

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Тепловое проскальзывание фазы в сверхпроводящих
полосках вблизи критического тока при
произвольных температурах

Автор:

Студент 205 группы
Артёмов Иван Михайлович

Научный руководитель:

д.ф.-м.н.
Михаил Андреевич Скворцов



Москва 2026

Аннотация

В работе исследуется тепловое проскальзывание фазы в сверхпроводящих пленках в рамках уравнений Узаделя для грязного сверхпроводника. Показывается, что в режиме, когда ток через образец близок к критическому, можно организовать градиентное разложение в уравнениях Узаделя, оставив в свободной энергии только лидирующие члены. Данная процедура приводит функционал свободной энергии к точно решаемой форме Буссинеска, что позволяет воспользоваться известным профилем инстантона и вычислить величину активационного барьера при произвольных температурах. Уравнение Буссинеска обладает решением в виде Impr -цепи, затухающей вдоль длины полосы и периодичной в поперечном направлении. Описанное решение есть инстантон в полоске конечной ширины и найдено в явном виде. В результате активационный барьер вблизи критического тока получен также как функция ширины полосы.

Оглавление

1	Введение и постановка задачи	4
2	Модель и основные уравнения	7
2.1	Уравнения Узаделя	7
2.2	Однородное решение	8
2.3	Инстантонное решение	8
3	Градиентное разложение в уравнениях Узаделя	10
3.1	Поправки к спектральным углам	11
3.2	Разложение свободной энергии	11
4	Свободная энергия в форме Буссинеска	13
4.1	Редукция к одному действительному полю	13
4.2	Активационный барьер при произвольных температурах	14
4.3	Разложение тока	16
4.4	Безвихревой регион вблизи криттока	17
4.5	Работа тока	18
4.6	Одномерное решение	18
5	Инстантон в полоске произвольной ширины	22
6	Заключение	30
A	Детали градиентного разложения	31
A.1	Явные выражения для поправок $\psi_{3/2}$, θ_2	31
A.2	Вывод разложения (26)	31
B	Соотношение между коэффициентами a_i на криттоке	34
C	Lump-цепь для уравнения Буссинеска	35

1 Введение и постановка задачи

В настоящее время сверхпроводящие нанопроволоки активно используются в качестве детекторов одиночных фотонов (SNSPD) [1–3]. Работая вблизи критического тока, эти устройства обладают высокой чувствительностью и, вместе с тем, способностью быстро восстанавливать нарушенную сверхпроводимость, предотвращая переход в резистивное состояние. В то же время, сверхпроводимость может быть разрушена флуктуационным образом за счет процессов теплового проскальзывания фазы, что наблюдается как темновые отсчеты, не связанные с детектированием реального фотона [4, 5].

Для определения скорости темновых отсчетов необходимо найти величину барьера свободной энергии ΔF , который необходимо преодолеть термоактивационным образом для разрушения метастабильного однородного токового состояния. Конфигурация параметра порядка, по достижении которой возникает конечное напряжение, является перевальной точкой (инстантоном) свободной энергии. В одномерной геометрии задача об определении инстантона и вычислении ΔF впервые была решена в работе Лангера и Амбегаокара [6] в окрестности критической температуры (область Гинзбурга-Ландау). Важным свойством найденного инстантона является расходимость его характерного размера при приближении к критическому току $L_x \sim \xi(1 - I/I_c)^{-1/4}$, приводящая к следующему степенному скейлингу барьера вблизи I_c :

$$\Delta F_{1D} \approx c_{1D} \varepsilon_{\text{cond}} d w \xi (1 - I/I_c)^{5/4}, \quad (1)$$

где $\varepsilon_{\text{cond}}(T) = H_c^2/8\pi$ — плотность энергии конденсации, w — ширина полоски, d — толщина, ξ — сверхпроводящая длина когерентности Гинзбурга-Ландау и коэффициент $c_{1D} = 2^{25/4} 3^{-5/4} 5^{-1} \approx 3.86$.

Как было показано в более поздних работах, аналогичное степенное поведение одномерного активационного барьера вблизи критического тока сохраняется и на произвольных температурах как для грязных [7], так и для чистых систем [8, 9]. Наиболее актуальным при этом является решение задачи о нахождении барьера ΔF как функции тока и температуры для грязного случая, представленное в работе [7], поскольку, как правило, в SNSPD используются сверхпроводники типа NbN и MoSi с длиной когерентности в десятки раз превосходящей длину свободного пробега $l \gtrsim 0.1 \text{ nm}$ [10, 11]. Решение, полученное в работе [7], однако, было основано на сложной численной процедуре нахождения седловой конфигурации для системы уравнений Узаделя на мацубаровских энергиях и уравнения самосогласования, что затрудняет независимую верификацию результатов без построения соответствующей аналитической теории проскальзывания фазы в грязном пределе.

Стоит отметить, что типичные ширины сверхпроводящих нанопроволок, используемых в экспериментах с SNSPD составляют $w \sim 40\text{--}120 \text{ nm}$ (а для детекторов с широкими полосками $w \sim 1\text{--}2 \text{ }\mu\text{m}$ [3]), что превосходит длину когерентности ($\xi_{\text{NbN}} \sim 5$

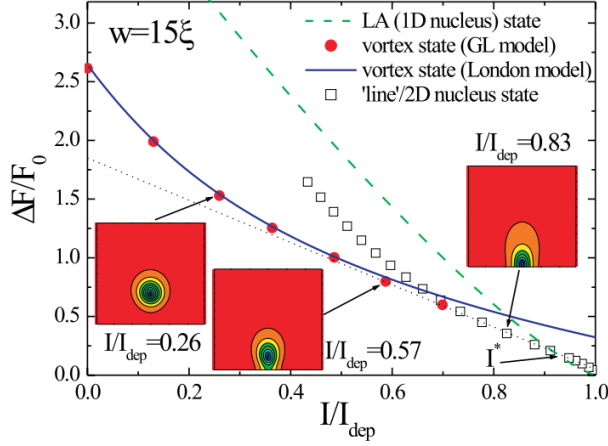


Рис. 1: Зависимость энергии различных седловых конфигураций в полоске шириной $w = 15\xi$ от тока [13].

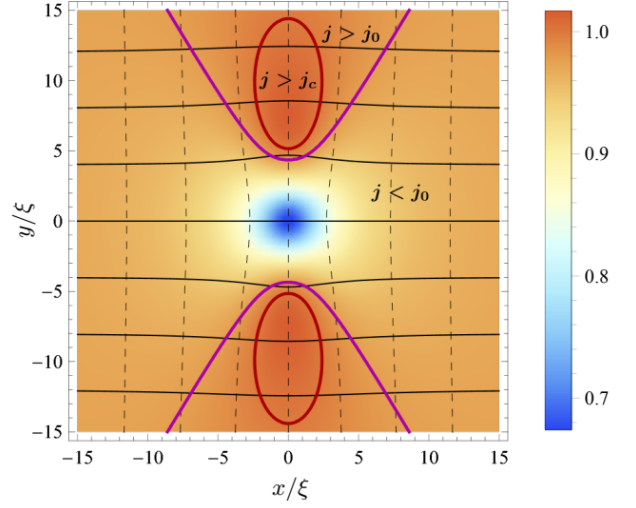


Рис. 2: Инстантонная конфигурация тока в бесконечной двумерной пленке для $I = 0.98I_c$ [14].

nm, $\xi_{\text{MoSi}} \sim 8 \text{ nm}$ [10, 11]) в десятки, а порой и в сотни раз. При этом пирловская глубина ($\lambda_{\text{P,NbN}} \sim 90 \mu\text{m}$, $\lambda_{\text{P,MoS}} \sim 600 \mu\text{m}$ [10, 12]) всегда много больше ширины полоски, что позволяет пренебрегать влиянием создаваемых током магнитных полей. Тем не менее приходится решать двумерную задачу, являющуюся значительно более сложной по сравнению с одномерной в силу неоднородного распределения тока, наличия границ и существования разных типов возможных инстантонных конфигураций (безвихревая конфигурация, одиночный вихрь, вихрь-антивихрь). В ходе численного анализа седловых решений уравнений Гинзбурга-Ландау, проведенного в работе Володарова [13], было получено, что вблизи критического тока реализуется безвихревой инстантон, тогда как на более низких токах более энергетически выгодной оказывается конфигурация с вихрем (рис. 1).

Недавно было получено аналитическое решение для инстантона в бесконечной двумерной пленке вблизи T_c при токах близких к критическому. Близость I к I_c позволяет свести седловое уравнения для функционала Гинзбурга-Ландау к точно интегрируемому уравнению Буссинеска [14]. При этом инстантон оказывается сильно анизотропным, с размерами вдоль и поперек тока равными $L_x \sim \xi(1 - I/I_c)^{-1/4}$ и $L_y \sim \xi(1 - I/I_c)^{-1/2}$ соответственно, что приводит к скейлингу барьера:

$$\Delta F_{2D} \approx c_{2D} \varepsilon_{\text{cond}} d \xi^2 (1 - I/I_c)^{3/4} \quad (2)$$

с коэффициентом $c_{2D} = 2^{27/4} 3^{-9/4} \pi \approx 28.55$.

В то же время остаются открытыми две задачи, актуальные в контексте исследования теплового проскальзывания фазы в SNSPD:

- (i) обобщение полученного вблизи T_c результата работы [14] на случай произвольных температур в грязном пределе

- (ii) нахождение инстантона в полоске конечной ширины и изучение кроссовера из двумерного решения в одномерное

Решение сформулированных задач является основной целью данной работы.

2 Модель и основные уравнения

2.1 Уравнения Узаделя

Мы рассматриваем грязный сверхпроводник, описываемый комплексным параметром порядка $\Delta(\mathbf{r})$ и мацубаровской квазиклассической функцией Грина $Q(\varepsilon, \mathbf{r})$, представляющей собой матрицу 2×2 в пространстве Горькова-Нambu, удовлетворяющую $Q^2 = 1$ и $\text{tr } Q = 0$. Функционал свободной энергии записывается в форме нелинейной сигма-модели и имеет следующий вид:

$$F = \frac{\pi\nu}{4}T \sum_{\varepsilon} \int d\mathbf{r} \text{tr} \left[D(\nabla Q)^2 - 4(\varepsilon\tau_3 + \hat{\Delta})Q \right] + \frac{\nu}{\lambda} \int d\mathbf{r} |\Delta|^2, \quad (3)$$

где

$$\hat{\Delta} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

параметр порядка, $\varepsilon = 2\pi T(n + 1/2)$ — мацубаровская энергия (сумма по энергиям ограничена дебаевской частотой $|\varepsilon| < \omega_D$), D — коэффициент диффузии, ν — плотность состояний на уровне Ферми, λ — безразмерная константа связи.

Чтобы автоматически удовлетворить условию нормировки, функцию Грина удобно параметризовывать спектральными углами $\theta(\varepsilon, \mathbf{r})$ и $\chi(\varepsilon, \mathbf{r})$ (для краткости далее не будем указывать зависимость от ε):

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{i\chi} \sin \theta \\ e^{-i\chi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В терминах спектральных углов седловые уравнения на функционал (3) принимают вид двух уравнений Узаделя ($\delta F/\delta\theta = 0$ и $\delta F/\delta\chi = 0$) и двух уравнений самосогласования ($\delta F/\delta|\Delta| = 0$ и $\delta F/\delta\varphi = 0$, где φ — фаза параметра порядка):

$$-\frac{D}{2}\nabla^2\theta + \varepsilon \sin \theta - |\Delta| \cos(\chi - \varphi) \cos \theta + \frac{D}{2}(\nabla\chi)^2 \sin \theta \cos \theta = 0, \quad (6)$$

$$2|\Delta| \sin(\chi - \varphi) \sin \theta = D [\sin^2 \theta \nabla^2 \chi + \sin(2\theta) \nabla\theta \nabla\chi], \quad (7)$$

$$|\Delta| = \pi\lambda T \sum_{\varepsilon} \sin \theta \cos(\chi - \varphi), \quad (8)$$

$$\sum_{\varepsilon} \sin \theta \sin(\varphi - \chi) = 0. \quad (9)$$

Плотность сверхтока дается следующим выражением:

$$\mathbf{j} = 2e\pi\nu DT \sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta \nabla\chi. \quad (10)$$

2.2 Однородное решение

При протекании однородного сверхтока $|\Delta| = \Delta_\Gamma$, $\varphi = \kappa x$ уравнение (7) на угол χ становится тривиальным, $\chi = \varphi$, а уравнение (6) на угол $\theta(\mathbf{r}) = \theta_\Gamma$ становится тригонометрическим [15, 16]:

$$\varepsilon \sin \theta_\Gamma - \Delta_\Gamma \cos \theta_\Gamma + \Gamma \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma = 0, \quad (11)$$

где $\Gamma = D\kappa^2/2$ - параметр распаривания. Уравнение самосогласования и выражение для сверхтока также упрощаются в однородном случае:

$$\Delta_\Gamma = \pi\lambda T \sum_{\varepsilon} \sin \theta_\Gamma, \quad (12)$$

$$\mathbf{j}_\Gamma = 2e\pi\nu DT \sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta_\Gamma \cdot \kappa \mathbf{e}_x. \quad (13)$$

При заданной температуре T и параметре Γ можно, решая численно уравнение Узалея (11) с самосогласованием (12), найти однородный модуль параметра порядка Δ_Γ и набор спектральных углов θ_Γ на всех мацубаровских энергиях. Подставляя найденное решение в (13), можно найти зависимость $I(\Gamma, T)$ однородного тока $I = j_\Gamma S$ от параметра распаривания при заданной температуре. Максимум этой зависимости соответствует криттоку, что позволяет численно определить $\Delta_{\Gamma_c}(T)$, $\theta_{\Gamma_c}(T)$ и $\Gamma_c(T)$. Эти величины в дальнейшем придутся нам для вычисления коэффициентов разложения свободной энергии вблизи криттока (см. Приложение А).

2.3 Инстантонное решение

Инстантон есть локализованное неоднородное решение уравнений (6)–(9) со следующими асимптотиками:

$$\Delta(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) \rightarrow \Delta_\Gamma e^{i\kappa x}, \quad \theta(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) \rightarrow \theta_\Gamma, \quad \chi(|\mathbf{r}| \rightarrow \infty) \rightarrow \kappa x, \quad (14)$$

где величины Γ , κ , θ_Γ и Δ_Γ соответствуют однородному решению с тем же полным током $I = j_\Gamma dw$.

Зная инстантонное решение, можно вычислить активационный барьер как разность свободных энергий (3), взятых на инстантоне и на однородном решении:

$$\Delta F = F_{\text{saddle}} - F_{\text{uniform}}. \quad (15)$$

Нахождение инстантона требует решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на всех мацубаровских энергиях вместе с самосогласованием и в общем случае представляет собой нетривиальную численную задачу. Однако при токах, близких к критическому, активационный барьер стремится к нулю, что означает, что инстантон отличается от соответствующего однородного реше-

ния посредством слабого возмущения, локализованного на больших масштабах. Данное обстоятельство позволит нам организовать теорию возмущений по малости этого возмущения и получить аналитический профиль инстантона и барьер в главном порядке вблизи криттока в терминах параметров, характеризующих однородное решение.

3 Градиентное разложение в уравнениях Узаделя

В качестве первого шага для нахождения инстантона нужно, используя седловые уравнения на спектральные углы (6), (7), исключить их из функционала свободной энергии (3), оставив в нём только поле параметра порядка. В общем случае, в результате данной процедуры получился бы нелинейный и нелокальный функционал, однако, работая вблизи криттока, можно поступить аналогично разложению Гинзбурга-Ландау в окрестности критической температуры.

Вспомним, что вблизи T_c имеются следующие скелиновые соотношения:

$$\xi(T) \sim (1 - T/T_c)^{-1/2}, \quad \Delta \sim (1 - T/T_c)^{1/2}, \quad (16)$$

позволяющие произвести разложение в уравнениях Узаделя (6), (7) и свободной энергии (3) и в главном порядке по $\tau = 1 - T/T_c$ получить:

$$\theta = \frac{|\Delta|}{\varepsilon} + \dots, \quad \chi = \varphi + \dots, \quad (17)$$

$$F_{\text{GL}}[\Delta] = \nu \int d\mathbf{r} \left[-\tau |\Delta|^2 + \frac{\beta}{2} |\Delta|^4 + \xi_{\text{GL}}^2(T) |\nabla \Delta|^2 + \dots \right] \quad (18)$$

с коэффициентами $\beta = 7\zeta(3)/8\pi^2 T_c^2$ и $\xi_{\text{GL}}(T) = \sqrt{\pi D/8(T_c - T)}$.

В случае же близости к криттоку имеется скейлинг параметров инстантона, полученный в работе [14]:

$$L_x \sim \xi(T)/\sqrt{\varepsilon}, \quad L_y \sim \xi(T)/\varepsilon, \quad \delta \sim \varepsilon, \quad \phi \sim \sqrt{\varepsilon}, \quad (19)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 - I/I_c}$ - малый параметр, L_x, L_y - характерные размеры, на которых локализована неоднородность инстантона, а поля δ и ϕ описывают отклонение инстантона от однородного решения:

$$|\Delta(\mathbf{r})| = \Delta_{\Gamma}(1 + \delta(\mathbf{r})), \quad \varphi(\mathbf{r}) = \kappa x + \phi(\mathbf{r}). \quad (20)$$

Отметим, что в работе [14] данный скейлинг был получен в рамках теории Гинзбурга-Ландау, но мы будем предполагать его справедливость и на произвольных температурах. Полученное нами решение будет находиться в согласии с этим предположением.

Наконец, важно отметить, что решение, представленное в работе [14], было существенно основано на том факте, что вблизи критического тока конфигурация инстантона топологически тривиальна [13]. Это предполагает отсутствие вихрей: подобно инстантону Лангера-Амбегаокара, параметр порядка проседает по центру инстантона, но при этом остается всюду конечным, что является энергетически более выгодным в силу конечности энергии кора вихря [13]. В работе [14] размер безвихревого региона был оценен как 6–7 % от критического тока. В разделе 4.4 мы покажем, что эта оценка сохраняется и при произвольных температурах.

3.1 Поправки к спектральным углам

После подстановки (20) в седловые уравнения (6), (7), можно искать решение для седловых спектральных углов в виде ряда по степеням ε , начинающегося со значений в однородном случае:

$$\theta(\mathbf{r}) = \theta_\Gamma + \theta_1(\mathbf{r}) + \theta_2(\mathbf{r}) + \dots, \quad (21a)$$

$$\chi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}) = \psi_{3/2}(\mathbf{r}) + \psi_{5/2}(\mathbf{r}) + \dots, \quad (21b)$$

где $\theta_a, \psi_a \sim \varepsilon^a$.

Таким образом, записывая уравнения Узаделя (6), (7) в каждом порядке по ε , можно последовательно выражать поправки θ_a, ψ_a в терминах возмущений δ и ϕ модуля и фазы параметра порядка. В силу условия (19) все градиенты от поправок к однородному решению малы:

$$\partial_x \sim \varepsilon^{1/2}, \quad \partial_y \sim \varepsilon, \quad (22)$$

что обеспечивает локальность выражений для θ_a и ψ_a в каждом порядке.

Проделаем описанную процедуру в самом младшем порядке (ε для уравнения (6)). В старших порядках вычисления становятся более громоздкими и вынесены в приложение A.

Уравнение (6) в порядке ε имеет вид:

$$M\theta_1 - \Delta_\Gamma \delta \cos \theta_\Gamma + D\kappa \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma \phi_x = 0, \quad (23)$$

где введена производная от левой части однородного уравнения Узаделя (11), которую можно существенно упростить, исключив мацубаровскую энергию при помощи (11):

$$\begin{aligned} M = \varepsilon \cos \theta_\Gamma + \Delta_\Gamma \sin \theta_\Gamma + \Gamma \cos(2\theta_\Gamma) &= \frac{\Delta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{\sin \theta_\Gamma} - \Gamma \cos^2 \theta_\Gamma + \Delta_\Gamma \sin \theta_\Gamma + \Gamma \cos(2\theta_\Gamma) = \\ &= \frac{\Delta_\Gamma - \Gamma \sin^3 \theta_\Gamma}{\sin \theta_\Gamma}. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда из (23) получим:

$$\theta_1 = \frac{\sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{N} [\Delta_\Gamma \delta - D\kappa \phi_x \sin \theta_\Gamma], \quad (25)$$

где $N = \Delta_\Gamma - \Gamma \sin^3 \theta_\Gamma$.

3.2 Разложение свободной энергии

Подставим параметр порядка в виде (20), а спектральные углы в виде ряда (21) в функционал свободной энергии (3) и произведем разложение относительно значения свободной энергии на однородном решении. С точностью до членов порядка ε^3 вклю-

чительно получим в безразмерных на $\xi_{\text{GL}}(T)$ координатах:

$$F^{(2,3)}[\delta, \phi] = C \int dxdy \left[\sum_{i=1}^3 a_i V_i^{(2)} + \sum_{i=1}^8 b_i V_i^{(3)} \right] \quad (26)$$

в терминах квадратичных и кубических по ε поправок

$$V^{(2)} = (\delta^2, \delta\phi_x, \phi_x^2), \quad (27)$$

$$V^{(3)} = (\phi_y^2, \delta\phi_x^2, \phi_x^3, \delta^3, \delta^2\phi_x, \delta_x^2, \phi_{xx}^2, \delta_{xx}\phi_x), \quad (28)$$

коэффициента $C = \nu \Delta_{\Gamma_c}^2 d\xi_{\text{GL}}^2$ и безразмерных коэффициентов a_i, b_i представляющих собой мацубаровские суммы от функций однородных спектральных углов θ_{Γ} . Явные выражения для a_i, b_i , а также детали разложения свободной энергии приведены в Приложении А. Отметим лишь, что для получения разложения (26) достаточно знать только поправки θ_1, θ_2 и $\psi_{3/2}$ из разложения (21). Для углов θ_a это связано с тем, что коэффициент при θ_3 зануляется как первая вариации $\delta F / \delta \theta$ взятая на однородном решении уравнений Узаделя. Для углов χ_a по аналогичной причине зануляется вклад $\varepsilon^{5/2}$ в разложение свободной энергии, а вклад ε^3 отсутствует в силу того, что в функционал не входит членов вида $\psi\varphi$, из которых этот вклад мог бы появиться.

Таким образом, вблизи критического тока свободная энергия на инстантоне может быть получена как функционал (26) зависящий только от комплексного параметра порядка (описываемого двумя действительными полями δ и ϕ посредством (20)), подобно разложению Гинзбурга-Ландау вблизи критической температуры.

4 Свободная энергия в форме Буссинеска

4.1 Редукция к одному действительному полю

Дальнейшие шаги по нахождению инстантона проведем в духе работы [14]. Ключевой идеей предложенного авторами решения задачи вблизи T_c было сведение комплексного поля параметра порядка к одному действительному полю. Это достигалось посредством введения токовой функции, позволяющей автоматически удовлетворить сохранению тока $\text{div } \mathbf{j} = 0$ (что равносильно уравнению Гинзбурга-Ландау на фазу: $\delta F / \delta \varphi = 0$) и построением теории возмущений по отклонению этой функции от соответствующего выражения на криттоке. В результате оказывалось, что в главном порядке есть локальная связь между токовой функцией и модулем и фазой параметра порядка, что позволяло записать функционал Гинзбурга-Ландау вблизи криттока в терминах только токовой функции [14].

Имея известный из этого решения скейлинг (19) параметров инстантона и разложение свободной энергии (26) вблизи криттока, полученное с учетом этого скейлинга, можно провести данное рассуждение значительно проще. В духе работы [14] сведем поля δ и ϕ к некоторому действительному полю $f(x, y) \sim 1$:

$$\phi = -A f_x, \quad (29a)$$

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \dots, \quad (29b)$$

где под многоточием подразумеваются нелокальные члены более высоких порядков. Поправки $\delta_a \sim \varepsilon^a$, $a = 1, 2$ оказываются локальными и могут быть найдены последовательным решением седлового уравнения $\delta F / \delta \phi = 0$ (выражающим эффективное требование сохранения тока) в каждом порядке по ε .

В порядке $\varepsilon^{3/2}$ ($\delta F^{(2)} / \delta \phi = 0$) имеем:

$$a_2(\delta_1)_x - 2a_3\phi_{xx} = 0, \quad (30)$$

откуда, с учетом (29):

$$\delta_1 = r_1 f_{xx}, \quad (31)$$

с коэффициентом

$$r_1 = 2Aa_3/a_2. \quad (32)$$

В порядке $\varepsilon^{5/2}$ ($\delta F^{(2+3)} / \delta \phi = 0$) имеем:

$$-a_2(\delta_2)_x - b_1\phi_{yy} - 2b_2(\delta_1\phi_x)_x - 3b_3(\phi_x^2)_x - b_5(\delta_1^2)_x + 2b_7\phi_{xxxx} - b_8(\delta_1)_{xxx}, \quad (33)$$

откуда с учетом (29):

$$\delta_2 = r_2 f_{yy} + r_3 f_{xx}^2 + r_4 f_{xxxx}, \quad (34)$$

с коэффициентами:

$$r_2 = 2Ab_1/a_2, \quad (35a)$$

$$r_3 = A^2(4a_2a_3b_2 - 3a_2^2b_3 - 4a_3^2b_5)/a_2^3, \quad (35b)$$

$$r_4 = -2A(a_2b_7 + a_3b_8)/a_2^2. \quad (35c)$$

Заметим, что, в отличие от работы [14], на произвольных температурах в поправке δ_2 появляется член, пропорциональный f_{xxx} с коэффициентом r_4 , который, однако, при $T \rightarrow T_c$ стремится к нулю, как $1 - T/T_c$.

Подставляя (29), (31) и (34) в (26), в главном порядке получаем функционал свободной энергии в форме Буссинеска [14] при произвольных температурах:

$$F_B[f] = C \int dx dy [c_1 f_{xx}^2 + c_2 f_{xy}^2 + c_3 f_{xxx}^2 + c_4 f_{xx}^3], \quad (36)$$

где член $c_1 f_{xx}^2$ происходит из квадратичной части функционала (26), однако коэффициент при нем

$$c_1(I, T) = A^2 a_3 (4a_1 a_3 - a_2^2) / a_2^2 \quad (37)$$

оказывается пропорционален фактору $4a_1 a_3 - a_2^2$, зануляющемуся на криттоке, как $\sqrt{1 - I/I_c}$ (подобно тому, как это было в работе [14]; доказательство см. в приложении В). Это обеспечивает правильный скейлинг функционала $F_B \sim \varepsilon^3 \sim (1 - I/I_c)^{3/4}$ и подтверждает наше предположение о справедливости скейлинговых соотношений (19) при произвольных температурах.

Остальные же коэффициенты в функционале (36) остаются конечными при $I = I_c$ и потому должны быть вычислены только на криттоке:

$$c_2(T) = A^2 b_1, \quad (38a)$$

$$c_3(T) = A^2 (4a_1^2 b_7 + 2a_2 a_1 b_8 + a_2^2 b_6) / 4a_1^2, \quad (38b)$$

$$c_4(T) = A^3 (4a_1^2 a_2 b_2 - 8a_1^3 b_3 + a_2^3 b_4 - 2a_1 a_2^2 b_5) / 8a_1^3. \quad (38c)$$

4.2 Активационный барьер при произвольных температурах

После тривиального рескейлинга

$$x = c_3^{1/2} c_1^{-1/2} \bar{x}, \quad y = c_2^{1/2} c_3^{1/2} c_1^{-1} \bar{y}, \quad f = (2c_3/3c_4) \bar{f} \quad (39)$$

функционал (36) может быть переписан, как:

$$F_B[f] = C \frac{8c_1^{3/2} c_2^{1/2} c_3}{9c_4^2} S[\bar{f}], \quad (40)$$

где $S[\bar{f}]$ - каноническое действие в форме Буссинеска:

$$S[\bar{f}] = \int d\bar{x} d\bar{y} \left(\frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}}^2 + \frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{x}\bar{y}}^2 + \frac{1}{2} \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}}^2 + \frac{1}{3} \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}}^3 \right). \quad (41)$$

Седловым уравнением для функционала (41) является точно интегрируемое уравнение Буссинеска в эллиптической форме [17, 18]:

$$u_{\bar{x}\bar{x}} + u_{\bar{y}\bar{y}} - u_{\bar{x}\bar{x}\bar{x}} + (u^2)_{\bar{x}\bar{x}} = 0, \quad (42)$$

записанное в терминах поля $u = \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}}$.

В работе [14] было показано, что уравнение (42) имеет нетривиальное локализованное решение, стремящееся к нулю на бесконечности:

$$u = -6\partial_{\bar{x}}^2 \ln(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 3), \quad (43)$$

соответствующее $\bar{f} = -6 \ln(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + 3)$ и представляющей собой инстантон в полоске бесконечной ширины. Случай произвольной ширины будет рассмотрен в разделе 5.

Действие на инстантоне $S = 8\pi$ [14], что соответствует:

$$\Delta F_{2D} = \frac{64\pi c_1^{3/2} c_2^{1/2} c_3}{9c_4^2} C. \quad (44)$$

Перепишем выражение (44) также в следующей форме:

$$\Delta F_{2D} = c_{2D}(T) \varepsilon_{\text{cond}}(T) d\xi_{\text{GL}}^2(T) (1 - I/I_c)^{3/4} \quad (45)$$

в терминах плотности энергии сверхпроводящей конденсации Гинзбурга-Ландау $\varepsilon_{\text{cond}}(T) = 4\pi^2 \nu (T_c - T)^2 / 7\zeta(3)$ и численно считаемого безразмерного коэффициента:

$$c_{2D}(T) = \frac{112\zeta(3)}{9\pi} \frac{\gamma_1^{3/2} c_2^{1/2} c_3}{c_4^2} \frac{\Delta_{\Gamma_c}^2(T)}{(T_c - T)^2}. \quad (46)$$

Здесь γ_1 - коэффициент в критической асимптотике коэффициента $c_1(I) \approx \gamma_1 \sqrt{1 - I/I_c}$.

В области Гинзбурга-Ландау, с учетом явных выражений (109) для коэффициентов a_i, b_i в пределе $T \rightarrow T_c$ (см. Приложение A), коэффициенты c_i в функционале Буссинеска (36), вычисляемые по формулам (37), (38) оказываются равными:

$$c_1 = (\tau/2)(1 - 3A^2), \quad c_2 = \tau/3, \quad c_3 = \tau/4, \quad c_4 = \tau/3, \quad (47)$$

где $\tau = 1 - T/T_c$. Отсюда с учетом $1 - 3A^2 \approx \sqrt{(8/3)(1 - I/I_c)}$, $\Delta_{\Gamma_c}^2 = T_c^2 \tau \cdot 16\pi^2 / 21\zeta(3)$ и (46) получаем $c_{2D}(T_c) = 2^{27/4} 3^{-9/4} \pi$ в полном согласии с работой [14] (см. формулу (2)).

На произвольных, не близких к T_c температурах нахождение барьера сводится к численному решению однородных уравнений Узаделя и подсчету мацубаровских сумм

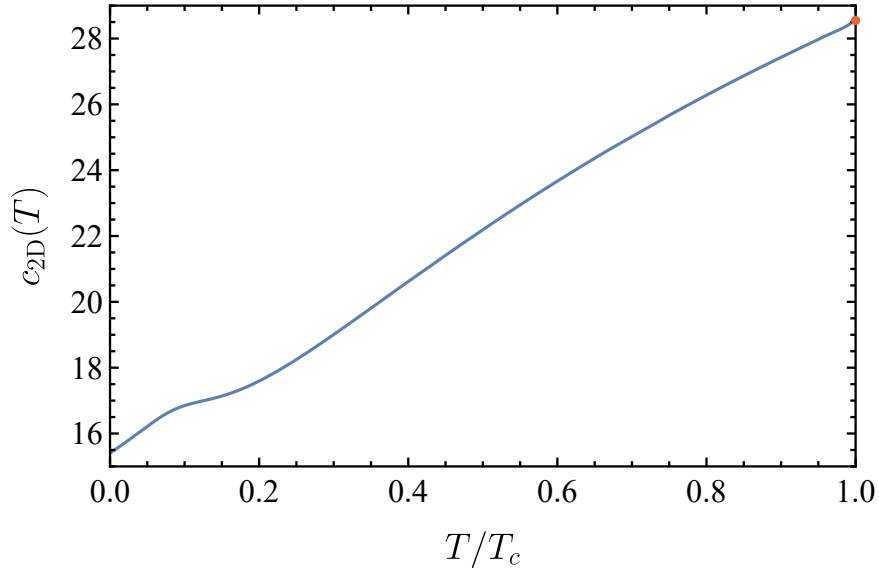


Рис. 3: Температурная зависимость коэффициента c_{2D} в критической асимптотике (45) барьера в бесконечном двумерном случае. Красная точка соответствует аналитическому значению для области Гинзбурга-Ландау $c_{2D}(T_c) = 2^{27/4}3^{-9/4}\pi \approx 28.55$ [14].

от функций однородных спектральных углов θ_Γ и модуля параметра порядка Δ_Γ . Мацубаровские суммы b_i при этом достаточно посчитать только на криттоке, тогда как суммы a_i необходимо считать в его некоторой окрестности, чтобы определить коэффициент γ_1 .

Температурная зависимость коэффициента $c_{2D}(T)$ показана на рис. 3.

4.3 Разложение тока

Подставляя разложение (21) в точное выражение для тока (10) и разлагая относительно однородного значения $\mathbf{j}_\Gamma = j_\Gamma \mathbf{e}_x$, получим:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_\Gamma + \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_{3/2} + \mathbf{j}_2 + \dots, \quad (48)$$

где поправки $\mathbf{j}_a \sim \varepsilon^a$ даются следующими выражениями:

$$\mathbf{j}_1 = 2e\pi\nu DT \sum_{\varepsilon} [\sin^2 \theta_\Gamma \phi_x + \kappa \sin 2\theta_\Gamma \theta_1] \mathbf{e}_x, \quad (49a)$$

$$\mathbf{j}_{3/2} = 2e\pi\nu DT \sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta_\Gamma \phi_y, \quad (49b)$$

$$\mathbf{j}_2 = 2e\pi\nu DT \sum_{\varepsilon} [\kappa (\sin 2\theta_\Gamma \theta_2 + \cos 2\theta_\Gamma \theta_1^2) + \sin 2\theta_\Gamma \theta_1 \phi_x + \sin^2 \theta_\Gamma (\psi_{3/2})_x] \mathbf{e}_x. \quad (49c)$$

С учетом (13) и явных выражений для поправок к спектральным углам (25), (89),

(92) получим:

$$\mathbf{j}_1/j_\Gamma = [s_1\delta + s_2\phi_x] \mathbf{e}_x, \quad (50a)$$

$$\mathbf{j}_{3/2}/j_\Gamma = s_3\phi_y \mathbf{e}_y, \quad (50b)$$

$$\mathbf{j}_2/j_\Gamma = [s_4\delta\phi_x + s_5\phi_x^2 + s_6\delta^2 + s_7\phi_{xx} + s_8\delta_{xx}] \mathbf{e}_x, \quad (50c)$$

где коэффициенты $s = (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8)$ могут быть выражены через мадубаровские суммы a_i, b_i входящие в разложение свободной энергии (26):

$$s = (a_2, 2a_3, 2b_1, 2b_2, 3b_3, b_5, -2b_7, b_8)/2Ab_1. \quad (51)$$

Подстановка редукции (29) с поправками (31), (34) в разложение (48) приводит к следующему выражению для тока с точностью до ε^2 включительно:

$$j_x/j_\Gamma = 1 + f_{yy}, \quad (52a)$$

$$j_y/j_\Gamma = -f_{xy}, \quad (52b)$$

дословно совпадающему с работой [14].

4.4 Безвихревой регион вблизи криттока

Бехвихревой регион вблизи криттока ограничен снизу величиной тока I_{top} , при котором плотность тока в центре инстантона обращается в ноль. При дальнейшем уменьшении тока вместо одной точки с $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = 0$ появятся два симметричных относительно начала координат нуля, соответствующие центрам вихря и антивихря, что представляет собой топологический фазовый переход второго рода [14]. При этом в рамках нашего решения пограничный ток I_{top} , отделяющей безвихревую фазу от вихревой, может быть оценен лишь качественно некоторой величиной $I_* \sim I_{\text{top}}$, в силу того что наше рассмотрение (в частности, выражение для плотности тока (52)) применимо только в главном порядке вблизи криттока.

Пользуясь формулами (52), (43) и (39) находим:

$$\frac{j_x(\mathbf{r}=0)}{j_\Gamma} = 1 - \frac{8c_1^2}{3c_2c_4} \approx 1 - \eta\varepsilon^2, \quad (53)$$

где $\varepsilon = \sqrt{1 - I/I_c}$, $\eta(T) = 8\gamma_1^2/3c_2c_4$, откуда получаем:

$$I_*(T) = [1 - \eta^{-1}(T)] I_c(T). \quad (54)$$

Численный счет показывает, что величина $\eta(T)$ лежит в узком интервале (15.93, 16.00) на всём диапазоне температур, что соответствует $I_*(T) \sim 0.94I_c(T)$. Таким образом, приведенная в работе [14] оценка безвихревого региона в 6 % от криттока, на произвольных температурах практически не меняется.

4.5 Работа тока

Перед тем как приступить к рассмотрению случая конечной (или нулевой) ширины полоски, сделаем важный комментарий касательно учета работы, совершаемой источником тока при переходе системы из исходного однородного сверхтокового состояния в состояние, описываемое инстантонной конфигурацией. Поскольку рассматриваемый процесс происходит при постоянном токе $I = j_\Gamma dw$, правильный термодинамический потенциал содержит дополнительный вклад [19]:

$$\Delta F = F_{\text{saddle}} - F_{\text{uniform}} - \frac{j_\Gamma d}{2e} \int dx dy \phi_x, \quad (55)$$

В случае полоски конечной (или нулевой) ширины добавочное слагаемое в (55) может быть переписано, как $I\Delta\phi/2e$, где $\Delta\phi = \phi(x = +\infty) - \phi(x = -\infty)$ — дополнительная разность фаз между концами образца, возникающая на инстантонном решении. Поскольку при этом $\Delta\phi \neq 0$, то вклад работы тока должен учитываться при вычислении активационного барьера. Более того, даже в полоске бесконечной ширины, интеграл в (55) оказывается ненулевым в силу слабого степенного убывания добавочной фазы $\phi(x, y) \sim 1/x$ при $x \rightarrow \infty$ (несмотря на то, что для любого *конечного* y выполнено $\phi(\pm\infty, y) = 0$). Данное обстоятельство, казалось бы, ставит под сомнение как корректность результатов, полученных в работе [14] (где для бесконечной двумерной пленки работа тока не была учтена явно), так и логику нашего решения, дословно воспроизводящую основные идеи работы [14].

Можно, однако, заметить, что наличие конечной величины интеграла в (55) приводит к тому, что, описанное в разделе 3 разложение свободной энергии в действительности всегда начинается не с ε^2 , а с дополнительного члена, содержащего фазовый градиент $\phi_x \sim \varepsilon$:

$$F^{(1)} = \pi\nu DT\kappa d \sum_n \sin^2 \theta_{\Gamma n} \int dx dy \phi_x, \quad (56)$$

который, с учетом выражения (13) для однородной плотности тока j_Γ , может быть преобразован в контрчлен, полностью компенсирующий вклад от работы тока. Таким образом, активационный барьер можно действительно в самом общем случае вычислять как седловое значение функционала (26), из которого все члены порядка ε исключены с самого начала.

4.6 Одномерное решение

В одномерном случае скейлинг параметров инстантона вблизи криттока может быть тривиально получен из соответствующего решения вблизи T_c (инстантон Лангера-Амбегаокара [6]) и, естественным образом, оказывается идентичен скейлинговым соотношениям (19) в двумерии:

$$L_x \sim \xi(T)/\sqrt{\varepsilon}, \quad \delta \sim \varepsilon, \quad \phi \sim \sqrt{\varepsilon}. \quad (57)$$

Это означает, что разложение свободной энергии, произведенное в предыдущих разделах для двумерного случая, в одномерии повторяется дословно с единственным отличием в том, что все члены с поперечными производными (ранее считавшиеся параметрически малыми в силу сильной анизотропии инстантона $L_y \gg L_x$) теперь необходимо полностью отбросить. В результате, отбрасывая член с f_{xy}^2 в двумерном функционале типа Буссинеска (36), получаем функционал свободной энергии вблизи криттока для одномерного случая:

$$F_{1D}[f] = C_{1D} \int dx dy [c_1 f_{xx}^2 + c_3 f_{xxx}^2 + c_4 f_{xx}^3] \quad (58)$$

с константой $C = \nu \Delta_{\Gamma_c}^2 S \xi_{GL}$ и теми же самыми коэффициентами c_1, c_2, c_4 (считаемыми на однородном решении и, следовательно, не зависящими от размерности).

Рескейлинг (39) позволяет переписать функционал (58) в виде:

$$F_{1D}[f] = C_{1D} \frac{8c_1^{5/2} c_3^{1/2}}{9c_4^2} S_{1D}[\bar{f}], \quad (59)$$

где функционал

$$S_{1D}[u] = \int d\bar{x} \left[\frac{u_{\bar{x}}^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} \right] \quad (60)$$

записан в терминах поля $u(x) = \bar{f}_{\bar{x}\bar{x}}$, которое, согласно (29), описывает отклонение модуля параметра порядка от однородного значения в главном порядке.

Седловое уравнение на функционал (60) описывает движение одномерной частицы массы $m = 1$ в потенциальной яме $V(u) = -u^2/2 - u^3/3$, подобно решению Лангера-Амбегаокара вблизи T_c , где "движение" происходило в более сложном потенциале [6]. Однако вблизи критического тока, размер потенциальной ямы уменьшается и потенциал вырождается в полученную нами квадратично-кубическую параболу. Явный профиль инстантона для функционала (60) и действие на нём получаются тривиальным интегрированием: $u = -(3/2) \operatorname{sech}^2(\bar{x}/2)$, $S_{1D} = 6/5$, что приводит к следующему выражению для барьера:

$$\Delta F_{1D} = \frac{16c_1^{5/2} c_3^{1/2}}{15c_4^2} C_{1D} \quad (61)$$

и профилю модуля параметра порядка:

$$|\Delta(x)| \approx \Delta_{\Gamma} \left[1 - \frac{2Aa_3}{a_2} \frac{c_1}{c_4} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{c_1}{c_3}} \right) \right]. \quad (62)$$

При $T \rightarrow T_c$ (62) подстановка в (62) явных выражений для коэффициентов c_i (47) и a_i (109a) (см. Приложение A) дает профиль параметра порядка

$$|\Delta(x)| \approx \Delta_{\Gamma} \left[1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \varepsilon \operatorname{sech}^2 \left(x \sqrt{\frac{2\varepsilon}{3}} \right) \right], \quad (63)$$

совпадающий с точным решением Лангера-Амбегаокара, разложенным вблизи крити-

ческого тока ($\varepsilon = \sqrt{1 - I/I_c}$).

Перепишем формулу для барьера также в терминах плотности энергии конденсации Гинзбурга-Ландау:

$$\Delta F_{1D} = c_{1D}(T) \varepsilon_{\text{cond}}(T) S \xi(T) (1 - I/I_c)^{5/4}, \quad (64)$$

где численно считаеый коэффициент

$$c_{1D}(T) = \frac{28\zeta(3)}{15\pi^2} \frac{\gamma_1^{5/2} c_3^{1/2}}{c_4^2} \frac{\Delta_{\Gamma_c}^2(T)}{(T_c - T)^2}. \quad (65)$$

В пределе $T \rightarrow T_c$ с учетом приведенных в разделе 4.2 выражений для коэффициентов

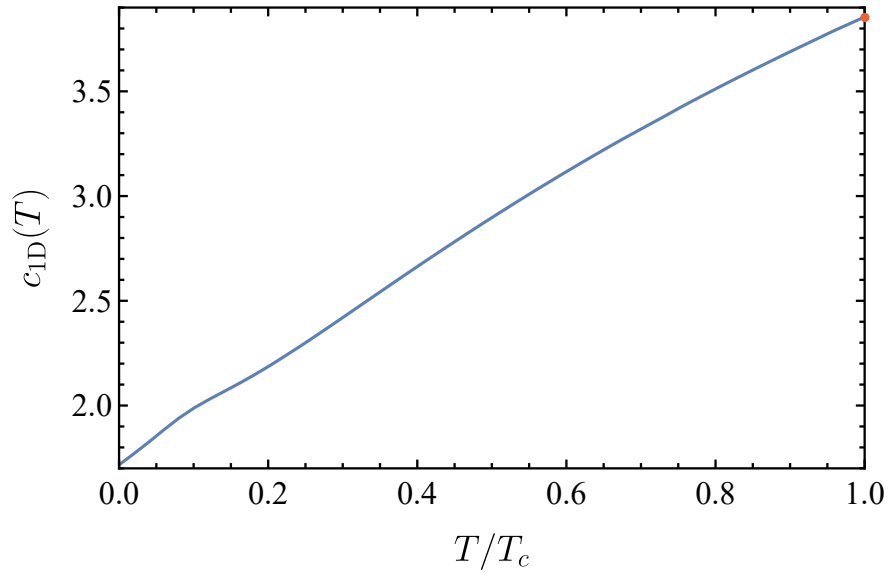


Рис. 4: Температурная зависимость коэффициента c_{1D} в криттоковой асимптотике (64) барьера в одномерном случае. Красная точка соответствует аналитическому значению из решения Лангера-Амбегаокара для области Гинзбурга-Ландау $c_{1D}(T_c) = 2^{25/4} 3^{-5/4} 5^{-1} \approx 3.86$ [6].

c_i и величины Δ_{Γ_c} данное выражение дает $c_{1D}(T_c) = 2^{25/4} 3^{-5/4} 5^{-1}$, в согласии с работой [6] (см. формулу (1)).

Температурная зависимость коэффициента $c_{1D}(T)$ показана на рис. 4.

Наконец, сверим наш результат с результатами работы [7], где инстантон находился путем численного решения одномерных уравнений Узаделя с самосогласованием. На рис. 5 показаны полученные в работе [7] графики зависимости активационного барьера от тока при трех разных температурах в сравнении с нашими криттоковыми асимптотиками (64). Видно, что асимптотики отлично воспроизводят поведение барьера вблизи криттока I_c , и, в то же время, слабо отклоняются от зависимости $\Delta F_{1D}(I)$ вплоть до $I = 0$, что служит одновременной проверкой правильности как наших вычислений, так и результатов работы [7]. Отметим, что подобная схожесть криттоковой асимптотики со всей зависимостью барьера от тока есть специфическое свойство одномерной задачи, связанное с отсутствием топологически нетривиальных инстантонных конфигураций.

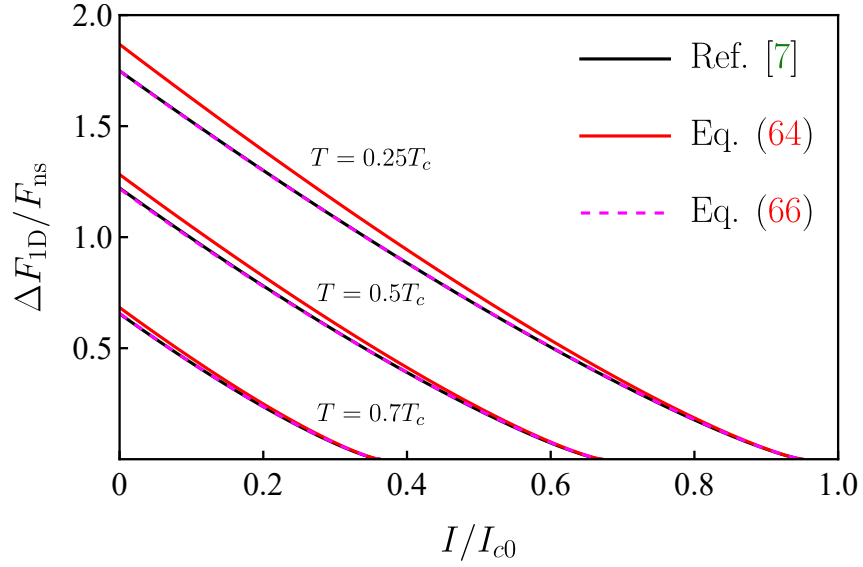


Рис. 5: Зависимость активационного барьера от тока при трех разных температурах, полученная в работе [7] (черные кривые). Свободная энергия нормирована на $F_{\text{ns}} = \nu D^{1/2} \Delta^{3/2}(0) dw$, ток нормирован на критический ток $J_{c0} \approx 0.47 \pi e \nu D^{1/2} \Delta^{3/2}(0) dw$ при $T = 0$. Красными линиями показаны наши асимптотики (64). Розовые пунктирные линии соответствуют аппроксимационной формуле (66).

В двумерии же криттоковая асимптотика должна работать сильно хуже уже при токах $I \sim I_{\text{top}} \sim 0.9I_c$, что было показано в работе [14] и также следует из качественных результатов работы [13].

Учитывая небольшое отличие $\Delta F_{1D}(I)$ от криттоковой асимптотики (64) и объединяя наши результаты с результатами работы [7], можно предложить асимптотическую формулу, аппроксимирующую активационный барьер при всех токах и температурах (рис. 5):

$$\Delta F_{1D} \approx c_{1D}(T) \varepsilon_{\text{cond}}(T) dw \xi(T) (1 - I/I_c)^{5/4} \times [1 - h(T/T_c)(1 - I/I_c)^{1/2}(1 + I/I_c)^{7/4 - 4\tau/3}], \quad (66)$$

где $h(T/T_c) \approx 0.022 + 0.056\tau$, а $\tau = 1 - T/T_c$.

5 Инстантон в полоске произвольной ширины

В данном разделе будем работать в координатах, обезразмеренных на характерные размеры инстантона в полоске бесконечной ширины согласно (39) (при этом в целях удобства черту над безразмерными координатами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не ставим).

Как было показано ранее, задача о нахождении инстантона свободной энергии вблизи критического тока сводится к уравнению Буссинеска в эллиптической форме [17, 18]:

$$u_{xx} + u_{yy} - u_{xxxx} + (u^2)_{xx} = 0. \quad (67)$$

Уравнение Буссинеска относится к классу точно интегрируемых и тесно связано с уравнением Кадомцева-Петвиашвили (КР-I). Уникальной особенностью уравнения КР-I является наличие широкого класса рациональных решений, описывающих распространение и взаимодействие пространственно локализованных солитонов, известных в англоязычной литературе, как *lumps* [20–22]. В то время как классические солитоны обычно имеют вид гребня, распространяющегося в одном направлении, lump-солитон представляет собой волну, локализованную в двух пространственных направлениях. Иными словами, это "холм" или "всплеск" на поверхности, который не меняет своей формы при распространении и существует в ограниченной области пространства. Поскольку в русскоязычной литературе нет устоявшегося названия для таких солитонов, то мы будем использовать слово *lump* без перевода.

Помимо решений, состоящих из одного или несколько lump'ов, существует особый класс решений КР-I, представляющих собой так называемые lump-цепи. В простейшем случае (линейная) lump-цепь представляет собой набор локализованных lump-солитонов, расположенных на равном расстоянии друг от друга вдоль некоторой линии и распространяющихся с постоянной скоростью под некоторым углом к ней. При этом профиль бегущей lump-цепи удовлетворяет уравнению Буссинеска [22].

В контексте нахождения инстантона в полоске произвольной ширины, нас интересует решения уравнения (67), периодичное вдоль y и затухающее вдоль x , симметричное относительно центра полоски $x = y = 0$. Оказывается, что решение такого вида описывает профиль lump-цепи, бегущей в направлении x и имеет следующий вид:

$$u(x, y) = -6\partial_x^2 \ln \left[\cosh(k_x x) - \sqrt{\frac{1 - 4k_x^2}{1 - k_x^2}} \cos(k_y y) \right], \quad (68)$$

где импульсы связаны соотношением:

$$k_y = k_x \sqrt{1 - k_x^2}. \quad (69)$$

Вывод формулы (68), основанный на работе [22], приведен в приложении С.

Граничным условием к уравнению (67) является требование равенства нулю поперечной компоненты тока на боковой границе полоски $y = \pm w/2$ (центр полоски считаем

расположенным в начале координат), что с учетом (52) может быть записано, как:

$$f_{xy}(x, \pm w/2) = 0 \Rightarrow f_y(x, \pm w/2) = 0, \quad (70)$$

где связь полей f и u задается соотношением $u = f_{xx}$. Для функции f решение (68) принимает вид:

$$f = -6 \ln \left[\cosh(k_x x) - \sqrt{\frac{1 - 4k_x^2}{1 - k_x^2}} \cos(k_y y) \right]. \quad (71)$$

Гранусловие (70) приводит к квантованию поперечного импульса $k_y = 2\pi n/w$ (инстантону с минимальной энергией соответствует $n = 1$), что с учетом (69), для продольного импульса дает:

$$k_x = \sqrt{\frac{w - \sqrt{w^2 - 16\pi^2}}{2w}}. \quad (72)$$

Выбор знака перед корнем в формуле (72) связан с тем, что при $w \rightarrow \infty$ оба импульса должны стремиться к нулю. Только в таком случае можно будет, разлагая косинусы в формуле (71), получить решение для полосы бесконечной ширины. Действительно, в этом случае $k_x \approx k_y$ и потому

$$f \approx -6 \ln \left[1 - \frac{1 - 4k_y^2}{1 - k_y^2} + \frac{k_y^2 x^2 + k_y^2 y^2}{2} \right] \approx -6 \ln \left[\frac{k_y^2}{2} (x^2 + y^2 + 3) \right] = -6 \ln(x^2 + y^2 + 3). \quad (73)$$

Решение (71) существует лишь при ширинах $w > w_c = 8\pi/\sqrt{3}$. При меньших ширинах получаемый из (69) импульс $k_x > 1/2$ и коэффициент при косинусе в (71) становится мнимым. Ровно при $w = w_c$, $k_x = 1/2$ и данный коэффициент (стоящий при зависящей от y части выражения (71)) обращается в ноль. Следовательно, при дальнейшем понижении ширины зависимость от y пропадает и решение принимает вид $f = -6 \ln \cosh(x/2)$. Это соответствует $u = -(3/2) \operatorname{sech}^2(x/2)$, что есть полученный в разделе 4.6 инстантон для одномерного случая.

Посчитаем теперь значение функционала Буссинеска на решении (71). Для начала упростим функционал с учетом седлового уравнения (67):

$$\begin{aligned} S[f] &= \int dx dy \left[\frac{1}{2} f_{xx}^2 + \frac{1}{2} f_{xy}^2 + \frac{1}{2} f_{xxx}^2 + \frac{1}{3} f_{xx}^3 \right] = \\ &= \int dx dy f \left[\frac{1}{2} u_{xx} + \frac{1}{2} u_{yy} - \frac{1}{2} u_{xxx} + \frac{1}{3} (u^2)_{xx} \right] = \\ &= -\frac{1}{6} \int dx dy f (u^2)_{xx} = -\frac{1}{6} \int dx dy u^3. \end{aligned} \quad (74)$$

Граничных членов при интегрировании по частям не возникает, потому как при интегрировании по x , возникает граничный член пропорциональной компоненте нормали n_x , равной нулю на боковой границе, а интегрирование по частям по y проводится только один раз с членом f_{xy}^2 - в этом случае граничный член содержит $f_x f_{xy}$ и равен нулю

в силу граничного условия (70).

Тогда, обозначая $B = \sqrt{(1 - 4k_x^2)/(1 - k_x^2)}$, получим:

$$S = 36k_x^6 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-w/2}^{w/2} dx dy \frac{[1 - B \cosh(k_x x) \cos(k_y y)]^3}{[\cosh(k_x x) - B \cos(k_y y)]^6} =$$

$$= \frac{18wk_x^5}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} dx dy \frac{[1 - B \cosh(x) \cos(y)]^3}{[\cosh(x) - B \cos(y)]^6} = \frac{12wk_x^5}{5} \frac{16 - 2B^2 + B^4}{(1 - B^2)^2}. \quad (75)$$

При $w < w_c$ действие вычисляется тривиально:

$$S = \frac{9w}{16} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^6(x/2) dx = \frac{6}{5}w. \quad (76)$$

Окончательно имеем:

$$S(w) = \begin{cases} \frac{6}{5}w, & w < w_c \\ \frac{(5w^4 - 40\pi^2 w^2 + 128\pi^4)(w - \sqrt{w^2 - 16\pi^2})^{5/2}}{80\sqrt{2}\pi^4 w^{3/2}}, & w > w_c \end{cases}. \quad (77)$$

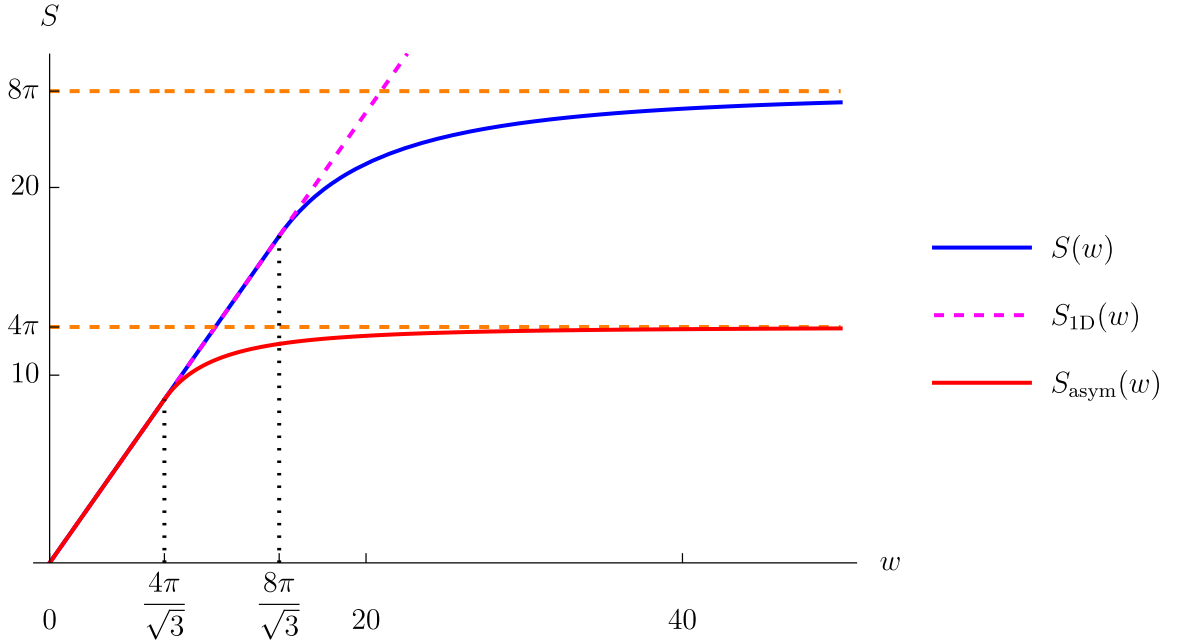


Рис. 6: Действие функционала Буссинеска в канонической форме (41) на симметричном (71) (синяя кривая (77)) и асимметричном (78) (красная кривая $S_{\text{asym}}(w) = S(2w)/2$) инстантонах в полоске конечной ширины в зависимости от ширины полоски. Розовым пунктиром показано действие $S_{1D}(w) = 6w/5$ на одномерном инстантоне $f = -6 \ln \cosh(x/2)$, описывающее $S(w)$ и $S_{\text{asym}}(w)$ на малых ширинах ($w < w_c$ и $w < w_c^{\text{asym}}$ соответственно).

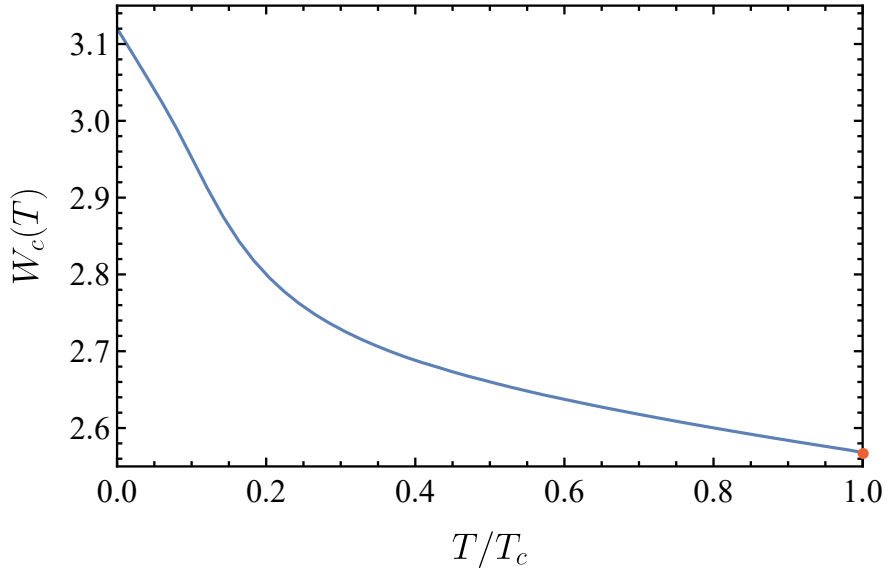


Рис. 7: Температурная зависимость безразмерного фактора $W_c(T)$, определяющего критическую ширину (80). Красная точка соответствует аналитическому значению для области Гинзбурга-Ландау $W_c(T_c) = \pi\sqrt{2/3} \approx 2.57$.

Важно отметить, что помимо решения (71), граничное условие (70) удовлетворяет также асимметричный инстантон вида:

$$f = -6 \ln \left[\cosh(k_x x) - \sqrt{\frac{1 - 4k_x^2}{1 - k_x^2}} \sin(k_y y) \right], \quad k_{x,y} = k_{x,y}(2w) \quad (78)$$

с максимальным подавлением параметра порядка не по центру полосы, а на одном из краев, что по сути есть половина симметричного инстантона в полосе ширины $2w$. Именно асимметричный инстантон, имеющий меньшую энергию $S_{\text{asym}}(w) = S(2w)/2 < S(w)$, реализуется в полоске конечной ширины, что находится в согласии с численным анализом седловых конфигураций, проведенным в работе [13] вблизи T_c . Критическая ширина полосы в таком случае оказывается в 2 раза меньше $w_c^{\text{asym}} = 4\pi/\sqrt{3}$. Графики зависимостей $S(w)$ (синяя кривая) и $S_{\text{asym}}(w)$ (красная кривая) приведены на рис. 6. Как видно, обе зависимости гладко переходят с начального линейного участка $S_{1D}(w) = 6w/5$ (розовый пункт) на нелинейные участки, с увеличением ширины выходящие на соответствующие асимптотики для полосы бесконечной/полубесконечной ширины (8π и 4π соответственно [14]; оранжевый пункт).

Приведем все наши результаты к размерным единицам. Поскольку в данном разделе все координаты были обезразмерены на характерные размеры инстантона в полосе бесконечной ширины согласно (39)

$$L_x(I, T) = c_3^{1/2} c_1^{-1/2} \xi_{\text{GL}}, \quad L_y(I, T) = c_2^{1/2} c_3^{1/2} c_1^{-1} \xi_{\text{GL}}, \quad (79)$$

то для критической ширины в размерных единицах получаем:

$$w_c^{\text{asym}}(I, T) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} L_y(I, T) = W_c(T) \xi_{\text{GL}}(T) (1 - I/I_c)^{-1/2}, \quad (80)$$

где безразмерный фактор

$$W_c(T) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} c_2^{1/2} c_3^{1/2} \gamma_1^{-1}, \quad (81)$$

а γ_1 - коэффициент в разложении $c_1(I \rightarrow I_c) \approx \gamma_1 \sqrt{1 - I/I_c}$. График зависимости $W_c(T)$ показан на рис. 7.

Из (80) видно, что при $I \rightarrow I_c$, $w_c^{\text{asym}} \rightarrow \infty$. Следовательно, при приближении к критическому тока инстантон всегда становится одномерным, что согласуется численным анализом из работы [13].

Для активационного барьера результат (44) модифицируется на произвольной ширине следующим образом:

$$\Delta F(I, T, w) = \frac{c_{2D}(T)}{8\pi} S_{\text{asym}} \left(\frac{w}{L_y(I, T)} \right) \varepsilon_{\text{cond}}(T) d\xi_{\text{GL}}^2(T) (1 - I/I_c)^{3/4}. \quad (82)$$

Нетрудно видеть, что при $w < w_c^{\text{asym}}(I, T)$ выражение (82) переходит в (64).

Распределения токов для $T \rightarrow T_c$, $I/I_c = 0.96$ ($w_c^{\text{asym}} = 12.8 \xi_{\text{GL}}(T)$) для различных ширин полосы показаны на рис. 8, 9, 10, 11. Цветом показан модуль плотности тока, нормированный на значение j_{Γ} тока на бесконечности; зеленая точка соответствует максимальной плотности. Как видно, начиная с некоторой ширины, появляется "перегретая область" с $j > j_c$, доходящая до края полосы. При дальнейшем увеличении ширины, эта область локализуется внутри ширины полосы и приобретает вид эллипса [14]. При этом с повышением ширины увеличивается доля области, где ток больше своего значения на бесконечности $j > j_{\Gamma}$.

Исследуем появление перегретой области при повышении ширины полосы при фиксированном токе. В таком случае будет снова удобно работать в безразмерных координатах. Максимальное значение тока $j_{\text{max}} = j_{x, \text{max}}$ достигается при $x = 0$ и при этом, согласно, (52) соответствует максимуму выражения f_{yy} . Простой анализ приводит к следующему выражению для координаты y_{max} точки максимальной плотности тока:

$$y_{\text{max}}(w) = \begin{cases} \frac{w}{\pi} \arcsin \left[\frac{7\sqrt{w^2 - 4\pi^2} - 5w}{\sqrt{(\sqrt{w^2 - 4\pi^2} + w)(4\sqrt{w^2 - 4\pi^2} - 2w)}} \right], & w > 5\pi/2 \\ -w, & w < 5\pi/2 \end{cases}, \quad (83)$$

при этом, согласно (52), (39), (78):

$$j_{\text{max}}(w)/j_{\Gamma} = 1 + \frac{2c_1^2}{3c_2c_4} J(w) \quad (84)$$

где монотонно растущая функция

$$J(w) = \begin{cases} \frac{1}{8w^2} \left(\sqrt{w^2 - 4\pi^2} + w \right)^2, & w > 5\pi/2 \\ \frac{6\pi^2}{w^2} \frac{4\sqrt{w^2 - 4\pi^2} - 2w + \sqrt{2w(\sqrt{w^2 - 4\pi^2} + w) - 16\pi^2}}{\left[\sqrt{4\sqrt{w^2 - 4\pi^2} - 2w} + \sqrt{\sqrt{w^2 - 4\pi^2} + w} \right]^2}, & w < 5\pi/2 \end{cases}. \quad (85)$$

Перегретая область появляется при $j_{\max}/j_{\Gamma} \geq j_c/j_{\Gamma} = I_c/I$. С учетом $c_1 \approx \gamma_1 \sqrt{1 - I/I_c}$, имеем условие на ширину $w_0(I, T)$ полосы, соответствующую появлению перегретой области:

$$J(w_0) = \frac{3c_2c_4}{2\gamma_1^2} \frac{I_c}{I} = \frac{4}{\eta} \frac{I_c}{I}. \quad (86)$$

Как было отмечено в разделе 3, коэффициент $\eta(T) = 8\gamma_1^2/3c_2c_4$ меняется в узком диапазоне (15.93, 16.00). С учетом $J(5\pi/2) = 8/25$, получаем, что перегретая область с центром не на краю полосы, $y_{\max} \neq -w$ (то есть $w_0(I, T) > 5\pi/2$), могла бы появиться лишь при токах

$$I \leq \frac{25I_c(T)}{2\eta(T)} \leq 0.78I_c(T), \quad (87)$$

что означает, что вблизи криттока такой сценарий невозможен и при увеличении ширины перегретая область всегда появляется с центром на краю полосы. Уравнение (86) дает оценку $w_0(I, T) \sim 7.44 \approx 1.03w_c^{\text{asym}}$ при токах $I \sim I_c(T)$.

Наконец заметим, что центр перегретой области проходит через центр полосы ($y_{\max}(w) = 0$) при $w = 7\pi/\sqrt{6} \approx 1.24w_c^{\text{asym}}$. В пределе $w \rightarrow \infty$ имеем $y_{\max}(w) = w/2 - 3$.

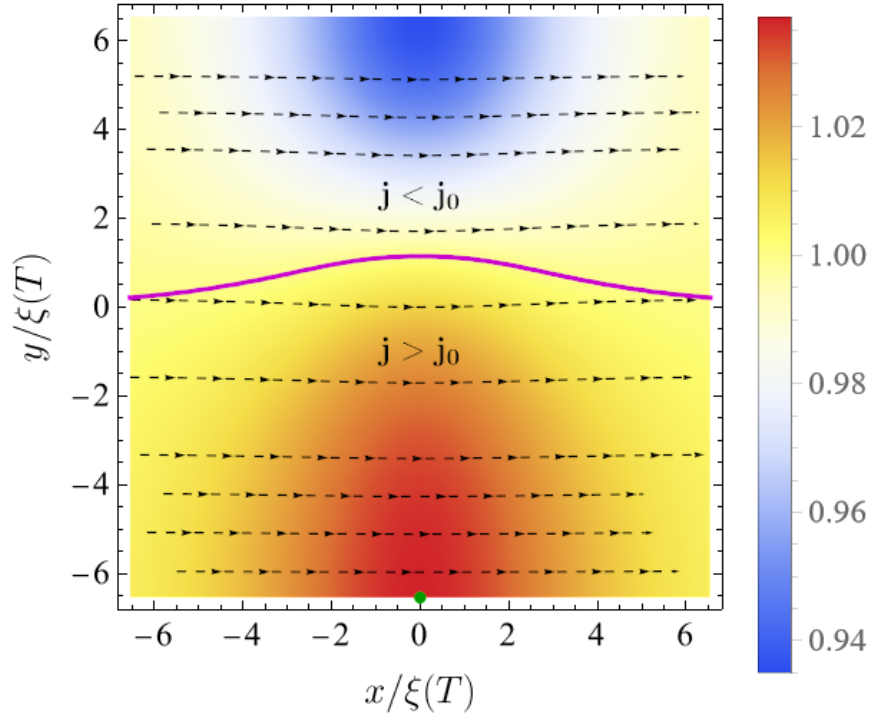


Рис. 8: Инстантонная конфигурация тока в полоске ширины $w = 1.02w_c^{\text{asym}} = 13\xi(T)$ ($I = 0.96I_c(T)$)

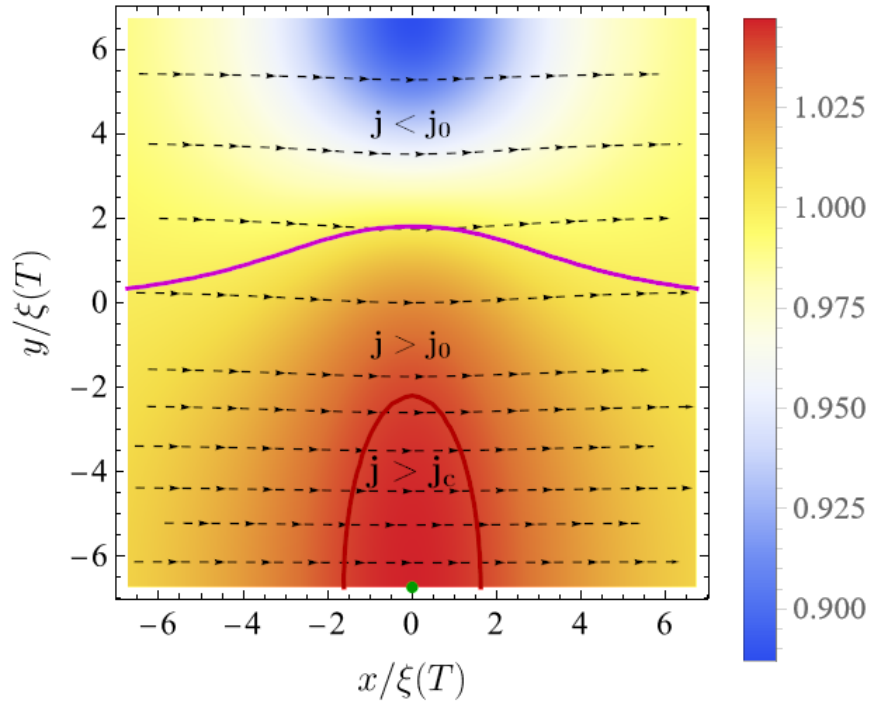


Рис. 9: Инстантонная конфигурация тока в полоске ширины $w = 1.05w_c^{\text{asym}} = 13.5\xi(T)$ ($I = 0.96I_c(T)$)

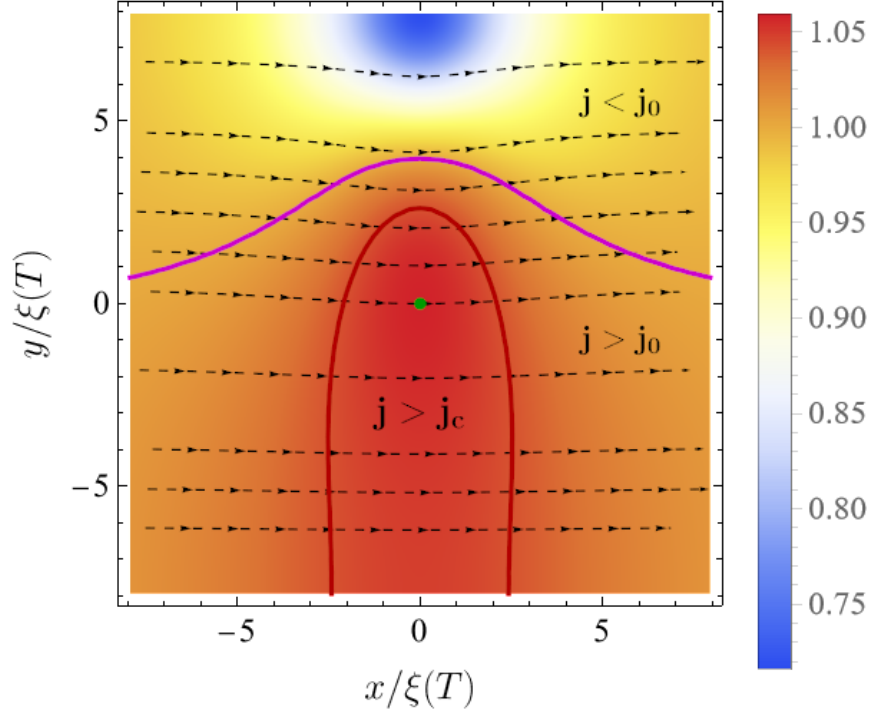


Рис. 10: Инстантонная конфигурация тока в полоске ширины
 $w = (7/4\sqrt{2})w_c^{\text{asym}} = 15.8\xi(T)$ ($I = 0.96I_c(T)$)
 Центр перегретой области находится по центру полоски.

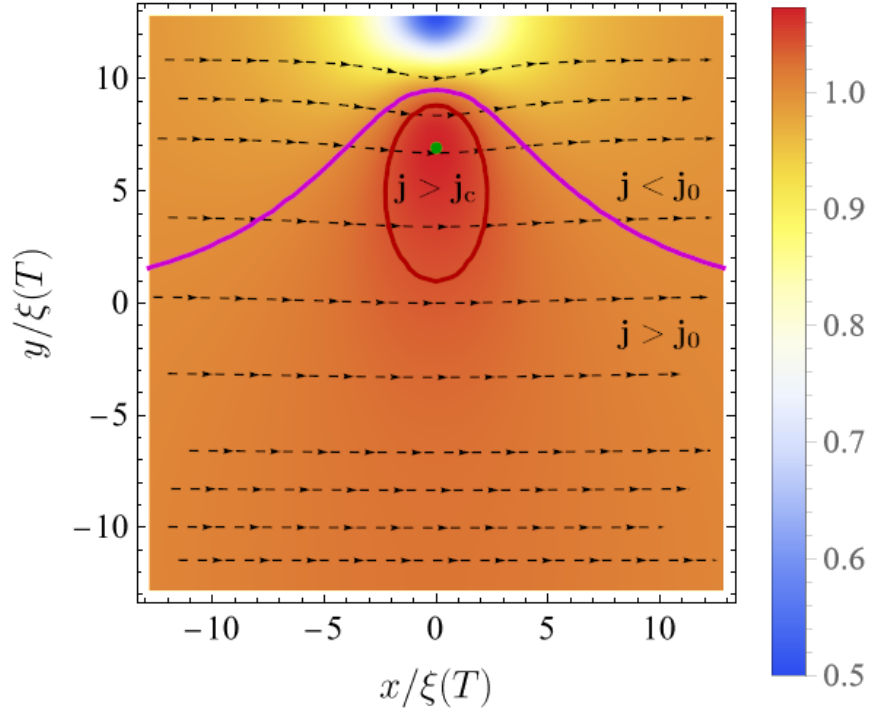


Рис. 11: Инстантонная конфигурация тока в полоске ширины
 $w = 2w_c^{\text{asym}} = 25\xi(T)$ ($I = 0.96I_c(T)$)

6 Заключение

В работе исследовалось тепловое проскальзывание фазы в двумерных грязных сверхпроводящих полосках при токах, близких к критическому. Исследована зависимость активационного барьера, соответствующего оптимальной тепловой флуктуации, предшествующей началу теплового проскальзывания, от ширины полоски и температуры. Показано, что на произвольных температурах полученные ранее вблизи T_c скейлинг барьера $\Delta F_{2D} \sim (1 - I/I_c)^{3/4}$ и размеров инстантона вдоль $L_x \sim (1 - I/I_c)^{-1/4}$ и поперек $L_y \sim (1 - I/I_c)^{-1/2}$ тока остается неизменным, а инстантон по-прежнему описывается точно интегрируемым уравнением Буссинеска с точностью до рескейлинга на некоторые функции температуры, вычисляемые численно.

Предложенный нами подход основан на двух ключевых наблюдениях: i) в пределе $I \rightarrow I_c$ инстантон вырождается в однородное решение; ii) размеры инстантона при этом расходятся. Первое обстоятельство позволяет организовать теорию возмущений по малости отклонения относительно исходного однородного сверхтокового состояния, тогда как второе приводит к градиентной малости возмущений. Таким образом, производя градиентное разложение в уравнениях Узаделя оказывается возможным исключить функции Грина из функционала свободной энергии и получить свободную энергию в форме Буссинеска. Это дает возможность вычислить величину активационного барьера на всем диапазоне температур (82). В частности, для случая тонкого одномерного провода, получаемые криттоковые асимптотики барьера хорошо согласуются с численными зависимостями барьера от тока при разных температурах, полученными в работе [7].

Решение уравнения Буссинеска, описывающее инстантон в (полу-)бесконечной двумерной пленке было получено ранее [14]. Мы показали, что аналитический профиль инстантона может быть найден и для полоски конечной ширины. Полученное решение, затухающее вдоль длины полоски и периодичное в поперечном направлении описывает профиль бегущей вдоль направления тока солитонной цепи, являющейся решением соответствующего уравнения КР-I. При достаточно малых ширинах полоски $w < w_c^{\text{asym}}$ найденное решение вырождается в независимый от y одномерный инстантон, подобный инстантону Лангера-Амбегаокара. Это приводит к линейной зависимости барьера от ширины на начальном участке, гладко переходящей в нелинейный участок в точке w_c^{asym} . Зависимость пограничной ширины $w_c^{\text{asym}}(I, T)$ от тока и температуры дается выражением (80) и графиком 7.

Наконец отметим, что приведенное рассмотрение справедливо в узком регионе вблизи критического тока, когда конфигурация инстантона с наименьшей энергией является безвихревой. Приведенная нами наивная оценка показывает, что размер безвихревого региона для полоски бесконечной ширины на всём диапазоне температур практически не меняется и составляет 6% от криттока. С уменьшением ширины полоски, безвихревой регион сильно увеличивается и в рамках нашего решения с разумной точностью оценен быть не может.

А Детали градиентного разложения

А.1 Явные выражения для поправок $\psi_{3/2}$, θ_2 .

Подставляя (20), (21) в уравнение (7), получим в порядке $\varepsilon^{3/2}$:

$$2\Delta\psi_{3/2} = D \sin \theta_\Gamma \phi_{xx} + 2D\kappa \cos \theta_\Gamma (\theta_1)_x, \quad (88)$$

откуда, с учетом (25), получим:

$$\psi_{3/2} = \alpha_1 \phi_{xx} + \alpha_2 \delta_x \quad (89)$$

с коэффициентами:

$$\alpha_1 = \frac{D \sin \theta_\Gamma}{2N\Delta_\Gamma} (N - 4\Gamma \sin \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma), \quad (90a)$$

$$\alpha_2 = \frac{D\kappa \sin \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N}. \quad (90b)$$

Теперь запишем (6) в порядке ε^2 :

$$M\theta_2 - \frac{3}{4}\Gamma \sin(2\theta_\Gamma)\theta_1^2 + \Delta_\Gamma \sin \theta_\Gamma \theta_1 \delta + D\kappa \cos(2\theta_\Gamma)\phi_x \theta_1 + D\kappa(\psi_{3/2})_x \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma + \\ + \frac{D}{2}\phi_x^2 \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma - \frac{D}{2}(\theta_1)_{xx} = 0, \quad (91)$$

где, с учетом (11), использовано, что $\partial M / \partial \theta_\Gamma = -(3/2)\Gamma \sin(2\theta_\Gamma)$. Отсюда, с учетом (25) и (89), получим:

$$\theta_2 = \beta_1 \delta^2 + \beta_2 \phi_x^2 + \beta_3 \delta \phi_x + \beta_4 \delta_{xx} + \beta_5 \phi_{xxx} \quad (92)$$

с коэффициентами:

$$\beta_1 = \frac{\Delta_\Gamma^2 \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{M^2} \left[\frac{3\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{2} - 1 \right], \quad (93a)$$

$$\beta_2 = \frac{D \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{2M^2} \left[\frac{3\Gamma^2 \sin^2(2\theta_\Gamma)}{2} + 4\Gamma \cos(2\theta_\Gamma) - M \right], \quad (93b)$$

$$\beta_3 = \frac{D\kappa\Delta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{M^3} [M(3 \sin^2 \theta_\Gamma - 1) - 3\Gamma \sin^2 \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma], \quad (93c)$$

$$\beta_4 = \frac{D\Delta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{2M^2} [\Delta_\Gamma - 4\Gamma \sin \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma], \quad (93d)$$

$$\beta_5 = -\frac{D^2\kappa \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{2M^2} [\sin \theta_\Gamma (M - 4\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma) + \Delta_\Gamma]. \quad (93e)$$

А.2 Вывод разложения (26)

После подстановки (20) и ряда для спектральных углов (21) в функционал (3) и разложения относительно значения на однородном решении, в двух младших порядках получим:

$$\Delta F = \Delta F^{(2)} + \Delta F^{(3)} + \dots, \quad (94)$$

где:

$$\Delta F^{(2)} = \frac{\pi\nu T}{2} \sum_{\varepsilon} \int d\mathbf{r} \left\{ 2\Delta_{\Gamma} \sin \theta_{\Gamma} \delta^2 - 4\Delta_{\Gamma} \cos \theta_{\Gamma} \theta_1 \delta + 2M\theta_1^2 + 2D\kappa \sin(2\theta_{\Gamma})\theta_1 \phi_x + \right. \\ \left. + D \sin^2 \theta_{\Gamma} [\phi_x^2 + 2\kappa(\psi_{3/2})_x] \right\}, \quad (95)$$

$$\Delta F^{(3)} = \frac{\pi\nu T}{2} \sum_{\varepsilon} \int d\mathbf{r} \left\{ 2\Delta_{\Gamma} \sin \theta_{\Gamma} [\theta_1^2 \delta + \psi_{3/2}^2] - 4\Delta_{\Gamma} \cos \theta_{\Gamma} \theta_2 \delta + 4M\theta_1 \theta_2 - \Gamma \sin(2\theta_{\Gamma})\theta_1^3 + \right. \\ \left. + D [2\kappa \sin(2\theta_{\Gamma})\theta_1(\psi_{3/2})_x + 2\kappa \sin(2\theta_{\Gamma})\theta_2 \phi_x + 2\kappa \cos(2\theta_{\Gamma})\theta_1^2 \phi_x - \cos(2\theta_{\Gamma})(\psi_{3/2})_x \phi_x + \right. \\ \left. + \sin(2\theta_{\Gamma})\theta_1 \phi_x^2 + (\theta_1)_x^2 + (\psi_{3/2})_x \phi_x + \sin^2 \theta_{\Gamma} \phi_y^2] \right\}. \quad (96)$$

Вид ряда (94) непосредственно следует из вида рядов (21) для θ и χ , то есть из скейлинга седловых уравнений $\delta F/\delta\theta = 0$ и $\delta F/\delta\chi = 0$ [(6) и (7)] при разложении их по ε .

Подставляя выражения для поправок (25), (92), (89) в выражения (95), (96) и безразмеривая координаты на $\xi_{\text{GL}}(T)$, получаем:

$$\Delta F^{(2)}[\delta, \phi] = C \int dxdy [a_1 \delta^2 + a_2 \delta \phi_x + a_3 \phi_x^2], \quad (97a)$$

$$\Delta F^{(3)}[\delta, \phi] = C \int dxdy [b_1 \phi_y^2 + b_2 \delta \phi_x^2 + b_3 \phi_x^3 + b_4 \delta^3 + b_5 \delta^2 \phi_x + b_6 \delta_x^2 + b_7 \phi_{xx}^2 + b_8 \delta_{xx} \phi_x], \quad (97b)$$

где $C = \nu \Delta_{\Gamma}^2 d \xi_{\text{GL}}^2$, d - толщина пленки, а безразмерные коэффициенты a_i , b_i в терминах $K = \Delta_{\Gamma} - \Gamma \sin \theta_{\Gamma}$, $\tau = 1 - T/T_c$ имеют вид:

$$a_1 = \frac{\pi T}{\Delta_{\Gamma}} \sum_{\varepsilon} \frac{K \sin^3 \theta_{\Gamma}}{N}, \quad (98)$$

$$a_2 = \frac{2\sqrt{\pi\Gamma T_c \tau} T}{\Delta} \sum_{\varepsilon} \frac{\sin^2(2\theta_{\Gamma})}{N}, \quad (99)$$

$$a_3 = \frac{4\tau T}{\Delta_{\Gamma}^2} \sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta_{\Gamma} \left[1 - \frac{4\Gamma \sin \theta_{\Gamma} \cos^2 \theta_{\Gamma}}{N} \right], \quad (100)$$

$$b_1 = \frac{4T_c \tau T}{\Delta_{\Gamma}^2} \sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta_{\Gamma}, \quad (101)$$

$$b_2 = \frac{4T_c \tau T}{\Delta_{\Gamma}} \sum_{\varepsilon} \frac{\sin^2 \theta_{\Gamma} \cos^2 \theta_{\Gamma}}{N^3} \left[2N^2 + 2\Gamma N \sin \theta_{\Gamma} (1 - 5 \cos(2\theta_{\Gamma})) - 3\Gamma^2 \sin^2 \theta_{\Gamma} \sin^2(2\theta_{\Gamma}) \right], \quad (102)$$

$$b_3 = \frac{4\sqrt{\Gamma T_c^3 \tau^3} T}{\sqrt{\pi} \Delta_\Gamma^2} \sum_\varepsilon \frac{\sin \theta_\Gamma \sin^2(2\theta_\Gamma)}{N^3} \left[\Gamma^2 \sin^2 \theta_\Gamma \sin^2(2\theta_\Gamma) + 4\Gamma N \sin \theta_\Gamma \cos(2\theta_\Gamma) - 2N^2 \right], \quad (103)$$

$$b_4 = \pi \Delta_\Gamma T \sum_\varepsilon \frac{\sin^3 \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N^3} \left[N - \Gamma \sin \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma \right], \quad (104)$$

$$b_5 = \sqrt{\pi \Gamma T_c \tau} T \sum_\varepsilon \frac{\sin^2 \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N^3} \left[4N(2 \cos(2\theta_\Gamma) - 1) + 3\Gamma \sin \theta_\Gamma \sin^2(2\theta_\Gamma) \right], \quad (105)$$

$$b_6 = \frac{4T_c \tau T}{\Delta_\Gamma} \sum_\varepsilon \frac{\sin^2 \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N^2} \left[\Delta_\Gamma - \Gamma(\sin(3\theta_\Gamma) + \sin \theta_\Gamma) \right], \quad (106)$$

$$b_7 = \frac{16T_c^2 \tau^2 T}{\pi \Delta_\Gamma^3} \sum_\varepsilon \frac{\sin^2 \theta_\Gamma}{N^2} \left[N(4\Gamma \sin(2\theta_\Gamma) \cos \theta_\Gamma - N) \sin \theta_\Gamma + \Gamma \Delta_\Gamma \sin^2(2\theta_\Gamma) - 2\Gamma^2 \sin^3(2\theta_\Gamma) \cos \theta_\Gamma \right], \quad (107)$$

$$b_8 = \frac{8\sqrt{\Gamma T_c^3 \tau^3} T}{\sqrt{\pi} \Delta_\Gamma^2} \sum_\varepsilon \frac{\sin \theta_\Gamma \sin^2(2\theta_\Gamma)}{N^2} \left[N + \Delta_\Gamma - 4\Gamma \sin \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma \right]. \quad (108)$$

В области Гинзбурга-Ландау параметр порядка мал ($\Delta \sim \tau^{1/2}$) и спектральные углы θ_Γ могут быть разложены в ряд по Δ . В старшем порядке имеем $\theta_\Gamma \approx \Delta/\varepsilon$, а величиной $\Gamma \sim \Delta^2 \ll \Delta$ в выражениях (98)–(108) можно пренебречь. В результате, все мацубаровские суммы тривиально вычисляются в главном порядке $O(\tau)$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1 - A^2) & 4A & 1 \end{pmatrix} \tau, \quad (109a)$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2(1 - A^2) \\ 2A & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tau, \quad (109b)$$

где $A = \kappa \xi$.

Заметим, что коэффициенты b_3 , b_7 и b_8 в пределе $T \rightarrow T_c$ ведут себя как τ^2 (им соответствуют нули в (109)), что естественным образом следует из того, что эти коэффициенты входят в разложение свободной энергии (97) перед членами, содержащими более двух производных. Такие члены не могли бы появиться из функционала Гинзбурга-Ландау и потому должны уходить из разложения (97) в пределе $T \rightarrow T_c$.

Наконец, из формулы (109) видно, что $4a_1 a_3 - a_2^2 = 8\tau^2(1 - 3A^2) \sim 1 - I/I_c$, что отражает общий механизм зануления этой комбинации мацубаровских сумм (а с ней и коэффициента c_1 , см. (37)) на криттоке (см. Приложение В).

В Соотношение между коэффициентами a_i на криттоке

Критток соответствует максимуму зависимости j_Γ , поэтому, требуя $\partial j_\Gamma / \partial \Gamma = 0$ в выражении для однородного тока (13), получим:

$$\sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta_\Gamma = -4\Gamma \sum_{\varepsilon} \sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma \left(\frac{\partial \theta_\Gamma}{\partial \Gamma} \right). \quad (110)$$

Производная $\partial \theta_\Gamma / \partial \Gamma$ может быть найдена дифференцированием однородного уравнения Узаделя (11), и после некоторой алгебры примет вид:

$$\frac{\partial \theta_\Gamma}{\partial \Gamma} = -\frac{\sin \theta_\Gamma \cos \theta_\Gamma}{N} \left\{ \left[\sum_{\varepsilon} \frac{K \sin^3 \theta_\Gamma}{N \Delta_\Gamma} \right]^{-1} \sum_{\varepsilon} \frac{\sin^2 \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N} + \sin \theta_\Gamma \right\}. \quad (111)$$

Подставляя (111) в (110), получим соотношение между мацубаровскими суммами на криттоке:

$$\sum_{\varepsilon} \sin^2 \theta_\Gamma \left[1 - \frac{4\Gamma \sin \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N} \right] = 4\Gamma \left[\sum_{\varepsilon} \frac{K \sin^3 \theta_\Gamma}{N \Delta_\Gamma} \right]^{-1} \left[\sum_{\varepsilon} \frac{\sin^2 \theta_\Gamma \cos^2 \theta_\Gamma}{N} \right]^2, \quad (112)$$

откуда моментально следует:

$$a_3(I) = \frac{a_2^2(I_c)}{4a_1(I_c)}. \quad (113)$$

С Лумр-цепь для уравнения Буссинеска

В работе [22] рассматривается уравнение КР-I в виде:

$$[u_t + 6uu_x + u_{xxx}]_x = 3u_{yy} \quad (114)$$

и показывается, что решение, соответствующее бегущей лумр-цепи может быть записано в форме Хироты [23, 24] следующим образом:

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln [\cosh F(x, y, t) + \mu \cos G(x, y, t)] \quad (115)$$

в терминах линейных функций

$$F(x, y, t) = Ax + By + Ct + D, \quad G(x, y, t) = \alpha x + \beta y + \gamma t + \delta \quad (116)$$

с коэффициентами, определяемыми через четыре комплексных параметра $\lambda_i = a_i + ib_i$, $\theta_i = \rho_i + i\varphi_i$, $i = 1, 2$ (предполагается $0 < a_1 \leq a_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$), посредством соотношений:

$$A = \operatorname{Re}(\lambda_2 - \lambda_1), \quad B = \operatorname{Im}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \quad C = 4 \operatorname{Re}(\lambda_1^3 - \lambda_2^3), \quad D = \operatorname{Re}(\theta_2 - \theta_1), \quad (117a)$$

$$\alpha = \operatorname{Im}(\lambda_2 - \lambda_1), \quad \beta = \operatorname{Re}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \quad C = 4 \operatorname{Im}(\lambda_1^3 - \lambda_2^3), \quad \delta = \operatorname{Im}(\theta_2 - \theta_1), \quad (117b)$$

$$\mu = 2\sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}}. \quad (117c)$$

Нетрудно видеть, что $u = u(x - Xt, y - Yt)$, где компоненты вектора скорости волны:

$$X = \frac{\gamma B - \beta C}{\beta A - \alpha B}, \quad Y = \frac{\alpha C - \gamma A}{\beta A - \alpha B}. \quad (118)$$

При этом профиль волны $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Буссинеска [22]:

$$Xu_{xx} + 3u_{yy} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxxx} = -Yu_{xy}. \quad (119)$$

Сравнивая (119) с нашим уравнением (67), получаем, что волна должна бежать вдоль оси x : $Y = 0$. Это условие вместе с желаемым профилем решения (монотонное затухание вдоль x , периодичность вдоль y , симметричность относительно начала координат) диктует требования на коэффициенты (117):

$$B = D = \alpha = \delta = \gamma = 0, \quad A, \beta \neq 0, \quad (120)$$

В результате решение (115) принимает вид:

$$u(x, y, t) = 2\partial_x^2 \ln [\cosh(A(x - Xt)) + \mu \cos(\beta y)]. \quad (121)$$

где $X = -C/A$. Замечая, что замена $y \mapsto \sqrt{3}y$, $u \mapsto -u/3$ и подстановка $X = 1$ приводит уравнение (119) к виду (67), получаем явный вид lump-цепи для уравнения (67):

$$u(x, y) = -6\partial_x^2 \ln \left[\cosh(Ax) + \mu \cos(\sqrt{3}\beta y) \right]. \quad (122)$$

Потребовав (120) с учетом (117), найдем условия на константы λ_i :

$$b_1 = b_2 = 0, \quad 3(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 = 1, \quad (123)$$

откуда получим связь между коэффициентами в (122):

$$\beta = a_2^2 - a_1^2 = \pm A \sqrt{(1 - A^2)/3}, \quad (124a)$$

$$\mu = 2 \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2} = \pm \sqrt{\frac{1 - 4A^2}{1 - A^2}}. \quad (124b)$$

В итоге, опуская несущественные знаки и обозначая $A \equiv k_x$, получаем однопараметрическое семейство симметричных относительно начала координат lump-цепей для уравнения (67):

$$u(x, y) = -6\partial_x^2 \ln \left[\cosh(k_x x) - \sqrt{\frac{1 - 4k_x^2}{1 - k_x^2}} \cos(k_x \sqrt{1 - k_x^2} y) \right]. \quad (125)$$

Список литературы

- [1] G. N. Gol'tsman, O. Okunev, G. Chulkova, A. Lipatov, A. Semenov, K. Smirnov, B. Voronov, A. Dzardanov, C. Williams, and R. Sobolewski, Picosecond superconducting single-photon optical detector, [Applied Physics Letters](#) **79**, 705 (2001).
- [2] C. Natarajan, M. Tanner, and R. Hadfield, Superconducting nanowire single-photon detectors: physics and applications, [Superconductor Science and Technology](#) **25** (2012).
- [3] I. Esmail Zadeh, J. Chang, J. Los, S. Gyger, A. W. Elshaari, S. Steinhauer, S. Dorenbos, and V. Zwiller, Superconducting nanowire single-photon detectors: A perspective on evolution, state-of-the-art, future developments, and applications, [Applied Physics Letters](#) **118**, 190502 (2021).
- [4] M. Siegel, K. Ilin, A. Engel, A. Semenov, and H. W. Hübers, Fluctuation effects in superconducting nanostrips, [Physica C](#) **444**, 12 (2006).
- [5] J. Kitaygorsky, I. Komissarov, A. Jukna, D. Pan, O. Minaeva, N. Kaurova, A. Divochiy, A. Korneev, M. Tarkhov, and B. Voronov, Sensors and Detectors-Sensors: Single Photon Optical and IR Detectors-Dark Counts in Nanostructured NbN Superconducting Single-Photon Detectors and Bridges, [IEEE Transactions on Applied Superconductivity](#) **17**, 275 (2007).
- [6] J. S. Langer and V. Ambegaokar, Intrinsic resistive transition in narrow superconducting channels, [Phys. Rev.](#) **164**, 498 (1967).
- [7] A. V. Semenov, P. A. Krutitskii, and I. A. Devyatov, Microscopic theory of phase slip in a narrow dirty superconducting strip, [Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.](#) **92**, 842 (2010) [[JETP Lett.](#) **92**, 762 (2010)] .
- [8] A. Zharov, A. Lopatin, A. E. Koshelev, and V. M. Vinokur, Microscopic Theory of Thermal Phase Slips in Clean Narrow Superconducting Wires, [Phys. Rev. Lett.](#) **98**, 197005 (2007).
- [9] P. Marychev and D. Vodolazov, Threshold fluctuations in a superconducting current-carrying bridge, [Superconductor Science and Technology](#) **30**, 075008 (2017).
- [10] Y. P. Korneeva, D. Y. Vodolazov, A. V. Semenov, I. N. Florya, N. Simonov, E. Baeva, A. A. Korneev, G. N. Goltsman, and T. M. Klapwijk, Optical Single-Photon Detection in Micrometer-Scale NbN Bridges, [Phys. Rev. Appl.](#) **9**, 064037 (2018).
- [11] Y. P. Korneeva, N. Manova, I. Florya, M. Y. Mikhailov, O. Dobrovolskiy, A. Korneev, and D. Y. Vodolazov, Different Single-Photon Response of Wide and Narrow Superconducting $\text{Mo}_x\text{Si}_{1-x}$ Strips, [Phys. Rev. Appl.](#) **13**, 024011 (2020).

- [12] I. Charaev, Y. Morimoto, A. Dane, A. Agarwal, M. Colangelo, and K. K. Berggren, Large-area microwire MoSi single-photon detectors at 1550 nm wavelength, [Appl. Phys. Lett. **116**, 242603 \(2020\)](#).
- [13] D. Y. Vodolazov, Saddle point states in two-dimensional superconducting films biased near the depairing current, [Phys. Rev. B **85**, 174507 \(2012\)](#).
- [14] M. A. Skvortsov and A. V. Polkin, Thermal phase slips in superconducting films, [Phys. Rev. B **113**, L100502 \(2026\)](#).
- [15] K. Maki, in *Superconductivity*, ed. by R.D. Parks, Marcel Dekker, New York (1969) , p. 1035.
- [16] A. A. Abrikosov and L. P. Gor'kov, Contribution to the theory of superconducting alloys with paramagnetic impurities, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **39**, 1781 (1960) [[Sov. Phys. JETP **12**, 1243 \(1961\)](#)] .
- [17] J. Boussinesq, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, et communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond, *J. Math. Pure Appl.* **17**, 55 (1872).
- [18] L. V. Bogdanov and V. E. Zakharov, The Boussinesq equation revisited, [Physica D **165**, 137 \(2002\)](#).
- [19] D. E. McCumber and B. I. Halperin, Time Scale of Intrinsic Resistive Fluctuations in Thin Superconducting Wires, [Phys. Rev. B **1**, 1054 \(1970\)](#).
- [20] S. Manakov, V. Zakharov, L. Bordag, A. Its, and V. Matveev, Two-dimensional solitons of the Kadomtsev-Petviashvili equation and their interaction, [Physics Letters A **63**, 205 \(1977\)](#).
- [21] J. Satsuma and M. J. Ablowitz, Two-dimensional lumps in nonlinear dispersive systems, [Journal of Mathematical Physics **20**, 1496 \(1979\)](#).
- [22] C. Lester, A. Gelash, D. Zakharov, and V. Zakharov, Lump chains in the KP-I equation, [arXiv:2102.07038 \(2021\)](#).
- [23] R. Hirota, Exact N -soliton solutions of the wave equation of long waves in shallow-water and in nonlinear lattices, [J. Math. Phys. **14**, 810 \(1973\)](#).
- [24] R. Hirota and J. Satsuma, Nonlinear evolution equations generated from the Bäcklund transformation for the Boussinesq equation, [Prog. Theor. Phys. **57**, 797 \(1977\)](#).