

Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)  
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

«Фотоиндуцированный магнитный момент в  
сверхпроводящих системах»

(Дипломная работа бакалавра)

студентки группы Б02-114л  
Коваленко Марии  
научный руководитель  
д.ф.-м.н., Мельников А.С.

МФТИ 2025

---

## Аннотация

В данной работе изучается постоянный сверхпроводящий фототок, индуцированный электромагнитным излучением, для трех различных геометрий сверхпроводников и двух различных типов излучения, а именно для тонкого сверхпроводящего диска и сверхпроводящей плоскости с круговым отверстием, на которые падает плоская волна с круговой поляризацией, и для сверхпроводящего полупространства, на которое падает бesselев пучок.

Для вычислений использовалось нестационарное уравнение Гинзбурга—Ландау, а внешнее поле считалось возмущением, поэтому поправка к сверхпроводящему параметру порядка была найдена в главном порядке по полю.

В случае диска и плоскости с круговым отверстием были найдены азимутальная и радиальная компоненты постоянного сверхпроводящего фототока, постоянный магнитный момент, создаваемый азимутальной компонентой фототока, а также постоянная неоднородная сверхпроводящая фаза, возникающая из-за ненулевой дивергенции индуцированного тока. Важным моментом этой части работы является учет потенциала разбаланса заряда, характерная длина релаксации которого задает масштаб преобразования между сверхпроводящим и нормальным током.

Для сверхпроводящего полупространства было найдено распределение магнитного поля внутри сверхпроводника и азимутальная компонента фототока, индуцированная бesselевым пучком, которая, как было показано, дается вкладом, соответствующим обратному эффекту Фарадея и вкладом, связанным с током фотонного увлечения.

---

# Содержание

Содержание	2
1 Введение	3
2 Действие электромагнитного излучения на сверхпроводник вблизи критической температуры $T_c$	5
2.1 Нестационарное уравнение Гинзбурга—Ландау . . . . .	5
2.2 Уравнение на потенциал разбаланса . . . . .	6
3 Действие плоской волны с круговой поляризацией на тонкий сверхпроводящий диск	7
3.1 Постоянный фотоиндуцированный ток . . . . .	7
3.2 Азимутальный фототок и магнитный момент . . . . .	8
3.3 Радиальный ток и постоянная сверхпроводящая фаза . . . . .	12
4 Действие плоской волны с круговой поляризацией на сверхпроводящую плоскость с круговым отверстием	15
4.1 Поправка к параметру порядка, потенциал разбаланса и фототок . . . . .	15
4.2 Постоянное магнитное поле в центре отверстия . . . . .	16
5 Действие бесселевого пучка на сверхпроводящее полупространство	20
5.1 Поле бесселевого пучка в вакууме . . . . .	20
5.2 Уравнения внутри объемного сверхпроводника . . . . .	21
5.3 Потенциал разбаланса и поправка к параметру порядка внутри сверхпроводника . . . . .	22
5.4 Поле пучка в вакууме и в сверхпроводнике с учетом отражения . . . . .	25
5.5 Постоянный азимутальный фототок . . . . .	25
6 Список литературы	29

---

# 1 Введение

Возможность генерации постоянного циркулирующего тока под действием электромагнитного излучения и, как следствие, возникновение постоянного магнитного момента давно изучается во множестве экспериментальных и теоретических работ, ввиду возможных применений в оптоэлектронике. В сверхпроводящих системах изучение фототока представляет исключительный интерес, так как при некоторых условиях индуцированный сверхпроводящий ток может оставаться даже после "выключения" электромагнитного поля. Это возможно, например, если излучение оказывается достаточным для формирования абрикосовского вихря или состояния с ненулевой завихренностью в неодносвязном сверхпроводнике, которые не смогут покинуть сверхпроводник даже при выключении поля [1].

Простейшая ситуация возникает в случае, когда материал облучается плоской волной с круговой поляризацией, генерирующей постоянный магнитный момент в системе. Это явление, называемое обратным эффектом Фарадея (ОЭФ), было предсказано еще Питаевским в 1961 году для непоглощающих материалов в статье [2]. Механизмы возникновения ОЭФ в металлах и сверхпроводниках рассматриваются во многих теоретических работах ([3], [4], [5]). В контексте ОЭФ в нашей работе мы рассматриваем действие плоской циркулярно-поляризованной волны на тонкий сверхпроводящий диск и сверхпроводящую плоскость с круговым отверстием. Стоит отметить, что ранее ОЭФ в сверхпроводящем диске уже изучался в статье [4], однако ключевым отличием нашего рассмотрения является учет пространственного распределения потенциала разбаланса заряда, речь о котором будет идти ниже, и наличие которого особенно сказывается на поведении полученного фототока и создаваемого им магнитного момента при низких частотах.

Представляет интерес рассмотреть волны, которые обладают ненулевой проекцией орбитального момента на направление движения и могут передавать орбитальный момент системе. Такое излучение называется закрученным, его примерами являются бесселевы и лагер-гауссовы пучки. В нашей работе в качестве закрученного излучения используется бесселев пучок, имеющий продольный импульс  $\hbar k_z$ , модуль поперечного импульса  $\hbar k$  и определенную проекцию углового момента импульса  $\hbar m$  на ось  $z$ . В результате мы получаем выражение для азимутального фототока, индуцированного пучком в сверхпроводящем полупространстве, который содержит вклад, отвечающий ОЭФ и вклад, отвечающий эффекту фотонного увлечения. Последний как раз связан с передачей орбитального мо-

---

мента импульса волны рассматриваемой системе и пропорционален величине  $\hbar m$ . Подробный анализ взаимодействия бesselового пучка со сверхпроводящим полупространством приведен в недавней работе [6], а в случае полупроводников эффекты взаимодействия с закрученным излучением рассмотрены в работах [7], [8].

Возникающий в сверхпроводнике фототок является нелинейным откликом второго порядка куперовских пар на переменное электромагнитное поле из-за эффектов электронно-дырочной асимметрии [4], которая определяется мнимой частью константы релаксации в нестационарном уравнении Гинзбурга—Ландау [9] и наличие которой приводит к появлению осциллирующей поправки к параметру порядка, пропорциональной полю, а также из-за возникновения (благодаря излучению) потенциала разбаланса заряда, величина которого также пропорциональна полю [9]. ОЭФ и эффект фотонного увлечения, упомянутые выше, являются типичными нелинейными оптомагнитными эффектами второго порядка. Цель нашей работы — нахождение этого нелинейного отклика в рамках нестационарной теории Гинзбурга—Ландау для указанных геометрий сверхпроводников и типов ЭМ излучения.

---

## 2 Действие электромагнитного излучения на сверхпроводник вблизи критической температуры $T_c$

### 2.1 Нестационарное уравнение Гинзбурга—Ландау

Для решения задачи о нахождении сверхпроводящего тока, индуцированного электромагнитным излучением, используется нестационарное уравнение Гинзбурга—Ландау (ГЛ):

$$(T - T_c)\alpha\Psi + \beta\Psi|\Psi|^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \left( -i\nabla - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right)^2 \Psi + \Gamma \left( \partial_t + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \right) \Psi = 0, \quad (1)$$

Здесь  $\Phi_0 = \pi\hbar c/e$  ( $e < 0$ ),  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля волны, действующей на электроны в сверхпроводнике,  $\Gamma = (\frac{\pi\alpha}{8} + i\gamma)\hbar$  — константа релаксации, мнимая часть которой,  $\gamma$ , ответственна за электронно-дырочную асимметрию, которая является необходимым условием существования фототока в сверхпроводниках,  $\Phi$  — электрохимический потенциал нормальных квазичастиц в сверхпроводнике.

Стоит обсудить область применимости нестационарного уравнения ГЛ, ведь для его использования недостаточно близости температуры к критической, необходимо также, чтобы в сверхпроводнике происходили процессы, приводящие к "подавлению" щели [10]. Известны механизмы, приводящие к бесщелевой сверхпроводимости: например, взаимодействие с магнитными примесями и неупругие электрон-фононные столкновения.

Внешнее поле ЭМ волны считается достаточно слабым, чтобы можно было применить теорию возмущений и искать волновую функцию в линейном порядке по вектор-потенциалу в виде  $\Psi = (\Delta_0 + \Delta_1)e^{i\chi}$ , где  $\Delta_0^2 = \frac{\alpha T_c |\epsilon|}{\beta}$  — параметр порядка в отсутствие поля,  $\epsilon = \frac{T}{T_c} - 1$ , а  $\Delta_1 \propto A$ ,  $\chi \propto A$ ,  $A \propto e^{-i\omega t}$ ,  $\Phi \propto e^{-i\omega t}$ .

Выражение для мнимой части ур-ния ГЛ (1):

$$\text{div} \mathbf{j}_s = \text{Re} \Gamma |\Psi|^2 \frac{8e^2}{\hbar^2} \tilde{\Phi} \quad (2)$$

Здесь  $\tilde{\Phi} = \Phi + \frac{\hbar}{2e} \dot{\chi}$  — потенциал разбаланса заряда, характеризующий разницу между химическим потенциалом нормальных квазичастиц в сверхпроводнике  $\Phi$  и химическим потенциалом куперовских пар  $\mu_p = \frac{\hbar}{2|e|} \dot{\chi}$  (см. [10], [11]).

Выражение для действительной части ур-ния (1) в первом порядке по полю:

$$\tau \partial_t \Delta_1 + 2\Delta_1 - \xi^2 \nabla^2 \Delta_1 - \frac{2e}{\hbar} \tau \nu \Delta_0 \tilde{\Phi} = 0 \quad (3)$$

Здесь  $\xi^2 = \frac{\hbar^2}{4m\alpha T_c |\epsilon|}$  — длина когерентности в сверхпроводнике, зависящая от температуры,  $\tau = \frac{\pi\hbar}{8T_c |\epsilon|}$  — время релаксации параметра порядка в теории Гинзбурга—Ландау,  $\nu = \frac{Im\Gamma}{Re\Gamma} = \frac{8\gamma}{\pi\alpha}$  — отношение мнимой и вещественной частей константы релаксации  $\Gamma$ .

## 2.2 Уравнение на потенциал разбаланса

Можно взять дивергенцию от обычного выражения для сверхпроводящего тока, дифференцируя лишь выражение в скобках (т.е., считая, что  $|\Psi|^2 = const$ ), так как дифференцирование  $|\Psi|^2$  даст поправки к сверхпроводящему току более высокого порядка по полю:

$$\mathbf{j}_s = |\Psi|^2 \frac{\hbar e}{m} \left( \nabla\chi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \Rightarrow div\mathbf{j}_s = |\Psi|^2 \frac{\hbar e}{m} \left( \Delta\chi - \frac{2\pi}{\Phi_0} div\mathbf{A} \right) + 2\Delta_0 \frac{\hbar e}{m} \left( \nabla\chi - \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \nabla (Re\Delta_1) \quad (4)$$

Здесь использовано, что мы ищем поправку к модулю параметра порядка  $\Delta_1$  и сверхпроводящую фазу  $\chi$  в первом порядке по полю  $\Delta_1, \chi \propto A$ .

Приравнивание правых частей уравнений (2) и (4) дает :

$$\Delta\chi = Re\Gamma \frac{8em}{\hbar^3} \tilde{\Phi} + \frac{2\pi}{\Phi_0} div\mathbf{A} \quad (5)$$

Используя также уравнение непрерывности в металле

$$div\mathbf{j}_s = -div\mathbf{j}_n = \sigma_n div(\nabla\Phi + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}) \quad (6)$$

и подставляя в него уравнение (5), получим:

$$div\mathbf{j}_s = \sigma_n div(\nabla\Phi + \frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}) = \sigma_n (\Delta\tilde{\Phi} - \frac{\hbar}{2e} \Delta\dot{\chi} + \frac{1}{c} div\dot{\mathbf{A}}) = \sigma_n (\Delta\tilde{\Phi} - \frac{4m}{\hbar^2} Re\Gamma \dot{\tilde{\Phi}}) \quad (7)$$

Тогда искомое уравнение на  $\tilde{\Phi}$  получается из приравнивания правых частей уравнений (2) и (7):

$$\Delta\tilde{\Phi} - \frac{\tau}{\xi^2} \dot{\tilde{\Phi}} = \frac{1}{l_E^2} \tilde{\Phi}, \quad (8)$$

Здесь  $l_E^2 = \frac{\hbar\sigma_n}{\pi\alpha\epsilon^2\Delta_0^2}$  — длина релаксации потенциала разбаланса, а  $\sigma_n$  — проводимость в нормальном металле.

### 3 Действие плоской волны с круговой поляризацией на тонкий сверхпроводящий диск

#### 3.1 Постоянный фотоиндуцированный ток

Рассматривается тонкий сверхпроводящий диск толщины  $L$ , которая считается много меньшей лондоновской глубины проникновения магнитного поля  $\lambda$  ( $L \ll \lambda$ ), что позволяет считать поле волны внутри диска постоянным по толщине. Волна с круговой поляризацией падает перпендикулярно поверхности диска, и поле волны, действующей на электроны в сверхпроводнике, имеет вид:  $E = E_0 Re\{(\hat{e}_x + i\hat{e}_y)e^{-i\omega t}\} = E_0 Re\{(\hat{r} + i\hat{\theta})e^{-i\omega t + i\theta}\}$ . Соответственно, поправку к параметру порядка и потенциал разбаланса ищем в виде:  $\Delta_1 = Re\{\Delta_1(r)e^{-i\omega t + i\theta}\}$ ,  $\tilde{\Phi} = Re\{\tilde{\Phi}(r)e^{-i\omega t + i\theta}\}$ .

С учетом этого из уравнений (3) и (8) получаем уравнения на комплексные амплитуды поправки к параметру порядка и потенциала разбаланса, конкретный вид решения которых будет зависеть уже только от поставленных граничных условий:

$$r^2\Delta_1'' + r\Delta_1' + \Delta_1(q_1^2 r^2 - 1) + r^2 \frac{2e\tau\nu}{\hbar\xi^2} \Delta_0 \tilde{\Phi} = 0 \quad (9)$$

Здесь  $q_1 = \frac{\sqrt{i\omega\tau - 2}}{\xi}$ ,  $Imq_1 > 0$

$$r^2\tilde{\Phi}'' + r\tilde{\Phi}' + (q_2^2 r^2 - 1)\tilde{\Phi} = 0 \quad (10)$$

Здесь  $q_2 = \sqrt{\frac{i\omega\tau}{\xi^2} - \frac{1}{l_E^2}}$ ,  $Imq_2 > 0$

Естественное условие отсутствия тока через границу диска имеет вид:  $(-i\partial_r - \frac{2\pi}{\Phi_0} A_r)(\Delta_0 + \Delta_1)e^{i\chi}|_{r=R} = 0$ . После выделения действительной и мнимой частей этого выражения и использования ранее введенного потенциала разбаланса, граничное условие принимает вид:

$$(\partial_r \tilde{\Phi} + E_r)|_{r=R} = 0 \quad (11)$$

$$\partial_r \Delta_1|_{r=R} = 0 \quad (12)$$

С учетом этих граничных условий решение уравнений (9), (10) для диска имеет вид:

$$\tilde{\Phi} = -E_0 R f(q_2 r), \quad (13)$$

$$\Delta_1 = -E_0 R \frac{2e\tau\nu\Delta_0}{\hbar} \left[ f(q_2 r) - f(q_1 r) \right], \quad (14)$$

Здесь

$$f(qr) = \frac{J_1(qr)}{qR J_0(qR) - J_1(qR)}$$

Заметим, что функции Неймана не входят в решение, так как они расходятся при  $r = 0$ . Перепишем выражение для сверхпроводящего фототока (левая часть уравнения (4)) с помощью потенциала разбаланса:

$$\mathbf{j}_{\text{ph}} = \frac{2e^2}{mc} |\Psi|^2 \text{Re} \left( \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi - \mathbf{A} \right) = \frac{2e^2}{m\omega} |\Psi|^2 \text{Re} [i(\nabla \tilde{\Phi} + \mathbf{E})] \quad (15)$$

После выделения временной зависимости в этом выражении остаются три вклада в сверхпроводящий фототок: постоянный вклад (на нулевой частоте), вклад на частоте  $\omega$  и вклад на частоте  $2\omega$ :

$$\mathbf{j}_{\text{ph}} = \mathbf{j}_{\text{ph}}^{(0)} + \mathbf{j}_{\text{ph}}^{(\omega)} + \mathbf{j}_{\text{ph}}^{(2\omega)} = \frac{2e^2 \Delta_0}{m\omega} \left\{ \text{Re} [i\Delta_1^* (\nabla \tilde{\Phi} + \mathbf{E})] + \Delta_0 \text{Re} [i(\nabla \tilde{\Phi} + \mathbf{E}) e^{-i\omega t}] + \text{Re} [i\Delta_1 (\nabla \tilde{\Phi} + \mathbf{E}) e^{-2i\omega t}] \right\} \quad (16)$$

В этом выражении нас будет интересовать вклад на нулевой частоте, имеющий в полярных координатах азимутальную и радиальную компоненты, поэтому в дальнейшем, если не оговорено другое, подразумевается именно постоянный сверхпроводящий фототок.

### 3.2 Азимутальный фототок и магнитный момент

Используя выражение (16), легко находим азимутальную компоненту фототока, графики зависимости которой от расстояния от центра диска представлены на рис. 1:

$$j_{ph,\theta}^{(0)} = j_0 \frac{1}{\omega\tau} \frac{R}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}} \text{Re} \left\{ \left[ f(q_1 r) - f(q_2 r) \right] \left[ 1 - \frac{R}{r} f(q_2^* r) \right] \right\} \quad (17)$$

Здесь  $j_0 = \frac{32|e|^3 \Delta_0^2 E_0^2 \tau^3 \gamma}{\xi m^2 \pi^2 \alpha^2}$ .

Азимутальная компонента фототока создает постоянный магнитный момент, вычисляемый по формуле:

$$M_{ph} = \frac{L}{c} \int_0^R j_{ph,\theta}^{(0)} \pi r^2 dr, \quad (18)$$

Подставляя полученное выражение для азимутального тока и проводя интегрирование, получаем:

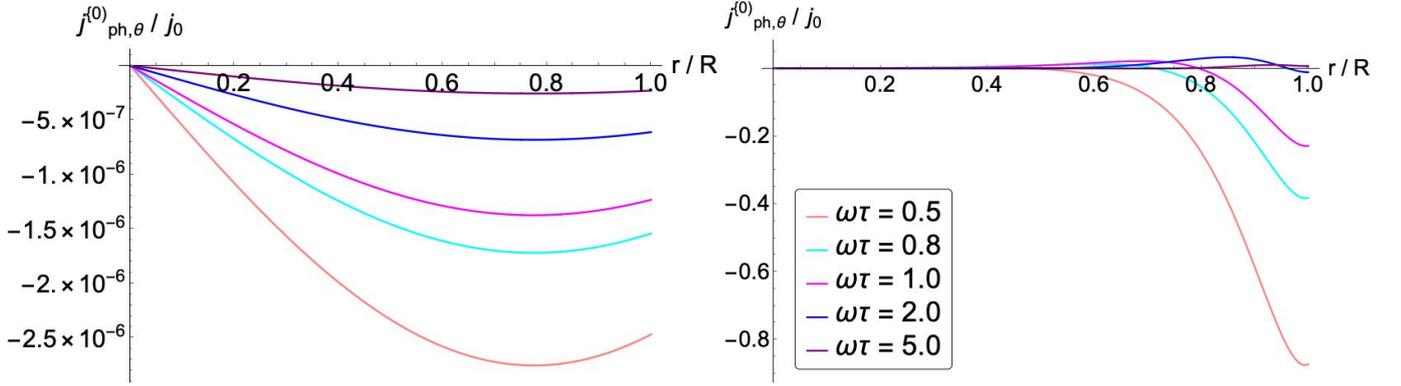


Рис. 1: Зависимость азимутальной компоненты фототока от обезразмеренного расстояния от центра диска  $r/R$  для маленького  $R = 0.1\xi$  (слева) и большого  $R = 10\xi$  (справа) дисков для  $l_E = \xi$  и различных значений  $\omega\tau$ .

$$M_{ph} = \frac{j_0 LR}{c} \pi R^2 \frac{R}{\xi} \frac{1}{\omega\tau \left(1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}\right)} (Z_1 + Z_2) \quad (19)$$

Здесь можно заметить, что  $j_0 LR$  — полный ток в диске, соответствующий плотности тока  $j_0$ , а  $\pi R^2$  — площадь диска (контура с током  $j_0 LR$ ). То есть коэффициент  $\frac{j_0 LR}{c} \pi R^2$  соответствует магнитному моменту диска радиуса  $R$  и толщины  $L$  с током плотности  $j_0$ . Запишем выражения для  $Z_1$  и  $Z_2$ , введя для удобства  $x_1 = q_1 R$  и  $x_2 = q_2 R$ :

$$Z_1 = Re \left[ \frac{1}{x_1} \frac{J_2(x_1)}{J_0(x_1)x_1 - J_1(x_1)} - \frac{1}{x_2} \frac{J_2(x_2)}{J_0(x_2)x_2 - J_1(x_2)} \right] \quad (20)$$

$$Z_2 = Re \left[ \frac{1}{J_0(x_2^*)x_2^* - J_1(x_2^*)} \left( \frac{1}{x_2^2 - x_2^{*2}} \frac{x_2^* J_0(x_2^*) J_1(x_2) - x_2 J_1(x_2^*) J_0(x_2)}{J_0(x_2)x_2 - J_1(x_2)} - \frac{1}{x_1^2 - x_1^{*2}} \frac{x_2^* J_0(x_2^*) J_1(x_1) - x_1 J_1(x_2^*) J_0(x_1)}{J_0(x_1)x_1 - J_1(x_1)} \right) \right] \quad (21)$$

Введем обозначения:  $Z = Z_1 + Z_2$  и  $M_0 = \frac{j_0 LR}{c} \pi R^2 \frac{R}{\xi} = \frac{\tau^2 \nu 2\pi |e|^3}{\hbar m c} L R^4 \Delta_0^2 E_0^2$ .

С такими обозначениями выражение для момента примет вид:

$$M_{ph} = M_0 \frac{Z}{\omega\tau \left(1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}\right)} \quad (22)$$

Интересно рассмотреть асимптотики этого выражения для маленьких и больших радиусов диска в разных пределах частот падающего излучения, считая  $\xi \sim l_E$ . Графики зависимостей магнитного момента от частоты падающего излучения приведены ниже на рис. 2 и рис. 3 вместе с асимптотическими выражениями для наглядности.

- $R \ll \xi$

$$M_{ph} = M_0 \begin{cases} -\frac{22}{512} \left(\frac{R}{l_E}\right)^2 \left(\frac{R}{\xi}\right)^2 \frac{1}{\omega\tau}, & \omega\tau \ll \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \\ \frac{2}{(\omega\tau)^3} \left(\frac{\xi}{R}\right)^2, & \omega\tau \gg \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \end{cases}, \quad (23)$$

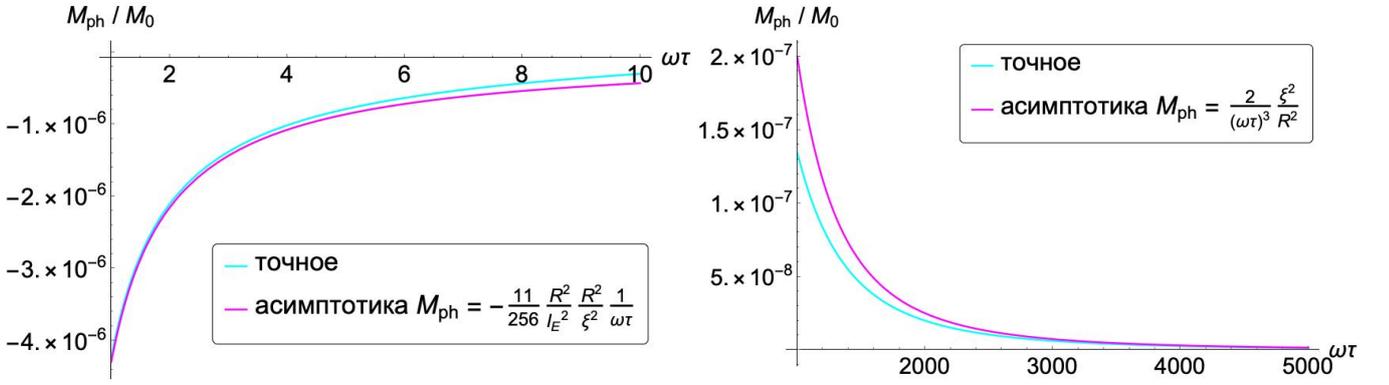


Рис. 2: Зависимость индуцированного магнитного момента от  $\omega\tau$  для маленького диска  $R = 0.1\xi$  в различных пределах частот падающего излучения  $\omega\tau \ll \xi^2/R^2$  (слева) и  $\omega\tau \gg \xi^2/R^2$  (справа) при  $l_E = \xi$ .

- $R \gg \xi$

$$M_{ph} = M_0 \begin{cases} -\frac{1}{\omega\tau} \left(\frac{l_E}{R}\right)^2, & \omega\tau \ll 1 \\ \frac{2}{(\omega\tau)^3} \left(\frac{\xi}{R}\right)^2, & \omega\tau \gg 1 \end{cases}, \quad (24)$$

Ключевым отличием этой работы от статьи [4] является учет потенциала разбаланса  $\tilde{\Phi}$ . В упомянутой работе фактически считалось, что длина релаксации потенциала электрон-дырочного разбаланса  $l_E \rightarrow \infty$  ( $l_E \gg \xi, R$ ) и, как следствие, пренебрегалось возможным преобразованием между нормальным и сверхпроводящим током. В рамках вычислений это привело к качественно другим асимптотическим зависимостям магнитного момента, в

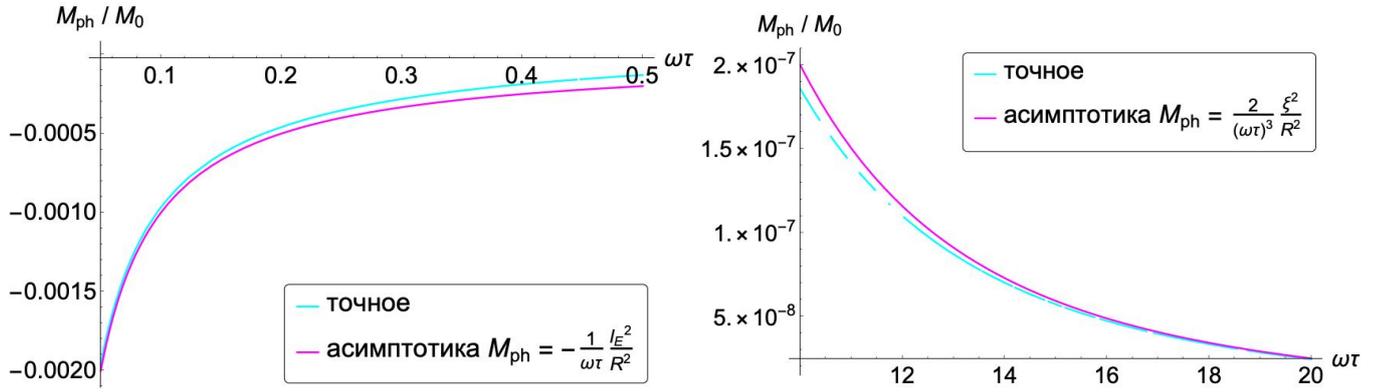


Рис. 3: Зависимость индуцированного магнитного момента от  $\omega\tau$  для большого диска  $R = 100\xi$  в различных пределах частот падающего излучения  $\omega\tau \ll 1$  (слева) и  $\omega\tau \gg 1$  (справа) при  $l_E = \xi$ .

особенности на малых частотах падающего излучения. Для наглядности приведем асимптотики, найденные в работе [4]:

- $R \ll \xi$

$$M = M_0 \begin{cases} \frac{73}{5760} \left(\frac{R}{\xi}\right)^6 \omega\tau, & \omega\tau \ll \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \\ \frac{2}{(\omega\tau)^3} \left(\frac{\xi}{R}\right)^2, & \omega\tau \gg \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \end{cases}, \quad (25)$$

- $R \gg \xi$

$$M = M_0 \begin{cases} \frac{7}{192} \left(\frac{R}{\xi}\right)^2 \omega\tau, & \omega\tau \ll \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \frac{1}{\omega\tau}, & \left(\frac{\xi}{R}\right)^2 \ll \omega\tau \ll 1, \\ \frac{2}{(\omega\tau)^3} \left(\frac{\xi}{R}\right)^2, & \omega\tau \gg 1 \end{cases}, \quad (26)$$

Как видно из сравнения выражений (23) и (25), (24) и (26), асимптотическое поведение момента на низких частотах отличается на две степени  $\omega\tau$ .

Стоит отдельно обсудить вопрос расходимости магнитного момента при маленьких  $\omega\tau$ , как для маленьких (23), так и для больших (24) радиусов диска, где зависимость имеет вид  $M_{ph} \propto 1/\omega\tau$ . Дело в том, что в вычислениях мы использовали поле волны уже

внутри диска (раздел 3.1), соответственно, использовавшаяся амплитуда электрического поля  $E_0$ , вообще говоря, не совпадает с амплитудой поля падающей волны из-за эффектов деполяризации и, более того, может зависеть от частоты падающего излучения. Если приближенно считать диск эллипсоидом с полуосями  $R, R$  и  $L/2$ , то в пределе частот, много меньших плазменной, справедливо ([4], [13]):

$$E_0 \approx \frac{\omega^2 R^2}{\omega_p^2 L^2} E_0^{ext}$$

Здесь  $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N_0/m}$  - плазменная частота в металле,  $\omega \ll \omega_p \sqrt{L/R}$ .

Тогда, учитывая, что  $M_0 \propto E_0^2$ , это дает дополнительный множитель  $\omega^4$ , а значит, реальная асимптотика на маленьких частотах будет  $M_{ph} \propto \omega^3$ , что убирает расходимость.

### 3.3 Радиальный ток и постоянная сверхпроводящая фаза

Из ур-ния (16) находим радиальную компоненту постоянного фототока:

$$j_{ph,r}^{(0)} = j_0 \frac{1}{\omega\tau} \frac{R}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}} \text{Re}\{i[f(q_1 r) - f(q_2 r)][1 - R \partial_r f(q_2^* r)]\} \quad (27)$$

Здесь  $R \partial_r f(q_2^* r) = \frac{J_0(q_2^* r) q_2^* R - \frac{R}{r} J_1(q_2^* r)}{J_0(q_2^* R) q_2^* R - J_1(q_2^* R)}$ .

Графики зависимости радиального тока от расстояния от центра диска для маленьких и больших дисков приведены на рис.4.

Ключевым моментом является то, что в отличие от азимутального фототока, радиальный обладает ненулевой дивергенцией, а значит, он должен компенсироваться некоторым другим током, чтобы избежать накопления заряда со временем. В случае несверхпроводящих систем компенсация фототока с ненулевой дивергенцией будет происходить за счет неоднородного распределения химического потенциала, создающего диффузионные токи [7]. Для свехпроводящих же систем радиальный ток будет компенсироваться "фазовым" током, появляющимся из-за неоднородного распределения постоянной сверхпроводящей фазы.

Кроме того, фотоиндуцированный ток должен экранироваться возникающим мейсснеровским током. Тогда система электродинамических уравнений, связывающих постоянный

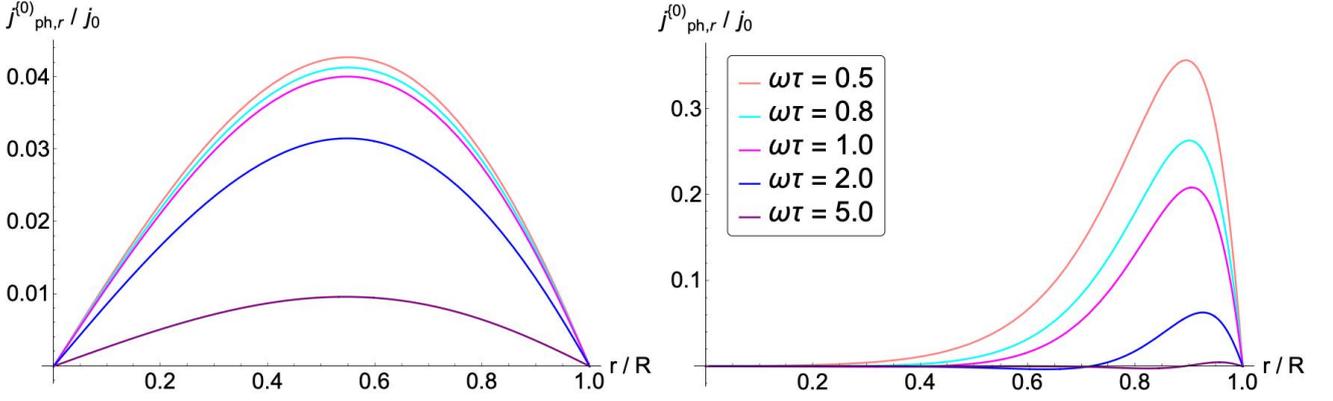


Рис. 4: Зависимость радиальной компоненты фототока от безразмерного расстояния от центра диска  $r/R$  для маленького  $R = \xi$  (слева) и большого  $R = 10\xi$  (справа) дисков для  $l_E = \xi$  и различных значений  $\omega\tau$ .

фототок, мейсснеровский ток, постоянную сверхпроводящую фазу и возникающее постоянное поле, имеет вид (см. [6]):

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{A}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_M^{(0)} + \mathbf{j}_{ph}^{(0)}), \\ \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{j}_M^{(0)} = -\mathbf{A}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi^{(0)}, \end{cases} \quad (28)$$

Здесь  $\text{rot } \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{B}^{(0)}$ , а калибровка выбрана так, что  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнений системы (28) и сложив их, получим уравнение, в котором отсутствует мейсснеровский ток:

$$\lambda^2 \text{rot rot } \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}^{(0)} = \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{j}_{ph}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi^{(0)} \quad (29)$$

Взяв дивергенцию уже от уравнения (29) и учитывая, что азимутальный ток бездивергентный, получим:

$$\text{div} \left[ \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{j}_{ph}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi^{(0)} \right] = 0 \implies \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{4\pi\lambda^2}{c} j_{ph,r}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi^{(0)} \right] = 0 \implies \frac{4\pi\lambda^2}{c} j_{ph,r}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi^{(0)} = \text{const} \quad (30)$$

С учетом условия отсутствия тока через границу  $\left( \frac{4\pi\lambda^2}{c} j_{ph,r}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi \right) |_{r=R} = 0$ , получаем окончательно  $\frac{4\pi\lambda^2}{c} j_{ph,r}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi = 0$ . Тогда разность фазы между центром и краем диска:

$$\Delta\chi^{(0)} = -\frac{8\pi e\lambda^2}{\hbar c^2} \int_0^R j_{ph,r}^{(0)}(r)dr = \frac{\chi_0}{\omega\tau} \frac{R^2}{\xi^2} \frac{1}{1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}} \int_0^R Re [i(f(q_1r) - f(q_2r))(1 - R \partial_r f(q_2^*r))] \frac{dr}{R} \quad (31)$$

Здесь  $\chi_0 = -j_0 \frac{8\pi e\xi\lambda^2}{\hbar c^2}$ ,  $f(qr) = \frac{J_1(qr)}{qRJ_0(qR) - J_1(qR)}$ .

Интеграл в выражении (31) не берется аналитически из-за наличия интегралов от произведения функций Бесселя от разных аргументов. Поэтому приведем численный график зависимости разности фазы от радиуса диска и его асимптотику на малых радиусах диска с точностью до первого члена, содержащего отношение  $\xi/l_E$  (рис. 5).

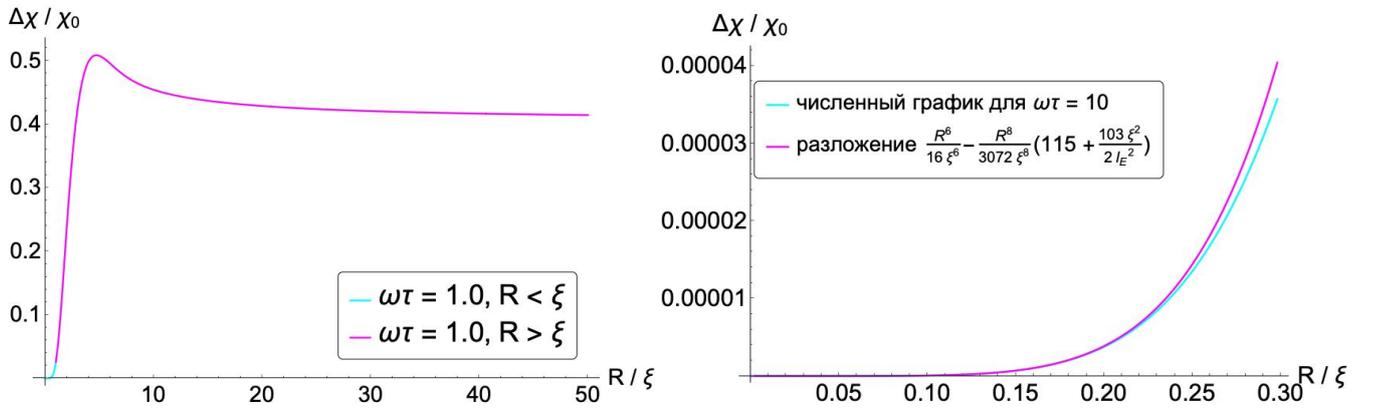


Рис. 5: Зависимость разности постоянной сверхпроводящей фазы между центром и краем диска  $\Delta\chi$  от  $R/\xi$  для  $\omega\tau = 1$  и  $l_E = \xi$  (слева) и сравнение численного графика и асимптотического разложения для  $R \ll \xi$  при  $\omega\tau = 10$  и  $l_E = \xi$  (справа).

Как видно из графика, при стремлении радиуса диска к бесконечности, разность фазы, ожидаемо, стремится к константе.

---

## 4 Действие плоской волны с круговой поляризацией на сверхпроводящую плоскость с круговым отверстием

Так как в реальном сверхпроводнике всегда есть несверхпроводящие дефекты, наличие которых может приводить к появлению фототока при облучении волной с круговой поляризацией, интересно рассмотреть задачу о неодносвязном сверхпроводнике с дыркой. Рассматривается сверхпроводящая плоскость толщины  $L$  с круговым отверстием радиуса  $R$ , причем  $L \ll \lambda$ , что позволяет считать поле волны внутри диска постоянным по толщине. Волна с круговой поляризацией падает перпендикулярно поверхности диска и поле волны, действующее на электроны в сверхпроводнике, имеет вид:  $E = E_0 \text{Re}\{(\hat{e}_x + i\hat{e}_y)e^{-i\omega t}\} = E_0 \text{Re}\{(\hat{r} + i\hat{\theta})e^{-i\omega t + i\theta}\}$ . Соответственно, поправку к параметру порядка и потенциал разбаланса ищем в виде:  $\Delta_1 = \text{Re}\{\Delta_1(r)e^{-i\omega t + i\theta}\}$ ,  $\tilde{\Phi} = \text{Re}\{\tilde{\Phi}(r)e^{-i\omega t + i\theta}\}$ .

### 4.1 Поправка к параметру порядка, потенциал разбаланса и фототок

Постановка задачи аналогична разделу 3.1 и даже граничные условия имеют точно такой же вид, как и для диска, поэтому уравнения (9) – (12) справедливы и для плоскости с круговым отверстием. Различие со случаем диска, однако, будет заключаться в том, что требования нерасходимости решения в нуле не будет (так как там сверхпроводник отсутствует), но будет требование нерасходимости на бесконечности, из-за чего решения для потенциала разбаланса и поправки к параметру порядка будут выражаться через функции Ганкеля первого рода:

$$\tilde{\Phi} = -E_0 R g(q_2 r), \quad (32)$$

$$\Delta_1 = -E_0 R \frac{\frac{2e}{\hbar} \tau \nu \Delta_0}{2 - \frac{\xi^2}{l_E^2}} [g(q_2 r) - g(q_1 r)], \quad (33)$$

Здесь

$$g(qr) = \frac{H_1^{(1)}(qr)}{qR H_0^{(1)}(qR) - H_1^{(1)}(qR)}$$

А выражения для азимутальной и радиальной компоненты тока имеют вид:

$$j_{ph,\theta}^{(0)} = j_0 \frac{1}{\omega\tau} \frac{R}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}} \operatorname{Re} \left\{ \left[ g(q_1 r) - g(q_2 r) \right] \left[ 1 - \frac{R}{r} g^*(q_2 r) \right] \right\} \quad (34)$$

$$j_{ph,r}^{(0)} = j_0 \frac{1}{\omega\tau} \frac{R}{\xi} \frac{1}{1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}} \operatorname{Re} \{ i [g(q_1 r) - g(q_2 r)] [1 - R \partial_r g^*(q_2 r)] \} \quad (35)$$

Здесь  $g^*(qr) = \frac{H_1^{(2)}(q^*r)}{H_0^{(2)}(q^*R)q^*R - H_1^{(2)}(q^*R)}$ ,  $R \partial_r g^*(qr) = \frac{H_0^{(2)}(q^*r)q^*R - \frac{R}{r} H_1^{(2)}(q^*r)}{H_0^{(2)}(q^*R)q^*R - H_1^{(2)}(q^*R)}$ .

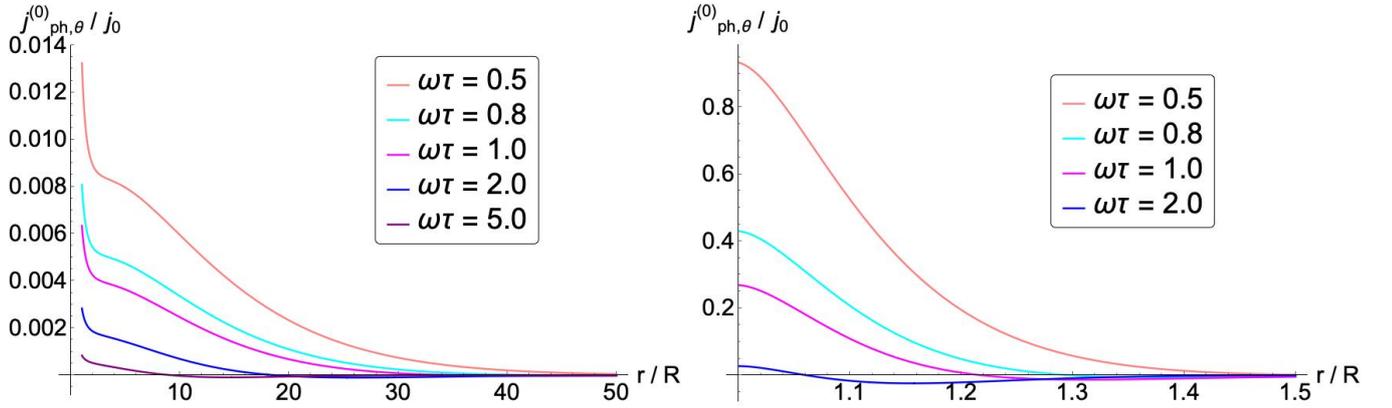


Рис. 6: Зависимость азимутальной компоненты фототока от обезразмеренного расстояния от края отверстия  $r/R$  для маленького  $R = 0.1\xi$  (слева) и большого  $R = 10\xi$  (справа) дисков для  $l_E = \xi$  и различных значений  $\omega\tau$ .

Разность фазы будет выражаться через радиальный ток аналогично случаю с диском:

$$\Delta\chi^{(0)} = -\frac{8\pi e\lambda^2}{\hbar c^2} \int_R^\infty j_{ph,r}^{(0)}(r) dr = \frac{\chi_0}{\omega\tau} \frac{R^2}{\xi^2} \frac{1}{1 - \frac{\xi^2}{2l_E^2}} \int_R^\infty \operatorname{Re} [i(g(q_1 r) - g(q_2 r))(1 - R \partial_r g^*(q_2 r))] \frac{dr}{R} \quad (36)$$

## 4.2 Постоянное магнитное поле в центре отверстия

Зададимся вопросом нахождения постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}^{(0)}$  в тонкой сверхпроводящей пленке толщины  $L$  с круговым отверстием радиуса  $R \sim \xi$ . Эта задача аналогична задаче Пирла о нахождении магнитного поля в тонкой пленке с вихрем [14]. Для решения используем систему (28):

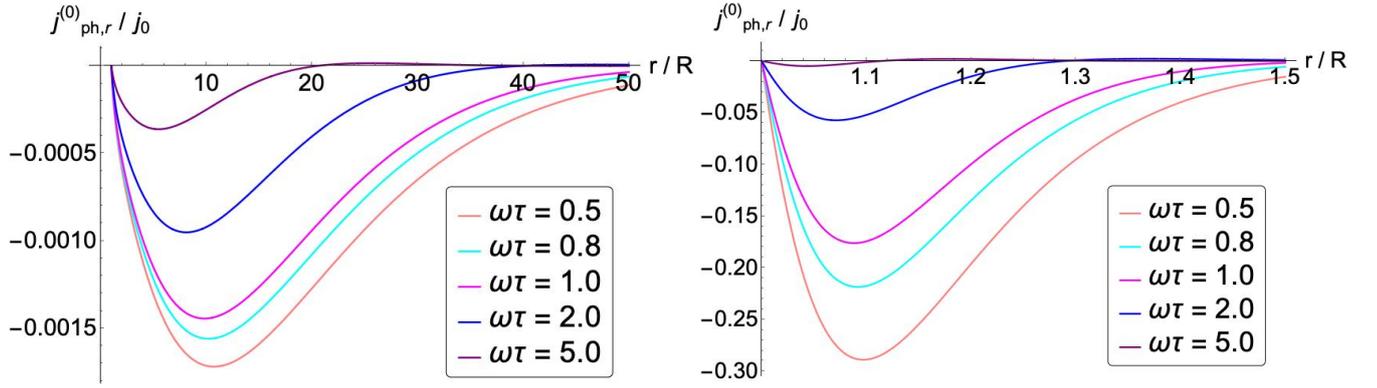


Рис. 7: Зависимость радиальной компоненты фототока от безразмерного расстояния от края отверстия  $r/R$  для маленького  $R = 0.1\xi$  (слева) и большого  $R = 10\xi$  (справа) дисков для  $l_E = \xi$  и различных значений  $\omega\tau$ .

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{A}^{(0)} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_M^{(0)} + \mathbf{j}_{ph}^{(0)}), \\ \frac{4\pi\lambda^2}{c} \mathbf{j}_M^{(0)} = -\mathbf{A}^{(0)} + \frac{\hbar c}{2e} \nabla \chi^{(0)}, \end{cases} \quad (37)$$

Здесь  $\mathbf{A}^{(0)}(r) = \hat{\theta} A^{(0)}(r)$ ,  $\mathbf{H}^{(0)}(r) = \hat{z} H^{(0)}(r)$ ,  $\text{rot } \mathbf{A}^{(0)} = \mathbf{H}^{(0)}$ ,  $\text{div } \mathbf{A} = 0$ .

Из второго уравнения системы видим, что:

$$j_{M,\theta}^{(0)} = -\frac{c}{4\pi\lambda^2} A^{(0)}, \quad (38)$$

$$j_{M,r}^{(0)} = \frac{\hbar c^2}{8\pi e \lambda^2} \nabla_r \chi^{(0)}. \quad (39)$$

Тогда с учетом ур-ния компенсации для радиального фототока (30), получаем:

$$j_{M,r}^{(0)} + j_{ph,r}^{(0)} = 0. \quad (40)$$

Произведем усреднение по толщине, учитывая, что  $L \ll \lambda$ . Тогда полный постоянный ток:

$$J_{M,\theta} \equiv L j_{M,\theta}^{(0)}, \quad J_{ph,\theta} \equiv L j_{ph,\theta}^{(0)}.$$

Теперь заменим задачу о пластинке конечной толщины задачей о плоскости, по которой течет ток с плотностью  $J\delta(z)$ , тогда:  $j_{M,\theta}^{(0)} \rightarrow L\delta(z) j_{M,\theta}^{(0)}$ ,  $j_{ph,\theta}^{(0)} \rightarrow L\delta(z) j_{ph,\theta}^{(0)}$ . С учетом этого, а также уравнений (40) и (38) перепишем первое уравнение системы (28) :

$$\Delta A^{(0)} + \delta(z) \left( \frac{4\pi L}{c} j_{ph,\theta}^{(0)} + \frac{1}{\lambda} A^{(0)} \right) = 0, \quad (41)$$

где  $\tilde{\lambda} \equiv \lambda^2/L$ .

Для решения введем Фурье-компоненты:

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{q}, k) = \int \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}, z) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{r}+kz)} d^2\mathbf{r} dz, \quad (42)$$

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{q}) = \int \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^2\mathbf{r}. \quad (43)$$

$$\mathbf{j}_{ph,\theta}^{(0)}(\mathbf{q}) = \int \mathbf{j}_{ph,\theta}^{(0)}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^2\mathbf{r} = 2\pi i \frac{[\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{q}]}{q} \int r j_{ph,\theta}^{(0)}(r) J_1(qr) dr. \quad (44)$$

Здесь  $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ ,  $\mathbf{r} = (r_x, r_y)$ .

Тогда уравнение (41) примет вид:

$$(q^2 + k^2) \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{q}, k) = \left( \frac{4\pi L}{c} \mathbf{j}_{ph,\theta}^{(0)}(\mathbf{q}) + \frac{1}{\tilde{\lambda}} \mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{q}) \right) \quad (45)$$

Откуда получаем:

$$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi L}{c (2q + \tilde{\lambda}^{-1})} \mathbf{j}_{ph,\theta}^{(0)}(\mathbf{q}), \quad (46)$$

$$\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{q}) = i[\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{q}) \times \mathbf{q}] = i \frac{4\pi L}{c (2q + \tilde{\lambda}^{-1})} [\mathbf{j}_{ph,\theta}^{(0)}(\mathbf{q}) \times \mathbf{q}]. \quad (47)$$

В интересующем нас пределе  $r \ll \tilde{\lambda}$  ( $q \gg 1/\tilde{\lambda}$ ):

$$\mathbf{H}^{(0)}(\mathbf{q}) = 2\pi i \frac{L}{c} [\mathbf{j}_{ph,\theta}^{(0)}(\mathbf{q}) \times \hat{\mathbf{q}}] = \hat{\mathbf{z}} \frac{4\pi^2 L}{c} \int r j_{ph,\theta}^{(0)}(r) J_1(qr) dr \quad (48)$$

Возвращаясь в координатное пространство, находим для поля при  $r' \ll \tilde{\lambda}$ :

$$\mathbf{H}^0(r') = \hat{\mathbf{z}} \frac{2\pi L}{c} \int_{\xi}^{\infty} dr r j_{ph,\theta}^{(0)}(r) \int_0^{1/\xi} dq q J_1(qr) J_0(qr') \quad (49)$$

Здесь введена естественная обрезка, так как сверхпроводник занимает область  $r > R \sim \xi$ , а значит  $q < 1/\xi$ :

---

В центре отверстия:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^0(0) &= \hat{\mathbf{z}} \frac{2\pi L}{c} \int_{\xi}^{\infty} dr r j_{ph,\theta}^{(0)}(r) \int_0^{1/\xi} dq q J_1(qr) = \\ &= \hat{\mathbf{z}} \frac{2\pi L}{c} \int_{\xi}^{\infty} dr \frac{j_{ph,\theta}^{(0)}(r)}{r} \left[ \frac{r}{\xi} J_2\left(\frac{r}{\xi}\right) + \frac{r^3}{24\xi^3} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, -\frac{r^2}{4\xi^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

Здесь использовано, что  $\int_0^a x J_1(x) dx = a J_2(a) + \int_0^a J_2(x) dx$ .

---

## 5 Действие бесселевого пучка на сверхпроводящее полупространство

В этом разделе рассматривается объемный сверхпроводник, занимающий полупространство  $z < 0$ , на который падает бесселев пучок. Ставится задача нахождения азимутальной компоненты индуцированного сверхпроводящего тока.

Стоит сразу выделить малые параметры задачи, так как далее нами будет использовано много упрощений ввиду малости этих параметров. Верхний предел частот падающего излучения в нашей задаче определяется величиной сверхпроводящей щели, что дает ограничение  $\omega \lesssim 10^{12} \text{ s}^{-1}$ . Типичное значение проводимости в металлах  $\sigma_n \sim 10^{18} \text{ s}^{-1}$ , что дает малый параметр  $\omega/\sigma_n \ll 1$ . Также, взяв типичное значение глубины проникновения магнитного поля  $\lambda \sim 100 \text{ nm}$ , получим  $\omega\lambda/c \ll 1$ .

### 5.1 Поле бесселевого пучка в вакууме

Бесселев пучок по определению является суперпозицией плоских волн произвольной поляризации, волновые векторы которых лежат на конусе с фиксированным углом раствора. Магнитное поле пучка представимо в виде [12]:

$$\mathbf{H}^{(e)} = B_0 e^{-i\omega t} e^{ik_z z} \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} e^{i\vec{k}_{\parallel} \vec{\rho}} a_{\kappa m}(k_{\parallel}) \mathbf{e}_H. \quad (51)$$

Здесь

$$a_{\kappa m}(k_{\parallel}) = \frac{2\pi}{\kappa} i^{-m} \delta(k_{\parallel} - \kappa) e^{im\varphi_k} \quad (52)$$

$\mathbf{e}_H(\varphi_k) = \alpha \mathbf{e}_H^{\parallel}(\varphi_k) + \beta \mathbf{e}_H^{\perp}(\varphi_k)$  — единичный вектор смешанной поляризации ( $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ ),  $\varphi_k$  — полярный угол в пространстве волновых векторов ( $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ ), а также:

$$\mathbf{k}/k = (\sin \theta \cos \varphi_k, \sin \theta \sin \varphi_k, \cos \theta)^T, \quad (53)$$

где  $k^2 = k_{\parallel}^2 + k_z^2$ ,  $\varphi_k \in [0, 2\pi)$ ,  $\sin \theta = \frac{\kappa}{k}$ .

Векторы P- и S- поляризаций:

$$\mathbf{e}_H^{\parallel} = (-\sin \varphi_k, \cos \varphi_k, 0)^T, \quad (54)$$

$$\mathbf{e}_H^{\perp} = (\cos \theta \cos \varphi_k, \cos \theta \sin \varphi_k, -\sin \theta)^T. \quad (55)$$

Интегрируя выражение (51), получаем распределение магнитного поля бesselового пучка в вакууме в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(e)} &= \begin{pmatrix} H_x^{(e)} \\ H_y^{(e)} \\ H_z^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{B_0}{2\pi} i^{-m} e^{-i\omega t + ik_z z} \int d\varphi_k e^{i\mathbf{k}_{\parallel} \vec{\rho}} e^{im\varphi_k} \begin{pmatrix} -\alpha \sin \varphi_k + \beta \cos \theta \cos \varphi_k \\ \alpha \cos \varphi_k + \beta \cos \theta \sin \varphi_k \\ -\beta \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= \frac{B_0}{2} e^{-i\omega t + ik_z z + im\varphi} \begin{pmatrix} -e^{i\varphi} J_{m+1}(\kappa\rho) o_- - e^{-i\varphi} J_{m-1}(\kappa\rho) o_+ \\ ie^{i\varphi} J_{m+1}(\kappa\rho) o_- - ie^{-i\varphi} J_{m-1}(\kappa\rho) o_+ \\ -2\beta \sin \theta J_m(\kappa\rho) \end{pmatrix}, \quad (56) \end{aligned}$$

где  $o_{\pm} = \alpha \pm i\beta \cos \theta$ .

Переходя в цилиндрические координаты, получаем:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \begin{pmatrix} H_{\rho}^{(e)} \\ H_{\phi}^{(e)} \\ H_z^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{B_0}{2} e^{-i\omega t + ik_z z + im\varphi} \begin{pmatrix} -J_{m+1}(\kappa\rho) o_- - J_{m-1}(\kappa\rho) o_+ \\ iJ_{m+1}(\kappa\rho) o_- - iJ_{m-1}(\kappa\rho) o_+ \\ -2\beta \sin \theta J_m(\kappa\rho) \end{pmatrix}. \quad (57)$$

## 5.2 Уравнения внутри объемного сверхпроводника

Перепишем уравнения (3) и (8) в виде:

$$\nabla^2 \tilde{\Phi} = p_2^2 \tilde{\Phi}, \quad (58)$$

$$-\nabla^2 \Delta_1 + p_1^2 \Delta_1 = \frac{2e\tau\nu\Delta_0}{\hbar\xi^2} \tilde{\Phi}, \quad (59)$$

Здесь  $p_1^2 \equiv \frac{2-i\omega\tau}{\xi^2} = -q_1^2$ ,  $p_2^2 \equiv \frac{1}{l_E^2} - \frac{i\omega\tau}{\xi^2} = \frac{\lambda^2}{l_E^2 \lambda_{\text{eff}}^2} = -q_2^2$ ,  $\lambda^2 = \frac{\hbar^2 e^2}{32\pi a T_c \xi_0^2 e^2 \Delta_0^2}$ ,  $\frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left(1 - i\omega\tau \frac{l_E^2}{\xi^2}\right)$ .

Уравнения Максвелла внутри сверхпроводника:

$$\text{rot} \mathbf{H}^{(i)} = \frac{4\pi\sigma_n}{c} \mathbf{E}^{(i)} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_s + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(i)}}{\partial t} \quad (60)$$

$$\text{rot} \mathbf{E}^{(i)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}^{(i)}}{\partial t} \quad (61)$$

Далее, взяв ротор от выражения (60) и подставив в уравнение (61), получим:

$$\Delta \mathbf{H}^{(i)} = \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{4\pi i \sigma_n \omega}{c^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{H}^{(i)} \quad (62)$$

Так как предполагается, что  $\omega \ll \sigma_n$ ,  $\lambda\omega/c \ll 1$ , последним членом в этом уравнении можно пренебречь. Также, используя то, что  $\frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \left( 1 - i\omega\tau \frac{l_E^2}{\xi^2} \right) = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{4\pi i \sigma_n \omega}{c^2}$ , получим уравнение на поле внутри сверхпроводника:

$$\Delta \mathbf{H}^{(i)} = \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^2} \mathbf{H}^{(i)} \quad (63)$$

Далее нам также понадобится следующее уравнение:

$$\text{rot} \mathbf{H}^{(i)} = \frac{ic}{\omega} \left( \frac{1}{\lambda_{\text{eff}}^2} \mathbf{E}^{(i)} + \frac{1}{\lambda^2} \nabla \tilde{\Phi} \right). \quad (64)$$

Оно получается из ур-ния (60) после выбрасывания последнего члена в правой части и подстановки выражения для  $\mathbf{j}_s$  в терминах  $\mathbf{E}^{(i)}$  и  $\nabla \tilde{\Phi}$ :

$$\mathbf{j}_s = \frac{c}{4\pi\lambda^2} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \nabla \chi - \mathbf{A}^{(i)} \right) = i \frac{c^2}{4\pi\omega\lambda^2} \left( \mathbf{E}^{(i)} + \nabla \tilde{\Phi} \right) \quad (65)$$

### 5.3 Потенциал разбаланса и поправка к параметру порядка внутри сверхпроводника

Потенциал разбаланса  $\tilde{\Phi}$  и поправку к параметру порядка  $\Delta_1$ , индуцированные бесселевым пучком, легче всего получить, сначала найдя эти величины в случае плоской волны, а потом произведя суммирование по плоским волнам.

#### $\tilde{\Phi}$ и $\Delta_1$ , индуцированные плоской волной.

Для нахождения  $\tilde{\Phi}$  и  $\Delta_1$  в случае плоской волны, нам понадобятся компоненты магнитного поля внутри сверхпроводника. Пусть  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z)$ . Из ур-ния (62), учитывая  $\omega/c \ll 1/\lambda$ , получаем, что внутри  $H_x^{(i)}, H_y^{(i)} \propto e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{-z/\lambda_{\text{eff}}}$ . Чтобы найти коэффициенты для этих зависимостей, нужно использовать условия непрерывности тангенциальных компонент поля на границе. Магнитное поле для плоской волны в вакууме:

$$\begin{cases} B_x^{(e)} = \beta B_0 \cos \theta e^{-i\omega t + ik_x x} (e^{ik_z z} + r_{\perp} e^{-ik_z z}), \\ B_y^{(e)} = \alpha B_0 e^{-i\omega t + ik_x x} (e^{ik_z z} + r_{\parallel} e^{-ik_z z}), \\ B_z^{(e)} = -\beta B_0 \sin \theta e^{-i\omega t + ik_x x} (e^{ik_z z} - r_{\perp} e^{-ik_z z}). \end{cases} \quad (66)$$

Здесь выражения для  $B_x^{(e)}, B_z^{(e)}$  соответствуют вкладу S-поляризации, а  $B_y^{(e)}$  - вкладу P-поляризации (см. рис. 8).

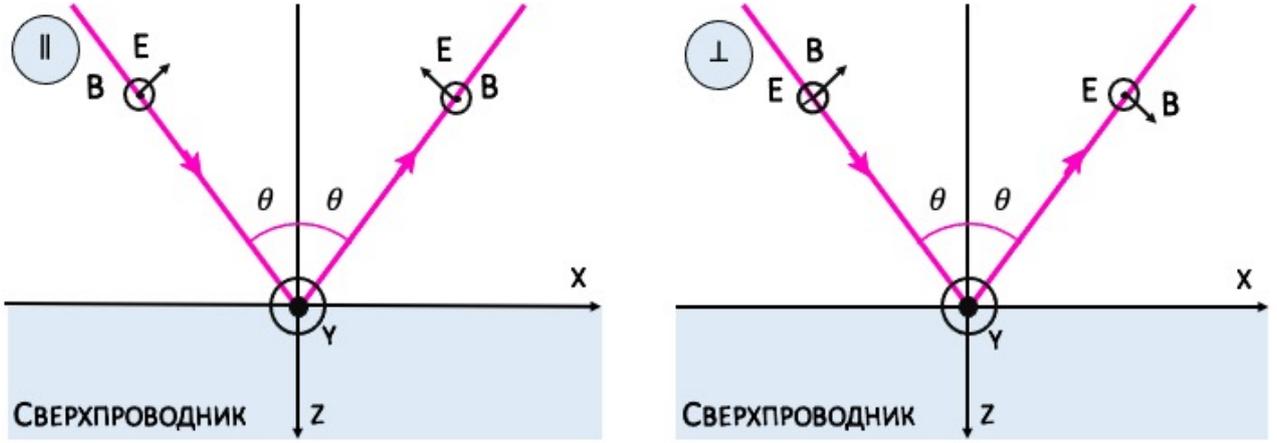


Рис. 8: Падающая и отраженная волна для P-поляризации (слева) и S-поляризации (справа).

Считая  $r_{\parallel}, r_{\perp} \approx 1$  (что справедливо для металлов в главном порядке по  $\omega/\sigma_n$  при углах падения, не слишком близких к  $\pi/2$ ; в нашем же случае (см. [6]) условием, гарантирующим близость коэффициентов отражения к 1, будет малость параметра  $\omega|\lambda_{eff}|/c$ ), получим на границе  $z = 0$ :

$$\begin{cases} B_x^{(e)}|_{z=0} = 2\beta B_0 \cos \theta e^{-i\omega t + ik_x x}, \\ B_y^{(e)}|_{z=0} = 2\alpha B_0 e^{-i\omega t + ik_x x}, \\ B_z^{(e)}|_{z=0} = -\beta B_0 \sin \theta e^{-i\omega t + ik_x x} (1 - r_{\perp}) \approx 0. \end{cases} \quad (67)$$

Учитывая, что  $B_x^{(e)}|_{z=0} = H_x^{(i)}|_{z=0}$ ,  $B_y^{(e)}|_{z=0} = H_y^{(i)}|_{z=0}$ , получим:

$$\begin{cases} H_x^{(i)} = 2\beta B_0 \cos\theta e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{-z/\lambda_{eff}}, \\ H_y^{(i)} = 2\alpha B_0 e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{-z/\lambda_{eff}}, \\ H_z^{(i)} = 0. \end{cases} \quad (68)$$

Заметим, что так как вертикальная компонента электрического поля в случае S-поляризации равна нулю (см. рис. 8), вклад в  $\tilde{\Phi}$ ,  $\Delta_1$  будет определяться лишь Р-поляризацией, а, значит, для наличия индуцированного тока необходимо, чтобы у падающих плоских волн, составляющих пучок, присутствовала Р-поляризация, т.е. чтобы  $\alpha \neq 0$ .

Из ур-ния (58)  $\tilde{\Phi}^{plane} \propto e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{-p_2 z}$ . Коэффициент найдем из граничных условий.

Условие отсутствия тока через границу:  $(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} + E_z^{(i)})|_{z=0} = 0$ . Из ур-ния (60) следует:  $E_z^{(i)}|_{z=0} = \frac{c}{4\pi\sigma_n} (rot\mathbf{H}^{(i)})_z|_{z=0}$ .

Тогда  $\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z}|_{z=0} = -\frac{c}{4\pi\sigma_n} (rot\mathbf{H}^{(i)})_z|_{z=0} = -\frac{c}{4\pi\sigma_n} \frac{\partial H_y^{(i)}}{\partial x}|_{z=0} = -\frac{i\alpha B_0 \omega \cos\theta}{2\pi\sigma_n} e^{-i\omega t} e^{ik_x x}$  и:

$$\tilde{\Phi}^{plane} = \alpha \frac{iB_0 \omega \sin\theta}{2\pi\sigma_n p_2} e^{-i\omega t} e^{ik_x x} e^{-p_2 z} \quad (69)$$

Теперь из выражения (59), используя граничное условие  $\partial\Delta_1/\partial z|_{z=0} = 0$  и тот факт, что решение должно затухать на бесконечности, легко находим  $\Delta_1^{plane}$ :

$$\Delta_1^{plane} = -\alpha \frac{i\omega e\tau\nu\Delta_0 B_0 \sin\theta}{\pi\hbar\sigma_n \xi^2 (p_1^2 - p_2^2)} \left( \frac{e^{-p_1 z}}{p_1} - \frac{e^{-p_2 z}}{p_2} \right) e^{-i\omega t + ik_x x} \quad (70)$$

Здесь  $k_x x = \vec{k}_{\parallel} \vec{\rho}$ .

Возвращаясь теперь к бesselевому пучку, найдем  $\tilde{\Phi}$ ,  $\Delta_1$ :

$$\tilde{\Phi} = \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} a_{km}(k_{\parallel}) \tilde{\Phi}^{plane} = \frac{i\alpha\omega \sin\theta B_0}{2\pi\sigma_n p_2} e^{-i\omega t + im\varphi} e^{-p_2 z} J_m(\kappa\rho) \quad (71)$$

$$\Delta_1 = \int \frac{d^2 \vec{k}_{\parallel}}{(2\pi)^2} a_{km}(k_{\parallel}) \Delta_1^{plane} = -\frac{i\alpha\omega e\tau\nu\Delta_0 B_0 \sin\theta}{\pi\hbar\sigma_n \xi^2 (p_1^2 - p_2^2)} \left( \frac{e^{-p_1 z}}{p_1} - \frac{e^{-p_2 z}}{p_2} \right) e^{-i\omega t + im\varphi} J_m(\kappa\rho) \quad (72)$$

## 5.4 Поле пучка в вакууме и в сверхпроводнике с учетом отражения

Интегрируя ур-ние (66) аналогично интегрированию в ур-нии (51), получаем выражение для поля бesselевого пучка в вакууме, которое, по сравнению с выражением (57) учитывает также поле отраженных волн:

$$\mathbf{H}^{(e)} = \begin{pmatrix} H_\rho^{(e)} \\ H_\phi^{(e)} \\ H_z^{(e)} \end{pmatrix} = \frac{B_0}{2} e^{-i\omega t + im\varphi} \begin{pmatrix} -J_{m+1}(\kappa\rho) [e^{ik_z z} o_- + e^{-ik_z z} \tilde{o}_-] - J_{m-1}(\kappa\rho) [e^{ik_z z} o_+ + e^{-ik_z z} \tilde{o}_+] \\ iJ_{m+1}(\kappa\rho) [e^{ik_z z} o_- + e^{-ik_z z} \tilde{o}_-] - iJ_{m-1}(\kappa\rho) [e^{ik_z z} o_+ + e^{-ik_z z} \tilde{o}_+] \\ -2\beta \sin\theta J_m(\kappa\rho) [e^{ik_z z} - r_\perp e^{-ik_z z}] \end{pmatrix}, \quad (73)$$

где  $o_\pm = \alpha \pm i\beta \cos\theta$ ,  $\tilde{o}_\pm = \alpha r_\parallel \pm i\beta r_\perp \cos\theta$ .

При  $r_\parallel, r_\perp = 1$  и  $z = 0$ :

$$\mathbf{H}^{(e)}|_{z=0} = B_0 e^{-i\omega t + im\varphi} \begin{pmatrix} -J_{m+1}(\kappa\rho)o_- - J_{m-1}(\kappa\rho)o_+ \\ iJ_{m+1}(\kappa\rho)o_- - iJ_{m-1}(\kappa\rho)o_+ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Интегрируя ур-ние (68) аналогично ур-нию (51) и переходя к цилиндрическим координатам, получаем полное поле бesselевого пучка внутри массивного сверхпроводника:

$$\mathbf{H}^{(i)} = B_0 e^{-i\omega t + im\varphi} e^{-z/\lambda_{\text{eff}}} \begin{pmatrix} -J_{m+1}(\kappa\rho)o_- - J_{m-1}(\kappa\rho)o_+ \\ iJ_{m+1}(\kappa\rho)o_- - iJ_{m-1}(\kappa\rho)o_+ \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Здесь  $H_z^{(i)} \propto (1 - r_\perp) \approx 0$ , в меру близости  $r_\perp$  к 1.

Как видно из полученных выражений для магнитного поля (74) и (75), условия сшивки на границе  $z = 0$  выполняются.

## 5.5 Постоянный азимутальный фототок

Для нахождения фототока воспользуемся выражением (16):

$$\mathbf{j}_{\text{ph}}^{(0)} = \frac{2e^2 \Delta_0}{m\omega} \text{Re}\{i\Delta_1^* (\nabla \tilde{\Phi} + \mathbf{E})\} \quad (76)$$

Перепишем это уравнение, используя выражение (64) и пренебрегая в нем членом  $\frac{\lambda_{\text{eff}}^2 - \lambda^2}{\lambda^2 \lambda_{\text{eff}}^2} \nabla \tilde{\Phi}$  ввиду малости  $\tilde{\Phi}$  по параметру  $\omega/\sigma_n$  (см. выражение (71) для  $\tilde{\Phi}$ ):

$$\mathbf{j}_{\text{ph}}^{(0)} = \frac{2e^2 \Delta_0}{m\omega} \text{Re}[i\Delta_1^*(\mathbf{E} + \nabla \tilde{\Phi})] \approx \frac{2e^2 \Delta_0}{mc} \text{Re}[\Delta_1^* \lambda_{\text{eff}}^2 \text{rot} \mathbf{H}^{(i)}] \quad (77)$$

Азимутальная компонента:

$$j_{\text{ph},\varphi}^{(0)} = \frac{2e^2 \Delta_0}{mc} \text{Re}[\Delta_1^* \lambda_{\text{eff}}^2 (\text{rot} \mathbf{H}^{(i)})_{\varphi}] \quad (78)$$

Основной вклад в  $(\text{rot} \mathbf{H}^{(i)})_{\varphi}$  вносит  $\partial H_{\rho}^{(i)}/\partial z$ , так как  $\partial H_z^{(i)}/\partial \rho$  мал ввиду малости  $H_z^{(i)}$ , а также по параметру  $\omega\lambda/c$ :

$$(\text{rot} \mathbf{H}^{(i)})_{\varphi} \approx \frac{\partial H_{\rho}^{(i)}}{\partial z} = \frac{B_0}{\lambda_{\text{eff}}} e^{-i\omega t + im\varphi} e^{-z/\lambda_{\text{eff}}} [J_{m+1}(\kappa\rho)o_- + J_{m-1}(\kappa\rho)o_+] \quad (79)$$

С учетом уравнений (72) и (79), выражение для азимутальной компоненты фототока принимает вид:

$$j_{\text{ph},\varphi}^{(0)} = \frac{\nu B_0^2 \omega \sin \theta}{\sqrt{2\pi} H_{cm}} \frac{1}{\lambda \xi (1 - \frac{2l_E^2}{\xi^2})} \text{Re} \left[ \lambda_{\text{eff}}^* \left( \frac{e^{-p_1 z}}{p_1} - \frac{e^{-p_2 z}}{p_2} \right) \left( \alpha \beta^* \cos \theta J_m(\kappa\rho) \frac{\partial J_m(\kappa\rho)}{\kappa \partial \rho} + \frac{im|\alpha|^2}{\kappa\rho} J_m^2(\kappa\rho) \right) \right] \quad (80)$$

В этом выражении мы опускаем множитель  $e^{-z/\lambda_{\text{eff}}}$ , так как  $\lambda^{-1} \ll \text{Re}[p_1] \sim \xi^{-1}$ ,  $\lambda^{-1} \ll \text{Re}[p_2] \sim l_E^{-1}$  (рассматривается сверхпроводник второго рода). Масштаб затухания фототока вглубь сверхпроводящего полупространства порядка  $\xi$  (см. рис. 9).

Как видно из полученного выражения (80), в азимутальный ток дают вклад два слагаемых. Первое из них пропорционально  $\alpha \beta^* \cos \theta J_m(\kappa\rho) \frac{\partial J_m(\kappa\rho)}{\kappa \partial \rho}$ , оно требует наличия обеих S- и P- поляризаций у падающих плоских волн и является четным по обращению углового момента пучка  $m \rightarrow -m$ . Этот вклад в ток есть проявление обратного эффекта Фарадея. Второе слагаемое зависит от  $\frac{im|\alpha|^2}{\kappa\rho} J_m^2(\kappa\rho)$ , оно пропорционально угловому моменту  $m$  и является антисимметричным относительно подстановки  $m \rightarrow -m$ . Этот вклад связан с передачей орбитального момента пучка и соответствует току увлечения.

Кроме найденной азимутальной компоненты тока, можно также посчитать радиальную и вертикальную компоненты, что мы не проделываем в рамках этой работы, однако, что было проделано в работе [6]. Фотоиндуцированный ток, очевидно, будет экранироваться возникающим мейсснеровским током так, что полный постоянный магнитный момент

будет зануляться. Кроме этого, аналогично разделу 3.3, из-за ненулевой дивергенции постоянного фототока будет возникать неоднородная постоянная сверхпроводящая фаза, необходимая для того, чтобы избежать накопления заряда со временем. С помощью системы уравнений (28) в статье [6] был найден мейсснеровский ток  $j_M$ , постоянная сверхпроводящая фаза  $\chi^{(0)}$ , а также возникающее постоянное магнитное поле в центре пучка, которое может быть измерено экспериментально.

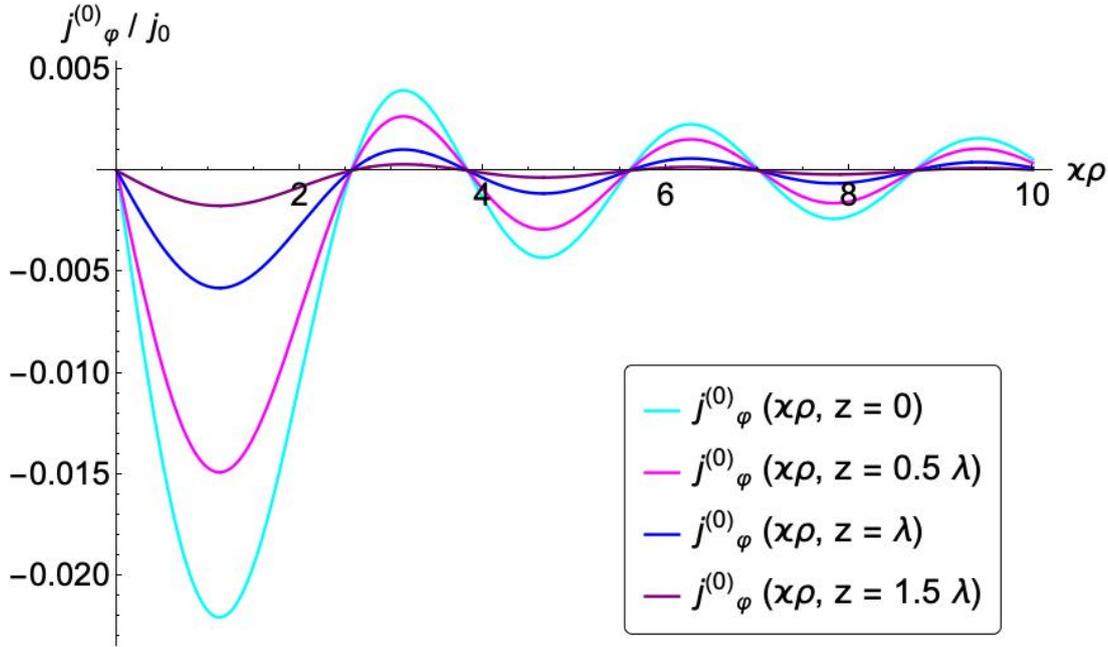


Рис. 9: Зависимость азимутальной компоненты сверхпроводящего тока, индуцированного бesselевым пучком, при разных значениях  $z$ . Здесь  $\lambda/\xi = 2$ ,  $\xi^2/l_E^2 = 5.79$ ,  $\omega\tau = 1$ ,  $\alpha = 1/\sqrt{2}$ ,  $\beta = i/\sqrt{2}$ ,  $m = 1$ ,  $\theta = \pi/4$ ,  $j_0 = \nu B_0^2 \omega \sin \theta / \sqrt{2\pi} H_{cm}$ .

---

## Заключение

В работе рассмотрен эффект генерации постоянного сверхпроводящего фототока в различных сверхпроводящих системах под действием электромагнитного излучения. Вычисления проводились в рамках нестационарной теории Гинзбурга—Ландау с учетом наличия пространственно-неоднородного потенциала разбаланса заряда.

В случае сверхпроводящего диска найдены постоянные компоненты фототока, индуцированного плоской циркулярно-поляризованной волной, магнитный момент, создаваемый азимутальным фототоком, а также неоднородная постоянная сверхпроводящая фаза, компенсирующая радиальный ток за счет возникновения соответствующего "фазового" тока.

Для бесконечной тонкой сверхпроводящей пластины с круговым отверстием под действием плоской волны с круговой поляризацией также найдены компоненты фототока и постоянная сверхпроводящая фаза, кроме того, рассмотрена задача экранировки азимутального фототока мейсснеровским током и, в рамках задачи Пирла, найдено постоянное магнитное поле в центре отверстия, направленное вдоль оси  $z$ .

Также был рассмотрен особенно интересный случай генерации фототока в сверхпроводящем полупространстве под действием закрученного излучения, которое обладает ненулевой проекцией орбитального момента на направление движения и определенным значением полного момента импульса  $\hbar m$  на ось  $z$  и может передавать его системе. Был найден азимутальный фототок и проанализированы вклады, составляющие его. Конечно, эта задача предполагает более детальное изучение (см. [6]), здесь в особенности важны эффекты экранировки: появление постоянного мейсснеровского тока приводит к полной компенсации магнитного момента, создаваемого азимутальным фототоком. Кроме того, в центре пучка возникает постоянное магнитное поле, которое представляется возможным измерить экспериментально.

---

## 6 Список литературы

- [1] All-optical generation of Abrikosov vortices by the Inverse Faraday Effect, V. D. Plastovets, I. D. Tokman, B. Lounis, A. S. Mel'nikov, and A. I. Buzdin, arXiv:2301.12432 (2023).
- [2] L.P. Pitaevskii, JETP, **12** (1961), 1008.
- [3] R. Hertel, Theory of the inverse Faraday effect in metals. Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 303(1), L1–L4, (2006).
- [4] S.V. Mironov, A.S. Mel'nikov, I.D. Tokman, V. Vadimov, B. Lounis, and A.I. Buzdin, Inverse Faraday Effect for Superconducting Condensates, Phys. Rev. Lett. **126**, 137002, (2021).
- [5] Inverse Faraday effect in superconductors with a finite gap in the excitation spectrum, A. V. Putilov, S. V. Mironov, A. S. Mel'nikov, and A. A. Beshpalov, JETP Letters 117(11):827-833 (2023).
- [6] Superconducting photocurrents induced by structured electromagnetic radiation, O. B. Zuev, M. V. Kovalenko, A. S. Mel'nikov, submitted to Phys.Rev.B, arXiv:2506.07641 (2025).
- [7] Photocurrents induced by structured light, A. A. Gunyaga, M. V. Durnev, and S. A. Tarasenko, Phys. Rev. B **108**, 115402, (2023).
- [8] Second harmonic generation due to spatial structure of radiation beam, A. A. Gunyaga, M. V. Durnev, and S. A. Tarasenko, Phys. Rev. Lett. **134**, 156901, (2025).
- [9] S. V. Mironov, A. S. Mel'nikov, and A. I. Buzdin, ac Hall Effect and Photon Drag of Superconducting Condensates, Phys. Rev. Lett. **132**, 096001, (2024).
- [10] N. Kopnin, Theory of Nonequilibrium Superconductivity (Oxford Science, London, 2001).
- [11] S. N. Artemenko and A. F. Volkov, Usp. Fiz. Nauk **128**, 3 (1979) [Sov. Phys. Usp. 22, 295 (1979)].
- [12] Beams of photons with nonzero projections of orbital angular momenta: new results, Physics-Uspekhi, B. A. Knyazev, and V. G. Serbo, (2018).

- 
- [13] L. D. Landau, L. P. Pitaevskii, E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media* (Elsevier, 1984).
- [14] P.-G. de Gennes, *Superconductivity of metals and alloys*, (W.A. Benjamin, New York, 1966).