}\end{pmatrix} \tag{65}$$

будут нулевыми модами оператора $\hat{D}$. Это можно также проверить напрямую: при действии оператора $\hat{D}$ получим

$$\hat{D}\begin{pmatrix}\partial_i\Delta_0\\ \partial_i\overline{\Delta_0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\gamma\partial^2 + \alpha_0 - 2\beta\left|\Delta_0\right|^2\right)\partial_i\Delta_0 - \beta\Delta_0^2\partial_i\overline{\Delta_0}\\ \left(\gamma\partial^2 + \alpha_0 - 2\beta\left|\Delta_0\right|^2\right)\partial_i\overline{\Delta_0} - \beta\overline{\Delta_0^2}\partial_i\Delta_0\end{pmatrix} = 0 \tag{66}$$

В равенстве полученного выражения нулю можно убедиться, применяя дифференцирование ∂_i к (12).

Наличие нулевых мод приводит к тому, что уравнение (63) (и соответственно (13)) может не иметь решений. Чтобы получить условие, при котором решение существует, определим произведение между $|f\rangle = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{r}) \\ f_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ и $|g\rangle = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{r}) \\ g_2(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$ как

$$\langle g|f\rangle = \int d^2\mathbf{r}\,(\overline{g}_1 f_1 + \overline{g}_2 f_2) \tag{67}$$

Тогда, обозначив $|-\alpha\Delta_0\rangle = \begin{pmatrix} -\alpha(\mathbf{r})\,\Delta_0 \\ -\alpha(\mathbf{r})\,\overline{\Delta}_0 \end{pmatrix}$, $|\Delta_1\rangle = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \overline{\Delta}_1 \end{pmatrix}$ и $|\partial_i\Delta_0\rangle = \begin{pmatrix} \partial_x\Delta_0 \\ \partial_x\overline{\Delta}_0 \end{pmatrix}$, уравнение (63) запишется как

$$\hat{D}\,|\Delta_1\rangle = |-\alpha\Delta_0\rangle \tag{68}$$

Домножая на $\langle\partial_i\Delta_0|$ и пользуясь эрмитовостью $\hat{D}$, получим

$$0 = \langle\partial_i\Delta_0|\,\hat{D}\,|\Delta_1\rangle = \langle\partial_i\Delta_0|-\alpha\Delta_0\rangle \tag{69}$$

Расписывая последнее произведение, получим условие на существование решения для Δ_1:

$$\int d^2\mathbf{r}\left(\Delta_0\,\alpha\,\partial_i\overline{\Delta}_0 + \overline{\Delta}_0\,\alpha\,\partial_i\Delta_0\right) = 0 \tag{70}$$

Его можно переписать как

$$\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\,\partial_i\Phi = 0 \tag{71}$$

Сравнивая с (20), видим, что это условие эквивалентно $\partial_i F_1 = 0$, т.е. действительно формулы (19), (13) позволяют найти F_2 только в точках, которые являются экстремумами F_1.

Отметим, что у невозмущенной задачи еще есть симметрия относительно сдвига глобальной фазы, которая приводит к наличию моды

$$\begin{pmatrix} i\Delta_0 \\ -i\overline{\Delta}_0 \end{pmatrix} \tag{72}$$

однако ортогональность соответствующей моде выполняется автоматически.

5.2 Добавление меры отклонения к минимизируемому функционалу

Как мы видели в предыдущей части, применение теории возмущений к минимизации энергии F не позволяет получить профиль энергии от положения вихря: такой подход дает положения минимумов и энергию только в этих минимумах. Нам же нужен профиль энергии $F(\mathbf{R})$ во всех точках, т.е. нам нужен способ фиксировать положение вихря, чтобы он не смещался на расстояние порядка $1/\sqrt{n_{\min}}$ к ближайшему минимуму F. Для этого вместо энергии будем минимизировать сумму энергии и некоторой меры отклонения $W[\Delta;\mathbf{R}]$ вихря Δ от точки $\mathbf{R}$:

$$L[\Delta,\lambda;\mathbf{R}] = F[\Delta] + \lambda_x W_x[\Delta;\mathbf{R}] + \lambda_y W_y[\Delta;\mathbf{R}], \tag{73}$$

где λ_x и λ_y – множители Лагранжа, и минимизирование ведется по Δ и λ. Мы вводим два функционала, т.к. для фиксирования положения вихря нужно два условия, по одному на координату. Функционалы $W[\Delta;\mathbf{R}]$ должны быть вещественнозначными (иначе мы бы не могли сравнивать числа и искать минимум). О добавлении W можно думать следующим образом: ранее мы получали уравнения на безусловные минимумы $F[\Delta]$, а теперь мы ищем условный минимум $F[\Delta;\mathbf{R}]$ с условием “вихрь находится около $\mathbf{R}$”.

Выбор меры отклонения $W[\Delta;\mathbf{R}]$ довольно произволен и связан с тем, как мы сопоставляем вихрю $\Delta(\mathbf{r})$ его координаты (т.к. для заданного вихря Δ и меры отклонения

W можно определить положение вихря как координату $\mathbf{R}$, для которой $W[\Delta;\mathbf{R}]=0$). Например, можно выбрать

$$W_{\text{point},x}[\Delta;\mathbf{R}]=\operatorname{Re}\Delta(\mathbf{R}) \tag{74}$$
$$W_{\text{point},y}[\Delta;\mathbf{R}]=\operatorname{Im}\Delta(\mathbf{R}) \tag{75}$$

При таком выборе положением вихря мы называем точку, в которой $\Delta(\mathbf{R})=0$. В качестве другого варианта определения положения вихря можно предложить следующее: будем характеризовать удаленность двух вихрей $\Delta_1(\mathbf{r})$ и $\Delta_2(\mathbf{r})$ через

$$\int d^2\mathbf{r}\,|\Delta_1(\mathbf{r})-\Delta_2(\mathbf{r})|^2 \tag{76}$$

и для данного вихря $\Delta(\mathbf{r})$ будем называть его положением такое $\mathbf{R}$, при котором минимально отклонение невозмущенного вихря с центром в $\mathbf{R}$ от рассматриваемого вихря $\Delta(\mathbf{r})$. В этом случае W будут иметь вид

$$W_{\text{quadratic},x}[\Delta;\mathbf{R}]=\frac{\partial}{\partial R_x}\int d^2\mathbf{r}\,|\Delta(\mathbf{r})-\Delta_0(\mathbf{r}-\mathbf{R})|^2 \tag{77}$$
$$W_{\text{quadratic},y}[\Delta;\mathbf{R}]=\frac{\partial}{\partial R_y}\int d^2\mathbf{r}\,|\Delta(\mathbf{r})-\Delta_0(\mathbf{r}-\mathbf{R})|^2 \tag{78}$$

Ясно, что от выбора W могут зависеть детали распределения устойчивых положений вихря. Действительно, представим, что мы имеем одиночный вихрь, находящийся в минимуме, и хотим измерить кривизну. Для этого нам нужно действовать на вихрь малой постоянной силой (например, включив ток) и поделить силу на сдвиг вихря. Однако разным выборам W соответствуют разные способы определения положения вихря, из-за чего сдвиг вихря, и соответственно кривизна, будет зависеть от выбора W. Поэтому и распределение $\rho(f_i,f_{ij})$ будет зависеть от выбора W.

Однако наличие или отсутствие минимума не требует выбора способа определения положения вихря, поэтому количество минимумов не должно зависеть от выбора W. В части 5.8 мы покажем, что полная концентрация минимумов действительно оказывается не зависящей от выбора W.

5.3 Теория возмущений

Будем рассматривать меры отклонения, которые имеют вид интеграла:

$$W[\Delta;\mathbf{R}]=\int d^2\mathbf{r}\,g(\mathbf{r}-\mathbf{R};\Delta(\mathbf{r})) \tag{79}$$

Здесь $W[\Delta;\mathbf{R}]$ зависит от Δ как от функции, а $g(\mathbf{r}-\mathbf{R};\Delta(\mathbf{r}))$ зависит только от значения $\Delta(\mathbf{r})$ в точке $\mathbf{r}$. В частности, предложенные ранее меры отклонения имеют такой вид, и функции g для них будут

$$g_{\text{point},x}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})\operatorname{Re}\Delta(\mathbf{r}) \tag{80}$$
$$g_{\text{point},y}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{R})\operatorname{Im}\Delta(\mathbf{r}) \tag{81}$$

и

$$g_{\text{quadratic},x}=\left(\overline{\Delta}(\mathbf{r})-\overline{\Delta}_0(\mathbf{r}-\mathbf{R})\right)\partial_x\Delta_0(\mathbf{r}-\mathbf{R})+\text{c.c} \tag{82}$$
$$g_{\text{quadratic},y}=\left(\overline{\Delta}(\mathbf{r})-\overline{\Delta}_0(\mathbf{r}-\mathbf{R})\right)\partial_y\Delta_0(\mathbf{r}-\mathbf{R})+\text{c.c} \tag{83}$$

Вблизи Δ_0 функции g можно разложить в ряд по $\Delta - \Delta_0$; обозначим через $h(\mathbf{r})$ коэффициенты в этом разложении

$$g_x = \overline{h}_x (\Delta - \Delta_0) + h_x \left(\overline{\Delta} - \overline{\Delta}_0\right) + \dots \tag{84}$$

$$g_y = \overline{h}_y (\Delta - \Delta_0) + h_y \left(\overline{\Delta} - \overline{\Delta}_0\right) + \dots \tag{85}$$

Перейдем к написанию уравнений. Мы ищем экстремумы $L[\Delta,\lambda;\mathbf{R}]$ по Δ и $\mathbf{r}$. Варьируя по Δ и дифференцируя по λ, получим

$$\begin{cases} (\alpha_0 + \alpha)\Delta - \beta |\Delta|^2 \Delta + \gamma \partial^2 \Delta = \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial \Delta} \\ \int d^2 r \, g_i = 0 \end{cases} \tag{86}$$

Раскладываем все величины в ряд по малости α:$\Delta = \Delta^{(0)} + \Delta^{(1)} + \dots$, $\lambda = \lambda^{(1)} + \dots$. В нулевом порядке имеем

$$\begin{cases} \alpha\Delta^{(0)} - \beta \left|\Delta^{(0)}\right|^2 \overline{\Delta^{(0)}} + \gamma \partial^2 \overline{\Delta^{(0)}} = 0 \\ \int d^2 r \, g_i^{(0)} = 0 \end{cases} \tag{87}$$

Из первого уравнения следует, что $\Delta^{(0)}$ должно иметь вид невозмущенного вихря $\Delta_0(r - R')$ с некоторым центром R'; из второго уравнения следует, что R' должно совпадать с R. Таким образом, $\Delta^{(0)} = \Delta_0(r - R)$.

В первом порядке из (86) получим

$$\begin{cases} \alpha_0 \Delta^1 - \beta \Delta_0^2 \overline{\Delta^1} - 2\beta |\Delta_0|^2 \Delta^1 + \gamma \partial^2 \Delta^1 = -\delta\alpha \Delta_0 + \lambda_i^1 h_i \\ \int d^2 r \left(\overline{h}_i \Delta^1 + h_i \overline{\Delta^1}\right) = 0 \end{cases} \tag{88}$$

Видим, что с рассматриваемой нами точностью выбор функционала $W[\Delta;\mathbf{R}]$ сводится лишь к выбору двух функций h_x и h_y.

Опишем, в каком порядке нужно решать полученную систему. Чтобы уравнение на Δ^1 имело решение, его правая часть должна быть ортогональна нулевым модам, т.е. должно выполняться

$$\int d^2 r \left[\partial_j \overline{\Delta}_0 \left(-\delta\alpha \Delta_0 + \lambda_i^1 h_i\right) + \partial_j \Delta_0 \left(-\delta\alpha \overline{\Delta}_0 + \lambda_i^1 \overline{h}_i\right)\right] = 0 \tag{89}$$

Это есть линейная система из двух уравнений (для $j = x$ и для $j = y$), из которой можно найти два коэффициента λ_x^1 и λ_y^1. Таким образом, λ^1 определяются из требования существования решения. При решении линейной системы могут возникнуть две проблемы. Во-первых, детерминант может оказаться нулевым (например, если выбрать h_i ортогональными к нулевым модам); для разумного выбора меры отклонения W (такого как W_{point} или $W_{\text{quadratic}}$) такой проблемы не возникает. Во-вторых, коэффициенты перед λ могут оказаться бесконечными; такая проблема возникает для $W_{\text{quadratic}}$, но ее можно избежать, если ограничиваться h, которые на бесконечности падают быстрее $1/r$, например заменив $h \to h \exp(-\chi r^2)$.

После нахождения λ можно решать уравнение на Δ^1. Решение этого уравнения будет неоднозначным: т.к. соответствующее однородное уравнение имеет два решения (нулевые моды $\partial_x \Delta_0$ и $\partial_y \Delta_0$), то Δ^1 будет определено с точностью до добавления этих нулевых мод:

$$\Delta^1 = \Delta_{\text{p}}^1 + \zeta_x \partial_x \Delta_0 + \zeta_y \partial_y \Delta_0 \tag{90}$$

где Δ_{p}^1 – частное решение. Пусть мы численно нашли некоторое решение Δ_{p}^1. Коэффициенты ζ определяются вторым уравнением системы (88):

$$\int d^2 r \left(\overline{h}_j \left(\Delta_{\text{p}}^1 + \zeta_x \partial_x \Delta_0 + \zeta_y \partial_y \Delta_0\right) + h_j \left(\overline{\Delta}_{\text{p}}^1 + \zeta_x \partial_x \overline{\Delta}_0 + \zeta_y \partial_y \overline{\Delta}_0\right)\right) = 0 \tag{91}$$

Мы получаем линейную систему, из которой определяются ζ_i и окончательно находится Δ_1.

Скажем пару слов про энергию. Для нахождения числа возможных положений вихря нам нужно находить профиль энергии $F(R)$. Формально, мы теперь ищем профиль $L = F + \lambda W$, но т.к. из условия экстремума по λ имеем $W = 0$, то на получаемых решениях $\Delta = \Delta_0 + \Delta_1$, удовлетворяющих (88), оба функционала будут совпадать, $L[\Delta] = F[\Delta]$. Далее, F не зависит напрямую от выбора меры отклонения (он зависит от этого выбора только через Δ^1, уравнение (88) на которое содержит h), поэтому для F^1 и F^2 будут верны полученные ранее формулы (18) и (19).

5.4 Выбор меры отклонения W

При численном счете мы будем использовать $W^{\chi}_{\text{quadratic}}$, определенную как:

$$W^{\chi}_{\text{quadratic},x}[\Delta; R] = \int d^2r \exp\left(-\chi|r-R|^2\right) \frac{\partial}{\partial R_x} |\Delta(r) - \Delta_0(r-R)|^2 \tag{92}$$

$$W^{\chi}_{\text{quadratic},y}[\Delta; R] = \int d^2r \exp\left(-\chi|r-R|^2\right) \frac{\partial}{\partial R_y} |\Delta(r) - \Delta_0(r-R)|^2 \tag{93}$$

где χ – некоторый параметр, который можно выбрать произвольно. В дальнейшем мы будем считать $n_{\min}$ для различных параметров χ и проверим, что $n_{\min}$ не зависит от этого параметра.

Поясним, почему мы не используем более естественные W_{point} или $W_{\text{quadratic}}$.

Мера отклонения W_{point} является наиболее естественной, т.к. она в качестве положения вихря выбирает точку, где $\Delta = 0$. Покажем, что такое условие не позволяет найти плотность минимумов. В этом случае первое уравнение (88) принимает вид

$$\alpha\Delta^1 - \beta\Delta_0^2\overline{\Delta^1} - 2\beta|\Delta_0|^2\Delta^1 + \gamma\partial^2\Delta^1 = -\delta\alpha\Delta_0 + \frac{1}{2}\delta(r-R)\left(\lambda_x^1 + i\lambda_y^1\right) \tag{94}$$

При малых r будет

$$\gamma\partial^2\Delta^1 = \frac{1}{2}\delta(r-R)\left(\lambda_x^1 + i\lambda_y^1\right) \tag{95}$$

откуда

$$\Delta^1_{\text{p}} \approx \frac{\lambda_x^1 + i\lambda_y^1}{4\pi\gamma}\ln(r-R) \tag{96}$$

Это приводит к тому, что в системе (91) на ζ некоторые коэффициенты, например,

$$\int d^2r\overline{h}_x\Delta^1_{\text{p}} = \int d^2r\frac{1}{2}\delta(r-R)\Delta^1_{\text{p}} = \frac{1}{2}\Delta^1_{\text{p}}(r=R) \tag{97}$$

будет бесконечными, из-за чего ζ оказывается неопределенным, и найти профиль $F(R)$ не удастся.

Мера $W_{\text{quadratic}}$ также является довольно естественным выбором (например, минимизация среднеквадратичного отклонения для определения координаты использовалась в других задачах в [8] и [9]), но не подходит но для наших вычислений. Для нее проблема возникает при нахождении λ: в системе (89) коэффициент

$$\int d^2r h_x\partial_x\overline{\Delta}_0 = \int d^2r\partial_x\Delta_0\partial_x\overline{\Delta}_0 \tag{98}$$

расходится на больших r, т.к. $|\partial_x\Delta_0^2| \sim 1/r^2$, из-за чего мы не можем проецировать правую часть уравнения на Δ_1 так, чтобы она была ортогональна нулевым модам. Использование $W^{\chi}_{\text{quadratic}}$, содержащую убывающую экспоненту, позволяет избежать этой проблемы.

5.5 Распределение первых и вторых производных

Найдем распределение первых и вторых производных $\rho\left(f_i,f_{ij}\right)$ для профиля энергии $F\left(\mathbf{R}\right)$ с учетом слагаемых второго порядка по беспорядку. Пока что не будем использовать явный вид F_2 и запишем его в общем виде, как интеграл с некоторым ядром $F\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R},\mathbf{r}_2-\mathbf{R}\right)$:

$$F\left(\mathbf{R}\right)\approx F_1+F_2=-\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\left(\mathbf{r}\right)\Phi\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right)+\frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2F\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R},\mathbf{r}_2-\mathbf{R}\right)\alpha\left(\mathbf{r}_1\right)\alpha\left(\mathbf{r}_2\right) \tag{99}$$

Дифференцируя по $\mathbf{R}$, получим выражения для производных:

$$f_i=\frac{\partial}{\partial R_i}F=\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\left(\mathbf{r}\right)\partial_i\Phi\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right)-\frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2\left(\partial_{1i}+\partial_{2i}\right)F\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R},\mathbf{r}_2-\mathbf{R}\right)\alpha\left(\mathbf{r}_1\right)\alpha\left(\mathbf{r}_2\right) \tag{100}$$

$$\begin{aligned} f_{ij}=\frac{\partial}{\partial R_j}\frac{\partial}{\partial R_i}F=-\int d^2\mathbf{r}\,\alpha\left(\mathbf{r}\right)\partial_{ij}\Phi\left(\mathbf{r}-\mathbf{R}\right)+\\ +\frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2\left(\partial_{1i}+\partial_{2i}\right)\left(\partial_{1j}+\partial_{2j}\right)F\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R},\mathbf{r}_2-\mathbf{R}\right)\alpha\left(\mathbf{r}_1\right)\alpha\left(\mathbf{r}_2\right)\end{aligned} \tag{101}$$

где $\partial_{1i}F\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R},\mathbf{r}_2-\mathbf{R}\right)$ обозначает производную по первому аргументу, т.е. $\frac{\partial}{\partial\left(r_1-R\right)_i}F\left(\mathbf{r}_1-\mathbf{R},\mathbf{r}_2-\mathbf{R}\right)$, а ∂_{2i} – производную по второму аргументу.

Для краткости далее положим $\mathbf{R}=0$ и перепишем эти формулы как

$$f_\mu=\int d^2r\,B_\mu\left(\mathbf{r}\right)\alpha\left(\mathbf{r}\right)+\frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2\,C_\mu\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\right)\alpha\left(\mathbf{r}_1\right)\alpha\left(\mathbf{r}_2\right) \tag{102}$$

где

$$B_\mu\left(\mathbf{r}\right)=-s_\mu\partial_\mu\Phi\left(\mathbf{r}_a\right) \tag{103}$$

$$C_\mu\left(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2\right)=\left.\left(\frac{\partial}{\partial R_\mu}F\left(\mathbf{r}_a-\mathbf{R},\mathbf{r}_b-\mathbf{R}\right)\right)\right|_{R=0} \tag{104}$$

Для дальнейших вычислений дискретезируем пространство, разбив его на малые ячейки, которые будем нумеровать латинскими буквами из начала алфавита; например, α_a будет обозначать значение α в точке, соответствующей ячейке a. Пусть длина ячеек l, тогда плотность вероятности реализации α беспорядка будет

$$\rho\left(\alpha\right)=C\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{l^2}{A}\delta_{ab}\alpha_a\alpha_b\right) \tag{105}$$

где коэффициент перед $\alpha_a\alpha_b$ выбран так, чтобы коррелятор в непрерывном пределе переходил в $\left\langle\alpha\left(\mathbf{r}\right)\alpha\left(\mathbf{r}'\right)\right\rangle=A\delta\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right)$.

Выражения для f_μ перепишем как

$$f_\mu=l^2B_{\mu a}\alpha_a+\frac{1}{2}l^4C_{\mu ab}\alpha_a\alpha_b, \tag{106}$$

где степени l выбраны так, чтобы $B_{\mu a}$ переходили в $B_\mu\left(\mathbf{r}_a\right)$ и $C_{\mu ab}$ переходили в $C_\mu\left(\mathbf{r}_a,\mathbf{r}_b\right)$.

Ищем плотность вероятности $\rho\left(f_\mu\right)$ через усреднение дельта-функции:

$$\begin{aligned}\rho\left(f_\mu\right)=\left\langle\delta\left(l^2B_{\mu a}\alpha_a+\frac{1}{2}l^4C_{\mu ab}\alpha_a\alpha_b-f_\mu\right)\right\rangle=\\ =\left(\Pi\int d\alpha_a\right)C\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{l^2}{A}\delta_{ab}\alpha_a\alpha_b\right)\delta\left(l^2B_{\mu a}\alpha_a+\frac{1}{2}l^4C_{\mu ab}\alpha_a\alpha_b-f_\mu\right)\end{aligned} \tag{107}$$

Воспользуемся Фурье-представлением дельта-функции:

$$\rho\left(f_{\mu}\right)=\left(\Pi_{\mu}\frac{dk_{\mu}}{2\pi}\right)\left(\Pi\int d\alpha_{a}\right)C\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{l^{2}}{A}\delta_{ab}\alpha_{a}\alpha_{b}+ik_{\mu}\left(l^{2}B_{\mu a}\alpha_{a}+\frac{1}{2}l^{4}C_{\mu ab}\alpha_{a}\alpha_{b}-f_{\mu}\right)\right) \tag{108}$$

Интеграл по α_a будет гауссовым. Взяв его, получим

$$\rho\left(f_{\mu}\right)=\left(\Pi_{\mu}\frac{dk_{\mu}}{2\pi}\right)\exp\left(-ik_{\mu}f_{\mu}\right)\sqrt{\frac{1}{\det\left(\delta_{ab}-iAl^{2}k_{\mu}C_{\mu ab}\right)}}$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2}Al^{2}k_{\mu}B_{\mu a}\left(1-iAl^{2}k_{\eta}C_{\eta}\right)^{-1}_{ab}k_{\nu}B_{\nu b}\right) \tag{109}$$

Т.к. мы уже пренебрегли членами третьего порядка F_3 в энергии, для избежания превышения точности нам нужно разложить полученное выражение по малому параметру. В нашем случае интеграл набирается на k, при которых аргумент последней экспоненты порядка 1, т.е. характерные $k\sim 1/\sqrt{A}$. Тогда параметр $kA\sim\sqrt{A}$ мал, и по нему можно раскладываться:

$$\det\left(\delta_{ab}-iAl^{2}k_{\mu}C_{\mu ab}\right)\approx 1-iAl^{2}k_{\mu}\mathrm{Tr}C_{\mu} \tag{110}$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2}Al^{2}k_{\mu}B_{\mu a}\left(1-iAl^{2}k_{\eta}C_{\eta}\right)^{-1}_{ab}k_{\nu}B_{\nu b}\right)\approx$$
$$\approx\left(1-\frac{1}{2}Al^{2}k_{\mu}k_{\nu}k_{\eta}B_{\mu a}iAl^{2}C_{\eta ab}B_{\nu b}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}Al^{2}k_{\mu}B_{\mu a}k_{\nu}B_{\nu a}\right) \tag{111}$$

Отметим, что параметр l^2 сам по себе не дает малость, т.к. его малость компенсируется большим числом слагаемых в суммировании по ячейкам.

Подставим это в выражение для $\rho\left(f_{\mu}\right)$ и вернемся от дискретного пространства к непрерывному:

$$\rho\left(f_{\mu}\right)=\left(\Pi_{\mu}\frac{dk_{\mu}}{2\pi}\right)\exp\left(-ik_{\mu}f_{\mu}\right)$$
$$\left(1+\frac{iA}{2}k_{\mu}\int d^{2}\mathbf{r}\,C\left(\mathbf{r},\mathbf{r}\right)-\frac{1}{2}iA^{2}k_{\mu}k_{\nu}k_{\eta}\int d^{2}\mathbf{r}d^{2}\mathbf{r}'B_{\mu}\left(\mathbf{r}\right)C_{\eta}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)B_{\nu}\left(\mathbf{r}'\right)\right)$$
$$\exp\left(-\frac{1}{2}Ak_{\mu}k_{\nu}\int d^{2}\mathbf{r}B_{\mu}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)B_{\nu}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\right) \tag{112}$$

Отметим, что обе поправки, $\frac{iA}{2}k_{\mu}\int d^{2}\mathbf{r}\,C\left(\mathbf{r},\mathbf{r}\right)$ и $\frac{1}{2}iA^{2}k_{\mu}k_{\nu}k_{\eta}\int d^{2}\mathbf{r}d^{2}\mathbf{r}'B_{\mu}\left(\mathbf{r}\right)C_{\eta}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)B_{\nu}\left(\mathbf{r}'\right)$, имеют одинаковый порядок малости, а именно $\sqrt{A}$, т.к. характерные k имеют порядок $1/\sqrt{A}$.

Меняем местами k_μ и $\int dk_{\mu}$ (что соответствует $k_{\mu}\to i\frac{\partial}{\partial f_{\mu}}$):

$$\rho\left(f_{\mu}\right)=\left(1-\frac{A}{2}\int d^{2}\mathbf{r}\,C\left(\mathbf{r},\mathbf{r}\right)\frac{\partial}{\partial f_{\mu}}-\frac{1}{2}A^{2}\int d^{2}\mathbf{r}d^{2}\mathbf{r}'B_{\mu}\left(\mathbf{r}\right)C_{\eta}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)B_{\nu}\left(\mathbf{r}'\right)\frac{\partial}{\partial f_{\mu}}\frac{\partial}{\partial f_{\nu}}\frac{\partial}{\partial f_{\eta}}\right)$$
$$\left(\Pi_{\mu}\frac{dk_{\mu}}{2\pi}\right)\exp\left(-ik_{\mu}f_{\mu}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}Ak_{\mu}k_{\nu}\int d^{2}\mathbf{r}B_{\mu}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)B_{\nu}\left(\vec{\mathbf{r}}\right)\right) \tag{113}$$

Замечаем, что при $A\to 0$ в первая скобка стремится к единице, поэтому оставшийся интеграл по k_μ есть плотность распределения производных в первом порядке, $\rho_{0}\left(f_{\mu}\right)$, полученная в (32):

$$\rho\left(f_{\mu}\right)=\left(1-\frac{A}{2}\int d^{2}\mathbf{r}\,C_{\mu}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}\right)\frac{\partial}{\partial f_{\mu}}-\frac{1}{2}A^{2}\int d^{2}\mathbf{r}d^{2}\mathbf{r}'B_{\mu}\left(\mathbf{r}\right)C_{\eta}\left(\mathbf{r},\mathbf{r}'\right)B_{\nu}\left(\mathbf{r}'\right)\frac{\partial}{\partial f_{\mu}}\frac{\partial}{\partial f_{\nu}}\frac{\partial}{\partial f_{\eta}}\right)\rho_{0}\left(f_{\mu}\right) \tag{114}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов перед производными в полученном выражении. Воспользуемся выражением (104) для C_μ:

$$\int d^2r\, C_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}) = \int d^2\mathbf{r}\frac{\partial}{\partial R_\mu}F(\mathbf{r}-\mathbf{R},\mathbf{r}-\mathbf{R}) \tag{115}$$

Заменяя дифференцирование $\frac{\partial}{\partial R_\mu} = s_\mu\frac{\partial}{\partial r_\mu}$ и пользуясь тем, что интеграл от полной производной равен нулю, получим

$$\int d^2\mathbf{r}\, C_\mu(\mathbf{r},\mathbf{r}) = 0 \tag{116}$$

Коэффициенты перед тройными производными в (114) обозначим как

$$I^\eta_{\mu\nu} = \int d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}' B_\mu(\mathbf{r})\, C_\eta(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, B_\nu(\mathbf{r}') \tag{117}$$

Таким образом, задача о нахождении ρ сводится к вычислению $I^\eta_{\mu\nu}$, через которые ρ выражается как

$$\rho(f_\mu) = \left(1-\frac{1}{2}A^2 I^\eta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial f_\mu}\frac{\partial}{\partial f_\nu}\frac{\partial}{\partial f_\eta}\right)\rho_0(f_\mu) \tag{118}$$

5.6 Вычисление $I^\eta_{\mu\nu}$

Для нахождения $I^\eta_{\mu\nu}$ нам нужна явная форма для ядра $F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$. Сравниваем общий вид для F_2 из (99) и явный вид (19):

$$F_2 = -\int d^2\mathbf{r}_1\frac{1}{2}\alpha(\mathbf{r}_1)\left(\Delta_0(\mathbf{r}_1)\overline{\Delta}_1(\mathbf{r}_1)+\overline{\Delta}_0(\mathbf{r}_1)\Delta_1(\mathbf{r}_1)\right) = \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,\alpha(\mathbf{r}_1)\,\alpha(\mathbf{r}_2) \tag{119}$$

Чтобы найти $F(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)$, нам нужно привести левую часть к виду $\int d^2\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\alpha(\mathbf{r}_1)\,\alpha(\mathbf{r}_2)\ldots$. Т.к. $\Delta_1(\mathbf{r})$ удовлетворяет системе (88), линейной по беспорядку α, ее можно представить как:

$$\Delta_1(\mathbf{r}_1) = \int d^2\mathbf{r}_2G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,(-\Delta_0(\mathbf{r}_2)\,\delta\alpha(\mathbf{r}_2)) \tag{120}$$

где $G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ – (комплекснозначная) функция Грина системы (88). Подставляя это в предыдущее выражение, и сравнивая коэффициенты перед $\alpha(\mathbf{r}_1)\,\alpha(\mathbf{r}_2)$, найдем ядро $F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$:

$$F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) = \Delta_0(\mathbf{r}_1)\,\overline{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,\overline{\Delta}_0(\mathbf{r}_2) + \overline{\Delta}_0(\mathbf{r}_1)\,G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,\Delta_0(\mathbf{r}_2) \tag{121}$$

Точнее, ядро $F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$ определено с точностью до добавления функции, антисимметричной относительно замены $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$, но нам достаточно одного представителя (121) из множества ядер, соответствующих энергии F_2.

Чтобы нам не нужно было брать производные от ядра $F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)$, воспользуемся интегрированием по частям в выражениях (117) для $I^\eta_{\mu\nu}$ и перенесем производные с C_η на B_μ и B_ν. Рассмотрим отдельно случаи для однобуквенного $\eta = i$ и двубуквенного $\eta = ij$, а также подставим $B_\mu = -s_\mu\Phi_\mu$ (где $\Phi_\mu = \partial_\mu\Phi$) из (103):

$$I^i_{\mu\nu} = -\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2B_\mu(\mathbf{r}_1)\,(\partial_{1i}+\partial_{2i})\,F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,B_\nu(\mathbf{r}_2) = s_{\mu\nu}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2\,(\Phi_{\mu i}F\Phi_\nu+\Phi_\mu F\Phi_{\nu i}) \tag{122}$$

$$I^{ij}_{\mu\nu} = \int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2B_\mu(\mathbf{r}_1)\,(\partial_{1i}+\partial_{2i})\,(\partial_{1j}+\partial_{2j})\,F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\,B_\nu(\mathbf{r}_2) =$$
$$= s_{\mu\nu}\int d^2\mathbf{r}_1d^2\mathbf{r}_2\,(\Phi_{\mu ij}F\Phi_\nu+\Phi_{\mu i}F\Phi_{\nu j}+\Phi_{\mu j}F\Phi_{\nu i}+\Phi_\mu F\Phi_{\nu ij}) \tag{123}$$

где $s_{\mu\nu} = s_\mu s_\nu$ – суммарная четность индексов μ, ν.

Интегралы $I^\eta_{\mu\nu}$ являются суммами выражений вида

$$\int d^2\mathbf{r}_1 \int d^2\mathbf{r}_2 \Phi_{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}_1) F(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) \Phi_{\tilde{\nu}}(\mathbf{r}_2), \tag{124}$$

в котором индексы греческие индексы с волной $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ могут состоять из произвольного числа символов x, y (в отличие от обычных индексов μ, ν, которые могут быть только однобуквенными или двубуквенными). После подстановки (121) выражение (124) переходит в

$$\int d^2\mathbf{r}_1 \int d^2\mathbf{r}_2 \Phi_{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}_1) \left(\Delta_0(\mathbf{r}_1) \overline{\Delta}_0(\mathbf{r}_2) \overline{G}(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2) + \overline{\Delta}_0(\mathbf{r}_1) \Delta_0(\mathbf{r}_2) G(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)\right) \Phi_{\tilde{\nu}}(\mathbf{r}_2) \tag{125}$$

Введем обозначение

$$J_{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \Delta_0(\mathbf{r}') \Phi_{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}'), \tag{126}$$

тогда рассматриваемое выражение (124) перейдет в

$$\int d^2\mathbf{r}_1 \int d^2\mathbf{r}_2 \Phi_{\tilde{\mu}} F \Phi_{\tilde{\nu}} = \int d^2\mathbf{r}\, \Phi_{\tilde{\mu}} \left(\Delta_0 \overline{J}_{\tilde{\nu}} + \overline{\Delta}_0 J_{\tilde{\nu}}\right) = 2\mathrm{Re} \int d^2\mathbf{r}\, \Phi_{\tilde{\mu}} \overline{\Delta}_0 J_{\tilde{\nu}} \tag{127}$$

Используя это в (122) и (123), получим

$$I^i_{\mu\nu} = 2 s_{\mu\nu} \mathrm{Re} \left\{ \int d^2\mathbf{r} \left(\Phi_{\mu i} \overline{\Delta}_0 J_\nu + \Phi_\mu \overline{\Delta}_0 J_{\nu i}\right) \right\} \tag{128}$$

$$I^{ij}_{\mu\nu} = 2 s_{\mu\nu} \mathrm{Re} \left\{ \int d^2\mathbf{r} \left(\Phi_{\mu ij} \overline{\Delta}_0 J_\nu + \Phi_{\mu i} \overline{\Delta}_0 J_{\nu j} + \Phi_{\mu j} \overline{\Delta}_0 J_{\nu i} + \Phi_\mu \overline{\Delta}_0 J_{\nu ij}\right) \right\} \tag{129}$$

В такой форме функция Грина G системы (88) входит в ответ только через $J_{\tilde{\mu}}$. Но для нахождения этих $J_{\tilde{\mu}}$ можно не искать явно функцию Грина G, т.к. из определения функции Грина и определения $J_{\tilde{\mu}}$ в (126) следует, что $J_{\tilde{\mu}}$ удовлетворяет системе уравнений, аналогичной (88), но с измененной правой частью:

$$\begin{cases} \alpha_0 J_{\tilde{\mu}} - \beta \Delta_0^2 \overline{J_{\tilde{\mu}}} - 2\beta \left|\Delta_0\right|^2 J_{\tilde{\mu}} + \gamma \partial^2 J_{\tilde{\mu}} = \Delta_0 \Phi_{\tilde{\mu}} + \lambda_i h_i \\ \int d^2\mathbf{r} \left(\overline{h}_x J_{\tilde{\mu}} + h_x \overline{J_{\tilde{\mu}}}\right) = 0 \end{cases} \tag{130}$$

К решению этой системы применимы все те же слова, которые были сказаны в отношении системы (88). Отметим также, что т.к. коэффициенты λ_i входят в число неизвестных, которые находятся при решении системы, эти коэффициенты будут различными для различных $J_{\tilde{\mu}}$.

Итак, чтобы найти $I^\eta_{\mu\nu}$ и с помощью них получить поправки к распределению $\rho(f_i,f_{ij})$, нужно (численно) решить системы вида (130) для различных $\tilde{\mu}$ и затем выполнить интегрирование в (128) и (129).

5.7 Численный счет интегралов $I^\eta_{\mu\nu}$ для $W^\chi_{\mathbf{quadratic}}$

Интегралы $I^\eta_{\mu\nu}$ зависят от выбора W. Далее в этой части мы будем использовать меру отклонения $W^\chi_{\mathrm{quadratic}}$, определенную в (93). Для нее h_x и h_y равны

$$h_x(\mathbf{r}) = \exp\left(-\chi r^2\right) \partial_x \Delta_0 \tag{131}$$

$$h_y(\mathbf{r}) = \exp\left(-\chi r^2\right) \partial_y \Delta_0 \tag{132}$$

Чтобы повысить точность численного решения дифференциальных уравнений для $J_{\tilde{\mu}}$, перейдем к Фурье-представлению, и вместо двумерного дифференциального уравнения будем иметь систему одномерных дифференциальных уравнений.

5.7.1 Уравнения в Фурье-представлении

Перейдем от декартовых координат x, y к полярным координатам r, ϕ и разложим $J_{\tilde{\mu}}(\mathbf{r})$ в ряд Фурье по углу ϕ:

$$J_{\tilde{\mu}}(\mathbf{r}) = J_{\tilde{\mu}}(r,\phi) = \sum_m J_{\tilde{\mu}}^m(r)\, e^{im\phi} \tag{133}$$

Система (130) перепишется как

$$\begin{cases} \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{m^2}{r^2} + 1 - 2\Phi(r)\right) J_{\tilde{\mu}}^m(r) - \Phi(r)\, \overline{J_{\tilde{\mu}}^{2-m}}(r) = |\Delta_0(r)|\, \Phi_{\tilde{\mu}}^{m-1}(r) + \lambda_i^1 h_i^m \\ \int_0^\infty dr\, r \sum_m \left(\overline{h_i^m} J_{\tilde{\mu}}^m + h_i^m \overline{J_{\tilde{\mu}}^m}\right) = 0 \end{cases} \tag{134}$$

Как мы упоминали ранее, λ_i нужно выбирать так, чтобы правая часть не имела проекции на нулевые моды. В Фурье-представлении это условие даст

$$\mathrm{Re} \int_0^\infty dr\, r \left[\left(|\Delta_0|\, \Phi_{\tilde{\mu}}^{-1} + \lambda_i \overline{h_i^0}\right) \left(\partial_j \overline{\Delta_0}\right)^0 + \left(|\Delta_0|\, \Phi_{\tilde{\mu}}^{1} + \lambda_i \overline{h_i^2}\right) \left(\partial_j \overline{\Delta_0}\right)^{-2}\right] = 0 \tag{135}$$

Заметим, что уравнения на J_μ^m для различных m разделяются на пары. Взяв комплексное сопряжение от первого уравнения и заменив $m \to 2-m$, получим

$$-\Phi(r)\, J_{\tilde{\mu}}^m(r) + \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{(2-m)^2}{r^2} + 1 - 2\Phi(r)\right) \overline{J_{\tilde{\mu}}^{2-m}}(r) = |\Delta_0(r)|\, \overline{\Phi_{\tilde{\mu}}^{1-m}}(r) + \lambda_i^1 \overline{h_i^{2-m}} \tag{136}$$

Получаем, что уравнения на различные моменты m разделяются на системы из двух уравнений, связывающие моменты m и $2-m$.

Для нашего выбора W у h_i есть только две гармоники, $m=0$ и $m=2$. Также для заданного $\tilde{\mu}$ производная $\Phi_{\tilde{\mu}}$ от симметричного по углу Φ содержит лишь конечное число гармоник m, поэтому среди полученных систем на $J_{\tilde{\mu}}^m$ и $\overline{J_{\tilde{\mu}}^{2-m}}$ только у небольшого числа будет ненулевая правая часть. Таким образом, решение двумерного дифференциального уравнений сводится к решению небольшого числа систем из двух одномерных дифференциальных уравнений.

Также отметим, что для четных $\tilde{\mu}$ свободные члены в (135) (т.е. не содержащие λ_i) равны нулю, т.к. в случае четного $\tilde{\mu}$ у $\Phi_{\tilde{\mu}}$ не будет нечетных моментов Φ_μ^{-1} и Φ_μ^1. Тогда в этом случае $\lambda_i = 0$, в системе (134) не происходит проецирования правой части.

Наконец, заметим, что при четных $\tilde{\mu}$ (содержащих четное число индексов x, y) $J_{\tilde{\mu}}$ содержит только нечетные гармоники, и наоборот. Действительно, в случае четного $\tilde{\mu}$ имеем $\lambda = 0$, поэтому правая часть уравнения на $J_{\tilde{\mu}}^m$ содержит только $\Phi_{\tilde{\mu}}^{m-1}$. $\Phi_{\tilde{\mu}}^{m-1}$ будет ненулевым только при нечетных m, поэтому и $J_{\tilde{\mu}}$ будет ненулевым при нечетных m. Случай с нечетным $\tilde{\mu}$ доказывается аналогично, но в нем нужно использовать, что h_i содержит только четные моменты.

5.7.2 Отсутствие нечетных $I_{\mu\nu}^\eta$

Будем называть $I_{\mu\nu}^\eta$ нечетными, когда суммарное число букв в $\mu\nu\eta$ нечетно. Покажем, что для выбора $W_{\text{quadratic}}^\chi$ нечетные $I_{\mu\nu}^\eta$ равны нулю.

Действительно, $I_{\mu\nu}^\eta$ складывается из слагаемых вида

$$\mathrm{Re} \int d^2\mathbf{r}\, \Phi_{\tilde{\mu}} \overline{\Delta_0} J_{\tilde{\nu}}, \tag{137}$$

причем $\mu\nu\eta$ и $\tilde{\mu}\tilde{\nu}$ содержат одинаковое число индексов x и y, поэтому из нечетности $\mu\nu\eta$ следует, что $\tilde{\mu}$ и $\tilde{\nu}$ имеют разную четность. С учетом того, что $J_{\tilde{\nu}}$ содержит гармоники четности, противоположной $\tilde{\nu}$, а Φ_μ содержит гармоники той же четности, что $\tilde{\mu}$, получим, что $J_{\tilde{\nu}}$ и Φ_μ содержат гармоники одинаковой четности, поэтому произведение этих функций четно. Но в выражении (137) содержится нечетная $\overline{\Delta_0}$, поэтому выражение (137) будет равно нулю, и

$$I^\eta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{если } \mu\nu\eta \text{ нечетный} \tag{138}$$

Отметим, что при выводе этого результата мы использовали четность (132); если бы h_i не были четными, то нечетные $I^\eta_{\mu\nu}$ могли бы быть ненулевыми.

5.7.3 Выражение для концентрации минимумов через $I^\eta_{\mu\nu}$

Зная распределение производных (118), можно найти концентрацию минимумов через (8). Вводя обозначение

$$S_{\mu\nu\eta} = \frac{A^{3/2}}{2} \int df_{ij} \left|\det H\right| \theta\left(f_{xx}\right) \theta\left(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2\right) \left(\frac{\partial}{\partial f_\mu}\frac{\partial}{\partial f_\nu}\frac{\partial}{\partial f_\eta}\rho_0\left(f\right)\right)\bigg|_{f_x=f_y=0}, \tag{139}$$

концентрация минимумов запишется как

$$n_{\min} = n^0_{\min} - \sqrt{A} S_{\mu\nu\eta} I^\eta_{\mu\nu} \tag{140}$$

В приложении мы показываем, что $S_{\mu\nu\eta}$ ненулевой только для четных $\mu\nu\eta$ и находим значения ненулевых $S_{\mu\nu\eta}$. Подставляя полученные значения $S_{\mu\nu\eta}$, для концентрации минимумов получим выражение

$$n_{\min} = n^0_{\min} - \sqrt{A}\frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\frac{1}{c_1 c_2^{1/2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Sigma_{\text{six-letter}} + \frac{2c_2}{c_1}\Sigma_{\text{four-letter}}\right) \tag{141}$$

где $\Sigma_{\text{six-letter}}$ и $\Sigma_{\text{four-letter}}$ – суммы интегралов $I^\eta_{\mu\nu}$, определенные как

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{six-letter}} = {}& \frac{\pi}{9}\left(I^{xx}_{xx,xx} + I^{yy}_{yy,yy}\right) - \frac{7\pi}{9}\left(I^{xx}_{xx,yy} + I^{yy}_{xx,xx} + I^{xx}_{yy,xx} + I^{yy}_{xx,yy} + I^{xx}_{yy,yy} + I^{yy}_{yy,xx}\right) + \\ & + \frac{8\pi}{9}\left(I^{xy}_{xx,xy} + I^{xx}_{xy,xy} + I^{xy}_{xy,xx} + I^{xy}_{yy,xy} + I^{yy}_{xy,xy} + I^{xy}_{xy,yy}\right)\end{aligned} \tag{142}$$

$$\Sigma_{\text{four-letter}} = \frac{4\pi}{3}\left(I^y_{y,xx} + I^y_{xx,y} + I^{xx}_{y,y} + I^x_{x,yy} + I^{yy}_{x,x} + I^x_{yy,x} + I^x_{x,xx} + I^{xx}_{x,x} + I^x_{xx,x} + I^y_{y,yy} + I^{yy}_{y,y} + I^y_{yy,y}\right) \tag{143}$$

Численный расчет показывает, что значения $I^\eta_{\mu\nu}$ (и вместе с ними распределение производных $\rho\left(f_\mu\right)$) зависят от параметра χ, связанного с выбором функции отклонения, однако их суммы $\Sigma_{\text{six-letter}}$ и $\Sigma_{\text{four-letter}}$ одинаковы для всех χ (см. рис. 5).

Вычисляя численно $I^\eta_{\mu\nu}$ и подставляя в (141), получим

$$n_{\min} = \frac{0.0276 - 0.0099\frac{\sqrt{A}}{\alpha_0\xi}}{\xi^2} \tag{144}$$

Зная $n_{\min}$, мы можем найти изменение концентраций максимумов и седел. Т.к. $\rho_0\left(f_\mu\right)$ четно относительно замены $f_{xx} \to -f_{xx}$, $f_{xy} \to -f_{xy}$, $f_{yy} \to -f_{yy}$, то разность $\rho\left(f_\mu\right) - \rho_0\left(f_\mu\right)$, будучи тройной производной, будет нечетной. Изменение n_{saddle} выражается через изменение $\rho\left(f_\mu\right)$ как

$$\delta n_{\text{saddle}} = \int df_{ij}\left(\rho\left(f_\mu\right) - \rho_0\left(f_\mu\right)\right)\bigg|_{f_x=f_y=0}\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\theta\left(-f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2\right), \tag{145}$$

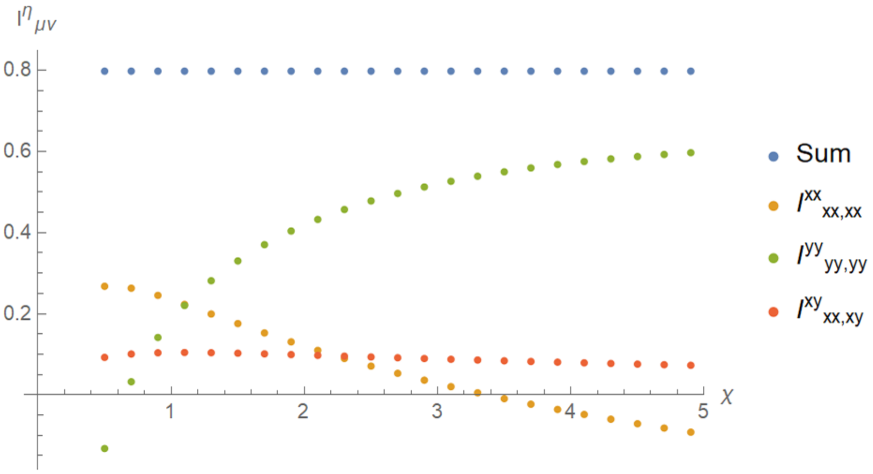

Рис. 5: Значения некоторых интегралов ($I^{xx}_{xx,xx}$, $I^{yy}_{yy,yy}$ и $I^{xy}_{xx,xy}$) для различных χ (в обезразмеренных единицах), а также линейная комбинация (Sum, пропорциональная $\Sigma_{\text{six-letter}}$ из (142)) с коэффициентами, пропорциональными $S_{\mu\nu\eta}$. Видим, что хотя сами интегралы зависят от параметра χ, линейная комбинация, входящая в ответ для $n_{\min}$, от χ не зависит

где подынтегральная функция оказывается произведением нечетной $\rho(f_\mu) - \rho_0(f_\mu)$ и четной $\left(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\right)\theta\left(-f_{xx}f_{yy} + f_{xy}^2\right)$, поэтому интеграл будет нулевым, и $\delta n_{\text{saddle}} = 0$. Изменение концентрации максимумов можно найти из $n_{\max} + n_{\min} = n_{\text{saddle}}$. В итоге получаем

$$n_{\max} = \frac{0.0276 + 0.0099\frac{\sqrt{A}}{\alpha_0\xi}}{\xi^2} \tag{146}$$

$$n_{\text{saddle}} = \frac{0.0551}{\xi^2} \tag{147}$$

$$n_{\text{extr}} = \frac{0.110}{\xi^2} \tag{148}$$

т.е. количество седел и полное число экстремумов не изменяются, число минимумов уменьшается, а число максимумов увеличивается.

5.8 Независимость $n_{\min}$ от выбора меры отклонения W

В этой части мы покажем, что от выбора W плотность минимумов n не зависит. Зависимость от выбора W проявляется при нахождении $J_{\tilde\mu}$ (формулы, связывающие $n_{\min}$ с $J_{\tilde\mu}$, не содержат явно W или h). Зависимость от выбора W возникает при решении (130) в двух местах. Во-первых, правая часть есть проекция от $\Delta_0\Phi_{\tilde\mu}$ вдоль h_i с коэффициентом λ_i, подобранным так, чтобы дифференциальное уравнение имело решение; будем называть это изменение правой части первым проецированием. Во-вторых, из решения дифференциального уравнения $J_{\tilde\mu}$ определяется с точностью до сдвига $\zeta_x\partial_x\Delta_0 + \zeta_y\partial_y\Delta_0$ вдоль нулевых мод, и коэффициенты ζ_i выбираются для удовлетворения второго уравнения системы (130); будем называть этот сдвиг $J_{\tilde\mu}$ вдоль нулевых мод вторым проецированием.

5.8.1 Независимость $n_{\min}$ от первого проецирования

Первое проецирование влияет не на все $J_{\tilde\mu}$. Действительно, для четных $\tilde\mu$ нечетные моменты $\Phi^{\pm1}_{\tilde\mu}$ равны нулю, и из (135) следует $\lambda = 0$ (независимо от выбора h). Таким образом, первое проецирование важно только при нахождении $J_{\tilde{\mu}}$, у которых $\tilde{\mu}$ содержит нечетное число индексов x, y (будем далее называть эти $J_{\tilde{\mu}}$ нечетными). Покажем, что вклад от нечетных J в $n_{\min}$ сокращается.

Для этого нужно убедиться, что в сумме $S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}$ вклады от нечетных J сокращаются. Т.к. нечетные $S_{\mu\nu\eta}$ равны нулю, то сумма $S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}$ будет состоять из вкладов, в которых $\mu\nu\eta$ суммарно содержат либо четыре, либо шесть букв:

$$S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu} = \left(S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}\right)_{\text{six-letter}} + \left(S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}\right)_{\text{six-letter}} \tag{149}$$

Рассмотрим эти вклады по отдельности (окажется, что вклады от нечетных J сокращаются по отдельности в обеих этих суммах, а не только во всем $S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}$). Пользуясь значениями $S_{\mu\nu\eta}$, с точностью до общего множителя

$$\begin{aligned}\left(S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}\right)_{\text{six-letter}} \propto I_{xx,xx,xx} + I_{yy,yy,yy} +& \\ + 8\left(I_{xx,xy,xy} + I_{xy,xx,xy} + I_{xy,xy,xx} + I_{yy,xy,xy} + I_{xy,yy,xy} + I_{xy,xy,yy}\right) -& \\ - 7\left(I_{xx,xx,yy} + I_{xx,yy,xx} + I_{yy,xx,xx} + I_{xx,yy,yy} + I_{yy,xx,yy} + I_{yy,yy,xx}\right)&\end{aligned} \tag{150}$$

Введем для краткости обозначение

$$I\left[\Phi_{\tilde{\mu}}, J_{\tilde{\nu}}\right] = 2\,\mathrm{Re}\int d^2\mathbf{r}\Phi_{\tilde{\mu}}\overline{\Delta_0}J_{\tilde{\nu}} \tag{151}$$

Тогда формулы (128), (129) для $I^{\eta}_{\mu\nu}$ перепишутся как (используя тот факт, что нас интересуют только четные $I^{\eta}_{\mu\nu}$, для определения знака $s_{\mu\nu}$):

$$I^{i}_{\mu\nu} = -I\left[\Phi_{\mu i}, J_{\nu}\right] - I\left[\Phi_{\mu}, J_{\nu i}\right] \tag{152}$$

$$I^{ij}_{\mu\nu} = I\left[\Phi_{\mu ij}, J_{\nu}\right] + I\left[\Phi_{\mu i}, J_{\nu j}\right] + I\left[\Phi_{\mu j}, J_{\nu i}\right] + I\left[\Phi_{\mu}, J_{\nu ij}\right] \tag{153}$$

Подставим эти формулы в выражения для $\left(S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}\right)_{\text{six-letter}}$. Оставляя только слагаемые с нечетными J, получим после приведения подобных слагаемых, с точностью до общего множителя

$$\begin{aligned}\left(S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}\right)_{\text{six-letter,odd J}} \propto I\left[\left(\Phi_{xxx} - 3\Phi_{xyy}\right), J_{xxx}\right] + I\left[\left(\Phi_{yyy} - 3\Phi_{xxy}\right), J_{yyy}\right] +& \\ + I\left[\left(9\Phi_{xxy} - 3\Phi_{yyy}\right), J_{xxy}\right] + I\left[\left(-3\Phi_{xxx} + 9\Phi_{xyy}\right), J_{xyy}\right]&\end{aligned} \tag{154}$$

Стоящие в скобках комбинации из производных оказываются нулевыми, соответственно нечетные J не дают вклада в $n_{\min}$. Проводя аналогичные вычисления для вклада $\left(S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}\right)_{\text{four-letter}}$ слагаемых с четырьмя буквами, получим, что в них тоже нечетные J не дают вклад.

5.8.2 Независимость $n_{\min}$ от второго проецирования

Покажем теперь, что и второе проецирование (сдвиг $J_{\tilde{\mu}}$ вдоль нулевых мод) не влияет на $n_{\min}$. Сумма $S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}$ содержит вклад только от четных $J_{\tilde{\nu}}$, т.е. состоит из суммы слагаемых вида

$$I\left[\Phi_{\tilde{\mu}}J_{\tilde{\nu}}\right] \tag{155}$$

где $\tilde{\mu}$ также четное (ибо иначе $\tilde{\mu}\tilde{\nu}$ нечетное и $S_{\mu\nu\eta} = 0$) Выбор h влияет только на значение коэффициентов ζ в (130). Однако изменение $J_{\tilde{\nu}}$ на $\partial_x\Delta_0$ не влияет на $I\left[\Phi_{\tilde{\mu}}J_{\tilde{\nu}}\right]$, входящие в $S_{\mu\nu\eta}I^{\eta}_{\mu\nu}$. Действительно, т.к. $\Phi_{\tilde{\mu}}$ и $\partial_i\Delta_0$ оба четные относительно замены $\mathbf{r} \to -\mathbf{r}$, и в (151) они умножаются нечетное $\overline{\Delta_0}$, то интегрирование даст ноль, и интегралы $I^{\eta}_{\mu\nu}$ (и вместе с ними $n_{\min}$) не будут зависеть от сдвигов $J_{\tilde{\nu}}$ вдоль нулевых мод.

Итак, получаем что от выбора коэффициентов ζ, и соответственно от выбора h, плотность минимумов не будет зависеть, т.е. для любого h концентрация минимумов будет даваться формулой (144).

6 Заключение

В данной работе была получена средняя концентрация устойчивых положений вихря в пленке со слабым беспорядком для первых двух порядков теории возмущений. Для нахождения концентрации использовался метод из [1], изложенный в части 3, который позволяет выразить $n_{\min}$ через распределение первых и вторых производных в произвольной точке. В первом порядке теории возмущений этот метод успешно применяется напрямую и дает результат $n_{\min} = 0.0276/\xi^2$.

Во втором порядке теории возмущений возникли трудности, связанные с тем, что для нахождения производных энергии выбирать способ, как сопоставлять вихрю его координату, т.е. что называть положением вихря. Было показано, как находить распределение кривизн для произвольного выбора меры отклонения вихря. Для однопараметрического семейства мер $W^{\chi}_{\text{quadratic}}$ была получена поправка к концентрации,

$$n_{\min} = \frac{0.0276 - 0.0099\frac{\sqrt{A}}{\alpha_0 \xi}}{\xi^2}$$

и численно проверена независимость концентрации минимумов от выбора меры, и затем этот факт был показан аналитически.

Список литературы

[1] S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise, The Bell System Technical Journal **23**, 282 (1944).

[2] S. O. Rice, Mathematical analysis of random noise, The Bell System Technical Journal **24**, 46 (1945).

[3] R. Willa, V. B. Geshkenbein, and G. Blatter, Hessian characterization of the pinning landscape in a type-II superconductor, Phys. Rev. B **105**, 144504 (2022)

[4] L. Embon, Y. Anahory, A. Suhov, et al, Probing dynamics and pinning of single vortices in superconductors at nanometer scales, Sci. Rep. **5**, 7598 (2015).

[5] M. A. Skvortsov and M. V. Feigel'man, Superconductivity in Disordered Thin Films: Giant Mesoscopic Fluctuations, Phys. Rev. Lett. **95**, 057002 (2005)

[6] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Influence of inhomogeneities on superconductor properties, ZhETF **61**, 1221 (1971)

[7] M. A. Skvortsov, O. B. Zuev, and D. I. Fazlizhanova, Supercurrent flow in inhomogeneous superconductors, Phys. Rev. B **111**, 144510 (2025)

[8] J. Zittartz and J. S. Langer, Theory of Bound States in a Random Potential, Phys. Rev. **148**, 741 (1966)

[9] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Density of states in inhomogeneous superconductors, ZhETF **61**, 2147 (1971)

7 Приложение

7.1 Интегралы для плотности экстремумов, минимумов и максимумов

Здесь мы вычислим интеграл из (33):

$$I_{\text{extr}} = \int df_{xx}df_{xy}df_{yy}\left|f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right|\exp\left(-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right) \tag{156}$$

Воспользуемся Фурье-представлением для модуля:

$$|z| = \int \frac{d\lambda}{2\pi}m(\lambda)\exp(i\lambda z) \tag{157}$$

где

$$m(\lambda) = -\frac{1}{(\lambda-i0)^2}-\frac{1}{(\lambda+i0)^2} \tag{158}$$

Оставшийся интеграл по f_{ij} будет Гауссовым, и после его взятия останется

$$I_{\text{extr}} = \int \frac{d\lambda}{2\pi}m(\lambda)\frac{8\pi^{3/2}}{(1+2i\lambda)\sqrt{1-4i\lambda}} \tag{159}$$

Данная функция аналитична в верхней полуплоскости, поэтому замкнем контур интегрирования сверху. Вычет в $\lambda=+i0$ оказывается нулевым, и весь вклад приходит от вычета в $\lambda=i/2$:

$$I_{\text{extr}} = \frac{32\pi^{3/2}}{\sqrt{3}} \tag{160}$$

Покажем теперь, что

$$4n_{\min}=4n_{\max}=2n_{\text{saddle}}=n_{\text{extr}} \tag{161}$$

Действительно, из выражений

$$I_{\min} = \int df_{xx}df_{xy}df_{yy}\left|f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right|\theta(f_{xx})\,\theta\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)$$
$$\exp\left(-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right) \tag{162}$$

$$I_{\max} = \int df_{xx}df_{xy}df_{yy}\left|f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right|\theta(-f_{xx})\,\theta\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)$$
$$\exp\left(-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right) \tag{163}$$

видно, что $I_{\min}$ переходит в $I_{\max}$ при замене $f_{ij}\to -f_{ij}$, т.е.

$$I_{\min}=I_{\max} \tag{164}$$

Для их суммы же имеем, используя $\theta(f_{xx})+\theta(-f_{xx})=1$,

$$I_{\min}+I_{\max} = \int df_{xx}df_{xy}df_{yy}\left|f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right|\theta\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)\exp\left(-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right) \tag{165}$$

Используя теперь

$$|z|\,\theta(z)=\int\frac{d\lambda}{2\pi}\frac{-1}{(\lambda-i0)^2}\exp(i\lambda z) \tag{166}$$

получим

$$I_{\min}+I_{\max}=\int\frac{d\lambda}{2\pi}\frac{-1}{(\lambda-i0)^2}\int df_{xx}df_{xy}df_{yy}\exp\left(i\lambda\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)\right)$$
$$\exp\left(-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right)=\int\frac{d\lambda}{2\pi}\frac{-1}{(\lambda-i0)^2}\frac{8\pi^{3/2}}{(1+2i\lambda)\sqrt{1-4i\lambda}} \tag{167}$$

По-прежнему замыкаем контур сверху. Полюс при $\lambda=+i0$ снова не дает вклада, и по сравнению с выражением для I_{extr} изменился лишь префактор (вместо $m=-\frac{1}{(\lambda-i0)^2}-\frac{1}{(\lambda+i0)^2}$ теперь $-\frac{1}{(\lambda-i0)^2}$), уменьшившись в два раза, поэтому

$$I_{\min}+I_{\max}=\frac{1}{2}I_{\text{extr}} \tag{168}$$

Пользуясь теперь $I_{\min}=I_{\max}$ и $I_{\text{saddle}}=I_{\text{extr}}-I_{\min}-I_{\max}$ получаем

$$4I_{\min}=4I_{\max}=2I_{\text{saddle}}=I_{\text{extr}} \tag{169}$$

7.2 Вычисление интегралов $S_{\mu\nu\eta}$

Найдем $S_{\mu\nu\eta}$, определенные в (139)

В силу коммутативности операторов дифференцирования $S_{\mu\nu\eta}$ будет абсолютно симметричным.

Заметим, что если среди μ, ν и η будет нечетное число однобуквенных индексов, то соответствующее $S_{\mu\nu\eta}=0$. Действительно, в этом случае в $\left.\left(\frac{\partial}{\partial f_\mu}\frac{\partial}{\partial f_\nu}\frac{\partial}{\partial f_\eta}\rho_0(f)\right)\right|_{f_x=f_y=0}$ мы будем дифференцировать $\exp\left(-\frac{f_x^2+f_y^2}{2Ac_1}\right)$ нечетное число раз и получим функцию, меняющую знак при замене $f_x\to -f_x$, $f_y\to -f_y$, соответственно после подстановки $f_x=f_y=0$ производная обратиться в ноль. Таким образом, ненулевые $S_{\mu\nu\eta}$ содержат четное число (0 или 2) однобуквенных индексов.

Сначала рассмотрим случай двух однобуквенных индексов. Если эти индексы разные, то соответствующий $S_{x,y,ij}=0$, т.к. $\left.\left(\frac{\partial}{\partial f_x}\frac{\partial}{\partial f_y}\exp\left(-\frac{f_x^2+f_y^2}{2Ac_1}\right)\right)\right|_{f_x=f_y=0}=0$. Остается случай, когда эти индексы одинаковые. Для $\mu=\nu=x$, $\eta=ij$ дифференцирования по f_x дает лишь постоянный множитель:

$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial f_x}\frac{\partial}{\partial f_x}\frac{\partial}{\partial f_{ij}}\rho_0(f)\right)\right|_{f_x=f_y=0}=-\frac{1}{Ac_1}\frac{\partial}{\partial f_{ij}}\rho_0(f) \tag{170}$$

Аналогичное соотношение будет для двойного дифференцирования по f_y, поэтому для соответствующих $S_{\mu\nu\eta}$ можно записать

$$S_{x,x,ij}=S_{y,y,ij}=-\frac{A^{3/2}}{Ac_1}\frac{1}{2}\int df_{ij}\,|\det H|\,\theta(f_{xx})\,\theta\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial f_{ij}}\rho_0(f)\right) \tag{171}$$

В случае $ij=xy$ интегрируемая функция будет нечетна по f_{xy}, поэтому $S_{x,x,xy}=0$. В случае $ij=xx$ будем действовать аналогично вычислению $I_{\min}$ в 7.1.

Запишем выражение для $S_{x,x,xx}$:

$$S_{x,x,xx}=-\frac{A^{1/2}}{c_1}\frac{1}{2}\int df_{ij}\left|\det H\right|\theta\left(f_{xx}\right)\theta\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)\left(\frac{\partial}{\partial f_{ij}}\rho_0\left(f\right)\right) \tag{172}$$

Пользуясь (166) и подставляя выражение для ρ_0, получим

$$S_{x,x,xx}=-\frac{c_2}{c_1}\frac{1}{2}\frac{\left(8\left(c_1/c_2\right)^2\right)^{-1/2}}{\left(2\pi\right)^{5/2}}\frac{1}{\left(c_2\right)^{3/2}}\int\frac{d\lambda}{2\pi}\frac{-1}{\left(\lambda-i0\right)^2}\int df_{ij}\theta\left(f_{xx}\right)\left(-\frac{3}{8}f_{xx}+\frac{1}{8}f_{yy}\right)$$
$$\exp\left(i\lambda\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right) \tag{173}$$

Чтобы взять оставшийся интеграл, можно воспользоваться Фурье-представлением θ-функции:

$$\theta\left(z\right)=\int\frac{d\omega}{2\pi}e^{iz\omega}\frac{1}{i\left(\omega-i0\right)} \tag{174}$$

и преобразовать оставшийся интеграл по f_{ij} к

$$\int df_{ij}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{i\left(\omega-i0\right)}\left(-\frac{3}{8}f_{xx}+\frac{1}{8}f_{yy}\right)$$
$$\exp\left(if_{xx}\omega+i\lambda\left(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2\right)-\frac{3}{16}\left(f_{xx}^2+f_{yy}^2\right)+\frac{1}{8}f_{xx}f_{yy}-\frac{1}{2}f_{xy}^2\right) \tag{175}$$

Этот интеграл является Гауссовым относительно f_{ij}, и после взятия дает

$$\frac{8\pi}{\sqrt{\left(2+4i\lambda\right)\left(1-4i\lambda\right)}}\int\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{i\left(\omega-i0\right)}\exp\left(-\omega^2\left(\frac{1}{2+4i\lambda}+\frac{1}{1-4i\lambda}\right)\right)\left(-\frac{i\omega}{2+4i\lambda}-\frac{1}{2}\frac{i\omega}{1-4i\lambda}\right) \tag{176}$$

Пользуясь формулой Сохоцкого и замечая, что дельта-функция не дает вклада, останется Гауссов интеграл по ω. В итоге для $S_{x,x,xx}$ получим

$$S_{x,x,xx}=\frac{2c_2}{c_1}\frac{\left(8\left(c_1/c_2\right)^2\right)^{-1/2}}{\left(2\pi\right)^2}\frac{1}{\left(c_2\right)^{3/2}}\int\frac{d\lambda}{2\pi}\frac{-1}{\left(\lambda-i0\right)^2}\frac{1}{\sqrt{1+2i\lambda}}\frac{1-i\lambda}{\left(1+2i\lambda\right)\left(1-4i\lambda\right)}\sqrt{\frac{\pi}{3}} \tag{177}$$

Для аналитичности замыкаем контур в нижней полуплоскости. Внутри контура будет полюс при $\lambda=-i/4$, и в итоге получим выражение

$$S_{x,x,xx}=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2\frac{1}{\left(2\pi\right)^{3/2}}\frac{1}{c_2^{3/2}} \tag{178}$$

В случае, когда среди μ, ν, η нет однобуквенных индексов, вычисления проводятся аналогично и мы получаем

$$S_{\mu\nu\eta}=\frac{\left(8\left(c_1/c_2\right)^2\right)^{-1/2}}{\left(2\pi\right)^{5/2}}\frac{1}{c_2^{3/2}}K_{\mu\nu\eta} \tag{179}$$

где

$$K_{xx,xx,xx}=\frac{\pi}{9} \tag{180}$$

$$K_{xx,xx,yy}=-\frac{7\pi}{9} \tag{181}$$

$$K_{xx,xy,xy}=\frac{8\pi}{9} \tag{182}$$