
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Общая и прикладная физика

ВЛИЯНИЕ БЕСПОРЯДКА НА СВЕРХПРОВОДЯЩИЕ СОСТОЯНИЯ В ГИБРИДНЫХ СТРУКТУРАХ СВЕРХПРОВОДНИК – АЛЬТЕРМАГНЕТИК

(бакалаврская работа)

Студент:

Васякин Максим Максимович

(подпись студента)

Научный руководитель:

Мельников Александр Сергеевич,
д-р физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2025

Аннотация

В данной работе исследуется влияние беспорядка на сверхпроводящее состояние в гибридных структурах сверхпроводник-альтермагнетик. В рамках уравнений Горькова было получено, что рассеяние на немагнитных примесях приводит к эффективному усреднению альтермагнитного обменного поля, восстановлению сверхпроводимости и росту критической температуры сверхпроводящего перехода. Для случая магнитных примесей было выявлено немонотонное поведение критической температуры в зависимости от концентрации примесей. Помимо этого в рамках квазиклассического приближения были получены уравнения Узде-ля для "грязного" предела гибридной структуры сверхпроводник-альтермагнетик. Выявлено, что в лидирующем порядке влияние альтермагнитного обменного поля сводится к эффективным магнитным примесям с легкой осью.

Содержание

1	Введение	4
2	Постановка задачи	6
2.1	Уравнения Горькова	6
2.1.1	Учет влияния беспорядка	7
2.1.2	Учет влияния альтермагнетизма	7
3	Расчет критической температуры	9
3.1	Рассеяние на немагнитных примесях	9
3.2	Рассеяние на парамагнитных примесях	14
4	Квазиклассическое рассмотрение сверхпроводимости в S/АМ бислое	16
4.1	Вывод уравнений Эйленбергера	17
4.2	Вывод уравнений Узаделя	19
4.3	Эффективные магнитные примеси	21
5	Заключение	25
6	Приложение	28
6.1	Получение низкотемпературной асимптотики с учетом примесного рассеяния методом суммирования Эйлера-Маклорена	28
6.2	Получение низкотемпературной асимптотики в чистом пределе методом суммирования по Пуассону	30

1 Введение

Изучение влияния беспорядка представляет собой важное направление в физике сверхпроводимости (см., напр., [1, 2]). В большинстве сверхпроводников с обычным s -волновым спариванием потенциальное немагнитное рассеяние, в соответствии с теоремой Андерсона, не влияет на критическую температуру сверхпроводящего перехода T_c , а лишь перенормирует характерные длины — длину когерентности и Лондоновскую глубину проникновения. Однако это справедливо лишь для умеренного беспорядка; в сильно неупорядоченных системах может наблюдаться даже увеличение T_c [2]. Эффекты беспорядка сильнее проявляются в случае сверхпроводников с анизотропным спариванием, в которых знак сверхпроводящей щели зависит от направления импульса на поверхности Ферми. Поскольку потенциальное рассеяние может приводить к значительным изменениям направления импульса электрона, то сверхпроводящая щель меняет знак вдоль траектории электрона, приводя тем самым в резкому подавлению T_c [3]. Таким образом, высокая чувствительность к немагнитным примесям служит характерным признаком знакопеременной щели.

Любой механизм, нарушающий симметрию обращения времени, нарушает и условия применимости теоремы Андерсона. Именно этим объясняется явление, когда даже умеренная концентрация магнитных примесей или парамагнитное действие обменного поля в гибридных системах сверхпроводник-ферромагнетик подавляют сверхпроводящий параметр порядка [4]. Тем не менее, сохранение сверхпроводимости всё же возможно благодаря пространственной неоднородности обменного поля, возникающей, например, при наличии доменной структуры в ферромагнитной подсистеме [4, 5]. Аналогичное ослабление разрушительного действия обменного поля может наблюдаться при учете его зависимости от импульса [6]. Действительно, движение квазичастиц по траекториям, подверженным упругому рассеянию, приводит к изменению обменного поля вдоль этих траекторий, что должно вызывать его частичное усреднение.

Руководствуясь такой логикой, можно было бы ожидать, что парамагнитный эффект, разрушающий куперовские пары, полностью исчезнет в системах с антиферромагнитным упорядочением [7, 8], где магнитные моменты подрешёток полностью скомпенсированы. Поскольку размер куперовской пары значительно превышает атомные масштабы, то быстро осциллирующее обменное поле антиферромагнетика должно усредняться в ноль на масштабе длины пары.

Однако это заключение неверно для некоторых направлений импульса в зоне Бриллюэна, поэтому функция щели, вклад в которую дают все направления импульса, по-прежнему подавляется параметром антиферромагнитного порядка [7]. Очевидно, что учет потенциального рассеяния приведет к смешиванию различных траекторий квазичастиц и усилит эффект усреднения обменного поля. В результате, в антиферромагнетиках немагнитное рассеяние может приводить к неожиданному, казалось бы, эффекту — усилению сверхпроводимости под действием беспорядка. Разумеется, соответствующее увеличение T_c не может превысить критическую температуру в отсутствие антиферромагнитного обменного поля.

Такая конкуренция между потенциальным рассеянием и специфической спиновой структурой блоховских волновых функций в антиферромагнетиках недавно была исследована в гибридных системах сверхпроводник/антиферромагнетик в рамках концепции "нелевских триплетов" для определенной структуры подрешеток [9, 10].

Данные фундаментальные исследования взаимодействия магнетизма и сверхпроводимости получили новый толчок с открытием нового класса магнитных систем, названных альтермагнетиками [11, 12, 13, 14, 15].

Данные материалы сочетают в себе черты ферро- и антиферромагнетиков. Подобно

антиферромагнетикам, они обладают коллинеарным чередующимся спиновым порядком и нулевой намагниченностью, что обеспечивает устойчивость к внешним магнитным полям. Однако, в отличие от антиферромагнетиков, для перехода между спиновыми подрешетками в альтермагнетиках недостаточно преобразования трансляции или инверсии и необходимо сделать поворот вокруг некоторой оси. Данная симметричная особенность приводит к необычному устройству электронного спектра в альтермагнетиках, а именно: к снятию вырождения по спину и зеемановскому расщеплению, которое и по величине и по знаку сильно зависит от направления импульса на поверхности Ферми [16, 17]. Данные материалы представляют особый интерес для спинтроники, т.к. в них возможно создать спин-поляризованные токи, причем поляризацией таких токов можно управлять оптическими методами [18, 19, 20].

С учетом упомянутых необычных эффектов возможных в альтермагнетиках, неудивительно, что открытие данного класса материалов стимулировало изучение взаимодействия альтермагнетизма и сверхпроводимости. На данный момент интенсивно исследуются андreeвское отражение [11, 21], эффект Джозефсона [22, 23] и связанные состояния квазичастиц [14, 24] в гибридных структурах сверхпроводник/альтермагнетик (S/AM). Недавно в работах [25, 26] был изучен невзаимный транспорт в S/AM гетероструктурах. В пределе чистого кристалла в работе [27] был проанализирован механизм подавления сверхпроводимости альтермагнитным порядком в гибридных структурах сверхпроводник/альтермагнетик. Возможные особенности влияния неупорядоченности также рассматривались при изучении эффекта близости в гибридных S/AM системах, с акцентом на состояния квазичастиц вблизи одиночных примесей [28].

Целью данной работы является изучение немагнитного беспорядка на сверхпроводящие свойства гибридных структур сверхпроводник-альтермагнетик в пределе, когда концентрация примесей достаточна велика, чтобы для вычисления основных наблюдаемых величин можно было использовать усреднением по беспорядку. Нашей главной предположение состоит в том, что из-за нулевой полной намагниченности альтермагнитного слоя изотропное рассеяние на немагнитных примесях может приводить к эффективному усреднению обменного поля по поверхности Ферми и тем самым вызывать восстановление сверхпроводящего порядка.

2 Постановка задачи

Для исследования влияния беспорядка на гетероструктуры сверхпроводник- альтермагнетик рассмотрим простейшую структуры в виде бислоя, в котором один из слоев является сверхпроводником, а второй альтермагнетиком. Будем предполагать, что в рассматриваемой структуре альтермагнетик является изолятором и относится к классу планарных d-волновых альтермагнетиков, т.е. альтермагнитное обменное поле не зависит от компоненты импульса электрона, направленной вдоль самого обменного поля, и меняет знак при повороте на $\pi/2$. Для простоты будем считать, что обменное поле направлено перпендикулярно плоскости раздела слоев. Касательно сверхпроводящего слоя будем считать, что в нем за счет электрон-фононного взаимодействия возникло сверхпроводящее состояние, при этом для простоты будем предполагать, что возникшее вследствие электрон-фононного взаимодействия эффективное притяжение между электронами является изотропным и как следствие параметр порядка обладает s-волновой симметрией. Так же будем предполагать, что концентрация примесей в сверхпроводящем слое лежит в таком диапазоне, что выполняются условия применимости крестовой диаграммной техники для вычисления наблюдаемых методом усреднения по реализациям беспорядка, но при этом не происходит значительного изменения плотности состояний (последнее требование может быть записано в виде $\hbar\tau^{-1} \ll E_F$, где τ - это длина свободного пробега электрона между рассеяниями на примесях, а E_F - величина энергии Ферми металла в нормальном состоянии). Помимо этого будем считать, что толщина сверхпроводящего слоя достаточно мала, чтобы можно было пренебречь изменением параметра порядка в направлении ортогональном плоскости раздела, для этого необходимо выполнение соотношения $d \lesssim \xi$, где d - толщина сверхпроводящего слоя, а ξ - корреляционная длина сверхпроводника. В таком приближении можно значительно упростить нашу задачу, аппроксимировав ее задачей о двумерном сверхпроводнике с наведенным альтермагнитным обменным полем.

2.1 Уравнения Горькова

Для микроскопического описания однородного сверхпроводящего состояния будем использовать уравнения Горькова на матричную функцию Грина $\check{G}$, которые в представлении Мацубаровских частот и импульса могут быть записаны в следующем виде

$$(i\omega_n\sigma_0\tau_0 - \xi(\mathbf{p})\sigma_0\tau_z) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) - \check{\Delta}\check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \sigma_0\tau_0 \quad (1)$$

где $\omega_n = \pi T(2n + 1)$, T - температура, n - целые числа, $\check{\Delta} = -\Delta\sigma_y\tau_y$ - сверхпроводящая щель, $\xi(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - \mu$ - стандартный одночастичный Гамильтониан, $\sigma_0(\tau_0)$ и $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}(\{\tau_x, \tau_y, \tau_z\})$ - единичные матрица и матрицы Паули в спиновом пространстве и пространстве Намбу-Горькова соответственно. $\check{G}(i\omega_n, \mathbf{p})$ - это матричная функция Грина 4×4 в пространстве спина и Намбу-Горькова, имеющая следующий вид:

$$\check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \hat{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) & \hat{F}(i\omega_n, \mathbf{p}) \\ -\hat{F}^*(i\omega_n, \mathbf{p}) & -\hat{G}^*(i\omega_n, \mathbf{p}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $\hat{G}$ и $\hat{G}^*$ - это нормальные функции Грина в спиновом пространстве, а $\hat{F}$ и $\hat{F}^*$ - аномальные функции Грина в спиновом пространстве.

Уравнения Горькова также дополнены уравнением самосогласования

$$\Delta = Tg \sum_n \int (d\mathbf{p}) \frac{1}{2} \text{Tr} \{ i\sigma_y \hat{F}(i\omega_n, \mathbf{p}) \}. \quad (3)$$

2.1.1 Учет влияния беспорядка

Для учета влияния упругого потенциального рассеяния на точечных примесях традиционно рассматривается случайный потенциал следующего вида:

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} u_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \quad (4)$$

где $u_0 \delta(\mathbf{r})$ - потенциал единичной примеси, расположенной в начале координат, а $\{\mathbf{r}_{\alpha}\}$ - положения примесных центров. В представлении спин-Намбу случайный потенциал может быть записан как

$$\check{U}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} u_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \sigma_0 \tau_z \quad (5)$$

Для учета усреднения по возможным реализациям расположения примесных центров оказывается удобным использовать крестовую диаграммную технику. Уравнения Горькова при этом модифицируются следующим образом

$$(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi(\mathbf{p}) \sigma_0 \tau_z - \check{\Sigma}) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) - \check{\Delta} \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \sigma_0 \tau_0 \quad (6)$$

где $\check{\Sigma}$ - собственно-энергетическая часть в представлении спин-Намбу. В главном порядке выражение для $\check{\Sigma}$ дается следующей формулой

$$\check{\Sigma} = n_{\text{imp}} \nu_0 u_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}(\xi, \phi)) \tau_z \quad (7)$$

В случае рассеяния на слабых точечных парамагнитных примесях с квазиклассическим спином S рассматривается следующий случайный потенциал в представлении спин-Намбу [29]

$$\check{U}_m = \sum_{\alpha} \begin{pmatrix} (u_0 \sigma_0 + u_s (\mathbf{S}_{\alpha}, \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma})) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) & 0 \\ 0 & -(u_0 \sigma_0 + u_s (\mathbf{S}_{\alpha}, \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^*)) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}) \end{pmatrix} \quad (8)$$

где u_0 описывает потенциальное рассеяние на примесях, а u_s - магнитное рассеяние на примесях, $\mathbf{S}$ - оператор спина примеси, а $\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ - оператор спина электрона. Аналогично случаю с немагнитными примесями, можно получить, что в уравнения Горькова войдет собственно-энергетическая часть $\check{\Sigma}_m$, выражение для которой имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}_m = & \nu_0 \int d\xi \int \frac{d\phi}{2\pi} n_{\text{imp}} u_0^2 \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \tau_z + \\ & + \nu_0 \frac{S(S+1)}{12} \int d\xi \int \frac{d\phi}{2\pi} n_{\text{imp}} u_s^2 (\tau_z \sigma_x \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \sigma_x \tau_z + \tau_0 \sigma_y \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \sigma_y \tau_0 + \tau_z \sigma_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \sigma_z \tau_z) , \end{aligned} \quad (9)$$

где мы использовали, что $\langle S^i S^j \rangle = \frac{1}{3} (\mathbf{S})^2 \delta_{ij}$.

2.1.2 Учет влияния альтермагнетизма

Как было указано выше, рассматриваемая нами задача, может быть сведена к задаче о двумерном сверхпроводнике с индуцированным альтермагнитным обменным полем. В данном разделе, следуя работе [17], исходя из симметричных свойств будет предложен конкретный вид обменного поля.

Альтермагнетики это магнитные материалы с центром инверсии, в которых нарушены симметрия относительно обращения во времени $\mathcal{T}$ и симметрия относительно

поворота $\mathcal{R}$, но присутствует симметрия относительно совместного преобразования обращения во времени и поворота $\mathcal{TR}$. В общем случае обменное поле $\mathbf{h}$ может быть разложено в ряд по степеням импульса электрона $\mathbf{p}$

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1(\mathbf{p}) + \mathbf{h}_2(\mathbf{p}) + \dots \quad (10)$$

где $\mathbf{h}_0$ обозначает компоненту обменного поля, не зависящую от импульса, $\mathbf{h}_1$ - компоненту линейную по импульсу, $\mathbf{h}_2$ - квадратичную и т.д.

Наличие центра инверсии в альтермагнетиках сразу приводит к тому, что все компоненты, нечетным образом зависящие от импульса, должны быть тождественно равны нулю.

Как и в других магнитных материалах в альтермагнетиках при обращении во времени должна происходить замена $\mathbf{h}$ на $-\mathbf{h}$. В совокупности с симметрией относительно преобразования $\mathcal{TR}$ это приводит к тому, что при повороте $\mathcal{R}$ обменное поле должно менять знак. Как следствие в разложении обменного поля по степеням импульса остаются только следующие члены

$$\mathbf{h} = \tilde{\mathbf{h}}_2(\mathbf{p}) + \tilde{\mathbf{h}}_4(\mathbf{p}) + \dots \quad (11)$$

где компоненты $\tilde{\mathbf{h}}_{2k}$, где k - натуральное, преобразуются правильным образом при повороте.

Сделаем дополнительное предположение, сказав, что рассматриваемый альтермагнетик принадлежит классу планарных d-волновых альтермагнетиков. Направим ось z вдоль направления обменного поля, тогда

$$\mathbf{h} = h\mathbf{e}_z, \quad h = \tilde{h}_2(p_x, p_y) + \tilde{h}_4(p_x, p_y) + \dots \quad (12)$$

Для класса d-волновых альтермагнетиков оператор $\mathcal{R}$ - это поворот на $\pi/2$. Оставляя только младшие порядки по степеням импульса получим, что

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}_z(h_s p_x p_y + h_c(p_x^2 - p_y^2)) \quad (13)$$

С помощью поворота системы координат в плоскости $x - y$ можно добиться того, что обменное поле примет вид $\mathbf{h} = \mathbf{e}_z \tilde{h}_s p_x p_y$. Как будет показано в следующих разделах нас интересуют обменные поля величиной $|\mathbf{h}| \sim \Delta_0$, где Δ_0 - величина параметра порядка в объемном сверхпроводнике при нулевой температуре без учета обменного поля. Поскольку мы рассматриваем гибридную структуру с s-волновым сверхпроводником, для которых характерно $\Delta \ll E_F$, то в главном порядке по малому параметру $|\mathbf{h}|/E_F$ можно пренебречь зависимостью обменного поля от величины импульса, тогда обменное поле может быть записано как

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}_z h_0 \sin(2\phi) \quad (14)$$

где ϕ - это полярный угол в импульсном пространстве.

Итого уравнения Горькова с учетом влияния альтермагнетика примут вид

$$(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi(\mathbf{p}) \sigma_0 \tau_z - h_0 \sin(2\phi) \sigma_z \tau_z) \check{G}(\mathbf{p}) - \check{\Delta} \check{G}(\mathbf{p}) = \sigma_0 \tau_0 \quad (15)$$

3 Расчет критической температуры

3.1 Рассеяние на немагнитных примесях

Как было показано в предыдущем разделе для микроскопического описания однородного сверхпроводящего состояния с учетом альтермагнитного обменного поля и рассеяния на немагнитных примесях можно использовать модифицированные уравнения Горькова

$$(i\omega_n\sigma_0\tau_0 - \xi(\mathbf{p})\sigma_0\tau_z - h_0\sin(2\phi)\sigma_z\tau_z - \check{\Sigma})\check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) - \check{\Delta}\check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \sigma_0\tau_0 \quad (16)$$

При этом выражение для собственно-энергетической части будет

$$\check{\Sigma} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}(\xi, \phi)) \tau_z \quad (17)$$

где было введено время свободного пробега $\tau = (2\pi n_{\text{imp}} u_0^2 \nu_0)^{-1}$, где ν_0 - плотность состояний на энергии Ферми в нормальной фазе в расчете на одну проекцию спина. Покажем самосогласованным образом, что учет собственно-энергетической части приводит к эффективной перенормировке Мацубаровских частот $\omega_n \rightarrow \tilde{\omega}_n$ и сверхпроводящей щели $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$. Предположим, что данное предположение верно, тогда выражение для собственно-энергетической части запишется как

$$\check{\Sigma} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \tau_z \check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}(\xi, \phi)) \tau_z \quad (18)$$

где $\check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p})$ - решение уравнения Горькова с перенормированными ω_n и Δ :

$$(i\tilde{\omega}_n\sigma_0\tau_0 - \xi(\mathbf{p})\sigma_0\tau_z - h_0\sin(2\phi)\sigma_z\tau_z) \check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) - \check{\check{\Delta}}\check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) = \sigma_0\tau_0 \quad (19)$$

Это обычное матричное уравнение, решением которого будет

$$\check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{h_0\sin(2\phi)\sigma_z - i\tilde{\omega}_n - \xi(\mathbf{p})}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2(\mathbf{p}) + \tilde{\Delta}^2} & -i\sigma_y \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2(\mathbf{p}) + \tilde{\Delta}^2} \\ i\sigma_y \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n - ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2(\mathbf{p}) + \tilde{\Delta}^2} & \frac{-h_0\sin(2\phi)\sigma_z - i\tilde{\omega}_n + \xi(\mathbf{p})}{(\tilde{\omega}_n - ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2(\mathbf{p}) + \tilde{\Delta}^2} \end{pmatrix} \quad (20)$$

Тогда выражение для собственно-энергетической части примет вид

$$\check{\Sigma} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \tau_z \begin{pmatrix} \frac{h_0\sin(2\phi)\sigma_z - i\tilde{\omega}_n - \xi}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} & -i\sigma_y \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \\ i\sigma_y \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n - ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} & \frac{-h_0\sin(2\phi)\sigma_z - i\tilde{\omega}_n + \xi}{(\tilde{\omega}_n - ih_0\sin(2\phi)\sigma_z)^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \end{pmatrix} \tau_z \quad (21)$$

Учтем, что при интегрировании слагаемые нечетные по ξ дадут ноль. Также заметим, что заменой $\phi \rightarrow \phi + \pi/2$ можно поменять знак при $h_0\sin(2\phi)$. Таким образом выражение для собственно-энергетической части можно записать как

$$\check{\Sigma} = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \tau_z \begin{pmatrix} -i \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} & -i\sigma_y \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \\ i\sigma_y \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} & -i \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \end{pmatrix} \tau_z \quad (22)$$

Для дальнейшего упрощения выделим явно матричную структуру выражении для $\check{\Sigma}$

$$\check{\Sigma} = \tau_z (-iA\sigma_0\tau_0 + B\sigma_y\tau_y) \tau_z = -iA\sigma_0\tau_0 - B\sigma_y\tau_y \quad (23)$$

$$A = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (24)$$

$$B = \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0\sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (25)$$

Подставив это в (16) и сравнив с (19), получим уравнения самосогласования для перенормировки

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (26)$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (27)$$

Также вспомним про уравнение самосогласования для параметра порядка (3). После подстановки выражения для аномальной функции Грина и выполнения аналогичных преобразований, уравнение самосогласования примет вид

$$\Delta = g\nu_0 T \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (28)$$

Как было показано в работе [27], в чистом случае фазовый переход из сверхпроводящего состояния в нормальное происходит вторым родом, при любой температуре кроме нулевой. Будем предполагать, что и в случае наличия примесей при ненулевой температуре переход будет происходить вторым родом. Тогда для нахождения критической температуры можем решать уравнения (26)-(28), разлагая по малому параметру Δ . Будем считать, что $\tilde{\Delta} \sim \Delta$, тогда в главном порядке уравнения самосогласования примут вид

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2} \quad (29)$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{2\pi\tau} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2} \quad (30)$$

$$\Delta = g\nu_0 T_c \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2} \quad (31)$$

Оставшиеся интегралы тривиально берутся

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2} = \pi \operatorname{sgn} \tilde{\omega}_n \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)}{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)} = \pi \operatorname{sgn} \tilde{\omega}_n \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2} = \pi \operatorname{sgn} \tilde{\omega}_n \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{1}{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)} = \frac{\pi}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + h_0^2}} \quad (33)$$

Тогда уравнения самосогласования запишутся как

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{\operatorname{sgn} \tilde{\omega}_n}{2\tau}, \quad \tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{2\tau} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + h_0^2}}, \quad \Delta = \pi g\nu_0 T_c \sum_n \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + h_0^2}} \quad (34)$$

Итоговая связь $\tilde{\omega}_n$ и $\tilde{\Delta}$ с ω_n и Δ будет

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{\operatorname{sgn} \omega_n}{2\tau}, \quad \tilde{\Delta} = \Delta \frac{\sqrt{h_0^2 + (|\omega_n| + \frac{1}{2\tau})^2}}{\sqrt{h_0^2 + (|\omega_n| + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} \quad (35)$$

Подставив это в уравнение самосогласования и сократив Δ с обеих сторон, получим уравнение самосогласования для критической температуры

$$1 = \pi g \nu_0 T_c \sum_n \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (|\omega_n| + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} \quad (36)$$

Заметим, что выражение под суммой четно по ω_n , поэтому можем суммировать только по положительным частотам

$$1 = 2\pi g \nu_0 T_c \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (\omega_n + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} \quad (37)$$

На самом деле сумма, идет не по всем Мацубаровским частотам, а только по частотам меньших частоты Дебая ω_D

$$\frac{1}{g \nu_0} = 2\pi T_c \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (\omega_n + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} \quad (38)$$

Положив $h_0 = 0$, получим

$$\frac{1}{g \nu_0} = 2\pi T_c \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \frac{1}{\omega_n} \quad (39)$$

Решением данного уравнения будет критическая температура сверхпроводника T_c^0 в отсутствие обменного поля и примесей. Заметим, что данный факт является проявлением теоремы Андерсона, которая утверждает, что рассеяние на немагнитных примесях не должно приводить к изменению критической температуры.

Преобразуем уравнение (38), выделив в нем члены вида $1/\omega_n$

$$\frac{1}{g \nu_0} = 2\pi T_c \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \left(\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (\omega_n + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} - \frac{1}{\omega_n} \right) + 2\pi T_c \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \frac{1}{\omega_n} \quad (40)$$

Теперь вычтем из этого уравнения уравнение (39)

$$2\pi T_c \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \left(\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (\omega_n + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} - \frac{1}{\omega_n} \right) = \sum_{0 < \omega_n(T_c^0) < \omega_D} \frac{2\pi T_c^0}{\omega_n(T_c^0)} - \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \frac{2\pi T_c}{\omega_n} \quad (41)$$

Учтем явный вид Мацубаровских частот, тогда считая, что $\omega_D \gg T$ получим

$$\sum_{0 < \omega_n(T_c^0) < \omega_D} \frac{2\pi T_c^0}{\omega_n(T_c^0)} - \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \frac{2\pi T_c}{\omega_n} = \sum_{0 < \omega_n(T_c^0) < \omega_D} \frac{1}{n + 1/2} - \sum_{0 < \omega_n < \omega_D} \frac{1}{n + 1/2} \approx \ln \frac{T_c}{T_c^0} \quad (42)$$

Тогда итоговое уравнение самосогласования на критическую температуру примет вид:

$$\ln \frac{T_c}{T_c^0} = 2\pi T_c \sum_{\omega_n > 0} \left(\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (\omega_n + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} - \frac{1}{\omega_n} \right) \quad (43)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\omega_D \gg T_c$ и продлили сумму по частотам до бесконечности. При этом на больших частотах выражение в скобках будет убывать достаточно быстро и сумма будет сходящейся.

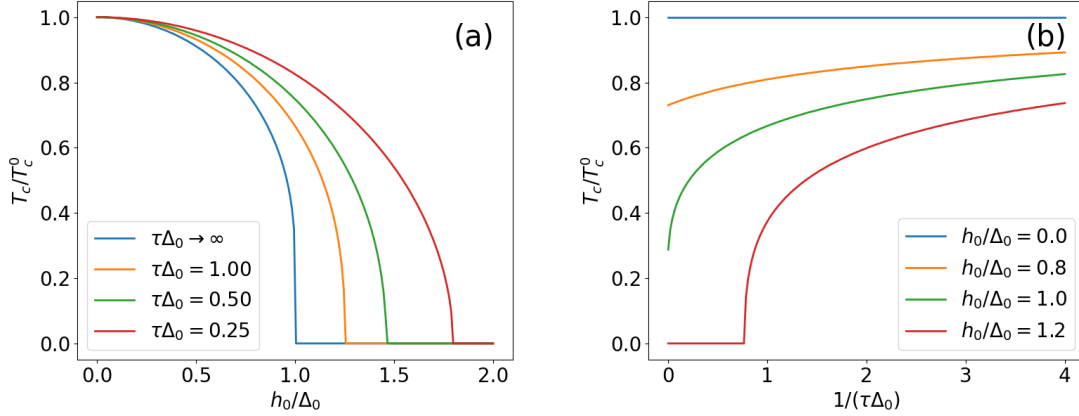


Рис. 1: (а) Критическая температура T_c S/АМ бислоя как функция амплитуды альтермагнитного обменного поля h_0 , построенная при разных временах свободного пробега τ . (b) Критическая температура T_c S/АМ бислоя как функция обратного времени свободного пробега τ^{-1} , построенная при разных значениях амплитуды альтермагнитного обменного поля h_0

Численное решение уравнения (43), представленное на Рис. 1, подтверждает наше изначальное предположение о том, что изотропное рассеяние на немагнитных примесях будет приводить к подавлению альтермагнитного обменного поля за счет эффективного усреднения по поверхности Ферми, тем самым восстанавливая сверхпроводимость и повышая критическую температуру. На Рис. 1(а) видно, что с уменьшением времени свободного пробега кривая $T_c(h_0)$ смещается вправо и сверхпроводимость становится возможной при больших значениях температуры и величины обменного поля. Однако рост критической температуры ограничен. На Рис. 1(б) видно, что с увеличением концентрации примесей критическая температура T_c хоть и растет, но остается ниже значения критической температуры в отсутствие обменного поля T_c^0 и только в пределе $\tau\Delta_0 \rightarrow 0$ стремится к T_c^0 . Данное поведение кривой $T_c(\tau^{-1})$ качественно совпадает с поведением кривой $T_c(\tau^{-1})$, полученной в [10], в бислое сверхпроводник-антиферромагнетик (S/AF) для случая малого химического потенциала.

Интерес также представляет поведение $T_c(h_0)$ в области больших обменных полей. Из Рис. 1(а) следует, что в чистом пределе кривая $T_c(h_0)$ идет почти вертикально в области h близких к Δ_0 , данное поведение согласуется с фазовой диаграммой полученной в работе [27]. Также из 1(а) следует, что с уменьшением времени свободного пробега кривая $T_c(h_0)$ сглаживается и ее поведение в области больших полей начинает напоминать корневое.

Для более детального исследования поведения $T_c(h_0)$ в области больших полей будем решать уравнение (43) в пределе низких температур. В чистом пределе сумма аналитически продолжается на отрицательные частоты, после чего, используя формулу суммирования по Пуассону (см Приложение 6.2), можно переписать уравнение (43) в виде

$$\ln \frac{h_0^c}{\Delta_0} = 2 \sum_{k>0} (-1)^k K_0 \left(\frac{|k|h_0^c}{T} \right), \quad (44)$$

где $K_0(x)$ - функция Макдональда нулевого порядка. В пределе $T \rightarrow 0$ уравнение (44) запишется как

$$\ln \frac{h_0^c}{\Delta_0} = -\sqrt{2\pi \frac{T}{h_0^c}} e^{-h_0^c/T} \quad (45)$$

Решая уравнение на h_0^c последовательным приближениями, получаем низкотемпературную асимптотику критического поля h_0^c как функцию температуры

$$h_0^c = \Delta_0 \left(1 - \sqrt{2\pi \frac{T}{\Delta_0}} e^{-\Delta_0/T} \right) \quad (46)$$

Таким образом в чистом пределе отличие $h_0^c(T)$ от Δ_0 оказывается экспоненциально подавленным вплоть до достаточно больших температур.

В случае ненулевой концентрации примесей сумму по Мацубаровским частотам в уравнении (43) нельзя аналитически продолжить на отрицательные частоты, поэтому воспользуемся формулой суммирования Эйлера-Маклорена (см Приложение 6.1), тогда уравнение (43) примет вид

$$\ln \frac{h_0^c}{\Delta_0} = a(h_0^c \tau) - b(h_0^c \tau) \tau^2 T^2 + O(T^3), \quad (47)$$

где a и b - коэффициенты, которые явным образом не зависят от температуры. Отбросив члены порядка $O(T^3)$ и разрешив получившееся уравнение относительно T , получим корневую зависимость критической температуры в области больших обменных полей, что подтверждает наш качественный анализ Рис. 1.

Точные выражения для коэффициентов $a(h_0^c \tau)$ и $b(h_0^c \tau)$ представлены в Приложении 6.1. Рассмотрим предельные случаи $h_0^c \tau \gg 1$ (слабый беспорядок) и $h_0^c \tau \ll 1$ (сильный беспорядок):

$$h_0^c \tau \rightarrow \infty : \quad a(h_0^c \tau) \approx \frac{\pi - 2}{4h_0^c \tau}, \quad b(h_0^c \tau) \approx \frac{\pi^2}{12(h_0^c \tau)^3}, \quad (48)$$

$$h_0^c \tau \rightarrow 0 : \quad a(h_0^c \tau) \approx \ln \frac{1}{2h_0^c \tau}, \quad b(h_0^c \tau) \approx \frac{\pi^2}{6(h_0^c \tau)^4}. \quad (49)$$

Из асимптотических выражений для коэффициентов $a(h_0^c \tau)$ и $b(h_0^c \tau)$ видно, что в грязном пределе выражение для критического поля при нулевой температуре принимает простой вид:

$$h_0^c(T = 0) = \sqrt{\frac{\Delta_0}{2\tau}} \quad (50)$$

Основываясь на данном выражении, можно выдвинуть предположение о том, что в грязном пределе эффективный распаривающий фактор оказывается пропорционален комбинации $h_0^2 \tau$. Более детально данное предположение будет разобрано в секции, посвященной выводу уравнения Узалея 4.2.

Наблюдаемое качественное различие между чистым и грязным пределами может быть объяснено с помощью следующих качественных рассуждений. Рассмотрим отдельно взятую куперовскую пару. Поскольку мы интересуемся пространственно однородным параметром порядка, то отдельно взятая куперовская пара характеризуется углом ϕ , определяющим направление относительного импульса между электронами в куперовской паре. В чистом пределе угол ϕ для каждой пары фиксирован, тогда энергия необходимая для разрушения куперовской пары с заданным углом ϕ будет даваться выражением $E = 2(\Delta - h_0 |\sin 2\phi|)$, которое соответствует разрушению куперовской пары за счет переворота спина одного из электронов из пары. Как следствие, при низких температурах вероятность такого возбуждения $P(\phi) \sim \exp\left\{-\frac{2(\Delta - h_0 |\sin 2\phi|)}{T}\right\}$, т.е. за исключением узких областей $|\sin 2\phi| \approx 1$ возбуждения оказываются экспоненциально подавлены как $\exp\left\{-\frac{2\Delta}{T}\right\}$. С другой стороны, добавления даже небольшого количества

примесей приводит к тому, что становятся возможным возбуждения с изменением направления импульса одного из электронов. За счет изотропности рассеяния энергия такого возбуждения не зависит от начальной ориентации пары и дается выражением $E = 2(\Delta - h_0)$. Как следствие, с увеличением концентрации примесей температурные возбуждения перестают быть экспоненциально подавленными и поведение критической температуры как функции обменного поля качественно меняет свой характер в области больших полей.

3.2 Рассеяние на парамагнитных примесях

Как и в случае рассеяния на немагнитных примесях в случае рассеяния на парамагнитных примесях для микроскопического описания сверхпроводимости с учетом альтермагнитного обменного поля может быть использованы модифицированные уравнения Горькова

$$(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi(\mathbf{p}) \sigma_0 \tau_z - h_0 \sin(2\phi) \sigma_z \tau_z - \check{\Sigma}_m) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) - \check{\Delta} \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) = \sigma_0 \tau_0 \quad (51)$$

где собственно-энергетическая часть запишется в виде

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}_m = & \nu_0 \int d\xi \int \frac{d\phi}{2\pi} n_{\text{imp}} u_0^2 \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \tau_z + \\ & + \nu_0 \frac{S(S+1)}{12} \int d\xi \int \frac{d\phi}{2\pi} n_{\text{imp}} u_s^2 (\tau_z \sigma_x \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \sigma_x \tau_z + \tau_0 \sigma_y \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \sigma_y \tau_0 + \tau_z \sigma_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{p}) \sigma_z \tau_z) \end{aligned} \quad (52)$$

Аналогично случаю с рассеянием на немагнитных примесях, покажем, что влияние собственно-энергетической части можно свести к эффективной перенормировке $\omega_n \rightarrow \tilde{\omega}_n$ и $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$. Предположим, что это верно, тогда выражение для $\check{\Sigma}_m$ можно переписать в терминах перенормированной функции Грина

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}_m = & \nu_0 \int d\xi \int \frac{d\phi}{2\pi} n_{\text{imp}} u_0^2 \tau_z \check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) \tau_z + \\ & + \nu_0 \frac{S(S+1)}{12} \int d\xi \int \frac{d\phi}{2\pi} n_{\text{imp}} u_s^2 (\tau_z \sigma_x \check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) \sigma_x \tau_z + \tau_0 \sigma_y \check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) \sigma_y \tau_0 + \tau_z \sigma_z \check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p}) \sigma_z \tau_z) . \end{aligned} \quad (53)$$

где выражение для $\check{\check{G}}(i\tilde{\omega}_n, \mathbf{p})$ дается формулой (20). Сделав соответствующие преобразования и выделив матричную структуру, получим

$$\begin{aligned} \check{\Sigma}_m = & \nu_0 n_{\text{imp}} u_0^2 \tau_z (-iA_m \sigma_0 \tau_0 + B_m \sigma_y \tau_y) \tau_z + \nu_0 \frac{S(S+1)}{12} n_{\text{imp}} u_s^2 \tau_0 \sigma_y (-iA_m \sigma_0 \tau_0 + B_m \sigma_y \tau_y) \sigma_y \tau_0 + \\ & + \nu_0 \frac{S(S+1)}{12} n_{\text{imp}} u_s^2 (\tau_z \sigma_x (-iA_m \sigma_0 \tau_0 + B_m \sigma_y \tau_y) \sigma_x \tau_z + \tau_z \sigma_z (-iA_m \sigma_0 \tau_0 + B_m \sigma_y \tau_y) \sigma_z \tau_z) \end{aligned} \quad (54)$$

$$A_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (55)$$

$$B_m = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (56)$$

После дальнейших упрощений, выражение для Σ_m принимает вид

$$\check{\Sigma}_m = -i \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau_s} \right) A_0 \sigma_0 \tau_0 - \left(\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau_s} \right) B_0 \sigma_y \tau_y \quad (57)$$

где были введены время свободного пробега $\tau = (2\pi n_{\text{imp}} u_0^2 \nu_0)^{-1}$ и время переворота спина $\tau_s = \left(\frac{2\pi}{4} S(S+1) n_{\text{imp}} u_s^2 \nu_0 \right)^{-1}$.

Подставив это в уравнения Горькова, приходим к следующим уравнениям самосогласования для перенормировки

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_s} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi)}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (58)$$

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_s} \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{\omega}_n + ih_0 \sin(2\phi))^2 + \xi^2 + \tilde{\Delta}^2} \quad (59)$$

Помимо этого есть еще уравнение самосогласования для параметра порядка (28). Т.к. нас интересует критическая температура, то можно решать уравнения в линейном порядке по Δ . После взятия интегралов, условия самосогласования примут вид

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \frac{\text{sgn} \tilde{\omega}_n}{2} \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_s} \right), \quad \tilde{\Delta} = \Delta + \frac{1}{2} \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + h_0^2}} \left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_s} \right), \quad \Delta = \pi g \nu_0 T_c \sum_n \frac{\tilde{\Delta}}{\sqrt{\tilde{\omega}_n^2 + h_0^2}} \quad (60)$$

Итоговая связь $\tilde{\omega}_n$ и $\tilde{\Delta}$ с ω_n и Δ будет

$$\tilde{\omega}_n = \omega_n + \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau_s} \right) \text{sgn} \omega_n, \quad \tilde{\Delta} = \Delta \frac{\sqrt{h_0^2 + \left(|\omega_n| + \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau_s} \right) \right)^2}}{\sqrt{h_0^2 + \left(|\omega_n| + \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau_s} \right) \right)^2} - \left(\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau_s} \right)} \quad (61)$$

Подставив $\tilde{\Delta}$ в уравнение для параметра порядка и поделив обе части уравнения на Δ , получим уравнение на критическую температуру

$$1 = \pi g \nu_0 T_c \sum_n \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + \left(|\omega_n| + \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau_s} \right) \right)^2} - \left(\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau_s} \right)} \quad (62)$$

После выполнения преобразований аналогичных описанным для случая немагнитных примесей итоговое уравнение самосогласования для критической температуры для случая рассеяния на парамагнитных примесях примет вид

$$\ln \frac{T_c}{T_c^0} = 2\pi T_c \sum_{\omega_n > 0} \left(\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + \left(\omega_n + \left(\frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2\tau_s} \right) \right)^2} - \left(\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2\tau_s} \right)} - \frac{1}{\omega_n} \right) \quad (63)$$

Вследствие того, что в большинстве реальных физических систем магнитное рассеяние гораздо слабее, чем потенциальное рассеяние, то наибольший интерес представляет рассмотрение предела $\tau_s/\tau_0 \gg 1$. В таком пределе становится возможным нетривиальное поведение критической температуры как функции времени свободного пробега τ , а именно, сначала при увеличении концентрации примесей T_c возрастает, однако начиная с некоторого критического значения концентрации поведение T_c меняется на обратное и увеличение беспорядка приводит к падению критической температуры. Причиной такой немонотонной зависимости является конкуренция между двумя механизмами: восстановлением сверхпроводимости вследствие подавления альтермагнитного обменного поля за счет немагнитного рассеяния и разрушением сверхпроводимости за счет магнитного рассеяния. При низких концентрациях примесей доминирует первый механизм в силу малости параметра τ/τ_s ; при высоких концентрациях альтермагнитное обменное поле оказывается полностью подавлено и при дальнейшем повышении концентрации примесей начинает доминировать второй механизм. Приведенный качественный анализ подтверждается численным решением уравнения (63), приведенным на Рис. 2

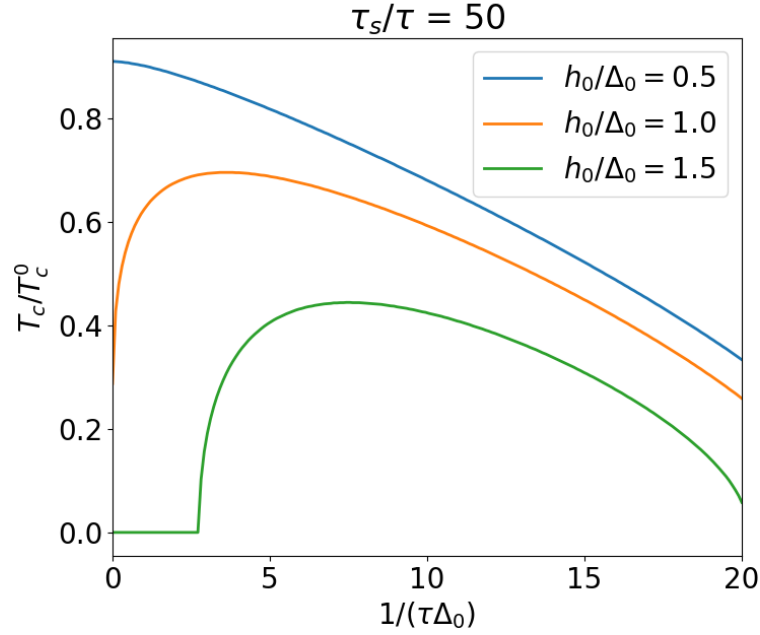


Рис. 2: Критическая температура T_c S/АМ бислоя как функция обратного времени свободного пробега τ , построенная для разных значений амплитуды альтермагнитного обменного поля h_0 в предел слабых парамагнитных примесей ($\tau_s/\tau = 50$).

4 Квазиклассическое рассмотрение сверхпроводимости в S/АМ бислое

Как было показано в разделе 3.1, в грязном пределе выражение для критического поля при нулевой температуре принимает вид $h_0^c(T = 0) = \sqrt{\Delta_0/(2\tau)}$. Такое асимптотическое поведение может говорить о том, что в грязном пределе в эффективный распаривающий фактор обменное поле будет входить как $h_0^2\tau$. Стандартным методом исследования поведения сверхпроводящего порядка в грязном пределе являются уравнения Узаделя, поэтому для более детального влияния альтермагнитного обменного поля нам необходимо вывести уравнения Узаделя с учетом обменного поля.

Стартуем с уравнений Горькова в представлении Мацубаровских частот и координат

$$(i\omega_n\sigma_0\tau_0 - \xi(\hat{\mathbf{p}}_1)\sigma_0\tau_z - h(\hat{\mathbf{p}}_1)\sigma_z\tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{r}_1))\check{G}(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + \\ - (\check{\Sigma}\check{G})(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sigma_0\tau_0\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (64)$$

где $h(\mathbf{p}) = \tilde{h}_0 p_x p_y$ - вклад в одночастичный гамильтониан, связанный с альтермагнитным обменным полем; а член $(\check{\Sigma}\check{G})(i\omega_n, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ отвечает рассеянию на немагнитных примесях. В общем случае выражение для сверхпроводящей щели имеет вид

$$\check{\Delta}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & i\Delta\sigma_y \\ -i\Delta^*\sigma_y & 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

А уравнение самосогласования можно записать как

$$\Delta(\mathbf{r}) = Tg \sum_{\omega_n} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ i\sigma_y \hat{F}(i\omega_n, \mathbf{r}, \mathbf{r}) \right\} \quad (66)$$

4.1 Вывод уравнений Эйленбергера

Стандартная схема получения уравнений Узаделя включает в себя вывод уравнений Эйленбергера, описывающих сверхпроводящее состояние в квазиклассическом пределе. Для перехода к квазиклассическому описанию удобно сделать преобразование Вигнера, для этого вначале перейдем от координат $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ к координате центра масс $\mathbf{R}$ и разностной координате $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (67)$$

Теперь необходимо перейти к функции Грина в фурье-представлении по разностной координате

$$\check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \check{G}\left(i\omega_n, \mathbf{R} + \frac{\mathbf{r}}{2}, \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}}{2}\right)$$

В смешанном представлении операторы координат и импульса запишутся в как

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{p}}, & \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{p}}, \\ \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p} - \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{R}}, & \mathbf{p}_2 &= -\mathbf{p} - \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{R}}, \end{aligned}$$

Тогда уравнения Горькова примут вид

$$\begin{aligned} \left(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi \left(\mathbf{p} - \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \right) \sigma_0 \tau_z - h \left(\mathbf{p} + \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \right) \sigma_z \tau_z - \check{\Delta} \left(\mathbf{R} + \frac{i}{2} \nabla_{\mathbf{p}} \right) \right) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) + \\ - \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \sigma_0 \tau_0, \end{aligned} \quad (68)$$

где явное выражение для собственной энергетической части будет

$$\check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau} \int (d^3p) \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) \tau_z \quad (69)$$

Для уравнения самосогласовния получим

$$\Delta(\mathbf{r}) = Tg \sum_{\omega_n} \int (d^3p) \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ i\sigma_y \hat{F}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) \right\} \quad (70)$$

В квазиклассическом приближении можем считать, что функция Грина плавно меняется на больших масштабах, тогда в главном порядке можем пренебречь $\nabla_{\mathbf{R}}$ в $h(\mathbf{p})$, а в $\xi(\mathbf{p})$ оставить только член линейный по $\nabla_{\mathbf{R}}$. В силу уравнения самосогласования получаем, что параметр порядка тоже плавно меняется на больших масштабах, поэтому можем пренебречь $\nabla_{\mathbf{p}}$ в аргументе $\check{\Delta}$. В рамках сделанных приближений уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \left(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi(\mathbf{p}) \sigma_0 \tau_z + \frac{i}{2} \mathbf{v} \nabla_{\mathbf{R}} \sigma_0 \tau_z - h(\mathbf{p}) \sigma_z \tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \right) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) + \\ - \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) = \sigma_0 \tau_0 \end{aligned} \quad (71)$$

Поскольку в квазиклассическом описании нас интересуют низкоэнергетические эффекты, то можем перейти от $\mathbf{p}$ к ξ и $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ и в главном приближении заменить $\mathbf{p}$ на

$p_F \mathbf{n}$, тогда уравнения запишутся как

$$\left(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi \sigma_0 \tau_z + \frac{i}{2} \mathbf{v}_F \nabla_{\mathbf{R}} \sigma_0 \tau_z - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \right) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) + \quad (72)$$

$$-\check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) = \sigma_0 \tau_0,$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = T g \nu_0 \sum_{\omega_n} \int d\xi \int d\mathbf{n} \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ i\sigma_y \hat{F}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) \right\}, \quad (73)$$

$$\check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi\tau} \int d\xi \int d\mathbf{n} \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) \tau_z \quad (74)$$

Применим операцию эрмитового сопряжения к уравнению (72) и воспользуемся симметрией $(\check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}))^\dagger = \check{G}(-i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n})$, получим

$$\check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) \left(i\omega_n \sigma_0 \tau_0 - \xi \sigma_0 \tau_z - \frac{i}{2} \mathbf{v}_F \nabla_{\mathbf{R}} \sigma_0 \tau_z - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \right) + \quad (75)$$

$$-\check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) = \sigma_0 \tau_0$$

где будем считать, что оператор $\nabla_{\mathbf{R}}$ действует влево. Для дальнейшего упрощения в квазиклассическом описании вводят квазиклассическую функцию Грина $\check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n})$, определенную как

$$\check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = \frac{i}{\pi} \tau_z \int d\xi \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \hat{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) & -i\hat{f}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \\ -i\hat{f}^*(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) & -\hat{g}^*(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \end{pmatrix} \quad (76)$$

Теперь нашей задачей является получение уравнений на квазиклассическую функцию Грина, для этого необходимо исключить ξ из уравнений (72) и (75). Чтобы исключить ξ , домножим (72) на τ_z слева, а (75) на τ_z справа и рассмотрим их разность

$$\left(i\omega_n \sigma_0 \tau_z + \frac{i}{2} \mathbf{v}_F \nabla_{\mathbf{R}} \sigma_0 \tau_0 - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_0 - \tau_z \check{\Delta}(\mathbf{R}) - \tau_z \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \right) \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) = \quad (77)$$

$$= \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) \left(i\omega_n \sigma_0 \tau_z - \frac{i}{2} \mathbf{v}_F \nabla_{\mathbf{R}} \sigma_0 \tau_0 - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_0 - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z - \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \tau_z \right)$$

Домножим получившееся уравнение на τ_z слева и запишем его в коммутаторной форме

$$[i\omega_n \sigma_0 \tau_z - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_0 - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z - \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \tau_z, \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n})] + \quad (78)$$

$$+ i\mathbf{v}_F \nabla_{\mathbf{R}} \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \xi, \mathbf{n}) = 0,$$

где мы воспользовались соотношением $\tau_z^2 = 1$. Домножив (78) на $\frac{i}{\pi}$ и проинтегрировав по ξ , получим уравнения Эйленберга на квазиклассическую функцию Грина

$$[i\omega_n \sigma_0 \tau_z - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_0 - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z - \check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) \tau_z, \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n})] + \quad (79)$$

$$+ i\mathbf{v}_F \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = 0,$$

В терминах квазиклассической функции Грина уравнения на параметр порядка и собственную энергетическую можно переписать следующим образом

$$\Delta(\mathbf{r}) = -\pi g \nu_0 T \sum_{\omega_n} \int d\mathbf{n} \text{Tr} \left\{ \frac{i\sigma_y}{2} \hat{f}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \right\}, \quad (80)$$

$$\check{\Sigma}(i\omega_n, \mathbf{R}) = \frac{-i}{2\tau} \int d\mathbf{n} \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \tau_z = \frac{-i}{2\tau} \langle \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \rangle \tau_z, \quad (81)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по поверхности Ферми. Подставив в уравнение Эйленберга выражение для $\check{\Sigma}$, получим

$$\left[i\omega_n \sigma_0 \tau_z - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_0 - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z + \frac{i}{2\tau} \langle \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \rangle, \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \right] + \quad (82)$$

$$+ i v_F \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = 0$$

Заметим, что в отличие от изначальных уравнений Горькова уравнения Эйленберга инвариантны относительно перенормировки функции Грина. Однако благодаря коммутаторному виду уравнений Эйленберга становится возможным написать нормировочное соотношение на $\check{g}^2$. Действительно, распишем $\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}^2(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n})$ с учетом уравнений Эйленберга, получим

$$\mathbf{n} \nabla_{\mathbf{R}} \check{g}^2(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = \quad (83)$$

$$= \frac{i}{v_F} \left[i\omega_n \sigma_0 \tau_z - h(p_F \mathbf{n}) \sigma_z \tau_0 - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z + \frac{i}{2\tau} \langle \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \rangle, \check{g}^2(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \right]$$

Таким образом, если соотношение $\check{g}^2(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = \text{const} * \sigma_0 \tau_0$ выполнено для фиксированного $\mathbf{R}$, то оно будет верно вдоль направления, задаваемого вектором $\mathbf{n}$. Предположим, что на бесконечности функция Грина выходит на свое равновесное значение, тогда вычислив на основе выражения (20) квазиклассическую функцию Грина, получим условие нормировки

$$g^2(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = \sigma_0 \tau_0 \quad (84)$$

4.2 Вывод уравнений Узаделя

Несмотря на существенные упрощения по сравнению с уравнениями Горькова, решение уравнений Эйленберга для квазиклассической функции Грина является весьма сложной задачей. Оказывается, в так называемом "грязном" пределе $\tau \Delta_0 \ll 1$ возможно дальнейшее упрощение квазиклассических уравнений. Предполагается, что за счет большой частоты рассеяния на примесных центрах происходит эффективное усреднение квазиклассической функции Грина по поверхности Ферми, тогда разложив $\check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n})$ как функцию вектора $\mathbf{n}$ на угловые гармоники, можно считать, что $\check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n})$ слабо отличается от нулевой гармоники $\langle \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \rangle$, а остальные гармоники являются малыми поправками. Теперь задачей становится получение уравнений на изотропную квазиклассическую функцию Грина.

Мы рассматриваем эффективную двумерную задачу, поэтому перепишем общее ур. (82) в терминах полярного угла ϕ , который задает направление $\mathbf{n}$

$$\left[i\omega_n \sigma_0 \tau_z - \frac{\tilde{h}_0 p_F^2}{2} \sin 2\phi \sigma_z \tau_0 - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z + \frac{i}{2\tau} \langle \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \rangle, \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \right] + \quad (85)$$

$$+ i v_F (\cos \phi \partial_X + \sin \phi \partial_Y) \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = 0$$

Для удобства введем $h_0 = \tilde{h}_0 p_F^2 / 2$ В стандартном выводе уравнений Узаделя разложение квазиклассической функции Грина обрывается уже на первой гармонике, однако в нашем случае за счет включения альтермагнитного обменного поля в уравнения Эйленберга явным образом входит вторая угловая гармоника, поэтому для корректного учета влияния альтермагнитного обменного поля нужно оборвать разложение на второй гармонике

$$\check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) = \check{\mathcal{G}}_0(i\omega_n, \mathbf{R}) + \check{\mathcal{G}}_1^S(i\omega_n, \mathbf{R}) \cos \phi + \check{\mathcal{G}}_1^A(i\omega_n, \mathbf{R}) \sin \phi + \quad (86)$$

$$+ \check{\mathcal{G}}_2^S(i\omega_n, \mathbf{R}) \cos 2\phi + \check{\mathcal{G}}_2^A(i\omega_n, \mathbf{R}) \sin 2\phi$$

Подставим разложение (86) в уравнения (85), разрешим произведение гармоник и выделим вклад при каждой гармонике. Т.к. разложение функции Грина производилось только до второй гармоники, то и в уравнениях мы должны отбросить гармоники старше второй. Т.к. уравнения должны быть верны для любого значения ϕ , то должен обращаться в ноль вклад от каждой гармоники, в итоге получаем систему уравнений

$$[i\omega_n\sigma_0\tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R})\tau_z, \check{\mathcal{G}}_0] - \frac{1}{2}[h_0\sigma_z\tau_0, \check{\mathcal{G}}_2^S] + \frac{iv_F}{2}(\partial_X\check{\mathcal{G}}_1^S + \partial_Y\check{\mathcal{G}}_1^A) = 0 \quad (87)$$

$$\left[i\omega_n\sigma_0\tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R})\tau_z + \frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^S \right] - \left[\frac{h_0}{2}\sigma_z\tau_0, \check{\mathcal{G}}_1^A \right] + iv_F \left(\partial_X\check{\mathcal{G}}_0 + \frac{\partial_X\check{\mathcal{G}}_2^S + \partial_Y\check{\mathcal{G}}_2^A}{2} \right) = 0 \quad (88)$$

$$\left[i\omega_n\sigma_0\tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R})\tau_z + \frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^A \right] - \left[\frac{h_0}{2}\sigma_z\tau_0, \check{\mathcal{G}}_1^S \right] + iv_F \left(\partial_Y\check{\mathcal{G}}_0 + \frac{\partial_X\check{\mathcal{G}}_2^A - \partial_Y\check{\mathcal{G}}_2^S}{2} \right) = 0 \quad (89)$$

$$\left[i\omega_n\sigma_0\tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R})\tau_z + \frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^S \right] + iv_F \frac{\partial_X\check{\mathcal{G}}_1^S - \partial_Y\check{\mathcal{G}}_1^A}{2} = 0 \quad (90)$$

$$\left[i\omega_n\sigma_0\tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R})\tau_z + \frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^A \right] - [h_0\sigma_z\tau_0, \check{\mathcal{G}}_0] + iv_F \frac{\partial_X\check{\mathcal{G}}_1^A + \partial_Y\check{\mathcal{G}}_1^S}{2} = 0 \quad (91)$$

где аргументы функций Грина были опущены ради краткости. Предположим, что для ненулевых гармоник верна оценка $\check{\mathcal{G}}_1^S \sim \check{\mathcal{G}}_1^A \sim \check{\mathcal{G}}_2^S \sim \check{\mathcal{G}}_2^A \sim \tau\check{\mathcal{G}}_0$, тогда в главном порядке уравнения (88)-(91) примут вид

$$\begin{cases} \left[\frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^S \right] + iv_F\partial_X\check{\mathcal{G}}_0 \\ \left[\frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^A \right] + iv_F\partial_Y\check{\mathcal{G}}_0 = 0 \\ \left[\frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^S \right] = 0 \\ \left[\frac{i}{2\tau}\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^A \right] - [h_0\sigma_z\tau_0, \check{\mathcal{G}}_0] = 0 \end{cases} \quad (92)$$

Для дальнейшего упрощения уравнений необходимо разрешить коммутатор нулевой и ненулевой гармоники, для этого воспользуемся условием нормировки (84). Подставим разложение (86) в условие нормировки и оставим члены вплоть до первого порядка малости

$$(\check{\mathcal{G}}_0)^2 + \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^S\} \cos \phi + \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^A\} \sin \phi + \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^S\} \cos 2\phi + \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^A\} \sin 2\phi = \sigma_0\tau_0 \quad (93)$$

Приравнивая вклады при соответствующих гармониках, получаем

$$(\check{\mathcal{G}}_0)^2 = \sigma_0\tau_0 \quad (94)$$

$$\{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^S\} = \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_1^A\} = \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^S\} = \{\check{\mathcal{G}}_0, \check{\mathcal{G}}_2^A\} = 0 \quad (95)$$

Используя соотношения (95), упростим коммутаторы в (92)

$$\begin{cases} \frac{i}{\tau}\check{\mathcal{G}}_0\check{\mathcal{G}}_1^S + iv_F\partial_X\check{\mathcal{G}}_0 \\ \frac{i}{\tau}\check{\mathcal{G}}_0\check{\mathcal{G}}_1^A + iv_F\partial_Y\check{\mathcal{G}}_0 = 0 \\ \frac{i}{\tau}\check{\mathcal{G}}_0\check{\mathcal{G}}_2^S = 0 \\ \frac{i}{\tau}\check{\mathcal{G}}_0\check{\mathcal{G}}_2^A - [h_0\sigma_z\tau_0, \check{\mathcal{G}}_0] = 0 \end{cases} \quad (96)$$

Теперь домножим уравнения слева на $\check{\mathcal{G}}_0$ и воспользуемся условием нормировки (94), чтобы получить выражение для ненулевых гармоник в терминах $\check{\mathcal{G}}_0$

$$\begin{cases} \check{\mathcal{G}}_1^S = -v_F \tau \check{\mathcal{G}}_0 \partial_X \check{\mathcal{G}}_0 \\ \check{\mathcal{G}}_1^A = -v_F \tau \check{\mathcal{G}}_0 \partial_Y \check{\mathcal{G}}_0 \\ \check{\mathcal{G}}_2^S = 0 \\ \check{\mathcal{G}}_2^A = -i\tau \check{\mathcal{G}}_0 [h_0 \sigma_z \tau_0, \check{\mathcal{G}}_0] \end{cases} \quad (97)$$

Равенство $\check{\mathcal{G}}_2^S = 0$ следует понимать в смысле $\check{\mathcal{G}}_2^S = \mathcal{O}(\tau^2)$. Итоговое уравнение Узаделя на нулевую гармонику запишется в виде

$$\begin{aligned} [i\omega_n \sigma_0 \tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z, \check{\mathcal{G}}_0] + \frac{i\tau}{2} [h_0 \sigma_z \tau_0, \check{\mathcal{G}}_0 [h_0 \sigma_z \tau_0, \check{\mathcal{G}}_0]] + \\ - \frac{iv_F^2 \tau}{2} (\partial_X (\check{\mathcal{G}}_0 \partial_X \check{\mathcal{G}}_0) + \partial_Y (\check{\mathcal{G}}_0 \partial_Y \check{\mathcal{G}}_0)) = 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Таким образом влияние альтермагнитного обменного поля сводится к слагаемому $\frac{i\tau}{2} [h_0 \sigma_z \tau_0, \check{\mathcal{G}}_0 [h_0 \sigma_z \tau_0, \check{\mathcal{G}}_0]]$. Чтобы лучше понять физический смысл данного члена, раскроем двойной коммутатор и перегруппируем слагаемые

$$\begin{aligned} [h_0 \sigma_z, \check{\mathcal{G}}_0 [h_0 \sigma_z, \check{\mathcal{G}}_0]] = \\ = h_0 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 h_0 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 - h_0 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 \check{\mathcal{G}}_0 h_0 \sigma_z - \check{\mathcal{G}}_0 h_0 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 h_0 \sigma_z + \check{\mathcal{G}}_0 \check{\mathcal{G}}_0 h_0 \sigma_z h_0 \sigma_z = \\ = h_0^2 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 - h_0^2 \check{\mathcal{G}}_0 \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 \sigma_z = h_0^2 [\sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 \sigma_z, \check{\mathcal{G}}_0] \end{aligned} \quad (99)$$

где мы использовали условие нормировки (94). Подставив член в данном виде в уравнение Узаделя, получим

$$\begin{aligned} \left[i\omega_n \sigma_0 \tau_z - \check{\Delta}(\mathbf{R}) \tau_z + i \frac{h_0^2 \tau}{2} \sigma_z \check{\mathcal{G}}_0 (i\omega_n, \mathbf{R}) \sigma_z, \check{\mathcal{G}}_0 (i\omega_n, \mathbf{R}) \right] + \\ - i D_{2D} \nabla_{\mathbf{R}} (\check{\mathcal{G}}_0 (i\omega_n, \mathbf{R}) \nabla_{\mathbf{R}} \check{\mathcal{G}}_0 (i\omega_n, \mathbf{R})) = 0 \end{aligned} \quad (100)$$

где $D_{2D} = v_F^2 \tau / 2$ - коэффициент диффузии в 2D.

4.3 Эффективные магнитные примеси

Заметим, что после перегруппировки членов вклад альтермагнитного обменного поля свелся к эффективным слабым парамагнитным примесям с анизотропией вида легкая z-ось, эффективным временем spin-flip'a будет $\tau_s = (h_0^2 \tau)^{-1}$.

Покажем, что это действительно так. Пусть у нас есть парамагнитные примеси низкой концентрации, спин которых может смотреть только вдоль оси z, тогда по аналогии с (52) и (69) собственная энергетическая часть, связанная с магнитным рассеянием, в вигнеровском представлении будет иметь вид

$$\check{\Sigma}_s(i\omega_n, \mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau_s} \int (d^3p) \sigma_z \tau_z \check{G}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{p}) \sigma_z \tau_z \quad (101)$$

Соответственно, с учетом магнитного рассеяния в уравнениях Эйленбергера появится член

$$\left[\frac{i}{2\tau_s} \sigma_z \langle \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \rangle \sigma_z, \check{g}(i\omega_n, \mathbf{R}, \mathbf{n}) \right] \quad (102)$$

Т.к. концентрации парамагнитных примесей мала, то $\tau_s^{-1} \ll \tau^{-1}$, поэтому при выводе уравнений Узаделя вклад от магнитного рассеяния сохранится только в уравнении на нулевую гармонику

$$\left[\frac{i}{2\tau_s} \sigma_z \mathcal{G}_0 \sigma_z, \mathcal{G}_0 \right] \quad (103)$$

Данный член имеет тот же вид, что и член, полученный нами из альтермагнитного обменного поля.

В действительности полученный результат может быть объяснен с помощью механизма спиновой релаксации Дьяконова-Переля. Механизм Дьяконова-Переля - это механизм спиновой релаксации, возникающий в системах со спин-орбитальным взаимодействием (SOC) в пределе большой концентрации немагнитных примесей. Качественное объяснение данного механизма следующее: пусть есть спин-орбитальное взаимодействие общего вида $H_{\text{SOC}} = \mathbf{\Omega}(\mathbf{p})\boldsymbol{\sigma}$, тогда спин летящего электрона прецессирует в эффективном магнитном поле $\mathbf{\Omega}(\mathbf{p})$, которое зависит от импульса электрона; за счет частого рассеяния, сопровождающегося изменением импульса электрона, эволюция спина приобретает диффузионный характер; характерный квадрат угла поворота за время t будет равен $(\delta\phi)^2 \sim (t/\tau)(\Omega\tau)^2 = t(\Omega^2\tau)$, где t/τ - кол-во рассеяний на примесях за время t , а $\Omega\tau$ - характерный угол поворота спина за время между столкновениями. Из выражения для характерного квадрата угла поворота за время t видно, что время релаксации спина $\tau_s \sim \Omega^2\tau$. Более строгий вывод показывает, что за релаксацию спина в механизме Дьяконова-Переля отвечает тензор $\Gamma_{\alpha\beta}$ [30]

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \tau \left(\delta_{\alpha\beta} \langle \Omega_\gamma(\mathbf{p}) \Omega_\gamma(\mathbf{p}) \rangle_{p_F} - \langle \Omega_\alpha(\mathbf{p}) \Omega_\beta(\mathbf{p}) \rangle_{p_F} \right) \quad (104)$$

где $\langle \dots \rangle_{p_F}$ обозначает усреднение по поверхности Ферми. Тензор Дьяконова-Переля представляет собой тензор обратных времен свободного пробега $(\tau^{-1})_{\alpha\beta}$. С его помощью кинетическое уравнение для спиновой поляризации $\mathbf{S}$ может быть записано как

$$\frac{d}{dt} S_\alpha = -\Gamma_{\alpha\beta} S_\beta \quad (105)$$

Из-за характерной формы альтермагнитное обменное поле можно рассматривать как нетривиальное спин-орбитальное взаимодействие, которое в отличие от обычно рассматриваемого SOC инвариантно относительно инверсии и нарушает симметрию обращения во времени. Эффективное магнитное поле $\mathbf{\Omega}(\mathbf{p})$ тогда будет иметь вид

$$\mathbf{\Omega}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{h}_0 p_x p_y \end{pmatrix} \quad (106)$$

Тензор Дьяконова-Переля рассчитанный для альтермагнитного обменного поля будет

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \tau h_0^2 \left(\delta_{\alpha\beta} \langle \sin^2(2\phi) \rangle - \delta_{\alpha z} \delta_{\beta z} \langle \sin^2(2\phi) \rangle \right) = \frac{h_0^2 \tau}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (107)$$

Следовательно, включение альтермагнитного обменного поля в "грязном" пределе должно приводить к релаксации спиновых компонент S_x и S_y , что характерно для парамагнитных примесей с легкой z-осью. Таким образом, результат полученный при выводе уравнения Узаделя согласуется с механизмом Дьяконова-Переля.

Сведение влияния альтермагнитного обменного поля к эффективным магнитным примесям позволяет использовать теорию Абрикосова-Горькова для сверхпроводника с магнитными примесями для описания S/AM бислоя в "грязном" пределе. Убедимся в этом, для этого рассчитаем плотность состояний и найдем критическую амплитуду обменного поля для случая однородного параметра порядка.

Будем искать решение уравнений Узаделя (100) в виде $\tilde{\mathcal{G}}_0(i\omega_n, \mathbf{R}) = \text{sgn } \omega_n \tilde{g}(i\omega_n) \sigma_0 \tau_z + \tilde{f}(i\omega_n) \sigma_y \tau_x$ и $\tilde{\Delta} = -\Delta \sigma_y \tau_y$, где $\tilde{g}, \tilde{f}, \Delta$ однородны в пространстве. После подстановки получаем следующее уравнение связывающее $\tilde{g}, \tilde{f}$ и Δ

$$\text{sgn } \omega_n \Delta \tilde{g} = (\omega_n + \text{sgn } \omega_n \tilde{g} \tau h_0^2) \tilde{f} \quad (108)$$

Из условия нормировки получаем еще одно уравнение

$$g^2 + f^2 = 1 \quad (109)$$

С учетом вида $\tilde{\mathcal{G}}_0$ уравнение самосогласования примет вид

$$\Delta = \pi g \nu_0 T \sum_{\omega_n} \tilde{f}(i\omega_n) \quad (110)$$

Как известно, плотность состояний может быть выражена через аналитическое продолжение нормальной квазиклассической функции Грина

$$N(\epsilon) = 2\nu_0 \text{Re}(\text{sgn } \omega_n \tilde{g}(i\omega_n)) \Big|_{i\omega \rightarrow \epsilon + i0} = 2\nu_0 \text{Re } \tilde{g}(i\omega_n) \Big|_{i\omega \rightarrow \epsilon + i0} \quad (111)$$

Выразив $\tilde{f}(i\omega_n)$ из (108) и подставив в (109) и (110), получим

$$\tilde{g}^2 + \frac{\Delta^2 \tilde{g}^2}{(|\omega_n| + \tilde{g} \tau h^2)^2} = 1 \quad (112)$$

$$\Delta = \pi g \nu_0 T \sum_{\omega_n} \text{sgn } \omega_n \frac{\Delta \tilde{g}}{|\omega_n| + \tilde{g} \tau h^2} \quad (113)$$

Для вычисления критической температуры будем решать уравнения в линейном порядке по параметру порядка Δ , тогда уравнения примут вид

$$\tilde{g}^2 = 1 \quad (114)$$

$$1 = \pi g \nu_0 T_c \sum_{\omega_n} \frac{g}{|\omega_n| + \tilde{g} \tau h^2} \quad (115)$$

Корректным решением будет $\tilde{g} = 1$, т.к. в при отсутствии обменного поля должно получаться стандартное уравнение самосогласования. Таким образом получаем

$$1 = \pi g \nu_0 T_c \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n| + \tau h^2} \quad (116)$$

Используем стандартный трюк для регуляризации суммы

$$\ln \frac{T_c}{T_c^0} = 2\pi T_c \sum_{\omega_n > 0} \frac{1}{\omega_n + \tau h^2} - \frac{1}{\omega_n} \quad (117)$$

С помощью представления дигамма функции в виде ряда можем переписать уравнение самосогласования для критической температуры

$$\ln \frac{T_c}{T_c^0} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{h_0^2 \tau}{2\pi T_c}\right) \quad (118)$$

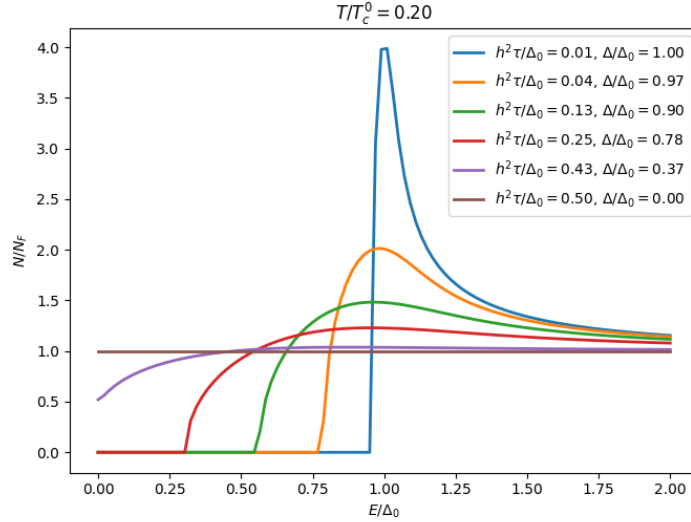


Рис. 3: Нормированная плотность состояний построенная для разных значений распаривающего фактора $h_0^2 \tau$ и температуре $T_c = 0.2 T_c^0$, где N_F - полная плотность состояний на уровне Ферми в нормальном металле

Полученное уравнение находится в соответствии с теорией Абрикосова-Горькова. Найдем критическое значение амплитуды обменного поля при нулевой температуре, для этого устремим $T_c \rightarrow 0$

$$\ln \frac{T_c}{T_c^0} = \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \ln \frac{(h_0^c)^2 \tau}{2\pi T_c} \implies h_0^c(T=0) = \sqrt{\frac{4\pi T_c^0 e^{\psi(1/2)}}{2\tau}} = \sqrt{\frac{\Delta_0}{2\tau}} \quad (119)$$

Как и следовало ожидать, данный результат воспроизводит (50). Из теории Абрикосова-Горькова можно также получить амплитуду альтермагнитного обменного поля h_0^{gap} , при которой пропадает щель в спектре квазичастиц при $T = 0$

$$(h_0^{\text{gap}})^2 \tau = \Delta_0 e^{-\pi/4} \implies h_0^{\text{gap}}(T=0) = \sqrt{\frac{\Delta_0}{\tau}} e^{-\pi/8} \quad (120)$$

Теория Абрикосова-Горькова также предсказывает определенный вид плотности состояний. Численный расчет, основанный на совместном решении уравнений (112) и (110) и выражении для плотности состояний (111), представлен на Рис. 3. Полученная картина плотности состояний представляет большой интерес, т.к. потенциально может быть полезна для идентификации альтермагнитных материалов. Действительно, как было упомянуто в разделе 3.1, нет качественного различия между кривыми $T_c(\tau^{-1})$ в бислое S/AM и бислое S/AF в случае малого химического потенциала. Однако плотность состояний характерная для теории Абрикосова-Горькова существенным образом связана с тем, что в "грязном" пределе в S/AM бислое влияние обменного поля сводится к эффективным магнитным примесям, что в свою очередь обусловлено тем, что альтермагнитное обменное поле может быть представлено в виде спин-орбитального взаимодействия. Таким образом, полученная картина плотности состояний должна быть характерна именно для S/AM бислоя и может быть использована для идентификации альтермагнитных материалов. Данный феномен представляет интерес, т.к. на данный момент наиболее распространенные методы обнаружения альтермагнитных материалов основаны либо на измерении транспортных свойств, либо на непосредственном измерении спинового расщепления при помощи спектроскопии. Оба существующих подхода трудоемки в реализации, в то же время измерение плотности состояний представляется менее трудоемкой задачей.

5 Заключение

В данной работе было рассмотрено влияние беспорядка в виде примесей на сверхпроводящее состояние в бислое из s-волнового сверхпроводника и планарного d-волнового альтермагнитного изолятора.

В рамках уравнений Горькова было получено уравнение самосогласования для критической температуры однородного сверхпроводящего состояния в исследуемой гибридной системе в . Было обнаружено, что увеличение концентрации немагнитных примесей приводит к подавлению обменного поля за счет эффективного усреднения по поверхности Ферми, как следствие критическая температура растет при увеличении концентрации примесей и в грязном пределе стремится к критической температуре s-волнового сверхпроводника в нулевом обменном поле. Помимо этого, включение рассеяния на немагнитных примесях приводило к качественному изменению фазового перехода в области низких температур за счет размывания узловых линий в альтермагнитном обменном поле.

Аналогичным образом в рамках уравнений Горькова было обнаружено, что в случае рассеяния на слабых парамагнитных примесях критическая температура однородного сверхпроводящего состояния становится немонотонной функцией времени свободного пробега. Такое поведение критической температуры связано с конкуренцией между двумя механизмами: 1) восстановлением сверхпроводящего порядка за счет подавления обменного поля; 2) подавлением сверхпроводимости из-за рассеяния на магнитных примесях.

В данной работе также было выведено уравнение Узаделя для описания сверхпроводящего состояния в гибридной S/AM системе в "грязном" пределе. Было получено, что в главном порядке квазиклассического приближения влияние альтермагнитного обменного поля сводится к влиянию эффективных магнитных примесей с легкой осью. Полученный результат находится в соответствии с механизмом спиновой релаксации Дьяконова-Переля, поскольку альтермагнитное обменное поле имеет вид эффективно спин-орбитального взаимодействия. Данный результат представляет практический интерес, т.к. предсказывает возможность идентификации альтермагнитных материалов с помощью измерения плотности состояний.

В дальнейшем планируется обобщения результатов, полученных в данной работе, на гибридные структуры с альтермагнетиками с другими типами симметрий. Помимо этого планируется рассмотрение других механизмов рассеяния электронов, например, рассеяние на границах образца и рассеяние на доменных стенках.

Список литературы

- [1] M. V. Sadvskii. Superconductivity and localization. *Physics Reports*, 282:225–348, 1997.
- [2] M.V. Feigel'man, L.B. Ioffe, V.E. Kravtsov, and E. Cuevas. Fractal superconductivity near localization threshold. *Annals of Physics*, 325(7):1390–1478, July 2010.
- [3] V. P. Mineev and K. V. Samokhin. *Introduction to unconventional superconductivity*. Gordon and Breach, 1999.
- [4] A. I. Buzdin. Proximity effects in superconductor-ferromagnet heterostructures. *Rev. Mod. Phys.*, 77:935–976, Sep 2005.
- [5] F. S. Bergeret, A. F. Volkov, and K. B. Efetov. Odd triplet superconductivity and related phenomena in superconductor-ferromagnet structures. *Rev. Mod. Phys.*, 77:1321–1373, Nov 2005.
- [6] A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, S. M. Kuznetsova, and A. I. Buzdin. Interference phenomena and long-range proximity effect in clean superconductor-ferromagnet systems. *Phys. Rev. Lett.*, 109:237006, Dec 2012.
- [7] A. I. Buzdin and L. N. Bulaevskii. Antiferromagnetic superconductors. *Usp. Fiz. Nauk*, 149(5):45–67, 1986.
- [8] I. V. Bobkova, G. A. Bobkov, V. M. Gordeeva, and A. M. Bobkov. Neel proximity effect in superconductor/antiferromagnet heterostructures. *Mesoscience and nanotechnology*, 1:01004, 2024.
- [9] G. A. Bobkov, I. V. Bobkova, A. M. Bobkov, and Akashdeep Kamra. Néel proximity effect at antiferromagnet/superconductor interfaces. *Physical Review B*, 106(14), October 2022.
- [10] G. A. Bobkov, I. V. Bobkova, and A. M. Bobkov. Proximity effect in superconductor/antiferromagnet hybrids: Néel triplets and impurity suppression of superconductivity. *Physical Review B*, 108(5), August 2023.
- [11] Chi Sun, Arne Brataas, and Jacob Linder. Andreev reflection in altermagnets. *Phys. Rev. B*, 108:054511, Aug 2023.
- [12] Song-Bo Zhang, Lun-Hui Hu, and Titus Neupert. Finite-momentum cooper pairing in proximitized altermagnets. *Nature Communications*, 15(1), February 2024.
- [13] Sayan Banerjee and Mathias S. Scheurer. Altermagnetic superconducting diode effect. *Physical Review B*, 110(2), July 2024.
- [14] Yu-Xuan Li and Cheng-Cheng Liu. Majorana corner modes and tunable patterns in an altermagnet heterostructure. *Phys. Rev. B*, 108:205410, Nov 2023.
- [15] Zexin Feng, Xiaorong Zhou, Libor Šmejkal, Lei Wu, Zengwei Zhu, Huixin Guo, Rafael González-Hernández, Xiaoning Wang, Han Yan, Peixin Qin, Xin Zhang, Haojiang Wu, Hongyu Chen, Ziang Meng, Li Liu, Zhengcai Xia, Jairo Sinova, Tomáš Jungwirth, and Zhiqi Liu. An anomalous hall effect in altermagnetic ruthenium dioxide. *Nature Electronics*, 5(11):735–743, November 2022.

- [16] Libor Šmejkal, Jairo Sinova, and Tomas Jungwirth. Emerging research landscape of altermagnetism. *Phys. Rev. X*, 12:040501, Dec 2022.
- [17] Libor Šmejkal, Jairo Sinova, and Tomas Jungwirth. Beyond conventional ferromagnetism and antiferromagnetism: A phase with nonrelativistic spin and crystal rotation symmetry. *Physical Review X*, 12(3), September 2022.
- [18] Rafael González-Hernández, Libor Šmejkal, Karel Výborný, Yuta Yahagi, Jairo Sinova, Tomáš Jungwirth, and Jakub Železný. Efficient electrical spin splitter based on nonrelativistic collinear antiferromagnetism. *Phys. Rev. Lett.*, 126:127701, Mar 2021.
- [19] Arnab Bose, Nathaniel J. Schreiber, Rakshit Jain, Ding-Fu Shao, Hari P. Nair, Jiaxin Sun, Xiyue S. Zhang, David A. Muller, Evgeny Y. Tsybal, Darrell G. Schlom, and Daniel C. Ralph. Tilted spin current generated by the collinear antiferromagnet ruthenium dioxide. *Nature Electronics*, 5(5):267–274, May 2022.
- [20] Sangeeta Rajpurohit, Revsen Karaalp, Yuan Ping, Liang Z. Tan, Tadashi Ogitsu, and Peter E. Blöchl. Optical control of spin-splitting in an altermagnet, 2024.
- [21] Michał Papaj. Andreev reflection at the altermagnet-superconductor interface. *Phys. Rev. B*, 108:L060508, Aug 2023.
- [22] Jabir Ali Ouassou, Arne Brataas, and Jacob Linder. dc josephson effect in altermagnets. *Phys. Rev. Lett.*, 131:076003, Aug 2023.
- [23] C. W. J. Beenakker and T. Vakhtel. Phase-shifted andreev levels in an altermagnet josephson junction. *Phys. Rev. B*, 108:075425, Aug 2023.
- [24] Di Zhu, Dongling Liu, Zheng-Yang Zhuang, Zhigang Wu, and Zhongbo Yan. Field-sensitive dislocation bound states in two-dimensional d -wave altermagnets, 2024.
- [25] Sayan Banerjee and Mathias S. Scheurer. Altermagnetic superconducting diode effect. *Phys. Rev. B*, 110:024503, Jul 2024.
- [26] Qiang Cheng, Yue Mao, and Qing-Feng Sun. Field-free josephson diode effect in altermagnet/normal metal/altermagnet junctions. *Phys. Rev. B*, 110:014518, Jul 2024.
- [27] Simran Chourasia, Aleksandr Svetogorov, Akashdeep Kamra, and Wolfgang Belzig. Thermodynamic properties of a superconductor interfaced with an altermagnet, 2024.
- [28] Andrea Maiani and Rubén Seoane Souto. Impurity states in altermagnetic superconductors, 2024.
- [29] JB Ketterson and SN Song. *Superconductivity*. Cambridge university press, 1999.
- [30] M.I. Dyakonov and V.I. Perel. Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors. *Physics Letters A*, 35(6):459–460, 1971.

6 Приложение

Приложение имеет следующую структуру: подраздел 6.1 содержит вывод низкотемпературной асимптотики уравнения самосогласования для критической температуры S/AM бислоя в присутствии немагнитных примесей; подраздел 6.2 содержит вывод низкотемпературной асимптотики для того же уравнения, но в чистом пределе.

6.1 Получение низкотемпературной асимптотики с учетом примесного рассеяния методом суммирования Эйлера-Маклорена

Стартовой точкой является уравнение самосогласования для критической температуры S/AM бислоя в присутствии немагнитных примесей полученное в разделе 3.1

$$\ln \frac{T}{T_c^0} = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left(\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + (\omega_n + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} - \frac{1}{\omega_n} \right) \quad (121)$$

Для получения низкотемпературной асимптотики можно воспользоваться формулой суммирования Эйлера-Маклорена

$$\sum_{n=0}^N f(n) = \int_0^N dz f(z) + \frac{f(0) + f(N)}{2} + \frac{1}{6} \frac{f'(N) - f'(0)}{2} + R_3(N), \quad (122)$$

$$|R_3(N)| < \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} \int_0^N |f'''(z)| dz, \quad (123)$$

$$f(n) = \frac{2\pi T}{\sqrt{h_0^2 + (\pi T(2n+1) + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}}, \quad (124)$$

где R_3 - остаточный член. Для упрощения последующих преобразований и устранения логарифмической расходимости в (121) удобно вначале обрезать сумму по Мацубаровским частотам на некотором числе N , а в самом конце взять предел $N \rightarrow \infty$.

$$\ln \frac{T}{T_c^0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \left(\frac{2\pi T}{\sqrt{h_0^2 + (\pi T(2n+1) + \frac{1}{2\tau})^2} - \frac{1}{2\tau}} - \frac{2\pi T}{\pi T(2n+1)} \right) \quad (125)$$

Используя представление дигамма функции в виде ряда, мы можем переписать второй член в скобках в следующем виде

$$\sum_{n=0}^N \frac{2\pi T}{\pi T(2n+1)} = 2 \ln 2 + \gamma + \psi \left(N + \frac{3}{2} \right)$$

Т.к. $f \sim \frac{1}{n}$, то логарифмическая расходимость возникнет только в интегральном члене в формуле (122), поэтому в оставшихся членах можем взять предел $N \rightarrow \infty$.

$$\ln \frac{T}{T_c^0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^N dz f(z) - \psi \left(N + \frac{3}{2} \right) - 2 \ln 2 - \gamma \right) + \frac{f(0)}{2} - \frac{f'(0)}{12} + R_3(\infty) \quad (126)$$

Т.к. $f(z)$ - неотрицательная функция для положительных z , то можем получить следующую оценку сверху для остаточного члена

$$|R_3(\infty)| < \frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} \int_0^\infty f'''(z) dz = -\frac{2\zeta(3)}{(2\pi)^3} f''(0) \sim T^3 \quad (127)$$

Для упрощения интегральных члены в ур. (126) удобно сделать замену $y = 2\pi\tau T(2z + 1) + 1$ и явно выделить расходящийся вклад в подынтегральном выражении

$$\int_0^N dz \frac{2\pi T}{\sqrt{h_0^2 + (\pi T(2z + 1) + \frac{1}{2\tau})^2 - \frac{1}{2\tau}}} = \int_{2\pi\tau T+1}^{2\pi\tau T(2N+1)+1} dy \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1}} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1}} &= \frac{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2 + 1}}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2}} \frac{(2\tau h_0)^2 + y^2}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} = \\ &= \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} + \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2}} \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} \end{aligned} \quad (129)$$

В пределе больших y слагаемые в полученном выражении имеют следующее асимптотическое поведение

$$\frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} \sim \frac{1}{y^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2}} \sim \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2}} \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} \sim \frac{1}{y^{3/2}} \quad (130)$$

Таким образом, только второе слагаемое в подынтегральной функции содержит логарифмическую расходимость, поэтому для упрощения вычислений мы можем взять предел $N \rightarrow \infty$ в интеграле от первого и третьего слагаемых. Более того, с помощью замены мы можем привести третье слагаемое к тому же виду, что и первое.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{2\pi\tau T+1}^{2\pi\tau T(2N+1)+1} dy \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} = \int_{2\pi\tau T+1}^{\infty} dy \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} \quad (131)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{2\pi\tau T+1}^{2\pi\tau T(2N+1)+1} \frac{dy}{\sqrt{(2\tau h_0)^2 + y^2}} \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} = \quad (132)$$

$$\begin{aligned} &= \left| u = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (2\tau h_0)^2}}, \quad u_0 = \frac{2\pi\tau T + 1}{\sqrt{(2\pi\tau T + 1)^2 + (2\tau h_0)^2}}, \quad u_N = \frac{2\pi\tau(2N + 1)T + 1}{\sqrt{(2\pi\tau(2N + 1)T + 1)^2 + (2\tau h_0)^2}} \right| = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{u_0}^{u_N} \frac{du}{(2\tau h_0)^2 + u^2 - 1} = \int_{u_0}^1 \frac{du}{(2\tau h_0)^2 + u^2 - 1} \end{aligned}$$

Слагаем, дающее логарифмическую расходимость, тривиально интегрируется. В результате для расходящихся слагаемых получаем

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{2\pi\tau T+1}^{2\pi\tau T(2N+1)+1} dy \frac{1}{\sqrt{h_0^2 + y^2}} - \ln(4e^\gamma) - \psi\left(\frac{3}{2} + N\right) \right) = \quad (133) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{4\pi T N}{h_0} - \ln(4e^\gamma N) - \operatorname{arctanh} \frac{2\pi\tau T + 1}{\sqrt{(2\pi\tau T + 1)^2 + (2\tau h_0)^2}} \right) = \\ &= \ln \frac{\pi T}{e^\gamma h_0} - \operatorname{arctanh} \frac{2\pi\tau T + 1}{\sqrt{(2\pi\tau T + 1)^2 + (2\tau h_0)^2}} \end{aligned}$$

Подставив все в ур. (126) и используя соотношение между критической температурой и сверхпроводящей щелью при нулевой температуре в модели БКШ $\Delta_0 = \pi e^{-\gamma} T_c^0$

получим следующее уравнение:

$$\ln \frac{h_0}{\Delta_0} = -\operatorname{arctanh} \frac{2\tau\pi T + 1}{\sqrt{(2\tau\pi T + 1)^2 + (2\tau h_0)^2}} + \int_{u_0}^1 dy \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} + \int_{2\tau\pi T + 1}^{\infty} dy \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1} + \frac{f(0)}{2} - \frac{f'(0)}{12} + R_3(\infty). \quad (134)$$

Теперь для получения низкотемпературной асимптотики разложим ур. (134) по степеням T вплоть до второго порядка. Итоговое уравнение запишется в виде

$$\ln \frac{h_0}{\Delta_0} = a(h_0\tau) - b(h_0\tau)\tau^2 T^2, \quad (135)$$

$$a(h_0\tau) = -\operatorname{arctanh} \frac{1}{\sqrt{1 + (2\tau h_0)^2}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{1 + (2\tau h_0)^2}}}^{\infty} dy \frac{1}{(2\tau h_0)^2 + y^2 - 1}, \quad (136)$$

$$b(h_0\tau) = \frac{2\pi^2}{3\sqrt{1 + \sqrt{1 + (2\tau h_0)^2}} \left(\sqrt{1 + (2\tau h_0)^2} - 1 \right)^2}. \quad (137)$$

Явный вид коэффициента $a(h_0\tau)$ зависит от соотношения между h_0 и τ

$$a(h_0\tau) = -\operatorname{arctanh} \frac{1}{\sqrt{1 + (2h_0\tau)^2}} + \frac{1}{\sqrt{|1 - (2h_0\tau)^2|}} \begin{cases} \operatorname{arctanh} \sqrt{1 - (2h_0\tau)^4}, & 2h_0\tau < 1 \\ \operatorname{arctan} \sqrt{(2h_0\tau)^4 - 1}, & 2h_0\tau > 1 \end{cases} \quad (138)$$

Рассмотрев предел слабого ($h_0\tau \rightarrow \infty$) и сильного ($h_0\tau \rightarrow 0$) беспорядка, получим асимптотическое поведение для коэффициентов a и b

$$h_0\tau \rightarrow \infty: \quad a = \frac{\pi - 2}{4h_0\tau}, \quad b = \frac{\pi^2}{12(h_0\tau)^3}, \quad (139)$$

$$h_0\tau \rightarrow 0: \quad a = \ln \frac{1}{2h_0\tau}, \quad b = \frac{\pi^2}{6(h_0\tau)^4}. \quad (140)$$

6.2 Получение низкотемпературной асимптотики в чистом пределе методом суммирования по Пуассону

Так же как и предыдущем подразделе стартовой точкой является уравнение самосогласования для критической температуры S/АМ бислоя, однако теперь мы рассматриваем его в чистом пределе

$$\ln \frac{T}{T_c^0} = 2\pi T \sum_{\omega_n > 0} \left(\frac{1}{\sqrt{h_0^2 + \omega_n^2}} - \frac{1}{\omega_n} \right) \quad (141)$$

Для получения низкотемпературной асимптотики можно воспользоваться формулой суммирования Пуассона

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F[f](2\pi k), \quad F[f](w) = \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) e^{izw} \quad (142)$$

Аналогично предыдущему подразделу, для устранения расходимости удобно вначале обрезать сумму по Мацубаровским частотам на некотором числе N , а в конце взять предел $N \rightarrow \infty$. Однако для использования формулу суммирования Пуассона нам

необходимо иметь сумму от $-\infty$ до ∞ , поэтому, воспользовавшись симметрией первого слагаемого относительно замены $\omega_n \rightarrow -\omega_n$, распространим суммирование на отрицательные Мацубаровские частоты и перепишем обрезку с помощью тета-функции Хевисайда как $\theta(N^2 - n^2)$.

$$\ln \frac{T}{T_c^0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi T \theta(N^2 - n^2)}{\sqrt{h_0^2 + \pi^2 T^2 (2n+1)^2}} - \sum_{n=0}^N \frac{2\pi T}{\pi T (2n+1)} \right) \quad (143)$$

Используя формулу суммирования Пуассона и представления дигамма функции в виде ряда, получим

$$\ln \frac{T}{T_c^0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} F \left[\frac{\pi T \theta(N^2 - z^2)}{\sqrt{h_0^2 + \pi^2 T^2 (2z+1)^2}} \right] (2\pi k) - \psi \left(\frac{1}{2} + N \right) - 2 \ln 2 - \gamma \right) \quad (144)$$

Т.к. логарифмическая расходимость возникает только в слагаемом на нулевой частоте $k = 0$, то для слагаемых с ненулевой частотой $k \neq 0$ можем устремить $N \rightarrow \infty$, после чего взятие фурье-образа не представляет труда

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F \left[\frac{\pi T \theta(N^2 - z^2)}{\sqrt{h_0^2 + \pi^2 T^2 (2z+1)^2}} \right] (2\pi k) = F \left[\frac{\pi T}{\sqrt{h_0^2 + \pi^2 T^2 (2z+1)^2}} \right] (2\pi k) = (-1)^k K_0 \left(\frac{|k| h_0}{T} \right) \quad (145)$$

Для слагаемых с логарифмической расходимостью получаем

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(F \left[\frac{\pi T \theta(N^2 - z^2)}{\sqrt{h_0^2 + \pi^2 T^2 (2z+1)^2}} \right] (0) - \psi \left(\frac{1}{2} + N \right) - 2 \ln 2 - \gamma \right) = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_{-N}^N dz \frac{\pi T \theta(N^2 - z^2)}{\sqrt{h_0^2 + \pi^2 T^2 (2z+1)^2}} - \ln(4e^\gamma N) \right) = \ln \frac{\pi T e^{-\gamma}}{h_0} \end{aligned} \quad (146)$$

После подстановки (146) и (145) в ур. (141) уравнение самосогласования запишется в виде

$$\ln \frac{h_0}{\Delta_0} = 2 \sum_{n>0} (-1)^n K_0 \left(\frac{|n| h_0}{T} \right) \quad (147)$$

Для получения низкотемпературной асимптотики устремляем T к нулю и оставляем только первое слагаемое в сумме

$$\ln \frac{h_0}{\Delta_0} = -\sqrt{2\pi \frac{T}{h_0}} e^{-h_0/T} \quad (148)$$