
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ДРОБНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТОКА ЧЕРЕЗ ДЖОЗЕФСОНОВСКИЙ КОНТАКТ В ПЕРЕМЕННОМ ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

(бакалаврская работа)

Студент:

Царев Павел Николаевич

(подпись студента)

Научный руководитель:

Фоминов Яков Викторович,
д-р физ.-мат. наук, доц.

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2025

Аннотация

Ступеньки Шапиро - участки постоянного напряжения на вольт-амперной характеристике джозефсоновского контакта, которые появляются в результате синхронизации частоты внутренней динамики сверхпроводящей фазы джозефсоновского контакта с частотой внешнего сигнала. С математической точки зрения этот эффект фазовой синхронизации описывается резистивной моделью джозефсоновского контакта (RSJ), важным примером нелинейной динамической системы. В стандартной резистивной модели рассматривается джозефсоновский контакт с малой ёмкостью и синусоидальным (содержащим одну джозефсоновскую гармонику) ток-фазовым соотношением в режиме заданного тока с монохроматической переменной компонентой. Хотя данная модель предсказывает возникновение только целых ступенек Шапиро, известно, что учёт высших джозефсоновских гармоник приводит к появлению дробных ступенек. В данной работе мы показываем, что всего двух джозефсоновских гармоник в ток-фазовом соотношении достаточно для возникновения всех возможных дробных ступенек Шапиро в рамках резистивной модели. Используя методы теории возмущений, мы анализируем амплитуды этих дробных ступенек. Кроме того, вводя фазовый сдвиг между двумя джозефсоновскими гармониками, мы демонстрируем асимметрию между положительными и отрицательными дробными ступеньками — характерный признак джозефсоновского диодного эффекта.

Содержание

1 Введение	3
2 Основные уравнения	5
3 Две гармоники в ток-фазовом соотношении	6
3.1 Предельный случай слабого внешнего излучения и малой второй джозеф-соновской гармоники ($j_{ac} \ll j_s, A \ll 1$)	6
3.2 Предельный случай большой постоянной компоненты тока ($j_{dc} \gg j_s$) . .	9
3.3 Пересечение предельных случаев	12
4 Несколько гармоник в ток-фазовом соотношении	13
5 Диодный эффект	14
5.1 Предельный случай слабого внешнего излучения и малой второй джозеф-соновской гармоники ($j_{ac} \ll j_s, A \ll 1$)	14
5.2 Предельный случай большой постоянной компоненты тока ($j_{dc} \gg j_s$) . .	15
6 Обсуждение	17
7 Заключение	18

1 Введение

Резистивная модель джозефсоновского контакта (RSJ) [1, 2, 3], первоначально разработанная для описания эффекта Джозефсона в сверхпроводниках, стала важным примером нелинейной динамической системы с междисциплинарными приложениями. В контексте джозефсоновских контактов с малой ёмкостью её стандартный вид

$$\frac{\hbar}{2eR} \frac{d\varphi}{dt} + I_s(\varphi) = I_{dc} + I_{ac} \cos \omega t, \quad (1)$$

где R — сопротивление перехода в нормальном состоянии, а искомая функция — $\varphi(t)$. Модель содержит три ключевых компонента: (i) Диссипация (слагаемое $d\varphi/dt$) моделирует потери энергии, что критически важно для реалистичных физических систем. (ii) Периодическая сила [слагаемое с 2π -периодическим $I_s(\varphi)$] отражает фазовую когерентность в сверхпроводниках и может возникать из-за внутреннего периодического потенциала в других системах. (iii) Вынуждающая сила [слагаемое в правой части уравнения (1)] представляет внешние управляющие параметры с монохроматической переменной компонентой (постоянный/переменный ток, силы, поля).

Эта минималистичная, но в то же время богатая структура позволяет уравнениям резистивной модели описывать различные физические явления, такие как эффект Джозефсона в сверхпроводниках [4, 5, 6, 7], перенос заряда волнами зарядовой плотности в пайерлсовских проводниках [8, 9, 10], движение механических систем, таких как маятник с большим затуханием (механический аналог джозефсоновского контакта) [11] или система Суллова (специфический тип движения твердого тела) [12], и другие. С математической точки зрения резистивная модель изучается как пример нелинейной динамики в работах [13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

В отсутствие переменной вынуждающей силы, то есть при $I_{ac} = 0$, решение уравнения (1) зависит от соотношения между I_{dc} и критическим током I_c , который определяется как максимум ток-фазового соотношения $I_s(\varphi)$. Если $I_{dc} < I_c$, то система находится в стационарном состоянии с фазой φ , соответствующей фиксированному внешнему току I_{dc} . При $I_{dc} > I_c$, система переходит в нестационарное состояние с зависящей от времени фазой $\varphi(t)$. В этом резистивном режиме возникает конечное напряжение

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

на контакте, и его усреднение по времени определяет вольт-амперную характеристику (ВАХ) $\bar{V}(I_{dc})$. Решение уравнения (1) демонстрирует джозефсоновские осцилляции, соответствующие намотке $\varphi(t)$ на целое число периодов 2π .

При наличии переменной вынуждающей силы внутренние джозефсоновские осцилляции могут синхронизироваться с ней. Это приводит к фазовой синхронизации, проявляющейся как ступеньки Шапиро на вольт-амперной характеристике [4, 5]. В общем случае эти ступеньки постоянного напряжения появляются при

$$\bar{V} = \pm \left(\frac{n}{k} \right) \frac{\hbar \omega}{2e}, \quad (3)$$

где n и k — натуральные числа.

В простейшем случае ток-фазовое соотношение синусоидальное, $I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi$. Такое соотношение может быть экспериментально реализовано в случае туннельного джозефсоновского контакта (или вблизи критической температуры сверхпроводника). В этом случае возникают только целые ступеньки Шапиро (соответствующие $k = 1$) [20, 21, 22, 6, 7]. Фундаментальная важность эффекта фазовой синхронизации в этом

пределе подчеркивается применением туннельных джозефсоновских переходов для измерения фундаментальных констант и квантовой метрологии в целом [6, 7]. В частности, измерения ступенек Шапиро лежат в основе стандарта напряжения.

В джозефсоновских контактах с большей прозрачностью становятся существенными высшие джозефсоновские гармоники [6, 7, 23], так что ток-фазовое соотношение может быть представлено в виде

$$I_s(\varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m \sin m\varphi. \quad (4)$$

При этом ожидается появление дробных (субгармонических) ступеней Шапиро с $k > 1$, и их положения и амплитуды несут информацию о ток-фазовом соотношении [23]. Существует ли прямое соответствие между дробностью ступенек Шапиро (значениями k) и джозефсоновскими гармониками в ток-фазовом соотношении (4) (значениями m)? Другими словами, возникают ли несократимые дробные ступеньки Шапиро с данным k только из-за наличия в ток-фазовом соотношении гармоник с номерами m , кратными k [24, 25]? Оказывается, ответ отрицательный, и уже двух гармоник достаточно для генерации субгармонических ступенек Шапиро произвольной дробности.

Более конкретно, в настоящей работе мы показываем, что ток-фазовое соотношение всего с двумя джозефсоновскими гармониками,

$$I_s(\varphi) = I_1 \sin \varphi + I_2 \sin 2\varphi, \quad (5)$$

приводит к появлению всех дробных ступенек Шапиро. Вольт-амперная характеристика в этом случае имеет вид лестницы Кантора (также известной как «чертова лестница»). Мы аналитически находим амплитуды ступенек в предельных случаях.

2 Основные уравнения

Мы будем исследовать ступеньки Шапиро в рамках резистивной модели в режиме заданного тока (1). В рамках этой модели мы предполагаем, что из-за внешнего излучения у внешнего тока есть переменная компонента с частотой ω , которая задает естественные для нашей модели единицы времени, напряжения и тока. Соответствующие безразмерные величины

$$\tau = \omega t, \quad v = V/V_0, \quad j_\alpha = I_\alpha/I_0 \quad (6)$$

(с $\alpha = s, dc, ac, 1, 2$), где

$$V_0 = \hbar\omega/2e, \quad I_0 = V_0/R. \quad (7)$$

В этих обозначениях уравнения резистивной модели (1)-(2) принимают следующую форму:

$$v = \dot{\varphi}, \quad (8)$$

$$\dot{\varphi} + j_s(\varphi) = j_{dc} + j_{ac} \cos(\tau + \beta), \quad (9)$$

где точка означает $d/d\tau$. По сравнению с уравнением (1) мы ввели параметр β - начальную фазу переменного тока. Очевидно, что от неё можно избавиться за счет сдвига по времени; однако, мы предпочтем её сохранить, чтобы иметь возможность следить за сдвигом фаз между внутренними джозефсоновскими осцилляциями и внешним переменным сигналом.

Вольт-амперная характеристика джозефсоновского контакта - это зависимость $\bar{v}(j_{dc})$, где черта обозначает усреднение по τ . Из-за наличия переменной компоненты тока (внешнее излучение) на вольт-амперной характеристике появляются ступеньки Шапиро при условии

$$\bar{v} = \pm n/k, \quad (10)$$

где n и k - натуральные числа [это безразмерная форма уравнения (3)]. Все дроби понимаются несократимыми. Ступеньки Шапиро с $k = 1$ мы будем называть целыми, а с $k > 1$ - дробными.

Для дальнейших целей рассмотрим классический пример, когда внешний ток имеет только постоянную компоненту, а ток-фазовое соотношение содержит только первую гармонику. Тогда уравнение (9) становится

$$\dot{\varphi} + j_1 \sin \varphi = j_{dc}, \quad (11)$$

и в случае $|j_{dc}| > j_1$ его решение это [26, 2, 3]

$$\varphi(\tau) = 2 \arctan \left[\frac{j_1 + \nu \tan(\nu\tau/2)}{j_{dc}} \right] + 2\pi n, \quad v(\tau) = \frac{j_{dc}^2 - j_1^2}{j_{dc} + j_1 \cos(\nu\tau - \alpha)}, \quad (12)$$

где

$$\nu = \text{sgn}(j_{dc}) \sqrt{j_{dc}^2 - j_1^2}, \quad \cos \alpha = j_1/j_{dc}, \quad \sin \alpha = \sqrt{j_{dc}^2 - j_1^2}/|j_{dc}|. \quad (13)$$

В этом случае вольт-амперная характеристика принимает вид

$$\bar{v} = \nu. \quad (14)$$

Добавление переменной компоненты тока в правую часть уравнения (11) приведет к появлению целых ступенек Шапиро на вольт-амперной характеристике.

3 Две гармоники в ток-фазовом соотношении

В этом разделе мы работаем с джозефсоновским контактом, ток-фазовое соотношение которого содержит не только первую гармонику, но и вторую (5). Наш главный интерес заключается в исследовании дробных ступенек Шапиро, которые появляются в этом случае. Подставляя соответствующий безразмерный ток $j_s(\varphi)$ в (9), получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\varphi} + j_1 \sin \varphi + j_2 \sin 2\varphi = j_{dc} + j_{ac} \cos(\tau + \beta), \quad (15)$$

с которым мы и будем работать далее. Для удобства введём величину $A = j_2/j_1$ для обозначения отношения амплитуд двух джозефсоновских гармоник.

Хорошо известно, что на вольт-амперной характеристике джозефсоновского контакта с первой и второй гармониками в ток-фазовом соотношении есть целые ($k = 1$) и полуцелые ($k = 2$) ступеньки Шапиро [27]. В то же время, в численном решении уравнения (15) видны все дробные ступеньки (с произвольным k), см. рис. 1(a). По этой причине целые и полуцелые ступеньки мы будем называть тривиальными, а дробные ступеньки Шапиро с $k \geq 3$ - нетривиальными.

3.1 Предельный случай слабого внешнего излучения и малой второй джозефсоновской гармоники ($j_{ac} \ll j_s$, $A \ll 1$)

Для начала рассмотрим предельный случай, в котором внешняя компонента переменного тока мала по сравнению с максимумом $j_s(\varphi)$ (кратко обозначим это условие как $j_{ac} \ll j_s$). Амплитуду дробных ступенек Шапиро мы будем находить с помощью теории возмущений с обратной связью [28, 29], которая хорошо подходит для рассмотрения резонансных случаев. Это значит, что в уравнении (15) мы ищем φ и j_{dc} в виде ряда по малому параметру j_{ac}/j_s :

$$\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau) + \varphi_1(\tau) + \varphi_2(\tau) + \dots, \quad (16)$$

$$j_{dc} = j_{dc}^{(0)} + j_{dc}^{(1)} + j_{dc}^{(2)} + \dots \quad (17)$$

Ключевой момент теории возмущений с обратной связью заключается в том, что на каждом шаге мы корректируем значение j_{dc} [в согласии с уравнением (17)] так, чтобы избежать расходимости $\varphi_n(\tau)$ при больших τ .

В нулевом приближении φ_0 представляет собой решение уравнения

$$\dot{\varphi}_0 + j_1 \sin \varphi_0 + j_2 \sin 2\varphi_0 = j_{dc}^{(0)}, \quad (18)$$

а поправки к фазе можно записать в виде

$$\varphi_n(\tau) = \dot{\varphi}_0(\tau) \int_{\tau_n}^{\tau} \left[j_{dc}^{(n)} + F_n(t) \right] \frac{dt}{\dot{\varphi}_0(t)}, \quad (19)$$

где τ_n - произвольные константы интегрирования, а первые несколько F_n это

$$F_1 = j_{ac} \cos(\tau + \beta), \quad F_2 = (j_1 \sin \varphi_0 + 4j_2 \sin 2\varphi_0)\varphi_1^2/2, \quad \dots \quad (20)$$

Чтобы обеспечить малость φ_n и применимость теории возмущений, мы требуем выполнение условия $\overline{\dot{\varphi}_n} = 0$, которое означает, что поправки не должны расти со временем. Это условие мы переписываем в виде

$$\overline{\left[j_{dc}^{(n)} + F_n(\tau) \right] / \dot{\varphi}_0(\tau)} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (21)$$

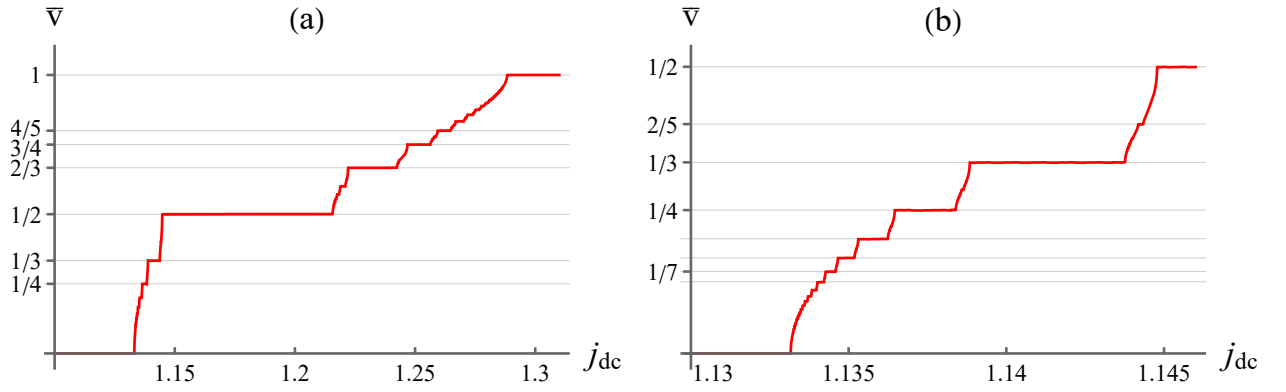


Рис. 1: ВАХ джозефсоновского контакта с второй гармоникой в ток-фазовом соотношении при $j_{ac} = 0.8$, $j_1 = 1$ и $A = 0.7$. (а) Диапазон напряжений ниже первой ступеньки Шапиро. Кроме полuceлой, видны и другие дробные ступеньки. (б) Диапазон напряжений ниже $1/2$ ступеньки Шапиро [увеличенная область графика (а)]. Отчётливо видна серия ступенек вида $1/k$ при $k > 1$ и ступенька дробности $2/5$, которая является частью серии ступенек типа $2/k$. Размер ступеньки дробности $2/5$ сильно меньше амплитуды ступенек из серии $1/k$.

а потом с его помощью вычисляем $j_{dc}^{(n)}$.

В предельном случае малой второй джозефсоновской гармоники ($A \ll 1$) мы одновременно используем теорию возмущений по параметру A , разработанную в работе [29], и теорию возмущений с обратной связью, изложенную выше. Это значит, что каждую φ_n (с $n = 0, 1, 2, \dots$) мы ищем в виде ряда по A . В дальнейших вычислениях мы пренебрегаем слагаемыми порядка A^2 и выше.¹ В частности,

$$\varphi_0(\tau) = f_0(\tau) + A f_1(\tau), \quad (22)$$

где f_0 является решением уравнения (11) с $j_{dc}^{(0)}$ в правой части, а f_1 была посчитана в работе [29]:

$$f_1(\tau) = \frac{2\nu^2 \ln(j_{dc}^{(0)} + j_1 \cos(\nu\tau - \alpha)) / j_1 - 2j_{dc}^{(0)} \cos(\nu\tau - \alpha)}{j_{dc}^{(0)} + j_1 \cos(\nu\tau - \alpha)}. \quad (23)$$

Далее мы подставляем φ_0 в выражение для φ_1 . Условие того, что φ_1 не растёт со временем [условие (21)], в первом порядке теории возмущений A и по j_{ac}/j_1 даёт

$$\left[j_{dc}^{(1)} + j_{ac} \cos(\tau + \beta) \right] \left[\frac{1}{f_0(\tau)} - A \frac{\dot{f}_1(\tau)}{f_0^2(\tau)} \right] = 0. \quad (24)$$

Если $A = 0$, то вторая скобка представляет собой ряд Фурье, содержащий только нулевую и первую гармоники внутренних джозефсоновских осцилляций, то есть const и $e^{\pm i\nu\tau}$. В то же время, первая скобка содержит гармоники ± 1 , возникшие из-за внешнего излучения. Следовательно, поправка к току $j_{dc}^{(1)}$ может быть ненулевой только в случае $\nu = \pm 1$ благодаря синхронизации между двумя скобками (резонанс внешнего излучения и внутренних осцилляций). Это соответствует первой целой ступеньке Шапиро (положительной и отрицательной) с амплитудой [26, 28]

$$\Delta j_{\pm 1} = j_1 j_{ac} / \sqrt{1 + j_1^2}. \quad (25)$$

¹Как мы обсудим далее, удержание высших порядков по A не приводит к качественно новым результатам.

В случае $A \neq 0$ ряд Фурье для второй скобки дополнительно содержит все гармоники $e^{\pm i k \nu \tau}$ при $k > 1$. Это соответствует дополнительным резонансам $\nu = \pm 1/k$, при которых поправка к току $j_{\text{dc}}^{(1)}$ становится отличной от нуля:

$$j_{\text{dc}}^{(1)} = \frac{A j_{\text{ac}} \nu}{j_{\text{dc}}^{(0)}} \sin(\pm \beta + k \alpha) (-1)^{k+1} \left(\frac{(j_{\text{dc}}^{(0)} - \nu)^{k-1}}{(k-1)j_1^{k-1}} - \frac{(j_{\text{dc}}^{(0)} - \nu)^{k+1}}{(k+1)j_1^{k+1}} \right). \quad (26)$$

Аргумент синуса в формуле (26) содержит сдвиг фаз между внешним переменным сигналом и внутренними джозефсоновскими осцилляциями. Этот сдвиг может быть произвольным (формально, из-за произвольного значения фазы β), следовательно, значение синуса в (26) меняется от -1 до 1 , что соответствует ступеньке на вольт-амперной характеристике. Итак, в первом порядке теории возмущений ток-фазовое соотношение с двумя джозефсоновскими гармониками приводит к появлению серии дробных ступенек Шапиро типа $\pm 1/k$ (с натуральными $k > 1$), амплитуды которых

$$\Delta j_{\pm 1/k} = 2 \frac{A j_{\text{ac}}}{\sqrt{k^2 j_1^2 + 1}} \left(\frac{(\sqrt{k^2 j_1^2 + 1} - 1)^{k-1}}{(k-1)(k j_1)^{k-1}} - \frac{(\sqrt{k^2 j_1^2 + 1} - 1)^{k+1}}{(k+1)(k j_1)^{k+1}} \right). \quad (27)$$

В частности, если $k = 2$, то (27) воспроизводит формулу (72) из работы [29] с точностью до переобозначения переменных. При произвольных $k > 1$ получается тот же результат, что и формула (35) из работы [16].

Эта серия ступенек изображена на рис. 1(б). Все они появляются в одном порядке теории возмущений, и в пределе $k \rightarrow \infty$ амплитуда ступенек уменьшается как

$$\Delta j_{\pm 1/k} \simeq 4 A j_{\text{ac}} e^{-1/j_1} (j_1 + 1) / k^3 j_1^2, \quad k \gg \max(1, 1/j_1). \quad (28)$$

Есть ли ещё дробные ступеньки кроме серии $\pm 1/k$? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим второй порядок теории возмущений по j_{ac}/j_1 при условии, что $\nu \neq \pm 1/k$. В этом случае поправка $j_{\text{dc}}^{(1)}$ равна 0. Используя выражение для F_2 , мы записываем условие, что φ_2 не растёт со временем [условие (21)]:

$$\overline{\left[j_{\text{dc}}^{(2)} + (j_1/2) \varphi_1^2 \sin \varphi_0 + 2 j_2 \varphi_1^2 \sin 2 \varphi_0 \right]} / \dot{\varphi}_0(\tau) = 0. \quad (29)$$

Ряд Фурье для φ_1^2 содержит гармоники вида $e^{\pm i(2-m\nu)\tau}$ с $m \in \mathbb{Z}$. Произведение этих слагаемых с Фурье гармониками, происходящими от функций от φ_0 , содержит те же гармоники, но со сдвинутым m , и поэтому в случае $\nu = 2/m$ приводит к ненулевому результату при усреднении по τ .

Подставив $m = \pm 1$, находим амплитуду второй целой ступеньки Шапиро

$$\Delta j_{\pm 2} = j_1 j_{\text{ac}}^2 / 4 \quad (30)$$

в главном порядке по A , которая существует даже в случае одной гармоники в ток-фазовом соотношении ($A = 0$) [28]. В то же время, если $m \neq \pm 1$ и $A = 0$, сумма слагаемых, пропорциональных j_{ac}^2 в формуле (29), при усреднении обращается в ноль, и, следовательно, $j_{\text{dc}}^{(2)} = 0$. Этот результат согласуется с тем фактом, что ток-фазовое соотношение с одной джозефсоновской гармоникой производит только целые ступеньки Шапиро. В случае $A \neq 0$ поправка к току $j_{\text{dc}}^{(2)}$ отлична от нуля в случае $m \neq \pm 1$, и, следовательно, на вольт-амперной характеристике появляется серия дробных ступенек вида $\pm 2/k$ с $k > 2$. Все эти ступеньки возникают в одном порядке теории возмущений, и их амплитуды

$$\Delta j_{\pm 2/k} \propto A j_{\text{ac}}^2. \quad (31)$$

Зависимость от A подчеркивает, что дробные ступеньки возникают благодаря наличию второй джозефсоновской гармоники в ток-фазовом соотношении.

Глядя на Фурье гармоники, возникающие в формуле (21) в высших порядках теории возмущений по j_{ac}/j_1 , мы делаем вывод, что если ток-фазовое соотношение содержит две гармоники, то возникают все дробные ступеньки Шапиро, и в предельном случае $A \ll 1, j_{ac} \ll j_1$ амплитуда дробной ступеньки типа $\pm n/k$

$$\Delta j_{\pm n/k} \propto A j_{ac}^n \quad (32)$$

в главном порядке теории возмущений (в то время как амплитуды целых ступенек $\Delta j_{\pm n} \propto j_{ac}^n$ [26]). Наибольший размер соответствует ступенькам “главной” $\pm 1/k$ серии [точный результат см. в формуле (27)].

Вернёмся к вопросу о том, почему мы рассматриваем все порядки теории возмущений по j_{ac}/j_1 , но ограничиваемся только первым порядком по A . Ответ заключается в том, что удержание слагаемых порядка A^2 и выше в формуле (22) не приводит к возникновению новых дробных ступенек Шапиро, а лишь немного корректирует амплитуду уже найденных. Причина проста: все возможные гармоники из разложения $1/\dot{\varphi}_0(\tau)$ в формуле (21) в ряд Фурье [и, следовательно, из разложения $F_n(\tau)$ тоже] появляются уже в первом порядке теории возмущений по A .

3.2 Предельный случай большой постоянной компоненты тока ($j_{dc} \gg j_s$)

В этом разделе мы применяем теорию возмущений с обратной связью в предельном случае большой постоянной компоненты тока [30], определяемой условиями

$$j_1/j_{dc} \ll 1, \quad j_2/j_{dc} \ll 1. \quad (33)$$

Именно эти условия подразумеваются, когда мы пишем, что постоянная компонента тока много больше сверхпроводящей, $j_{dc} \gg j_s$. В отличие от предыдущего предельного случая условие $A \ll 1$ не обязательно.

В этом предельном случае мы модифицируем теорию возмущений с обратной связью, развитую в разделе 3.1. Начинаем с разложений (16) и (17), но по малым параметрам, указанным в выражении (33).

В нулевом порядке теории возмущений уравнение (15) становится

$$\dot{\varphi}_0 = j_{dc}^{(0)} + j_{ac} \cos(\tau + \beta). \quad (34)$$

Сразу же находим его решение

$$\varphi_0 = \Delta\varphi + j_{dc}^{(0)}\tau + j_{ac} \sin(\tau + \beta), \quad (35)$$

где $\Delta\varphi$ это начальное значение φ_0 , которое может быть произвольным. Фазовый сдвиг β становится избыточным, поэтому далее мы считаем его равным нулю.

Как мы увидим далее, дробные ступеньки Шапиро самого общего вида $\pm n/k$ действительно появятся в этом предельном случае. Согласно уравнению (10) это должно происходить при условии

$$j_{dc}^{(0)} = \pm n/k. \quad (36)$$

В первом порядке теории возмущений, раскладывая $\sin \varphi_0$ и $\sin 2\varphi_0$ в ряд Фурье по τ , получаем

$$\dot{\varphi}_1 = j_{dc}^{(1)} - j_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(j_{ac}) \sin((j_{dc}^{(0)} + m)\tau + \Delta\varphi) - j_2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(2j_{ac}) \sin((2j_{dc}^{(0)} + m)\tau + 2\Delta\varphi), \quad (37)$$

где $J_m(z)$ это функции Бесселя. Эта формула даёт только целые ($j_{\text{dc}}^{(0)} = \pm n$) и полуцелые ($j_{\text{dc}}^{(0)} = \pm n/2$) ступеньки Шапиро с амплитудами

$$\Delta j_{\pm n} = 2 \max_{\Delta\varphi} |j_1 J_n(j_{\text{ac}}) \sin \Delta\varphi + j_2 J_{2n}(2j_{\text{ac}}) \sin 2\Delta\varphi|, \quad (38)$$

$$\Delta j_{\pm n/2} = 2j_2 |J_n(2j_{\text{ac}})| \quad (39)$$

соответственно. Возникновение тривиальных ступенек напрямую вызвано наличием соответствующей джозефсоновской гармоник в ток-фазовом соотношении. Формулы (38) при произвольном n и (39) при $n = 1$ воспроизводят выражения, полученные в [30] (в пределе $\beta = 0$).

Чтобы найти нетривиальные дробные ступеньки Шапиро (с $k > 2$), мы рассматриваем такой случай, что $j_{\text{dc}}^{(0)} \neq \pm n$ и $\pm n/2$. Это приводит к тому, что $j_{\text{dc}}^{(1)} = 0$, и, следовательно, надо рассматривать второй порядок теории возмущений:

$$\dot{\varphi}_2 = j_{\text{dc}}^{(2)} - (j_1 \cos \varphi_0 + 2j_2 \cos 2\varphi_0)\varphi_1. \quad (40)$$

Ряды Фурье φ_1 и функций от φ_0 содержат гармоники $e^{\pm i(j_{\text{dc}}^{(0)} - m)\tau}$ и $e^{\pm i(2j_{\text{dc}}^{(0)} - m)\tau}$ с $m \in \mathbb{Z}$. Произведение этих слагаемых даёт гармоники с $(3j_{\text{dc}}^{(0)} - m)\tau$ и $(4j_{\text{dc}}^{(0)} - m)\tau$ в аргументе экспоненты, что в случаях $j_{\text{dc}}^{(0)} = m/3$ и $j_{\text{dc}}^{(0)} = m/4$ может привести к ненулевому результату при усреднении по τ .

Если $j_{\text{dc}}^{(0)} = \pm n/3$, то из условия, что φ_2 не растёт со временем, получаем

$$j_{\text{dc}}^{(2)} = \frac{3}{2} j_1 j_2 \cos(3\Delta\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(j_{\text{ac}}) J_{-m \mp n}(2j_{\text{ac}})}{\pm n + 3m}. \quad (41)$$

Из-за того, что значение начальной фазы $\Delta\varphi$ произвольно, косинус в формуле (41) меняется от -1 до 1 , что соответствует появлению ступеньки на вольт-амперной характеристике. Таким образом, во втором порядке теории возмущений в случае ток-фазового соотношения с двумя джозефсоновскими гармониками появляются дробные ступеньки Шапиро типа $\pm n/3$, амплитуды которых

$$\Delta j_{\pm n/3} = 3j_1 j_2 \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(j_{\text{ac}}) J_{-n-m}(2j_{\text{ac}})}{n + 3m} \right|. \quad (42)$$

В случае $j_{\text{dc}}^{(0)} = \pm n/4$ условие, что φ_2 не растёт со временем, даёт

$$j_{\text{dc}}^{(2)} = 2j_2^2 \cos(4\Delta\varphi) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(2j_{\text{ac}}) J_{-m \mp n}(2j_{\text{ac}})}{\pm n + 2m}. \quad (43)$$

Заметим, что сумма в формуле (43) после переобозначения индекса суммирования $m' = -m - n$ превращается в

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(2j_{\text{ac}}) J_{-m-n}(2j_{\text{ac}})}{n + 2m} = \sum_{m'=-\infty}^{\infty} \frac{J_{m'}(2j_{\text{ac}}) J_{-m'-n}(2j_{\text{ac}})}{-n - 2m'}. \quad (44)$$

Значит, сумма на самом деле равна нулю, и, следовательно, дробные ступеньки Шапиро типа $\pm n/4$ во втором порядке теории возмущений не возникают. Ничего удивительного в этом нет. Действительно, ряд Фурье, который состоит из гармоник $e^{\pm i(4j_{\text{dc}}^{(0)} - m)\tau}$ в формуле (40), не содержит j_1 , и, следовательно, не зависит от наличия первой джозефсоновской гармоник в ток-фазовом соотношении. Если бы ряд в формуле (43) оказался

не равен нулю, мы могли бы положить $j_1 = 0$, переобозначить $2\varphi_0$ на φ_0 и таким образом получить полуполные ступеньки Шапиро в случае одной гармоники в ток-фазовом соотношении. Равенство нулю суммы в формуле (43) подчёркивает, что нетривиальные дробные ступеньки Шапиро появляются только благодаря взаимодействию двух разных джозефсоновских гармоник.

Есть ли ещё нетривиальные дробные ступеньки кроме серии $\pm n/3$? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим более высокие порядки теории возмущений по $j_{1,2}/j_{dc}$ при условии, что $j_{dc}^{(0)} \neq \pm n/k$, где $k = 1, 2$ и 3 . В этом случае поправка $j_{dc}^{(2)}$ равна нулю. В третьем порядке теории возмущений

$$\dot{\varphi}_3 = j_{dc}^{(3)} - (j_1 \cos \varphi_0 + 2j_2 \cos 2\varphi_0)\varphi_2 + (j_1 \cos \varphi_0 + 4j_2 \cos 2\varphi_0)\varphi_1^2/2. \quad (45)$$

Далее мы действуем так же, как и раньше, рассматривая гармоники, которые возникают в правой части этого выражения.

В результате, в третьем порядке теории возмущений появляются серии дробных ступенек типа $\pm n/4$ и $\pm n/5$, амплитуды которых

$$\Delta j_{\pm n/4} = 8j_1^2 j_2 \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(j_{ac}) J_l(j_{ac}) J_{-n-m-l}(2j_{ac})}{(n+4m)(n+4l)} \right|, \quad (46)$$

$$\Delta j_{\pm n/5} = \frac{25}{4} j_1 j_2^2 \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(2j_{ac}) J_l(2j_{ac}) J_{-n-m-l}(j_{ac})}{(2n+5m)(2n+5l)} \right|. \quad (47)$$

Важно отметить, что дробные ступеньки Шапиро типа $\pm n/4$ появляются благодаря произведению первой и второй гармоник, а дробные ступеньки типа $\pm n/6$ не появляются, потому что в этом порядке теории возмущений они не могут быть получены как результат взаимодействия джозефсоновских гармоник.

С точки зрения математики, возникающее выражение для $\Delta j_{\pm n/6}$ пропорционально сумме

$$S = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{J_m(2j_{ac}) J_l(2j_{ac}) J_{-n-m-l}(2j_{ac})}{(n+3m)(n+3l)}, \quad (48)$$

которая равна нулю. Чтобы это показать, сделаем два преобразования

$$(m', l') = (-n-m-l, l), \quad (49)$$

$$(m'', l'') = (m, -n-m-l), \quad (50)$$

которые переводят исходную сумму в $S' = S$ и $S'' = S$ соответственно. Рассматривая $S + S' + S''$, заметим, что (для краткости обозначив $2j_{ac}$ за x)

$$\frac{J_m(x) J_l(x) J_{-n-m-l}(x)}{(n+3m)(n+3l)} + \frac{J_{-n-m-l}(x) J_l(x) J_m(x)}{(-2n-3m-3l)(n+3l)} + \frac{J_m(x) J_{-n-m-l}(x) J_l(x)}{(n+3m)(-2n-3m-3l)} = 0. \quad (51)$$

Следовательно, $S + S' + S'' = 0$ и сама исходная сумма S равна нулю.

Глядя на полученные результаты, находим определённую закономерность: амплитуда дробных ступенек Шапиро типа $\pm n/k$

$$\Delta j_{\pm n/k} \propto j_1^\alpha j_2^\beta \quad \text{с} \quad \alpha + 2\beta = k \quad (52)$$

(тогда как $\alpha + \beta$ это порядок теории возмущений, который должен быть как можно меньше, чтобы получить главный вклад в размер ступеньки). В то же время, для нетривиальных ступенек Шапиро оба параметра α и β должны быть отличны от нуля,

потому что в противном случае мы будем иметь вклад в амплитуду ступеньки, полученный только от одной джозефсоновской гармоники. Это будет противоречить тому, что ток-фазовое соотношение с одной гармоникой производит только тривиальные ступеньки. В результате,

$$\beta = \left[\frac{k-1}{2} \right]. \quad (53)$$

В рассуждениях выше мы явно проверили выполнение этой закономерности для k от 1 до 5. Глядя на гармоники, возникающие из разложения $\dot{\varphi}_n(\tau)$ в ряд Фурье в высших порядках теории возмущений по параметрам $j_{1,2}/j_{dc}$, мы делаем вывод, что если ток-фазовое соотношение содержит две гармоники, то возникают все дробные ступеньки Шапиро. Согласно формулам (52) и (53) дробные ступеньки типа $\pm n/2k$ и $\pm n/(2k+1)$ появляются в $(k+1)$ -ом порядке теории возмущений по $j_{1,2}/j_{dc}$, и их амплитуды

$$\Delta j_{\pm n/2k} \propto j_1^2 j_2^{k-1}, \quad \Delta j_{\pm n/(2k+1)} \propto j_1 j_2^k. \quad (54)$$

3.3 Пересечение предельных случаев

Предельные случаи, рассмотренные нами в разделах 3.1 и 3.2, совместимы, если $j_{ac}, j_2 \ll j_1 \ll j_{dc}$. В таком случае мы можем сравнить результаты, полученные в соответствующих пределах. Начнём с предельного случая слабого внешнего излучения и малой второй джозефсоновской гармоники (раздел 3.1). Чтобы попасть в описанный выше режим пересечения, надо дополнительно предположить, что $j_1 \ll j_{dc}$ [равносильно условию $kj_1 \ll 1$ в (27)]. Тогда формула (27) даёт

$$\Delta j_{\pm 1/k} = j_1^{k-2} j_2 j_{ac} / 2^{k-2} (k-1). \quad (55)$$

С другой стороны, в режим пересечения мы можем прийти и со стороны предельного случая большой постоянной компоненты тока (раздел 3.2), дополнительно предположив, что $j_{ac}, j_2 \ll j_1$. Подставив $n = 1$, мы видим, что формулы (39), (42) и (46) воспроизводят (55) с $k = 2, 3$ и 4 соответственно.

В то же время, результаты из двух предельных случаев отличаются друг от друга для ступенек Шапиро типа $\pm 1/k$ при $k > 4$ [ср. формулы (55) и (54)]. На самом деле это два равноправных вклада в размер ступеньки; однако, их относительная важность зависит от дополнительного параметра j_1^2/j_2 . В разделе 3.2 мы не накладывали дополнительных условий на этот параметр, а потому минимизировали $\alpha + \beta$ в выражении (52), чтобы получить как можно меньшую суммарную степень $j_1^\alpha j_2^\beta$, и так приходили к (53). Однако, если же теперь предположить, что $j_1^2 \gg j_2$, то для получения главного вклада необходимо минимизировать β , что приводит к $\beta = 1$. Наибольший вклад в амплитуду дробных ступенек типа $\pm 1/k$ тогда даётся формулой (55). В противоположном случае, $j_1^2 \ll j_2$, верна формула (53), а наибольший вклад даётся формулой (54) при $n = 1$.

Обобщение изложенных выше рассуждений на случай произвольных дробных ступенек $\pm n/k$ (при $k \geq 3$) прямолинейно. В случае $j_1^2 \gg j_2$, амплитуда ступенек даётся формулой (32) [вместо выражения (55)], которая может быть уточнена:

$$\Delta j_{\pm n/k} \propto j_1^{k-2} j_2 j_{ac}^n. \quad (56)$$

В противоположном случае, $j_1^2 \ll j_2$, главный вклад даётся выражениями (54), которые могут быть уточнены:

$$\Delta j_{\pm n/2k} \propto j_1^2 j_2^{k-1} j_{ac}^n, \quad \Delta j_{\pm n/(2k+1)} \propto j_1 j_2^k j_{ac}^n. \quad (57)$$

Как и прежде, при $k > 4$ возникают различия. Причина проста: при таких значениях k уравнение (52) имеет несколько возможных решений с ненулевыми α и β .

4 Несколько гармоник в ток-фазовом соотношении

В этом разделе мы рассматриваем случай трёх джозефсоновских гармоник в ток-фазовом соотношении, а также обсуждаем его обобщение на случай большего числа гармоник. В предельном случае слабого внешнего излучения и малых высших джозефсоновских гармоник, рассмотренном в разделе 3.1, наличие третьей гармоники приводит к усложнению уравнения (18) и выражений для $F_n(\tau)$ при $n > 1$. Однако, подобно слагаемым $\propto A^2$, это не приводит к появлению новых ступенек Шапиро, потому что все возможные гармоники из разложения $1/\dot{\varphi}_0(\tau)$ в формуле (21) в ряд Фурье [и, следовательно, из разложения $F_n(\tau)$ тоже], уже сгенерированы благодаря наличию второй джозефсоновской гармоники в ток-фазовом соотношении. С точки зрения физики, условие $A \ll 1$ может возникнуть вследствие малости прозрачности $T \ll 1$ джозефсоновского контакта. Если это действительно так, то амплитуда *пой* джозефсоновской гармоники пропорциональна T^n , следовательно, нормированная амплитуда третьей гармоники должна быть $\sim A^2$. Тогда из тех же соображений, как и в конце раздела 3.1, мы делаем вывод, что наличие третьей джозефсоновской гармоники (и аналогично более высоких) не влияет на амплитуду нетривиальных дробных ступенек Шапиро в главном порядке теории возмущений.

В предельном случае большой постоянной компоненты тока, рассмотренном в разделе 3.2, ток-фазовое соотношение с тремя джозефсоновскими гармониками приводит к появлению всех дробных ступенек, но в более низких порядках теории возмущений по сравнению с случаем двух джозефсоновских гармоник. Аналогично этому случаю, амплитуда дробных ступенек Шапиро типа $\pm n/k$ пропорциональна $j_1^\alpha j_2^\beta j_3^\gamma$, где $\alpha + 2\beta + 3\gamma = k$ (тогда как $\alpha + \beta + \gamma$ это порядок теории возмущений, который должен быть как можно меньше, чтобы получить главный вклад в размер ступеньки). В то же время, для нетривиальных ступенек Шапиро хотя бы два из трёх параметров α , β и γ должны быть отличны от нуля, потому что в противном случае мы будем иметь вклад в амплитуду ступеньки, полученный только от одной джозефсоновской гармоники. (Приведённые рассуждения прямолинейно обобщаются на случай большего числа гармоник.)

В то же время, дробные ступеньки Шапиро типа $\pm n/3$ теперь становятся тривиальными и возникают уже в первом порядке теории возмущений. Применяя описанное выше правило, получаем, что ступеньки типа $\pm n/4$ и $\pm n/5$ возникают во втором порядке теории возмущений благодаря произведению третьей джозефсоновской гармоники с первой и второй соответственно. Амплитуды этих ступенек $\propto j_1 j_3$ и $\propto j_2 j_3$ соответственно.

5 Диодный эффект

В этом разделе мы обсуждаем, как джозефсоновский диодный эффект влияет на дробные ступеньки Шапиро. Диодный эффект заключается в том, что свойства контакта начинают зависеть от направления протекания тока. Модифицируем ток-фазовое соотношение из формулы (5), добавив сдвиг фаз $\tilde{\phi}$ между двумя джозефсоновскими гармониками. Теперь в безразмерном виде оно выглядит так:

$$j_s(\varphi) = j_1 \sin \varphi + j_2 \sin (2\varphi - \tilde{\phi}). \quad (58)$$

Ток-фазовое соотношение в такой форме возникает во многих физических системах, таких как комбинированные $0-\pi$ джозефсоновские контакты в магнитном поле [31], джозефсоновские контакты между двумя необычными сверхпроводниками с нарушенной симметрией по обращению времени [32], асимметричные СКВИДы с высшими джозефсоновскими гармониками [29, 33] и СКВИДы с тремя синусоидальными джозефсоновскими контактами в кольце [34].

Если $\tilde{\phi} \neq 0 \bmod \pi$, наши численные расчеты демонстрируют асимметрию между амплитудами положительных и отрицательных дробных ступенек, см. рис. 2. С точки зрения аналитических вычислений, наличие $\tilde{\phi}$ слегка меняет поправки к току в формулах (26) и (41): $\pm\beta + k\alpha + \tilde{\phi}$ вместо $\pm\beta + k\alpha$ в аргументе синуса и $3\Delta\varphi - \tilde{\phi}$ вместо $3\Delta\varphi$ в аргументе косинуса соответственно. Это значит, что дробные ступеньки Шапиро остаются симметричными в главном порядке теории возмущений. Чтобы найти асимметричную поправку, необходимо изучать более высокие порядке теории возмущений.

5.1 Предельный случай слабого внешнего излучения и малой второй джозефсоновской гармоники ($j_{ac} \ll j_s$, $A \ll 1$)

В предельном случае слабого внешнего излучения и малой второй джозефсоновской гармоники мы продолжаем использовать метод, описанный в разделе 3.1, и рассматриваем второй порядок по A :

$$f_2(\tau) = \dot{f}_0 \int^\tau (I_2 - 2j_1 f_1 \cos(2f_0 - \tilde{\phi}) + \frac{1}{2} j_1 f_1^2 \sin f_0) \frac{dt}{f_0}, \quad (59)$$

$$j_{dc}^{(1)} = A \cos(\tau + \beta) \frac{\dot{f}_1}{\dot{f}_0^2} + A^2 \frac{\cos(\tau + \beta) (\frac{\dot{f}_2}{\dot{f}_0^2} - \frac{\dot{f}_1^2}{\dot{f}_0^2})}{1/\dot{f}_0} + A^2 \frac{\cos(\tau + \beta) \frac{\dot{f}_1}{\dot{f}_0^2} * \frac{\dot{f}_1}{\dot{f}_0^2}}{(1/\dot{f}_0)^2}. \quad (60)$$

Отметим, что наличие $\tilde{\phi}$ существенно меняет поправку f_1 :

$$f_1(\tau) = \frac{2 \cos \tilde{\phi}}{j_{dc}^{(0)} + j_1 \cos(\nu\tau - \alpha)} \left(-j_{dc}^{(0)} \cos(\nu\tau - \alpha) + \frac{\nu^2}{j_1} \ln(j_{dc}^{(0)} + j_1 \cos(\nu\tau - \alpha)) \right) + \quad (61)$$

$$\frac{2 \sin \tilde{\phi} \left(\frac{\nu^2}{j_1} [\nu\tau - \alpha - 2\pi n_\theta - 2 \arctan \frac{(j_{dc}^{(0)} - j_1) \tan \frac{\nu\tau - \alpha}{2}}{\nu}] + \nu \sin(\nu\tau - \alpha) (\frac{\nu}{j_{dc}^{(0)}} - 2) \right)}{j_{dc}^{(0)} + j_1 \cos(\nu\tau - \alpha)}, \quad (62)$$

где $n_\theta = \lfloor (\nu\tau - \alpha)/2\pi \rfloor$ ($\lfloor \dots \rfloor$ означает округление до ближайшего целого числа).

Найдём асимметричную поправку для главной серии дробных ступенек. Анализируя то, как $\tilde{\phi}$ входит в формулы (59) и (60), делаем вывод, что асимметричная поправка к размеру ступенек может иметь первую и третью гармонику по $\tilde{\phi}$. Так как в отсутствие сдвига фаз между гармониками дробные ступеньки симметричны, то зависимость от

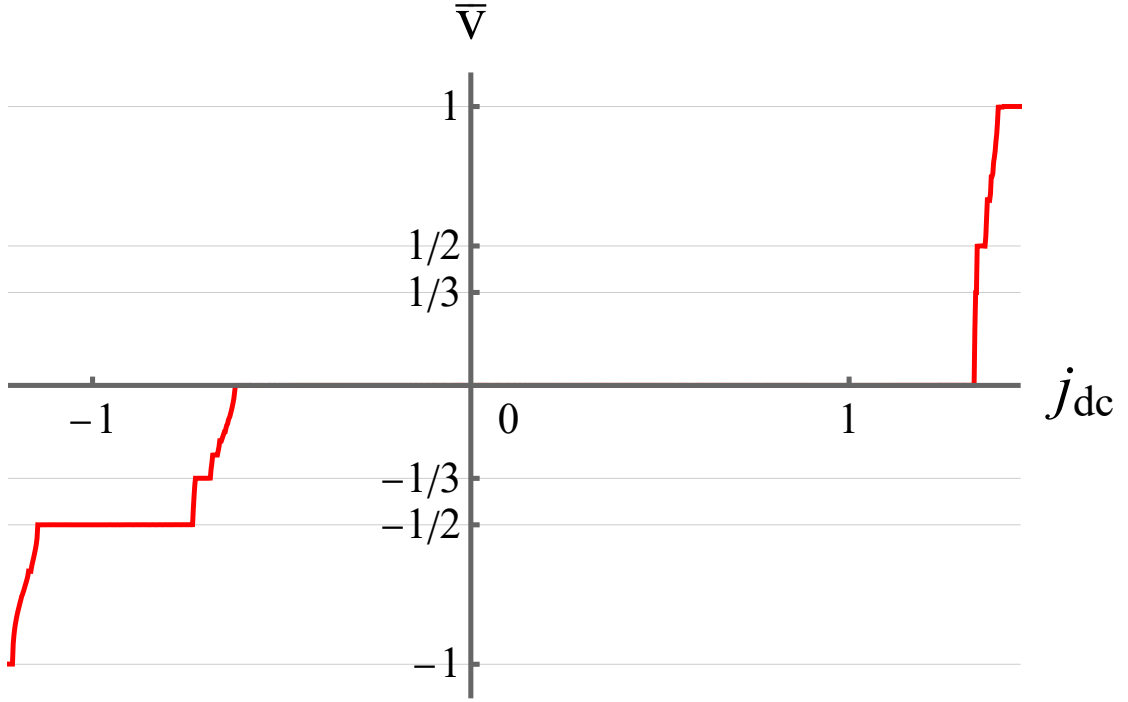


Рис. 2: ВАХ джозефсоновского контакта с второй гармоникой в ток-фазовом соотношении при $j_{ac} = 0.8$, $j_1 = 1$, $A = 0.7$ и $\tilde{\phi} = \pi/2$. Амплитуды положительных и отрицательных ступенек Шапиро различны, что является проявлением джозефсоновского диодного эффекта.

$\tilde{\phi}$ синусоидальная. Таким образом, асимметричная поправка может иметь два вклада, пропорциональных $\sin \tilde{\phi}$ и $\sin 3\tilde{\phi}$ соответственно. Численные расчёты показывают, что слагаемое, которое пропорционально $\sin 3\tilde{\phi}$, на самом деле равно нулю, а асимметричная поправка к амплитуде ступенек записывается в виде

$$\Delta j_{\pm 1/k}^{(asym)} = \mp \gamma j_{ac} A^2 \sin \tilde{\phi}, \quad (63)$$

где префактор γ положителен и зависит только от j_{dc} и j_1 . Положительность γ объясняет, почему при $\tilde{\phi} = \pi/2$ отрицательные дробные ступеньки типа $\pm 1/k$ больше, чем положительные.

5.2 Предельный случай большой постоянной компоненты тока ($j_{dc} \gg j_s$)

В предельном случае большой постоянной компоненты тока мы продолжаем использовать метод, описанный в разделе 3.2. В этом случае оказывается возможным показать аналитически, что асимметричная поправка к размеру пропорциональна $\sin \tilde{\phi}$ для всех дробных ступенек. Чтобы это показать, докажем сначала одно полезное свойство поправок φ_n .

В отсутствие $\Delta\varphi$ и $\tilde{\phi}$ ряды Фурье для $\cos \varphi_0$ и φ_1 состоят только из косинусов τ , в то время как ряд Фурье для $\sin \varphi_0$ состоит только из синусов τ . Будем называть такие функции чётными и нечётными соответственно. Докажем по индукции, что все φ_{2k} являются нечётными, а φ_{2k+1} - чётными.

Пусть это верно для всех $\varphi_1 \dots \varphi_n$. Докажем теперь, что описанным свойством обладает и φ_{n+1} , которая находится из уравнения

$$\dot{\varphi}_{n+1} = \sum'_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \varphi_1^{\alpha_1} \dots \varphi_n^{\alpha_n} \frac{\partial^m \sin \varphi_0}{\partial \varphi_0^m}, \quad (64)$$

где

$$m = \alpha_1 + \dots \alpha_n, \quad (65)$$

а $\sum'$ обозначает сумму по таким целым неотрицательным $\alpha_1 \dots \alpha_n$, что

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots n\alpha_n = n. \quad (66)$$

Численный коэффициент перед слагаемыми в тригонометрических суммах [например, (64)] нам неинтересен, поэтому здесь и далее в этом разделе мы его не пишем.

Пользуясь уравнением (64), находим чётность φ_{n+1} :

$$\text{Parity}(\varphi_{n+1}) \equiv m + \sum_k \alpha_{2k} \pmod{2}, \quad (67)$$

где ноль соответствует чётной функции, а единица - нечётной.

Если n чётное, то из равенства (66) следует, что $\alpha_1 + \alpha_3 + \dots \alpha_{n-1} \equiv 0 \pmod{2}$. Тогда из формулы (65) получается, что $m + \alpha_2 + \dots \alpha_n \equiv 0 \pmod{2}$, и функция φ_{n+1} чётная. Если n нечётное, то такие же рассуждения приводят к тому, что φ_{n+1} нечётная. На этом доказательство по индукции завершено.

Пользуясь доказанным выше свойством, найдём асимметричную поправку к амплитуде дробных ступенек Шапиро типа $\pm n/4k$ (для остальных ступенек вычисление проводится аналогично). Эти ступеньки возникают из

$$\dot{\varphi}_{2k+1} = j_1^2 j_2^{2k-1} \sum \sin((4k j_{\text{dc}}^{(0)} - \dots)\tau + 4k\Delta\varphi - (2k-1)\tilde{\phi}) \quad (68)$$

после подстановки $j_{\text{dc}}^{(0)} = \pm n/4k$ и усреднения по τ . Вместо многоточия должна стоять некоторая комбинация индексов суммирования, но она нас не интересует, поскольку пропадает при усреднении. Экстремумы $\bar{\varphi}_{2k+1}$, которые задают границы ступеньки, определяются такими $\Delta\varphi$, что

$$4k\Delta\varphi - (2k-1)\tilde{\phi} = \pm\pi/2. \quad (69)$$

Поправки к амплитуде дробных ступенек типа $\pm n/4k$ появляются в следующем порядке теории возмущений из слагаемых

$$\bar{\varphi}_{2k+2} = j_1^4 j_2^{2k-2} \sum \cos(4k\Delta\varphi - (2k-2)\tilde{\phi}) + j_1^2 j_2^{2k} \sum \cos(4k\Delta\varphi - 2k\tilde{\phi}). \quad (70)$$

Подставляя сюда экстремальные значения $\Delta\varphi$, находим, что $\bar{\varphi}_{2k+2} \propto \sin\tilde{\phi}$. Для остальных типов дробных ступенек аналогичные рассуждения приводят к такому же результату.

Подводя итог, мы нашли асимметричную поправку к произвольным дробным ступенькам, которая записывается в виде

$$\Delta j_{\pm n/2k}^{(\text{asym})} = \pm (\gamma_1 j_1^4 j_2^{k-2} + \gamma_2 j_1^2 j_2^k) \sin\tilde{\phi}, \quad (71)$$

$$\Delta j_{\pm n/(2k+1)}^{(\text{asym})} = \pm (\gamma_3 j_1^3 j_2^{k-1} + \gamma_4 j_1 j_2^{k+1}) \sin\tilde{\phi}, \quad (72)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и γ_4 зависят только от j_{dc} и j_{ac} .

6 Обсуждение

Обсудим отличия резистивной модели, которую мы использовали, от её возможных модификаций.

Модификация, которая часто рассматривается в литературе, соответствует другому режиму управления: вместо режима заданного тока можно рассмотреть случай заданного напряжения. В этом режиме фиксирован не ток, а напряжение, $V(t) = V_{\text{dc}} + V_{\text{ac}} \cos \omega t$. Фаза $\varphi(t)$ тогда находится не из уравнения резистивной модели (1), а непосредственно из уравнения Джозефсона (2). Результат определяет ток $I_s(\varphi(t))$, который демонстрирует особенности Шапиро (пики) на графике зависимости $\bar{I}_s(V_{\text{dc}})$ от V_{dc} , определяемые тем же равенством (3). В случае, когда ток-фазовое соотношение содержит одну гармонику, появляются только целые пики Шапиро [6, 35]. Наличие высших гармоник в ток-фазовом соотношении приводит к появлению дробей с $k > 1$, и знаменатели напрямую соответствуют номеру джозефсоновской гармоники [35, 36]. Это значит, что неприводимые дроби с заданным k появляются только при наличии в ток-фазовом соотношении гармоники с номером m , кратным k . В результате, ток-фазовое соотношение с двумя гармониками, как в формуле (5), приводит к появлению только целых и полуцелых особенностей Шапиро.

Возвращаясь к режиму заданного тока, сфокусируемся на синусоидальном ток-фазовом соотношении $I_s(\varphi) = I_c \sin \varphi$. Как упоминалось ранее, в этом случае резистивная модель (1) производит только целые ступеньки [20, 21, 22, 6, 7]. В то же время эта модель может рассматриваться как предельный случай малой ёмкости в более общей резистивно-ёмкостной модели (RCSJ). Резистивно-ёмкостная модель отличается от уравнения (1) дополнительным слагаемым $(\hbar C/2e)d^2\varphi/dt^2$ в левой части (где C это ёмкость). Такая модификация приводит к появлению всех субгармонических ступенек и вольт-амперной характеристике, имеющей вид лестницы Кантора, даже в случае синусоидального ток-фазового соотношения [37, 38, 39].

Наконец, прокомментируем экспериментальную значимость ток-фазового соотношения, содержащего всего две джозефсоновские гармоники ($m = 1, 2$). Такое ток-фазовое соотношение может служить хорошим приближением для джозефсоновских контактов, близких к туннельному пределу. С точки зрения теории, высшие джозефсоновские гармоники содержат дополнительные степени малой прозрачности контакта. В недавнем эксперименте [40] было показано, что в туннельных переходах вторая джозефсоновская гармоника является основной поправкой к первой. С другой стороны, вторая гармоника может оказаться важна в том случае, когда первая гармоника подавлена по каким-то дополнительным физическим причинам, например, возле $0-\pi$ перехода [41, 42, 43, 44, 45].

7 Заключение

В рамках резистивной модели (9) мы теоретически исследовали джозефсоновский контакт, ток-фазовое соотношение которого (5) содержит две джозефсоновские гармоники. Мы показали, что в режиме заданного тока при наличии второй джозефсоновской гармоники появляются не только целые и полужелые, а все дробные ступеньки. Мы используем комбинацию пертурбативных методов для аналитического определения амплитуд дробных ступенек Шапиро (в общем случае возникающих при условии $\bar{v} = \pm n/k$, где дробь подразумевается несократимой).

В предельном случае слабого внешнего излучения и малой второй джозефсоновской гармоники ($j_{ac} \ll j_1$, $A = j_2/j_1 \ll 1$) в первом порядке теории возмущений мы воспроизвели результат из работы [16] для амплитуды дробных ступенек типа $\pm 1/k$ при $k > 1$. Амплитуда этих ступенек $\propto A j_{ac}$ [см. формулу (27)]. В следующем порядке по j_{ac}/j_1 мы обнаружили дробные ступеньки типа $\pm 2/k$ при $k > 2$; их амплитуда $\propto A j_{ac}^2$. Структура теории возмущений подсказывает, что в n -ом порядке появляются ступеньки типа $\pm n/k$, амплитуды которых $\propto A j_{ac}^n$. В то же время высшие порядки теории возмущений по A вносят лишь небольшие коррективы в приведенные выше результаты.

В предельном случае большой постоянной компоненты тока мы нашли амплитуды нетривиальных дробных ступенек типа $\pm n/3$ во втором порядке теории возмущений по $j_1/j_{dc} \ll 1$ и $j_2/j_{dc} \ll 1$. Их амплитуды $\propto j_1 j_2$ [см. формулу (42)]. Также мы нашли амплитуды дробных ступенек типа $\pm n/4$ и $\pm n/5$ в третьем порядке теории возмущений; их амплитуды $\propto j_1^2 j_2$ и $\propto j_1 j_2^2$ соответственно [см. формулы (46) и (47)]. Структура теории возмущений подсказывает, что в $(k+1)$ -ом порядке появляются дробные ступеньки типа $\pm n/2k$ и $\pm n/(2k+1)$, амплитуды которых $\propto j_1^2 j_2^{k-1}$ и $\propto j_1 j_2^k$ соответственно. Важно отметить, что нетривиальные дробные ступеньки Шапиро возникают благодаря произведению разных джозефсоновских гармоник и не могут появиться в случае, когда ток-фазовое соотношение содержит только одну гармонику.

Кроме того, мы рассмотрели ток-фазовое соотношение, в котором есть сдвиг фаз между двумя джозефсоновскими гармониками (58), и возникающий в этом случае джозефсоновский диодный эффект. В случае дробных ступенек он проявляется в асимметрии между ступеньками типа n/k и $-n/k$. В обоих предельных случаях мы нашли соответствующие асимметричные поправки, которые оказываются малы по сравнению с амплитудами самих ступенек. Результаты представлены в формулах (63), (71) и (72).

Полученные результаты оформлены в виде статьи [46].

Список литературы

- [1] L. G. Aslamazov, A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, *Josephson effect in superconductors separated by a normal metal*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55**, 323 (1968), [Sov. Phys. JETP **28**, 171 (1969)].
- [2] W. C. Stewart, *Current-voltage characteristics of Josephson junctions*, Appl. Phys. Lett. **12**(8), 277 (1968), doi:10.1063/1.1651991.
- [3] D. E. McCumber, *Effect of ac impedance on dc voltage-current characteristics of superconductor weak-link junctions*, J. Appl. Phys. **39**(7), 3113 (1968), doi:10.1063/1.1656743.
- [4] B. D. Josephson, *Possible new effects in superconductive tunnelling*, Phys. Lett. **1**, 251 (1962), doi:10.1016/0031-9163(62)91369-0.
- [5] S. Shapiro, *Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations*, Phys. Rev. Lett. **11**, 80 (1963), doi:10.1103/PhysRevLett.11.80.
- [6] A. Barone and G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, Wiley, New York (1982).
- [7] K. K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*, Gordon and Breach, New York (1986).
- [8] S. N. Artemenko and A. F. Volkov, *On the theory of the Fröhlich conductivity of a conductor with a commensurable charge density wave*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **81**, 1872 (1981), [Sov. Phys. JETP **54**, 992 (1981)].
- [9] W. Wonneberger, *Harmonic mixing in the classical charge density wave model above threshold*, Z. Phys. B: Condens. Matter **53**, 167 (1983), doi:10.1007/BF01388537.
- [10] G. Grüner and A. Zettl, *Charge density wave conduction: A novel collective transport phenomenon in solids*, Phys. Rep. **119**(3), 117 (1985), doi:https://doi.org/10.1016/0370-1573(85)90073-0.
- [11] D. B. Sullivan and J. E. Zimmerman, *Mechanical analogs of time dependent Josephson phenomena*, Am. J. Phys. **39**(12), 1504 (1971), doi:10.1119/1.1976705.
- [12] I. A. Bizyaev and I. S. Mamaev, *Dynamics of the nonholonomic Suslov problem under periodic control: unbounded speedup and strange attractors*, J. Phys. A: Math. Theor. **53**(18), 185701 (2020), doi:10.1088/1751-8121/ab7e52.
- [13] R. L. Kautz, *Noise, chaos, and the Josephson voltage standard*, Rep. Prog. Phys. **59**(8), 935 (1996), doi:10.1088/0034-4885/59/8/001.
- [14] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, CRC Press, Boca Raton, doi:10.1201/9780429492563 (2015).
- [15] V. M. Buchstaber, O. V. Karpov and S. I. Tertychniy, *Rotation number quantization effect*, Teor. Mat. Fiz. **162**, 211 (2010), doi:10.1007/s11232-010-0016-4, [Theor. Math. Phys. **176**, 965 (2013)].

- [16] Yu. S. Ilyashenko, D. A. Ryzhov and D. A. Filimonov, *Phase-lock effect for equations modeling resistively shunted Josephson junctions and for their perturbations*, Funkts. Anal. Prilozhen. **45**, 41 (2011), doi:10.1007/s10688-011-0023-8, [Funct. Anal. Its Appl. **45**, 192 (2011)].
- [17] V. M. Buchstaber and S. I. Tertychniy, *Explicit solution family for the equation of the resistively shunted Josephson junction model*, Teor. Mat. Fiz. **176**, 163 (2013), doi:10.4213/tmf8512, [Theor. Math. Phys. **176**, 965 (2013)].
- [18] A. Glutsyuk and L. Rybnikov, *On families of differential equations on two-torus with all phase-lock areas*, Nonlinearity **30**, 61 (2016), doi:10.1088/0951-7715/30/1/61.
- [19] A. Alexandrov, A. Glutsyuk and A. Gorsky, *Phase-locking in dynamical systems and quantum mechanics* doi:10.48550/arXiv.2504.20181, [arXiv:2504.20181](https://arxiv.org/abs/2504.20181).
- [20] K. K. Likharev and V. K. Semenov, *Electrodynamical properties of superconducting point contacts*, Radiotekh. Elektron. **16**, 2167 (1971), [Radio Eng. Electron. Phys. (USSR) **16**, 1917 (1971)].
- [21] M. J. Renne and D. Polder, *Some analytical results for the resistively shunted Josephson junction*, Rev. Phys. Appl. (Paris) **9**, 25 (1974), doi:10.1051/rphysap:019740090102500.
- [22] J. R. Waldram and P. H. Wu, *An alternative analysis of the nonlinear equations of the current-driven Josephson junction*, J. Low Temp. Phys. **47**(3), 363 (1982), doi:10.1007/BF00683738.
- [23] A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov and E. Il'ichev, *The current-phase relation in Josephson junctions*, Rev. Mod. Phys. **76**, 411 (2004), doi:10.1103/RevModPhys.76.411.
- [24] B. Raes, N. Tubsrinuan, R. Sreedhar, D. S. Guala, R. Panghotra, H. Dausy, C. C. de Souza Silva and J. Van de Vondel, *Fractional Shapiro steps in resistively shunted Josephson junctions as a fingerprint of a skewed current-phase relationship*, Phys. Rev. B **102**, 054507 (2020), doi:10.1103/PhysRevB.102.054507.
- [25] R. Panghotra, B. Raes, C. C. de Souza Silva, I. Cools, W. Keijers, J. E. Scheerder, V. V. Moshchalkov and J. Van de Vondel, *Giant fractional Shapiro steps in anisotropic Josephson junction arrays*, Commun. Phys. **3**, 53 (2020), doi:10.1038/s42005-020-0315-5.
- [26] L. G. Aslamazov and A. I. Larkin, *Josephson effect in superconducting point contacts*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **9**, 150 (1969), [JETP Lett. **9**, 87 (1969)].
- [27] H. Lübbig and H. Luther, *Subharmonic steps in the I-V characteristic of short microbridges due to non-sinusoidal current-phase relations*, Rev. Phys. Appl. (Paris) **9**, 29 (1974), doi:10.1051/rphysap:019740090102900.
- [28] E. D. Thompson, *Perturbation theory for a resistivity shunted Josephson element*, J. Appl. Phys. **44**(12), 5587 (1973), doi:10.1063/1.1662201.
- [29] Ya. V. Fominov and D. S. Mikhailov, *Asymmetric higher-harmonic SQUID as a Josephson diode*, Phys. Rev. B **106**, 134514 (2022), doi:10.1103/PhysRevB.106.134514.
- [30] V. K. Kornev, T. Y. Karminskaya, Y. V. Kislinskii, P. V. Komissinki, K. Y. Constantinian and G. A. Ovsyannikov, *Dynamics of underdamped Josephson junctions with non-sinusoidal current-phase relation*, Physica C **435**(1), 27 (2006), doi:https://doi.org/10.1016/j.physc.2006.01.012.

- [31] E. Goldobin, D. Koelle, R. Kleiner and R. G. Mints, *Josephson junction with a magnetic-field tunable ground state*, Phys. Rev. Lett. **107**, 227001 (2011), doi:10.1103/PhysRevLett.107.227001.
- [32] C. J. Trimble, M. T. Wei, N. F. Q. Yuan, S. S. Kalantre, P. Liu, H.-J. Han, M.-G. Han, Y. Zhu, J. J. Cha, L. Fu and J. R. Williams, *Josephson detection of time-reversal symmetry broken superconductivity in SnTe nanowires*, npj Quantum Materials **6**, 61 (2021), doi:10.1038/s41535-021-00359-w.
- [33] R. S. Souto, M. Leijnse and C. Schrade, *Josephson diode effect in supercurrent interferometers*, Phys. Rev. Lett. **129**, 267702 (2022), doi:10.1103/PhysRevLett.129.267702.
- [34] M. Gupta, G. V. Graziano, M. Pendharkar, J. T. Dong, C. P. Dempsey, C. Palmstrøm and V. S. Pribiag, *Gate-tunable superconducting diode effect in a three-terminal Josephson device*, Nat. Commun. **14**(1), 3078 (2023), doi:https://doi.org/10.1038/s41467-023-38856-0.
- [35] P. E. Gregers-Hansen, M. T. Levinsen and G. Fog Pedersen, *A sinusoidal current-phase relation for superconducting thin-film microbridges*, J. Low Temp. Phys. **7**, 99 (1972), doi:10.1007/BF00629122.
- [36] D. Cassel, G. Pickartz, M. Siegel, E. Goldobin, H. H. Kohlstedt, A. Brinkman, A. A. Golubov, M. Yu. Kupriyanov and H. Rogalla, *Influence of the transparency of tunnel barriers in Nb/Al₂O₃/Al/Al₂O₃/Nb junctions on transport properties*, Physica C **350**(3), 276 (2001), doi:10.1016/S0921-4534(00)01613-0.
- [37] C. A. Hamilton and E. G. Johnson, *Analog computer studies of subharmonic steps in superconducting weak links*, Phys. Lett. A **41**, 393 (1972), doi:https://doi.org/10.1016/0375-9601(72)90945-0.
- [38] Y. Braiman, E. Ben-Jacob and Y. Imry, *Current noise effects on the microwave induced steps in current fed Josephson junctions*, IEEE Trans. Magn. **17**, 784 (1981), doi:10.1109/TMAG.1981.1060952.
- [39] Yu. M. Shukrinov, S. Yu. Medvedeva, A. E. Botha, M. R. Kolahchi and A. Irie, *Devil's staircases and continued fractions in Josephson junctions*, Phys. Rev. B **88**, 214515 (2013), doi:10.1103/PhysRevB.88.214515.
- [40] D. Willsch, D. Rieger, P. Winkel, M. Willsch, C. Dickel, J. Krause, Y. Ando, R. Lescanne, Z. Leghtas, N. T. Bronn, P. Deb, O. Lanes *et al.*, *Observation of Josephson harmonics in tunnel junctions*, Nat. Phys. **20**, 815 (2024), doi:10.1038/s41567-024-02400-8.
- [41] V. V. Ryazanov, V. A. Oboznov, A. Yu. Rusanov, A. V. Veretennikov, A. A. Golubov and J. Aarts, *Coupling of two superconductors through a ferromagnet: Evidence for a π junction*, Phys. Rev. Lett. **86**, 2427 (2001), doi:10.1103/PhysRevLett.86.2427.
- [42] T. Kontos, M. Aprili, J. Lesueur, F. Genêt, B. Stephanidis and R. Boursier, *Josephson junction through a thin ferromagnetic layer: Negative coupling*, Phys. Rev. Lett. **89**, 137007 (2002), doi:10.1103/PhysRevLett.89.137007.
- [43] H. Sellier, C. Baraduc, F. Lefloch and R. Calemczuk, *Temperature-induced crossover between 0 and π states in S/F/S junctions*, Phys. Rev. B **68**, 054531 (2003), doi:10.1103/PhysRevB.68.054531.

- [44] H. Sellier, C. Baraduc, F. Lefloch and R. Calemczuk, *Half-integer Shapiro steps at the $0-\pi$ crossover of a ferromagnetic Josephson junction*, Phys. Rev. Lett. **92**, 257005 (2004), doi:10.1103/PhysRevLett.92.257005.
- [45] V. A. Oboznov, V. V. Bol'ginov, A. K. Feofanov, V. V. Ryazanov and A. I. Buzdin, *Thickness dependence of the Josephson ground states of superconductor-ferromagnet-superconductor junctions*, Phys. Rev. Lett. **96**, 197003 (2006), doi: 10.1103/PhysRevLett.96.197003.
- [46] P. N. Tsarev and Ya. V. Fominov, *All fractional Shapiro steps in the RSJ model with two Josephson harmonics* doi:10.48550/arXiv.2505.20502, [arXiv:2505.20502](https://arxiv.org/abs/2505.20502).