

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский  
университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау  
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика  
**Направленность (профиль) подготовки:** Общая и прикладная физика

**Квазичастичные состояния в сверхпроводящем вихре в  
гетероструктуре сверхпроводник-киральнй  
ферромагнетик в том числе в присутствии скирмиона**  
(бакалаврская работа)

**Студент:**

Слободской Андрей Сергеевич

---

(подпись студента)

**Научные руководители:**

Бурмистров Игорь Сергеевич,  
д-р физ.-мат. наук

---

(подпись научного руководителя)

Апостолов Станислав Сергеевич,  
д-р физ.-мат. наук

---

(подпись научного руководителя)

Москва 2026

## Аннотация

В данной дипломной работе изучаются связанные квазичастичные состояния в двумерной структуре сверхпроводник–киральнй ферромагнетик при наличии в системе свехпроводящего вихря и скирмиона. В результате общего анализа решений уравнений Боголюбова-де Жена выведены условия существования майорановских нулевых мод. В рамках приближения типа ВКБ найден явный вид волновых функций как майорановских состояний, так и состояний с ненулевой энергией. Для последних получена зависимость энергии от орбитального момента. Обнаружено сильное различие спектра системы для двух конфигураций – однородной и скирмионной намагниченностей: при определенных значениях радиуса скирмиона мини-щель, отделяющая майорановские состояния от остального спектра, становится больше по сравнению с однородным случаем. Это обстоятельство на практике дает скирмионной текстуре преимущество перед однородно намагниченным магнетиком.

# Содержание

|          |                                                                                                                                         |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Введение</b>                                                                                                                         | <b>4</b>  |
| <b>2</b> | <b>Постановка задачи</b>                                                                                                                | <b>6</b>  |
| 2.1      | Майорановские состояния: условия существования . . . . .                                                                                | 6         |
| 2.1.1    | Майорановское состояние, локализованное на вихре . . . . .                                                                              | 8         |
| 2.1.2    | Майорановское состояние, локализованное на краю . . . . .                                                                               | 9         |
| <b>3</b> | <b>Майорановское состояние, локализованное вблизи вихря</b>                                                                             | <b>9</b>  |
| 3.1      | Конфигурация без скирмиона: используемые приближения . . . . .                                                                          | 9         |
| 3.1.1    | Однородная намагниченность $\theta \equiv 0$ . . . . .                                                                                  | 11        |
| 3.1.2    | Однородная намагниченность $\theta \equiv \pi$ . . . . .                                                                                | 11        |
| 3.1.3    | Вращение для неоднородной намагниченности . . . . .                                                                                     | 12        |
| 3.1.4    | Аналитическое решение для малой неоднородной $\theta(r)$ . . . . .                                                                      | 12        |
| 3.2      | Коаксиальный скирмион . . . . .                                                                                                         | 13        |
| 3.2.1    | Аналитическое выражение . . . . .                                                                                                       | 14        |
| 3.2.2    | Вероятность остаться в майорановском состоянии . . . . .                                                                                | 15        |
| <b>4</b> | <b>Майорановское состояние, локализованное вблизи края</b>                                                                              | <b>16</b> |
| <b>5</b> | <b>Связанные состояния с ненулевым угловым моментом</b>                                                                                 | <b>16</b> |
| 5.1      | Конфигурация без скирмиона . . . . .                                                                                                    | 18        |
| 5.1.1    | Спектр состояний, локализованных на краю . . . . .                                                                                      | 19        |
| 5.1.2    | Состояния, локализованные вблизи вихря . . . . .                                                                                        | 19        |
| 5.2      | Конфигурация со скирмионом . . . . .                                                                                                    | 22        |
| <b>6</b> | <b>Заключение</b>                                                                                                                       | <b>24</b> |
| <b>A</b> | <b>Условия существования майорановского состояния, локализованного вблизи вихря</b>                                                     | <b>27</b> |
| A.1      | Режим $r \rightarrow 0$ . . . . .                                                                                                       | 27        |
| A.2      | Режим $r \rightarrow \infty$ . . . . .                                                                                                  | 28        |
| A.3      | Анализ характеристического уравнения . . . . .                                                                                          | 29        |
| <b>B</b> | <b>Аналитические результаты для волновой функции майорановского состояния, локализованного вблизи вихря</b>                             | <b>29</b> |
| B.1      | Случай однородной намагниченности $\theta = 0$ и большой длины Пирла $A_\varphi = 0$ .                                                  | 30        |
| B.2      | Случай однородной намагниченности $\theta = 0$ и конечной длины Пирла $A_\varphi \neq 0$ .                                              | 31        |
| B.3      | Случай наличия скирмиона . . . . .                                                                                                      | 31        |
| <b>C</b> | <b>Асимптотическое поведение майорановского состояния, локализованного вблизи края</b>                                                  | <b>33</b> |
| <b>D</b> | <b>Аналитические оценки для собственных функций и собственных энергий состояний с ненулевым <math>l</math>, локализованных на вихре</b> | <b>34</b> |
| D.1      | Случай однородной намагниченности $\theta = 0$ . . . . .                                                                                | 34        |
| D.2      | Случай наличия скирмиона . . . . .                                                                                                      | 36        |
| <b>E</b> | <b>Векторный потенциал: точные результаты</b>                                                                                           | <b>38</b> |

# 1 Введение

Предложенная А.Ю. Китаевым [17] идея использования майорановских состояний (МС) в качестве топологически защищенных кубитов побудила многочисленные исследования в области физики конденсированного состояния. Первые теоретические указания на существование МС были сделаны в одномерных системах – полупроводниковых проволоках, приведенных в контакт с  $s$ -волновым сверхпроводником [20, 18, 24]. Вслед за теоретическими предсказаниями последовали экспериментальные подтверждения [19, 11, 25, 23]. Как правило, ключевую роль в подобных системах играет внешнее магнитное поле и спин-орбитальное взаимодействие. Так, например, в рассматриваемой в [20] модели гамильтониан Боголюбова-де Жена имел следующий вид:

$$H = \left( \frac{p_x^2}{2m} - \mu \right) \tau_z + \Delta \tau_x - B \sigma_z + \alpha p_x \sigma_y \tau_z,$$

где  $\Delta$  – сверхпроводящий параметр порядка,  $B$  – магнитное поле,  $\alpha$  – константа, характеризующая силу спин-орбитального взаимодействия. В данной задаче, как показали авторы, МС существуют при выполнении соотношения  $B^2 > \mu^2 + \Delta^2$  между объемными значениями параметров. Состояния могут локализовываться либо на концах проволоки, либо в точке закрытия локальной щели  $B^2(x) = \mu^2(x) + \Delta^2(x)$ .

Параллельно с изучением одномерных систем, рассматривались и двумерные модели, в которых реализуются МС [7, 10, 12]. (При этом основными компонентами по-прежнему оставались магнитное поле и спин-орбитальное взаимодействие.) В частности, в последние годы перспективной считается система из  $s$ -сверхпроводника и кирального ферромагнетика со скирмионом [27, 14, 13]. В первоначальной работе Янга и др. [27] было показано, что для существования МС в случае однородного сверхпроводящего параметра порядка скирмион должен обладать четным топологическим зарядом, или завихренностью. Экспериментально, однако, скирмион четной завихренности получить сложнее, чем простейший случай единичной завихренности. Это обстоятельство было быстро понято: в работе Рекса и др. [22] было предложено вместо однородного сверхпроводника рассматривать сверхпроводник с вихрем. В этом случае условие существования майорановских мод состоит в четности числа  $b + n$ , где  $b$  обозначает топологический заряд вихря ( $\Delta(\mathbf{r}) \sim e^{ib\varphi}$ ), а  $n$  – завихренность скирмиона. Помимо этого условия, авторы провели численный расчет волновых функций МС, а также спектра системы. Однако аналитически данная гетероструктура на сегодняшний день изучена недостаточно.

В данной работе мы, интересуясь простейшим случаем  $b = n = 1$ , приближенно аналитически решаем уравнения Боголюбова-де Жена и получаем явные выражения для волновых функций как майорановских мод, так и других низколежащих состояний. Для последних мы также получаем аналитическую оценку их энергий. В отличие от предыдущих авторов, мы обсуждаем роль вектор-потенциала и влияние сверхпроводника на намагниченность магнитной пленки. Все аналитические результаты мы сравниваем с численными расчетами и находим, что аналитика работает с хорошей точностью.

Аналитический подход типа ВКБ предполагает предел большого обменного взаимодействия, что позволяет искать решения в квазиклассическом виде. Численный же анализ проводится с помощью метода пристрелки для нахождения майорановских состояний и конечно-разностной схемы для исследования остального спектра.

Содержание работы устроено следующим образом. Начиная с общего анализа решений, см. подраздел 2.1, мы выводим критерий существования МС, который оказывается аналогичен упомянутому выше условию  $B^2 > \mu^2 + \Delta^2$  в одномерных системах. В разделе 3 мы описываем аналитический подход и приводим решение для волновой функции МС, локализованного вблизи вихря. При этом сначала задача решается в отсутствие скирмиона, т.е. с

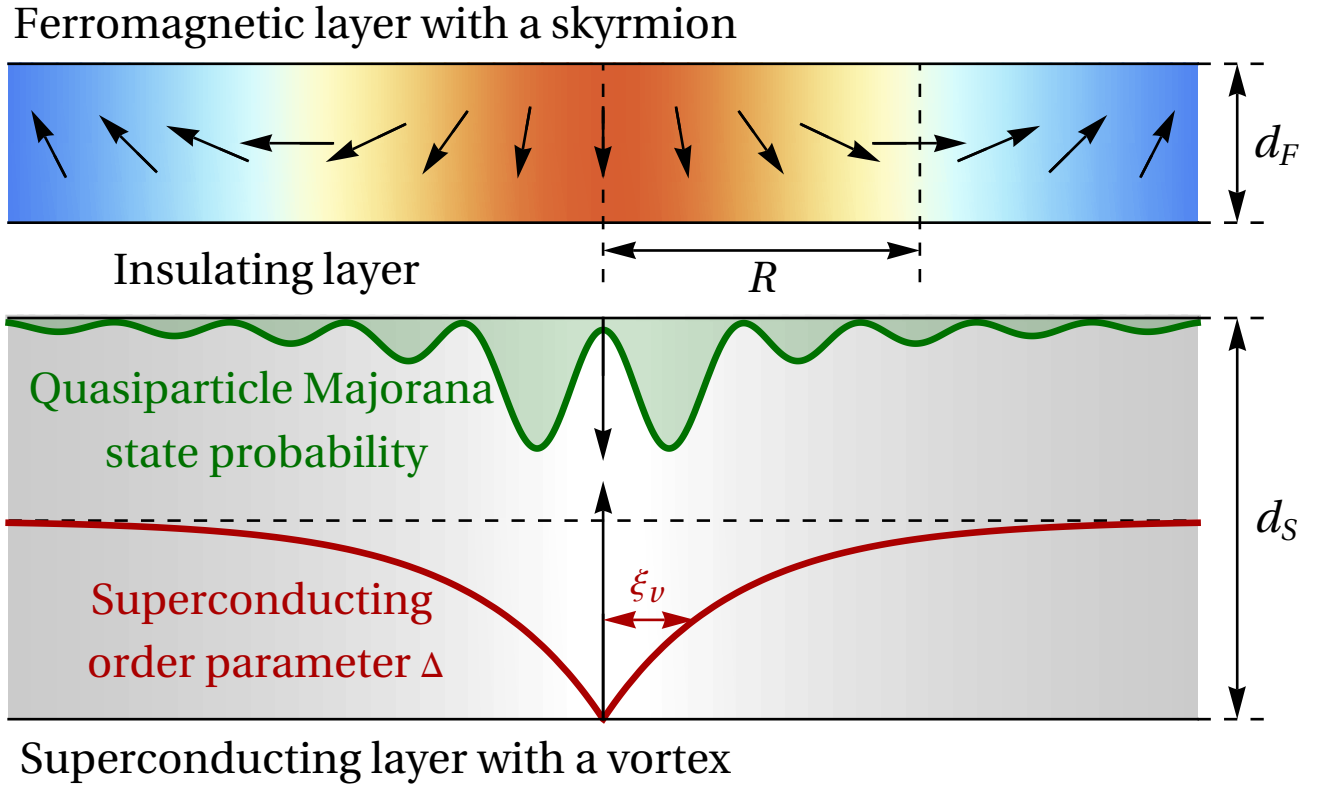


Рис. 1: Схематический рисунок гетероструктуры сверхпроводник–киральный ферромагнетик (см. основной текст).

однородно намагниченным ферромагнетиком, а затем обобщается на случай произвольной медленно изменяющейся в пространстве намагниченности. В разделе 4 мы приводим решение для МС, локализованного на границе системы. В разделе 5 мы используем прежний ВКБ-подход для описания низколежащего дискретного спектра системы, получая волновые функции и энергии связанных состояний с ненулевым орбитальным моментом. В заключении 6 мы суммируем полученные результаты.

## 2 Постановка задачи

Мы рассматриваем следующий гамильтониан квазичастиц на границе между киральным ферромагнетиком и сверхпроводящей плёнкой [27, 22]:

$$H = \frac{\tau_z}{2m}(-i\nabla - e\mathbf{A}\tau_z)^2 - \mu\tau_z + \tau_x \operatorname{Re} \Delta - \tau_y \operatorname{Im} \Delta + J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{m} + \alpha\tau_z[\boldsymbol{\sigma} \times (-i\nabla - e\mathbf{A}\tau_z)]_z. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_j$  и  $\tau_j$  обозначают матрицы Паули, действующие соответственно в спиновом и Намбу-пространствах. Химический потенциал обозначен через  $\mu$ , масса квазичастиц — через  $m$ .

Зеемановское слагаемое отвечает обменному взаимодействию:  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  — намагниченность ферромагнитной пленки,  $J > 0$  — обменный интеграл. Спин-орбитальное взаимодействие имеет стандартную форму Рашбы, причем  $\alpha$  может быть произвольного знака.

Будем считать, что система имеет форму диска радиуса  $L$ , так что естественно работать в полярных координатах  $(r, \varphi)$ . Сверхпроводящий параметр порядка  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(r)e^{i\varphi}$  соответствует наличию сверхпроводящего вихря в начале координат  $\mathbf{r} = 0$ .

В общем случае профиль параметра порядка  $\Delta(r)$  должен определяться самосогласованно, см., например, [5, 15]. Для простоты мы используем стандартное приближение для параметра порядка вблизи вихря:

$$\Delta(r) = \Delta_\infty [1 - \exp(-r/\xi_v)],$$

где  $\Delta_\infty > 0$  — величина параметра порядка вдали от вихря.

Будем рассматривать намагниченность в виде неелевского скирмиона с единичной завихренностью:

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = \cos \theta(r) \mathbf{e}_z + \sin \theta(r) \mathbf{e}_r. \quad (2)$$

Угол  $\theta(r)$  может быть найден из решения магнитной задачи, см. [4]. В данной работе мы считаем  $\theta(r)$  заданной функцией.

В основном мы предполагаем, что намагниченность  $\mathbf{m}$  вдали от вихря направлена вдоль оси  $z$ ,  $\mathbf{m} \rightarrow \mathbf{e}_z$  при  $r \rightarrow \infty$ . В частности,  $\theta(r) \equiv 0$  соответствует однородно намагниченной вдоль оси  $z$  плёнке. Однако мы кратко обсудим и противоположный случай  $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_z$ , или  $\theta(r) \equiv \pi$ , который оказывается важным при решении задачи со скирмионом.

На рис. 1 схематически изображена рассматриваемая гетероструктура. Радиус скирмиона  $R$  будет введен в подразделе 3.2 при обсуждении конкретного профиля  $\theta(r)$ . Толщины пленок  $d_S, d_F$  предполагаются одного порядка и малыми в сравнении с пирловской длиной  $\lambda$ :

$$d_S \sim d_F \ll \lambda = \lambda_L^2/d_S. \quad (3)$$

Стоит отметить, что характер взаимодействия скирмиона с вихрем зависит от параметров системы, см. обзор [4]. В определенных условиях устойчивой конфигурацией является соосное расположение вихря и скирмиона, что мы и предполагаем. Экспериментально данная система изучалась, например, в работе [21].

В вектор-потенциал  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^m + \mathbf{A}^v$  вносит вклад магнетик и вихрь. Точные выражения для обоих вкладов приведены в Приложении E.

### 2.1 Майорановские состояния: условия существования

Гамильтониан (1) действует на четырёхкомпонентную волновую функцию  $\Psi = \{u_\uparrow, u_\downarrow, v_\downarrow, -v_\uparrow\}^T$ , и собственные функции есть решения уравнения Боголюбова–де Жена:

$$H\Psi = E\Psi. \quad (4)$$

Гамильтониан (1) обладает частично-дырочной симметрией:

$$CHC = -H, \quad C = \sigma_y \tau_y K, \quad (5)$$

где  $K$  обозначает комплексное сопряжение. Симметрия (5) означает, что если  $\Psi_E$  является собственным состоянием  $H$  с энергией  $E$ , то состояние  $C\Psi_E$  будет собственным состоянием с энергией  $-E$ .

Этот факт указывает на то, что если уравнение (4) имеет решение при  $E = 0$ , то оно может быть двукратно вырожденным, с линейно независимыми собственными функциями  $\Psi_0$  и  $C\Psi_0$ . Если вырождение действительно имеет место, то можно построить линейные комбинации вида:

$$\Psi^\pm = \frac{\Psi_0 \pm C\Psi_0}{\sqrt{2}}, \quad C\Psi^\eta = \eta\Psi^\eta, \quad \eta = \pm 1. \quad (6)$$

Эти состояния мы будем называть *майорановскими состояниями (МС)* [27]. Для них выполняется следующее соотношение между электронными и дырочными компонентами биспинора:

$$u_{\uparrow,\downarrow} = \eta v_{\uparrow,\downarrow}^*.$$

Далее, система обладает центральной симметрией. Введем оператор  $z$ -проекции обобщённого углового момента [22]:

$$L_z = -i\partial_\varphi + \frac{1}{2}\sigma_z - \frac{1}{2}\tau_z \quad (7)$$

с целочисленными собственными значениями  $l$ . Оператор  $L_z$  коммутирует с гамильтонианом,  $[L_z, H] = 0$ .

Подчеркнём, что  $[L_z, H] = 0$  и в отсутствие скирмиона, то есть при  $\theta \equiv 0, \pi$ . Сохранение  $L_z$  позволяет использовать следующее представление для собственных функций:

$$\Psi(r, \varphi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{i\varphi(l - \sigma_z/2 + \tau_z/2)} \Phi_l(r) \quad (8)$$

и свести задачу (4) к

$$H^{(l)}\Phi_l = E_l\Phi_l. \quad (9)$$

Здесь гамильтониан для  $l$ -й угловой гармоник имеет вид:

$$\begin{aligned} H^{(l)} = & -\frac{\tau_z}{2m} \left[ \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \right) - \left( \frac{\sigma_z - \tau_z - 2l}{2r} + eA_\varphi(r)\tau_z \right)^2 \right] - \mu\tau_z + \Delta(r)\tau_x + J \sin \theta(r)\sigma_x + J \cos \theta(r)\sigma_z \\ & + i\alpha\tau_z\sigma_y \left( \partial_r + \frac{1}{2r} \right) + \alpha\sigma_x \left[ \frac{1 + 2l\tau_z}{2r} - eA_\varphi(r) \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Отметим наличие следующих соотношений:

$$CH^{(-l)}C = -H^{(l)}, \quad CL_zC = -L_z. \quad (11)$$

Они означают, что если имеется собственное состояние  $\Phi_l$  гамильтониана  $H^{(l)}$  с энергией  $E_l$ , соответствующее некоторому  $l$ , то состояние  $C\Phi_l$  будет собственным состоянием оператора  $L_z$  с собственным значением  $-l$ , а также гамильтониана  $H^{(-l)}$  с энергией  $E_{-l} = -E_l$ .

Поскольку МС являются собственными состояниями  $H$  и принадлежат подпространству с фиксированным угловым моментом  $l$ , а собственные функции  $\Psi^\eta$  и  $C\Psi^\eta$  пропорциональны друг другу, они соответствуют  $l = 0$ .

Отметим, что в общем случае возможны состояния с нулевой энергией при  $l$  и  $-l$  ( $l > 0$ ). Однако такие состояния обычно не называют майорановскими.

Используя (6), представим решение уравнения (9) при  $l = 0$  и  $E_l = 0$  в виде

$$\Phi_0^\eta = \{\phi^\eta, i\eta\sigma_y\phi^\eta\}^T,$$

где  $\phi^\eta = \{u_\uparrow, u_\downarrow\}^T$ . Предполагается, что  $u_{\uparrow, \downarrow}$  — вещественные функции, нормированные так, что

$$\int d^2\mathbf{r} (u_\downarrow^2 + u_\uparrow^2) = \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Таким образом, задача на собственные значения для майорановского состояния сводится к следующей:

$$H^\eta \phi^\eta = 0, \quad (13)$$

где  $2 \times 2$  неэрмитов гамильтониан имеет вид

$$\begin{aligned} H^\pm = & -\frac{1}{2m} \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) + \frac{1}{2m} \left[ \frac{\sigma_z - 1}{2r} + eA_\varphi(r) \right]^2 - \mu \pm i\Delta(r)\sigma_y + J \sin \theta(r)\sigma_x + J \cos \theta(r)\sigma_z \\ & + i\alpha\sigma_y \left( \partial_r + \frac{1}{2r} \right) + \alpha\sigma_x \left[ \frac{1}{2r} - eA_\varphi(r) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

### 2.1.1 Майорановское состояние, локализованное на вихре

Приведем теперь краткий вывод условия существования майорановских решений ур-я (13). Подробное обоснование граничных условий и изучение асимптотического поведения решений приведено в Приложении A. Начнём с решения, локализованного в начале координат, т.е. вблизи центра вихря. Детальный анализ уравнения (14) (см. Приложение A) при  $r \rightarrow 0$  показывает, что должны быть наложены следующие граничные условия при  $r = 0$ :

$$u_\uparrow^v(0) = c_v, \quad \partial_r u_\uparrow^v(0) = u_\downarrow^v(0) = 0, \quad \partial_r u_\downarrow^v(0) = c'_v. \quad (15)$$

Здесь индекс ‘ $v$ ’ обозначает состояние, локализованное на вихре (*vortex*). Одна из неизвестных констант  $c_v$  и  $c'_v$  должна определяться условием нормировки (12); вторая же находится из решения задачи сшивки, т.е. из условия  $u_{\uparrow, \downarrow}^v \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ .

На больших расстояниях гамильтониан не зависит от  $r$  (предполагаем  $A_\varphi(r), \theta(r) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ), так что решение имеет вид  $\phi^\eta \sim \phi_\infty^\eta \exp(-Qr)$ . Ненулевое решение  $\phi_\infty^\eta$  существует, если справедливо характеристическое уравнение (см. Приложение A):

$$\left( \frac{Q^2}{2m} + \mu \right)^2 + (\Delta_\infty - \eta\alpha Q)^2 = J^2. \quad (16)$$

Это уравнение имеет четыре решения, но вклад в волновую функцию  $\phi^\eta$  дают только те из них, которые определяют затухающие экспоненты при  $r \rightarrow \infty$ , т.е. решения с  $\text{Re } Q > 0$ . Для существования МС таких  $Q$  должно быть по крайней мере три. Действительно, в таком случае мы имеем  $2 + 3 = 5$  неизвестных констант: 2 из уравнения (15) и 3 от указанных экспонент; эти константы фиксируются условием нормировки (см. ур. (12)) и четырьмя уравнениями<sup>1</sup>, сшивающими две асимптотики при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$  в некоторой промежуточной точке. Напротив, если два или менее  $Q$  имеют положительную действительную часть, то МС не существует.<sup>2</sup>

Рассмотрим случай отсутствия спин-орбиты  $\alpha = 0$ . Тогда ур. (16) сводится к биквадратному уравнению, решения которого можно найти аналитически. Можно легко убедиться,

<sup>1</sup> Два уравнения из непрерывности  $u_{\uparrow, \downarrow}^v$  и два из непрерывности производной  $\partial_r u_{\uparrow, \downarrow}^v$ .

<sup>2</sup> Если уравнение (16) имеет только два решения с  $\text{Re } Q > 0$ , то МС может существовать лишь при специальной точной настройке параметров  $\mu, J, \Delta_\infty$  и  $\alpha$ .

что имеется менее трёх волновых векторов  $Q$  с положительной действительной частью, и, следовательно, майорановского состояния не существует.

В случае же  $\alpha \neq 0$  мы анализируем корни уравнения (16) с использованием критерия устойчивости Рауса-Гурвица и метода таблицы Рауса. В результате приходим к следующему выводу: уравнение (16) имеет три корня с положительными действительными частями тогда и только тогда, когда:

$$\mu^2 + \Delta_\infty^2 < J^2, \quad \eta\alpha < 0. \quad (17)$$

Следовательно, при  $\alpha \neq 0$  майорановское состояние, локализованное в начале координат, соответствует  $\eta = -\operatorname{sgn} \alpha$ . Отметим, что условие, аналогичное (17), для существования майорановского состояния в сверхпроводнике при наличии скирмиона с несколькими переворотами спина в радиальном направлении, было найдено в ссылке [27]. В этой работе роль спин-орбитальной связи в условии (17) играл обратный период радиальных переворотов спина.

### 2.1.2 Майорановское состояние, локализованное на краю

Теперь обсудим условия существования майорановского состояния, локализованного вблизи края системы. Напомним, что наша система имеет форму диска радиусом  $L$ , который больше всех остальных значимых масштабов. Это означает, что вблизи края мы полагаем  $A_\varphi(r) = 0$ ,  $\theta(r) = 0$  и  $\Delta(r) = \Delta_\infty$ .

Будем предполагать нулевые граничные условия для волновой функция, то есть

$$u_\uparrow^e(L) = u_\downarrow^e(L) = 0, \quad \partial_r u_\uparrow^e(L) = c_e, \quad \partial_r u_\downarrow^e(L) = c'_e. \quad (18)$$

Здесь индекс ‘ $e$ ’ означает локализованное вблизи края системы состояние (от *edge*). Как было и для МС на вихре, одна из неизвестных констант  $c_e$  и  $c'_e$  должна определяться условием нормировки, а другая – из решения дифференциального уравнения.

Далее рассуждения аналогичны приведенным в предыдущем подразделе. Майорановское состояние существует, если уравнение (16) имеет по крайней мере три решения с отрицательной действительной частью,  $\operatorname{Re} Q < 0$ , что имеет место, аналогично условию (17), тогда и только тогда, когда:

$$\mu^2 + \Delta_\infty^2 < J^2, \quad \eta\alpha > 0. \quad (19)$$

Следовательно, в случае  $\alpha \neq 0$  майорановское состояние, локализованное вблизи края, соответствует  $\eta = +\operatorname{sgn} \alpha$ .

## 3 Майорановское состояние, локализованное вблизи вихря

В этом разделе мы приводим аналитическое решение для майорановского состояния, локализованного на вихре, и сравниваем аналитическое решение с численным. Мы предполагаем, что в ферромагнетике скирмион либо отсутствует (см. подраздел 3.1), либо присутствует и расположен коаксиально с вихрем (см. подраздел 3.2). Считая гетероструктуру достаточно тонкой, везде далее мы используем следующие предположения о параметрах системы:

$$d_S \sim d_F \ll \ell_w \ll \lambda = \lambda_L^2/d_S, \quad (20)$$

где  $\ell_w$  – ширина доменной стенки в ферромагнетике, а  $\lambda = \lambda_L^2/d_S$  – длина Пирла.

### 3.1 Конфигурация без скирмиона: используемые приближения

В этом подразделе мы предполагаем, что образование скирмиона энергетически невыгодно, т.е. пленка в отсутствие сверхпроводника намагниченна однородно. Перед тем, как приводить аналитические решения для МС, обсудим два эффекта: подмагничивание магнитной пленки вихрем и влияние проникающего в сверхпроводник магнитного поля.

Как известно из [2], взаимодействие магнетика с полем сверхпроводящего вихря приводит к малому неоднородному намагничиванию магнитной пленки  $\theta(r)$  из (2):

$$\theta(r) \simeq \theta_v(r) \equiv -2\gamma\ell_w \int_0^\infty dq \frac{q\mathcal{J}_1(qr)}{(2q + 1/\lambda)(1 + q^2\ell_w^2)}, \quad (21)$$

где безразмерный параметр  $\gamma = M_s\phi_0\ell_w/(8\pi\lambda\mathcal{A})$  характеризует “силу” вихря.  $M_s$  обозначает намагниченность насыщения магнетика,  $\mathcal{A}$  – константу обменной энергии. Результат (21) получен в предположении  $|\theta_v| \ll 1$ , что согласуется с экспериментально релевантными значениями  $\gamma \lesssim 1$  [21]. Также подразумевается  $\ell_w \gg \xi_v$ . Интеграл (21) приближается как [16]

$$\theta_v(r) \simeq -\gamma \begin{cases} [r/(2\ell_w)] \ln(\ell_w/r), & r \ll \ell_w, \\ \ell_w/[r + r^2/(2\lambda)], & r \gg \ell_w. \end{cases} \quad (22)$$

Величина  $\theta_v$  относительно мала (в силу  $\gamma \ll 1$ ), поэтому на первый взгляд её можно не учитывать. Однако мы обнаружили заметное влияние от  $\theta_v$  в численных расчетах, о чем будет сказано далее. Аналитический учет  $\theta_v \neq 0$  произведен в подразделе 3.1.4.

В случае тонкой сверхпроводящей плёнки векторный потенциал, создаваемый вихрем Пирла (см. уравнение (158)), можно аппроксимировать как

$$A_\varphi^v(r) \simeq -\frac{\phi_0}{4\pi\lambda} \begin{cases} (r/d_S) \ln(d_S/r), & r \ll d_S, \\ 1/[1 + r/(2\lambda)], & d_S \ll r. \end{cases} \quad (23)$$

Используя уравнения (157), (21) и (22), получаем

$$A_\varphi^m(r) \simeq \frac{2\pi M_s d_F \theta_v(r)}{1 + r/(2\lambda)}. \quad (24)$$

Из уравнений выше видно, что относительная величина двух вкладов в векторный потенциал,  $A_\varphi^v$  и  $A_\varphi^m$ , контролируется безразмерным параметром  $M_s^2 d_F \ell_w / \mathcal{A}$ . Если этот параметр велик, векторный потенциал будет определяться вкладом от магнитной текстуры, и наоборот. Обычно  $\mathcal{A} \sim (M_s \ell_w)^2$  [4], так что  $A_\varphi^v$  доминирует над  $A_\varphi^m$ , поскольку  $d_F \ll \ell_w$  (см. ур. (20)).

В свою очередь, величина  $A_\varphi^v$ , как видно из ур. (23), стремится к нулю в формальном пределе  $\lambda \rightarrow \infty$ . Более точно,  $A_\varphi^v$  пренебрежим при условии  $r \ll \lambda$ , где под  $r$  можно понимать длину локализации МС (это видно из ур. (14), где  $eA_\varphi$  конкурирует с  $\frac{1}{r}$ , и оценки  $A_\varphi \sim \frac{\phi_0}{\lambda}$  при  $d_S \ll r \ll \lambda$  из ур. (23)). Как показано в Приложении А.3, длина локализации в случае малого спин-орбитального взаимодействия, см. ур-я (76) и (78), дается величиной  $\Lambda_{so}$ :

$$\Lambda_{so} = (J^2 - \Delta_\infty^2)^{1/2} / (m|\alpha|\Delta_\infty). \quad (25)$$

Таким образом, в пределе  $\lambda \gg \Lambda_{so}$  вектор-потенциал можно не учитывать. Ниже, в аналитических результатах, мы предполагаем этот предел (учет  $A_\varphi^v$  см. в Приложении В). Тем не менее, даже при  $\lambda < \Lambda_{so}$  наши численные расчеты не обнаружили заметного эффекта от  $A_\varphi^v$ .

Отметим, что при  $J - \Delta_\infty \sim J \sim \Delta_\infty$  масштаб  $\Lambda_{so}$  есть не что иное, как стандартный масштаб длины  $(m|\alpha|)^{-1}$ , индуцированный спин-орбитальной связью. При  $J \gg \Delta_\infty$  длина затухания параметрически больше стандартной спин-орбитальной длины,  $\Lambda_{so} \gg (m|\alpha|)^{-1}$ .

### 3.1.1 Однородная намагниченность $\theta \equiv 0$

Даже при  $A_\varphi = 0$  и  $\theta = 0$  аналитическое решение уравнения (13) едва ли возможно. Предполагая, что обменное взаимодействие  $J$  является самым большим энергетическим масштабом,

$$J + \mu \gg \max(\Delta_\infty, m\alpha^2), \quad (26)$$

но отношение  $m\alpha^2(J + \mu)/\Delta_\infty^2$  может быть произвольной величины, мы находим решение уравнения (13) в приближении типа ВКБ для майорановского состояния, локализованного вблизи вихря:

$$\begin{aligned} u_\uparrow^v(r) &\simeq \tilde{c}_v e^{-\mathcal{S}(r)} [\mathcal{J}_0(r/R_J) - (R_J \Delta(r)/|\alpha|) \mathcal{J}_1(r/R_J)], \\ u_\downarrow^v(r) &\simeq -2\tilde{c}_v (R_J J/\alpha) e^{-\mathcal{S}(r)} \mathcal{J}_1(r/R_J). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $\tilde{c}_v$  — константа, которая должна быть найдена из условия нормировки (12),  $\mathcal{J}_k(x)$  — функция Бесселя первого рода,  $R_J = 1/\sqrt{2m(J + \mu)}$  — характерная длина «быстрых» осцилляций, а

$$\mathcal{S}(r) = \frac{m|\alpha|}{J} \int_0^r dr_1 \Delta(r_1) \quad (28)$$

определяет «медленное» затухание майорановского состояния при удалении от центра вихря. Отметим, что при  $r \gg \xi_v$   $\mathcal{S}(r) \sim r/\Lambda_{\text{so}}$ , то есть  $\Lambda_{\text{so}}$  из ур.(25) действительно определяет длину затухания МС.

Детали вывода уравнения (27) представлены в Приложении В. Результат (27) формально справедлив только на больших расстояниях,  $r \gg R_J$ . Однако на практике он хорошо работает при  $r \gtrsim R_J$ , что продемонстрировано на рис. 2, где сравнивается результат (27) с численными решениями уравнения (13). Численное решение показывает отличное количественное согласие с аналитическим решением, за исключением области вблизи начала координат. Кроме того, решение (27) согласуется с граничными условиями (15), если положить  $c_v = \tilde{c}_v$  и  $c'_v = -\tilde{c}_v J/\alpha$ .

Функции Бесселя  $\mathcal{J}_0(r/R_J)$  и  $\mathcal{J}_1(r/R_J)$  описывают быстрые осцилляции с масштабом длины  $R_J$ , в то время как функция  $\mathcal{S}(r)$  описывает медленное затухание амплитуды осцилляций с масштабом длины  $\Lambda_{\text{so}}$ . Как уже было сказано, аналитическое решение хорошо работает при условии  $\Delta_\infty \ll J + \mu$ . Увеличение значения  $\Delta_\infty$  усиливает локализацию майорановского состояния и изменяет масштаб осцилляций: аналитическое выражение для этого изменения выведено в Приложении В, см. уравнение (89). Когда  $\Delta_\infty$  достигает  $\sqrt{J^2 - \mu^2}$ , локализация перестает быть экспоненциальной, и майорановское состояние исчезает, ср. неравенство (17). В этом случае длина локализации МС расходится как  $1/(\Delta_\infty - \sqrt{J^2 - \mu^2})$ , см. Приложение А.3.

Локализация майорановского состояния также зависит от радиуса вихря  $\xi_v$ : решение становится менее локализованным по мере увеличения  $\xi_v$ .

### 3.1.2 Однородная намагниченность $\theta \equiv \pi$

Для дальнейших целей полезно обсудить случай с однородным  $\theta(r) \equiv \pi$ . Аналогично уравнению (27), в рамках условия (26) находим решение в приближении типа ВКБ:

$$\begin{aligned} u_\downarrow^{v,\pi}(r) &\simeq \tilde{c}_v e^{-\mathcal{S}(r)} [\mathcal{J}_1(r/R_J) + (R_J \Delta(r)/|\alpha|) \mathcal{J}_0(r/R_J)], \\ u_\uparrow^{v,\pi}(r) &\simeq -2\tilde{c}_v (R_J J/\alpha) e^{-\mathcal{S}(r)} \mathcal{J}_0(r/R_J), \end{aligned} \quad (29)$$

где  $\tilde{c}_v$  — константа, которая должна быть найдена из условия нормировки (12), а  $\mathcal{S}(r)$  определена в уравнении (28). Детали вывода уравнения (29) можно найти в Приложении В.

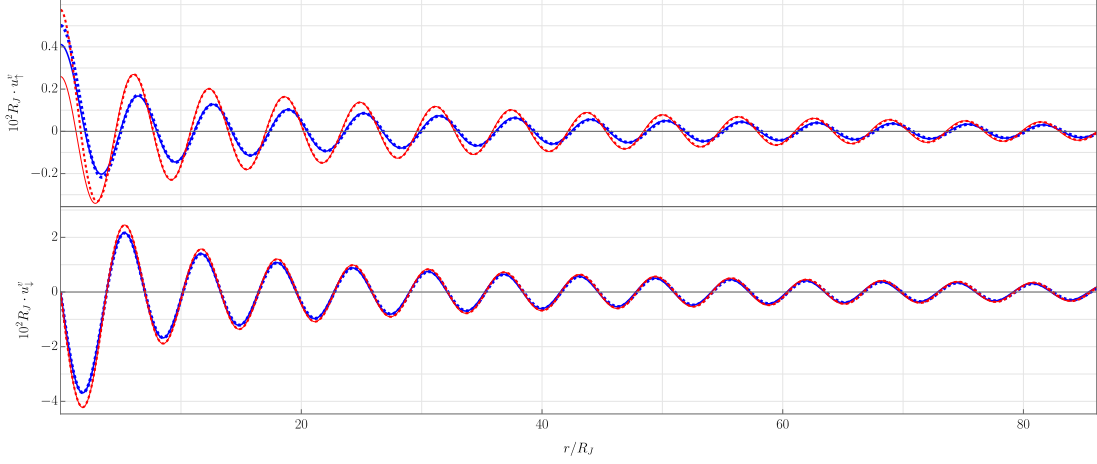


Рис. 2: Майорановское состояние, локализованное на вихре в отсутствие скирмиона: сравнение численных и аналитических решений для  $u_+^v$  (верхняя панель) и  $u_-^v$  (нижняя панель). Решения в случае нулевого  $\theta_v$  представлены синими сплошными (численные расчёты) и пунктирными (аналитика, см. уравнение (27)) кривыми. Решения в случае ненулевого  $\theta_v$  (см. уравнение (21)) представлены красными сплошными (численные расчёты) и пунктирными (аналитика, см. уравнение (34)) кривыми. Численные решения получены с помощью метода пристрелки. Волновые функции нормированы согласно уравнению (12). Мы используем следующие параметры (в произвольных единицах):  $\mu = J/4$ ,  $\Delta_\infty = J/8$ ,  $(m\alpha)^{-1} = 16R_J$ ,  $\Lambda_{so} = 130R_J$ ,  $\xi_v = 1.5R_J$ ,  $\ell_w = 30R_J$ ,  $\lambda = 360R_J$  и  $\gamma = 0.3$ .

### 3.1.3 Вращение для неоднородной намагниченности

Чтобы решить ур. (13) в присутствии пространственно-зависимого угла  $\theta(r)$ , выполним унитарное преобразование гамильтониана  $H^\pm$  – повернем решение  $\phi^\pm(r)$  следующим образом:

$$\underline{H}^\pm = e^{i\vartheta\sigma_y/2} H^\pm e^{-i\vartheta\sigma_y/2}, \quad \underline{\phi}^\pm = e^{-i\vartheta\sigma_y/2} \phi^\pm, \quad (30)$$

где  $\vartheta(r) = \theta(r) - \theta(r=0)$ . Поскольку  $\vartheta(r=0) = 0$ , “новые” функции  $\underline{\phi}^\pm$  удовлетворяют прежним граничным условиям типа (15) при  $r=0$ .

Вследствие радиальной симметрии системы  $\theta(r=0) = \chi\pi$ , где  $\chi$  — целое число. В частности,  $\chi = 0$  для конфигурации без скирмиона и  $\chi = \pm 1$  для скирмиона. Тогда уравнение (13) принимает вид  $\underline{H}^\pm \underline{\phi}^\pm = 0$ , где преобразованный гамильтониан явно задаётся как

$$\begin{aligned} \underline{H}^\pm = & -\frac{1}{2m} \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) + \frac{1}{2m} \left( \frac{\sigma_z \cos \vartheta - \sigma_x \sin \vartheta - 1}{2r} + eA_\varphi \right)^2 - \mu + i \left( \eta \Delta + \frac{\partial_r^2 \vartheta}{4m} \right) \sigma_y + (-1)^\chi J \sigma_z \\ & + \frac{\alpha \partial_r \vartheta}{2} + \frac{(\partial_r \vartheta)^2}{8m} + i \left( \alpha + \frac{\partial_r \vartheta}{2m} \right) \sigma_y \left( \partial_r + \frac{1}{2r} \right) + \alpha \left( \frac{1}{2r} - eA_\varphi \right) (\sigma_x \cos \vartheta + \sigma_z \sin \vartheta). \end{aligned} \quad (31)$$

А функции  $u_{\uparrow,\downarrow}(r)$  связаны с  $\underline{u}_{\uparrow,\downarrow}(r)$  как

$$\begin{aligned} u_\uparrow(r) &= \underline{u}_\uparrow(r) \cos \frac{\vartheta(r)}{2} - \underline{u}_\downarrow(r) \sin \frac{\vartheta(r)}{2}, \\ u_\downarrow(r) &= \underline{u}_\uparrow(r) \sin \frac{\vartheta(r)}{2} + \underline{u}_\downarrow(r) \cos \frac{\vartheta(r)}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

### 3.1.4 Аналитическое решение для малой неоднородной $\theta(r)$

Теперь мы можем вычислить приближённое решение для случая неоднородной намагниченности  $\vartheta(r) = \theta(r) = \theta_v(r)$ , которая создаётся сверхпроводящим вихрем (см. уравне-

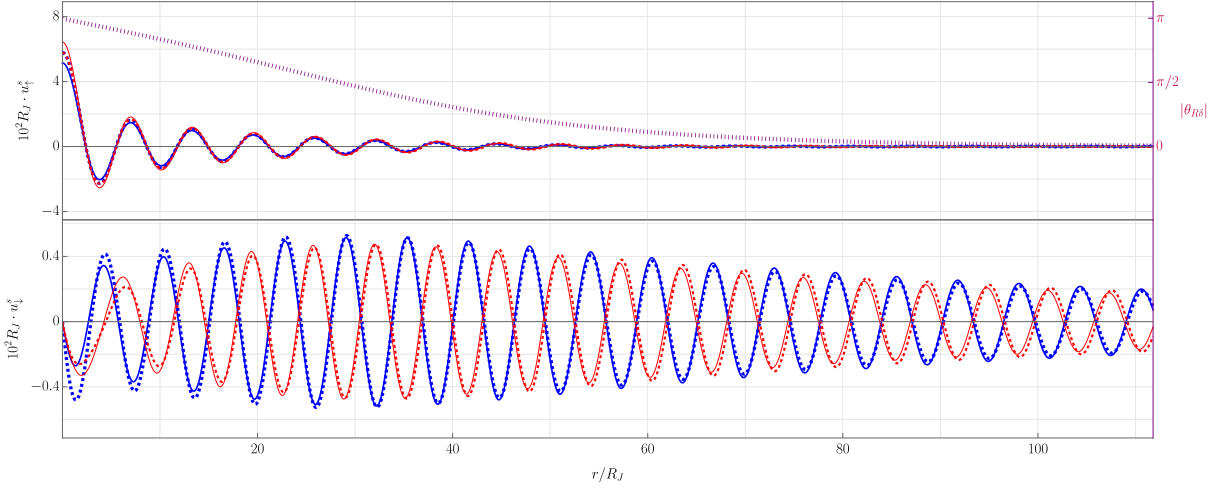


Рис. 3: Майорановское состояние, локализованное на вихре, в присутствии скирмиона: сравнение численных и аналитических решений. Сплошные кривые — численные расчёты, пунктирные кривые — аналитика (см. уравнение (39)); синие кривые соответствуют  $\chi = 1$ , а красные —  $\chi = -1$ . Также фиолетовым цветом показан профиль  $\theta_{R\delta}$ , см. ур. (36). Мы используем  $|R| = 30R_J$ ,  $\delta = 20R_J$ , а остальные параметры совпадают с параметрами на рис. 2.

ние (21)). Предполагая

$$\lambda \gg \ell_w \gtrsim R_J \gtrsim \max \left[ \left( \frac{\gamma \ell_w}{m|\alpha|} \right)^{1/2}, \left( \frac{\gamma \ell_w}{m\Delta} \right)^{1/3} \right] \quad (33)$$

мы можем пренебречь углом  $\theta(r)$  и его производными в гамильтониане (31).

Тогда решение уравнения (13) может быть записано как в уравнении (32), где  $\underline{u}_{\uparrow,\downarrow}$  следует взять как решение для  $\theta \equiv 0$  из уравнения (27). В результате получаем

$$\begin{aligned} u_{\uparrow}^v(r) &\simeq \tilde{c}_v e^{-S(r)} \left[ \mathcal{J}_0(r/R_J) - \{R_J[\Delta(r) - J\theta_v(r)]/|\alpha|\} \mathcal{J}_1(r/R_J) \right], \\ u_{\downarrow}^v(r) &\simeq \tilde{c}_v e^{-S(r)} \left\{ [\theta_v(r)/2] \mathcal{J}_0(r/R_J) - 2(R_J J/|\alpha|) \mathcal{J}_1(r/R_J) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Рисунок 2 демонстрирует, что ненулевое  $\theta_v$  может влиять на решение, особенно на  $u_{\uparrow}^v$ , по сравнению со случаем  $\theta_v = 0$ . Это происходит потому (ср. ур. (34)), что  $\Delta(r)$  и  $J\theta_v(r)$  могут быть сравнимы по величине, если  $\gamma \sim \Delta_{\infty}/J$ .

Отметим, что параметры  $J$ ,  $\alpha$  и  $\xi_v$ , используемые в наших численных расчётах, аналогичны параметрам гетероструктуры, изученной экспериментально в работе [21], если выбрать  $\Delta_{\infty} = 1.5$  мэВ,  $R_J = 2$  нм, а  $m$  взять равной массе электрона.

### 3.2 Коаксиальный скирмион

В этом подразделе мы сосредоточимся на скирмионной конфигурации намагниченности. Перед аналитическими решениями обсудим профиль  $\theta(r)$  и влияние вектор-потенциала.

Как показано в работе [3], точный профиль скирмиона, центрированного на вихре, может быть эффективно аппроксимирован следующим выражением:

$$\theta(r) \simeq \theta_{R\delta}^{\gamma}(r) \equiv \theta_{R\delta}(r) + \theta_v(r) \cos \theta_{R\delta}(r). \quad (35)$$

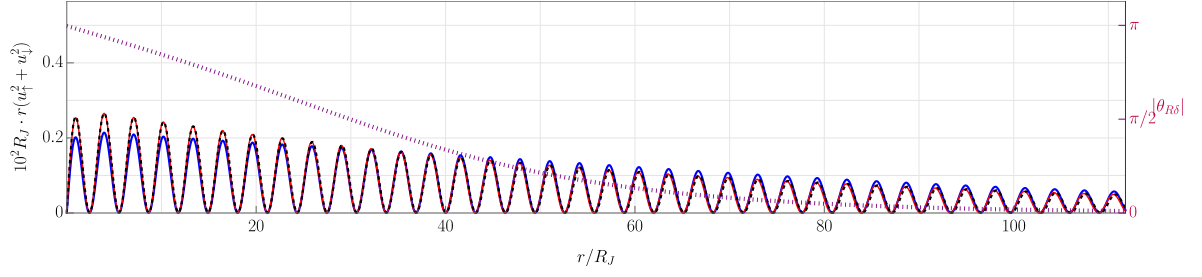


Рис. 4: Радиальная плотность вероятности майорановского состояния, локализованного на вихре. Численные результаты представлены для однородной намагниченности  $\theta \equiv \pi$  (красный) и скирмиона  $\theta = \theta_{R\delta}$  (синий). Чёрная пунктирная кривая — аналитическое решение в соответствии с уравнением (39). Также профиль  $\theta_{R\delta}$ , задаваемый уравнением (36), показан фиолетовым цветом. Для скирмиона мы используем  $|R| = 30R_J$ ,  $\delta = 20R_J$ , а остальные параметры совпадают с параметрами на рис. 2.

Здесь  $\theta_v(r)$  задаётся уравнением (21) и учитывает возмущение намагниченности магнитным полем, создаваемым вихрем. Функция  $\theta_{R\delta}(r)$ , т.н. анзац доменной стенки (ДС), есть:

$$\theta_{R\delta}(r) = 2 \arctan \frac{\sinh(R/\delta)}{\sinh(r/\delta)}, \quad (36)$$

где  $\delta$  — эффективная ширина доменной стенки, а параметр  $R$  задает радиус скирмиона  $|R|$  и киральность  $\chi = \text{sgn } R$ . Отметим, что скирмионы обеих киральностей  $\chi = \pm 1$  могут быть стабилизированы полями рассеяния сверхпроводящего вихря. Поскольку  $\theta_{R\delta}^\gamma(0) = \pi\chi$ , угол  $\theta_v$  мал на фоне скирмиона и в нашей задаче им можно пренебречь. В реалистичных системах в отсутствие вихря радиус  $R$  и ширина стенки  $\delta$  скирмиона имеют порядок магнитной длины  $\ell_w$ . В присутствии вихря радиус скирмиона несколько увеличивается [26], то есть  $R \gtrsim \delta \sim \ell_w$ .

Векторный потенциал, создаваемый сверхпроводящим вихрем, по-прежнему может быть описан уравнением (23). Вклад в векторный потенциал от скирмиона не может быть легко выражен через  $\theta(r)$  (см. ур. (157)). Обычно при  $\lambda \gg R$   $A_\varphi^m$  является немонотонной функцией с максимумом порядка  $M_s d_F$  при  $r \sim R$  [1]. Таким образом, мы можем оценить отношение максимальных величин  $A_\varphi^m$  к  $A_\varphi^v$  как  $M_s d_F \lambda / \phi_0$ . Далее, предполагая толщину  $d_F$  ферромагнитной плёнки достаточно малой:  $M_s \lambda d_F / \phi_0 \ll 1$ , мы получаем  $A_\varphi^m \ll A_\varphi^v$ . А условие  $\Lambda_{\text{so}} \ll \lambda$  позволяет пренебречь и  $A_\varphi^v$ .

### 3.2.1 Аналитическое выражение

Чтобы вывести аналитическое выражение для майорановского состояния, мы используем вращение гамильтониана, описанное в подразделе 3.1.3. Мы делаем те же предположения (26), что и в разделе 3.1, т.е.

$$\min[(m\Delta_\infty)^{-1/2}, (m\alpha)^{-1}] \gg R_J. \quad (37)$$

Кроме того, мы предполагаем, что угол скирмиона меняется относительно медленно:

$$\min[R, \delta] \gg \max[(m\Delta_\infty)^{-1/2}, (m\alpha)^{-1}], \quad (38)$$

При этих предположениях мы можем пренебречь пространственными производными  $\vartheta$  в уравнении (31), и вообще положить  $\vartheta(r) = 0$ . Это приводит гамильтониан (31) к гамильтониану (14) с  $\theta = \pi$ .

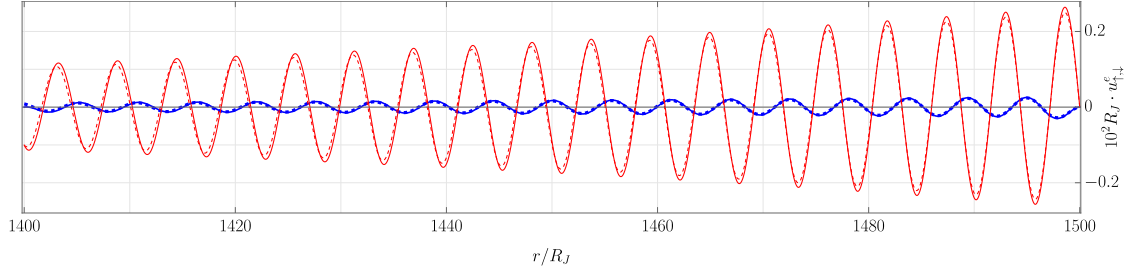


Рис. 5: Майорановское состояние, локализованное на краю: сравнение численных и аналитических решений.  $u_{\uparrow}^e$  представлена синей сплошной (численное решение) и пунктирной (аналитика) кривыми, а  $u_{\downarrow}^e$  — красной сплошной (численное решение) и пунктирной (аналитика). Аналитические решения даются уравнением (44). Мы используем те же параметры, что и на рис. 2, при  $L = 1500R_J$ .

Следовательно, решения  $u_{\uparrow, \downarrow}$  аппроксимируются функциями  $u_{\uparrow, \downarrow}^{v, \pi}$  для однородного случая с  $\theta = \pi$ . Поворачивая их обратно на угол  $\vartheta(r) = \theta(r) - \chi\pi$  в соответствии с уравнениями (32), мы приходим к

$$\begin{aligned} u_{\uparrow}^s(r) &= \chi \left[ u_{\downarrow}^{v, \pi}(r) \cos \frac{\theta(r)}{2} + u_{\uparrow}^{v, \pi}(r) \sin \frac{\theta(r)}{2} \right], \\ u_{\downarrow}^s(r) &= \chi \left[ u_{\downarrow}^{v, \pi}(r) \sin \frac{\theta(r)}{2} - u_{\uparrow}^{v, \pi}(r) \cos \frac{\theta(r)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь мы используем индекс “s” вместо “v”, чтобы указать на наличие скирмиона. Как видно из ур. (39), при  $r \ll R$  майорановское состояние просто совпадает с решением для  $\theta \equiv \pi$ , а при увеличении  $r$  поворачивается из-за изменения скирмионного угла.

Детали более строгого расчёта, приводящего к результатам (39), приведены в Приложении В. Ур. (39) правильно описывает поведение майорановской волновой функции количественно при  $r \gg R_J$  и качественно при  $r \lesssim R_J$  (см. рис. 3). Интересно, что при сделанных предположениях скорость затухания не зависит от скирмионного угла и определяется исключительно спин-орбитой и сверхпроводящей щелью. Угол скирмиона даёт малую поправку к скорости затухания, а также к частоте осцилляций; подробности можно найти в Приложении В (см. уравнения (101), (103)).

На рис. 3 показаны компоненты  $u_{\uparrow, \downarrow}^s$  майорановского состояния как функции расстояния от вихревого кора. При  $r \ll R$  верхняя компонента  $u_{\uparrow}$  преобладает над  $u_{\downarrow}$  по амплитуде, поскольку  $\theta(r) \approx \pi$ . При  $r \gg R$  намагниченность противоположна,  $\theta(r) \approx 0$ , и  $u_{\uparrow}$  становится пренебрежимо малой по сравнению с  $u_{\downarrow}$ , что напоминает поведение МС в рассмотренном на рис. 2 случае.

Рисунок 4 иллюстрирует ещё одну особенность решения (39). Поскольку это решение получено из  $u_{\uparrow, \downarrow}^{v, \pi}$  поворотом, плотность вероятности майорановского состояния  $(u_{\uparrow}^s)^2 + (u_{\downarrow}^s)^2$  в присутствии скирмиона совпадает с таковой для случая однородной намагниченности  $\theta \equiv \pi$ .

### 3.2.2 Вероятность остаться в майорановском состоянии

Как мы видели выше, майорановское состояние находится в центре вихря независимо от того, присутствует скирмион или нет. Однако, поскольку скирмион может быть разрушен какими-либо флуктуациями, важно оценить вероятность того, что частица останется в майорановском состоянии после того, как скирмион исчезнет. Используя решения (27) и (39), вычисляя перекрытие двух волновых функций и предполагая, что скирмион не очень велик,

$R \ll \Lambda_{\text{so}}$ , мы оцениваем вероятность остаться в майорановском состоянии как

$$p \simeq \left( \frac{2m\alpha^2\Delta_\infty}{J^2 R_J} \int_0^\infty dr \sin[\theta(r)/2] \right)^2. \quad (40)$$

В случае  $R \gtrsim \delta$  мы можем вычислить последний интеграл приближённо, используя анзац ДС (см. ур. (36)):

$$p \simeq \frac{8m\alpha^2(J+\mu)}{J^2} \left( \frac{R + \delta \ln 2}{\Lambda_{\text{so}}} \right)^2. \quad (41)$$

Таким образом, мы видим, что вероятность майорановского состояния выжить после того, как скирмион был разрушен, мала. Для параметров  $R = 30R_J$  и  $\delta = 20R_J$  оценка (41) даёт вероятность  $p \simeq 0.012$ , в то время как численное вычисление с использованием численно точных волновых функций даёт  $p \simeq 0.016$ .

Проведем аналогичное вычисление, рассматривая в качестве однородной намагниченности  $\theta = \pi$ . Тогда, пользуясь (29) и (39) и предполагая  $R_J \ll R \ll \Lambda_{\text{so}}$ , а также  $R \gtrsim \delta$ , будем иметь:

$$\tilde{p} \simeq \left( \frac{2R}{\Lambda_{\text{so}}} \right)^2. \quad (42)$$

## 4 Майорановское состояние, локализованное вблизи края

В этом разделе мы изучаем майорановское состояние, локализованное на границе системы. Мы делаем те же предположения о параметрах системы, что и в разделе 3 (ур. (20)), и предполагаем, что система имеет форму диска радиусом  $L$ . Будем считать  $L$  больше всех характерных длин задачи. Тогда влиянием вектор-потенциала на вид МС можно пренебречь: действительно, из ур. (23) видно, что при  $r \sim L$   $A_\varphi \sim \frac{1}{r} \sim \frac{1}{L}$ ; поэтому  $L$  надо сравнивать с  $\Lambda_{\text{so}}$  ( $1/\Lambda_{\text{so}}$  есть вклад от производной в ур. (14)). Также, в силу  $L \gg R$ , вид МС не зависит от наличия или отсутствия скирмиона.

Решение  $\phi^\eta(r)$  можно выразить как линейную комбинацию трёх экспонент, соответствующих трём корням уравнения (16) с  $\text{Re } Q < 0$ :

$$\begin{aligned} u_\uparrow^e(r) &= c_1 e^{-Q_1 r} + c_2 e^{-Q_2 r} + c_3 e^{-Q_3 r}, \\ u_\downarrow^e(r) &= c_1 \zeta_{Q_1} e^{-Q_1 r} + c_2 \zeta_{Q_2} e^{-Q_2 r} + c_3 \zeta_{Q_3} e^{-Q_3 r}. \end{aligned} \quad (43)$$

Точные выражения для  $c_j$ ,  $Q_j$  и  $\zeta_Q$  приведены в приложении C. В предположении (26)) выражения (43) принимают вид:

$$\begin{aligned} u_\uparrow^e(r) &\simeq c_e e^{-\tilde{r}/\tilde{R}_J} - c_e e^{-\tilde{r}/\Lambda_{\text{so}}} \left\{ \cos(\tilde{r}/R_J) - (R_J \Delta_\infty / |\alpha|) \sin(\tilde{r}/R_J) \right\}, \\ u_\downarrow^e(r) &\simeq -2c_e (R_J J / \alpha) e^{-\tilde{r}/\Lambda_{\text{so}}} \sin(\tilde{r}/R_J). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь  $\tilde{r} = L - r$ ,  $\Lambda_{\text{so}} \simeq J/(m|\alpha|\Delta_\infty)$ ,  $\tilde{R}_J = 1/\sqrt{2m(J-\mu)}$ . Константа  $c_e$  должна быть найдена из условия нормировки (12), а именно  $c_e \simeq \alpha/(2JR_J\sqrt{\pi L\Lambda_{\text{so}}})$ .

Рисунок 5 демонстрирует хорошее согласие между аналитикой (уравнение (44)) и численными расчётами для майорановского состояния, локализованного на краю.

## 5 Связанные состояния с ненулевым угловым моментом

В этом разделе мы изучаем энергетический спектр системы, получаем аналитические формулы для энергий связанных состояний и сравниваем с результатами численного счета.

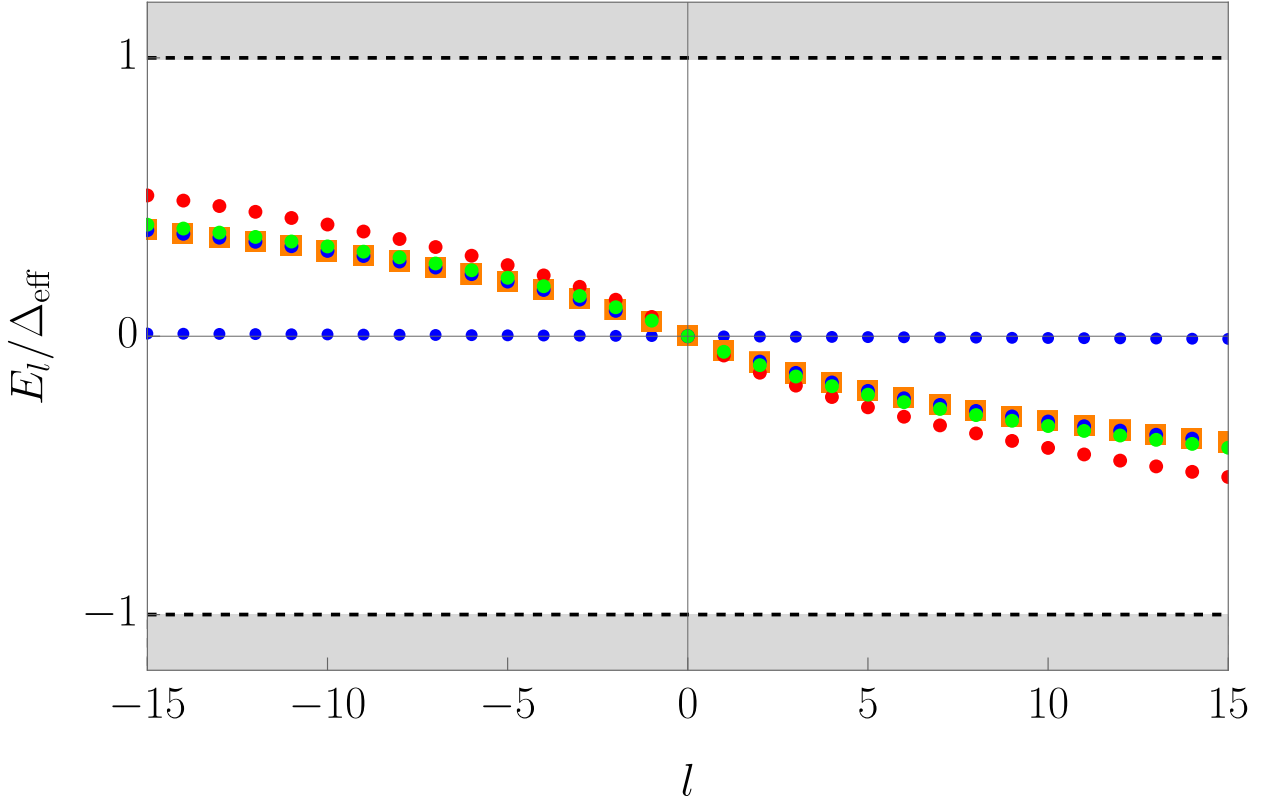


Рис. 6: Спектр локализованных состояний как функция углового момента  $l$  в отсутствие скирмиона. Энергии  $E_l^v$  для случая  $\theta = 0$  показаны синими (численный результат), зелёными (ур. (53)) и красными (ур. (54)) точками. Оранжевые прямоугольники соответствуют численным энергиям  $E_l^v$  в случае  $\theta = \pi$ . Отметим, что оранжевые прямоугольники почти совпадают с синими точками в соответствии с ур. (58). Также вблизи нуля синим цветом представлена ветка состояний, локализованных на краю (см. рис. 7). Чёрные пунктирные линии соответствуют уровню энергетической щели (см. ур. (47)). Все параметры такие же, как на рис. 2.

Спектр системы содержит как связанные, так и делокализованные состояния. Последние отделены от майорановских состояний эффективной энергетической щелью  $\Delta_{\text{eff}}$ . Чтобы оценить  $\Delta_{\text{eff}}$ , рассмотрим гамильтониан (10) при достаточно больших  $r$ , где  $\theta = 0$ ,  $A_\varphi = 0$ ,  $\Delta = \Delta_\infty$ , пренебрегая членами порядка  $1/r$  и  $1/r^2$ :

$$H^{(l)} = -\frac{\tau_z}{2m}\partial_r^2 - \mu\tau_z + \Delta_\infty\tau_x + J\sigma_z + i\alpha\partial_r\tau_z\sigma_y. \quad (45)$$

Отметим, что приведённый выше гамильтониан совпадает с гамильтонианом для одномерной проволоки из [20]. Собственные функции гамильтониана (45)  $\Phi_l \propto \exp(-ipr)$ , и спектр содержит две ветки:

$$E_\pm^2 = J^2 + \xi_p^2 + \Delta^2 + \alpha^2 p^2 \pm 2\sqrt{J^2(\xi_p^2 + \Delta^2) + \xi_p^2 \alpha^2 p^2}, \quad (46)$$

где  $\xi_p = p^2/(2m) - \mu$ . Минимизируя  $|E_-|$  по  $p$  в предположении  $\max(m\alpha^2, \Delta) \ll J$  (ср. ур. (26)), находим эффективную энергетическую щель:

$$\Delta_{\text{eff}} \simeq \frac{\alpha\Delta_\infty}{JR_J} \ll \Delta_\infty. \quad (47)$$

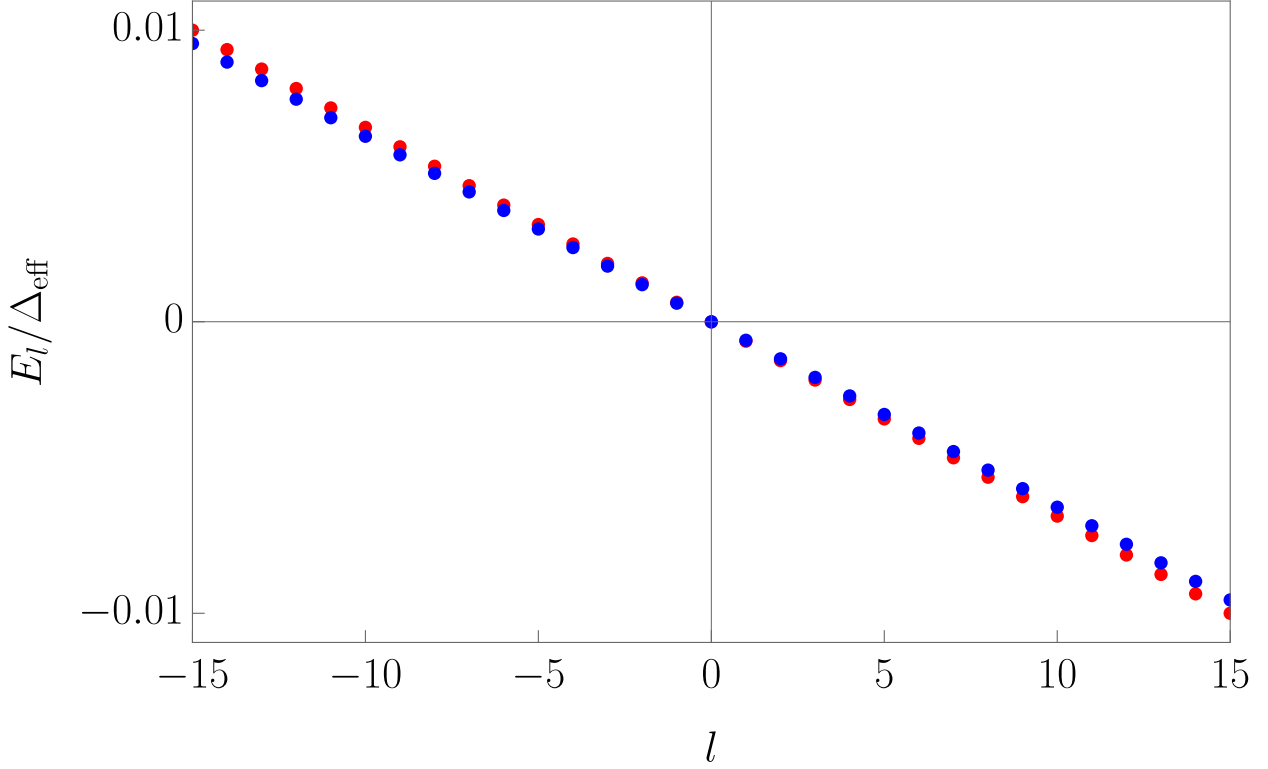


Рис. 7: Сравнение численной (синий) и аналитической (красный) зависимостей энергий состояний, локализованных на краю, от углового момента  $l$  (см. уравнение (50)). Все параметры такие же, как на рис. 2.

Отметим, что  $\Delta_{\text{eff}}$  можно интерпретировать как щель для “р-волнового” сверхпроводящего состояния, индуцированного в присутствии сильного зеемановского расщепления.

Далее мы анализируем спектр связанных состояний с энергией ниже эффективной щели двумя методами: численным и аналитическим. Численный метод основан на конечно-разностной схеме для одномерной радиальной задачи на равномерной сетке с  $N$  точками. Вместо функций  $\Phi_l$  в ур. (9) метод работает с  $\chi_l(r) = \sqrt{r} \Phi_l(r)$ , для которой полагаются нулевые граничные условия:  $\chi_l(0) = \chi_l(L) = 0$ . Все производные приближаются разностными формулами четвёртого порядка. Для полученной матрицы  $4N \times 4N$  находятся несколько собственных значений (и соответствующие волновые функции) вблизи  $E = 0$ . В наших расчётах мы используем  $L = 1500R_J$  и  $N = 8000$ .

### 5.1 Конфигурация без скирмиона

Начнём со связанных состояний в отсутствие скирмиона. Рисунок 6 показывает энергии  $E_l$  связанных состояний для различных угловых моментов  $l$ . Здесь выделяются две спектральные ветви. Первая ветвь (с меньшими энергиями) соответствует состояниям, локализованным на краю системы, и имеет линейную дисперсию. Вторая ветвь описывает энергии состояний, локализованных вблизи вихря, и имеет более сложную зависимость от  $l$ . Ниже мы обсуждаем обе ветви более подробно.

### 5.1.1 Спектр состояний, локализованных на краю

Спектр состояний, локализованных на границе системы, можно описать пертурбативно. Действительно, запишем гамильтониан (10) как  $H^{(l)} \simeq H^{(0)} + V_l$ , где

$$V_l = \frac{l(1 - \sigma_z \tau_z) + l^2 \tau_z}{2mr^2} + \frac{\alpha l \sigma_x \tau_z}{r}, \quad (48)$$

Здесь мы пренебрегаем влиянием векторного потенциала по обсуждаемым в предыдущих разделах причинам.

При больших  $r$ , которые только и важны для рассматриваемой спектральной ветви,  $V_l$  относительно мало. Тогда энергии  $E_l$  соответствующих состояний можно найти как

$$E_l \simeq \langle \Phi_0^\eta | V_l | \Phi_0^\eta \rangle = 4\pi l \int_0^\infty dr \left[ \frac{u_\downarrow(r)}{2mr} + \alpha u_\uparrow(r) \right] u_\downarrow(r). \quad (49)$$

Здесь  $\eta = \text{sgn}(\alpha)$ , так что  $\Phi_0^\eta$  — майорановское состояние, локализованное вблизи края, а функции  $u_{\uparrow,\downarrow}(r)$  нормированы согласно уравнению (12). Предполагая, что размер систем  $L$  — наибольший масштаб длины в задаче, вычисляем интеграл (49) как:

$$E_l \simeq \frac{2|\alpha|l}{L} \frac{I_{01}}{I_{00} + I_{11}} \simeq -\frac{|\alpha|\Delta_\infty l}{JL}. \quad (50)$$

Величины  $I_{ab}$  определены в ур. (113) приложения С. При вычислении ур. (50) мы использовали предположение (26). Мы видим, что наклон  $dE_l/dl$  отрицателен для состояний, локализованных на краю, независимо от знака спин-орбиты  $\alpha$ . Результат (50) находится в хорошем согласии с численными данными, ср. рис. 7.

Отметим, что ур. (50) позволяет интерпретировать состояния, локализованные на краю системы, как киральную моду с линейной дисперсией и скоростью  $-\Delta_{\text{eff}} R_J$ , распространяющуюся вдоль границы.

### 5.1.2 Состояния, локализованные вблизи вихря

Чтобы описать вторую ветвь аналитически, вновь предположим условие (26), и пренебрежём влиянием  $A_\varphi = 0$  и  $\theta_v = 0$ . Тогда мы можем найти связанные состояния  $\Phi_l^v = \{u_{\uparrow,l}^v, u_{\downarrow,l}^v, v_{\downarrow,l}^v, -v_{\uparrow,l}^v\}^T$  приближённо в рамках того же приближения типа ВКБ, которое использовалось для получения ур. (27) (подробности см. в приложении D):

$$u_{\uparrow,l}^v \simeq c_{v,l} e^{-\mathcal{S}(r)} \left[ \mathcal{J}_l\left(\frac{r}{R_J}\right) + \frac{R_J \Delta}{|\alpha|} \mathcal{J}_{l-1}\left(\frac{r}{R_J}\right) \right] \quad (51)$$

$$v_{\uparrow,l}^v \simeq -c_{v,l} (\text{sgn } \alpha) e^{-\mathcal{S}(r)} \left[ \mathcal{J}_l\left(\frac{r}{R_J}\right) - \frac{R_J \Delta}{|\alpha|} \mathcal{J}_{l+1}\left(\frac{r}{R_J}\right) \right],$$

$$\begin{aligned} u_{\downarrow,l}^v &\simeq -2c_{v,l} (R_J J / \alpha) e^{-\mathcal{S}(r)} \mathcal{J}_{l+1}(r/R_J), \\ v_{\downarrow,l}^v &\simeq -2c_{v,l} (R_J J / |\alpha|) e^{-\mathcal{S}(r)} \mathcal{J}_{l-1}(r/R_J). \end{aligned} \quad (52)$$

Здесь  $\mathcal{S}(r)$  определено в ур. (28). Стоит отметить, что при  $r \gg R_J |l|$  компоненты частица-дырка волновых функций (51)–(52) приближённо связаны соотношениями  $v_{\uparrow,l}^v \simeq -\text{sgn } \alpha u_{\uparrow,l}^v$  и  $v_{\downarrow,l}^v \simeq -\text{sgn } \alpha u_{\downarrow,l}^v$ , подобно МС. Мы сравниваем аналитические результаты (51) и (52) с численными на рис. 8. Хотя результат (51)–(52) формально справедлив только на больших расстояниях  $r \gg R_J |l|$ , как видно, аналитические и численные волновые функции находятся в хорошем согласии для  $r \gtrsim R_J$ .

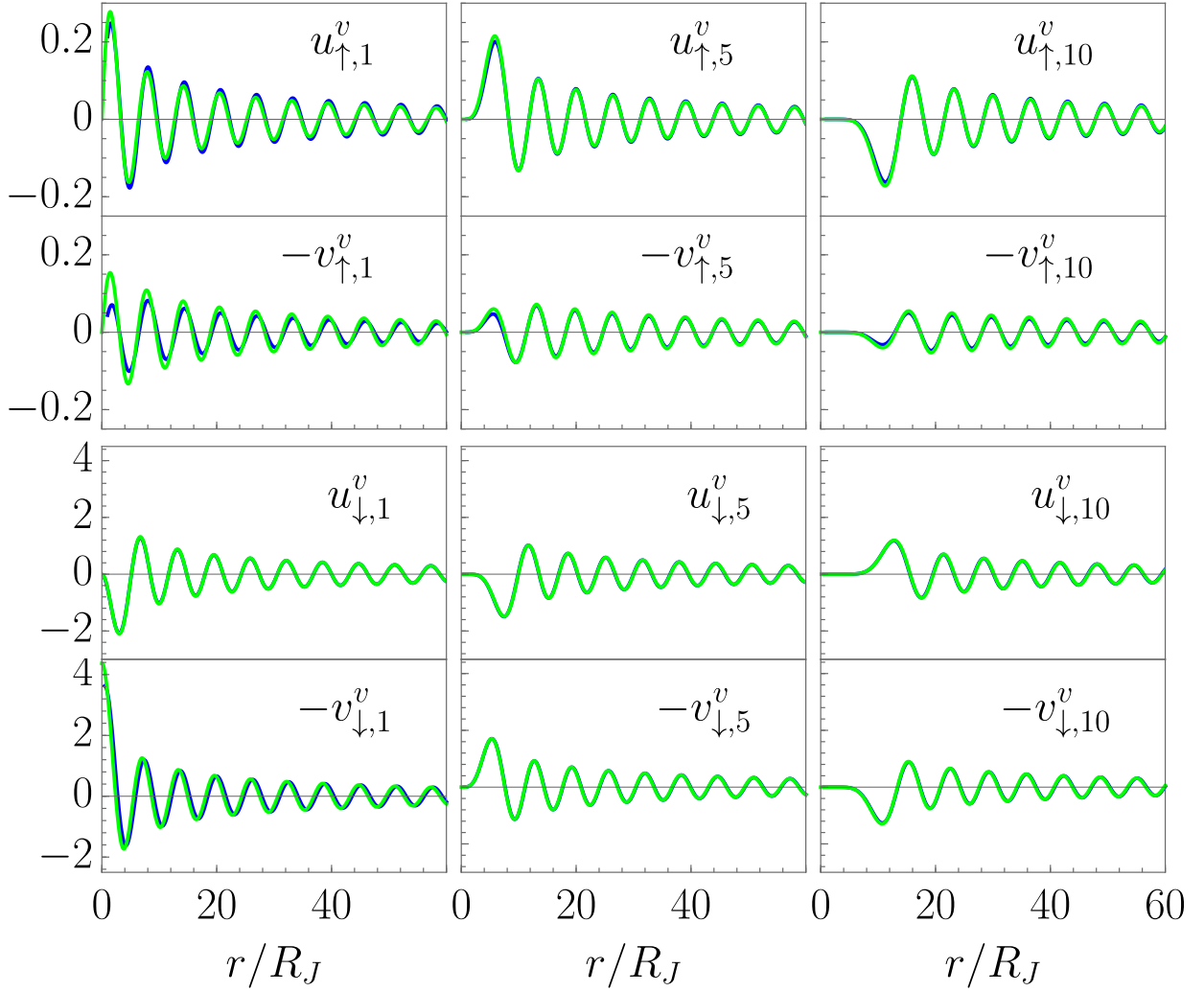


Рис. 8: Волновые функции для состояний, локализованных на вихре в отсутствие скирмиона: сравнение численных (синий) и аналитических (зелёный) решений для  $l = 1, 5$ , и  $10$ . Аналитические решения даются ур. (51) и (52). Все параметры такие же, как на рис. 2. Волновые функции нормированы согласно ур. (12) и дополнительно умножены на  $10^2 R_J$ .

Имея явные выражения для волновых функций, мы можем оценить соответствующие энергии. Мы выбираем наиболее прямолинейный способ и считаем энергию как среднее от гамильтониана (см. приложение D):

$$E_l^v = \langle \Phi_l^v | H^{(l)} | \Phi_l^v \rangle \simeq -\frac{|\alpha| l}{J} \frac{\int_0^\infty dr \Delta e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(r/R_J)}{\int_0^\infty dr r e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(r/R_J)}. \quad (53)$$

Подставляя  $R_J/(\pi r)$  вместо  $\mathcal{J}_l^2(r/R_J)$  при  $r \gg |l|R_J$  и вычисляя интегралы с логарифмической точностью, находим

$$E_l^v \simeq -l \frac{2m\alpha^2 \Delta_\infty^2}{J^2} \ln \frac{J/(m|\alpha| \Delta_\infty)}{\max\{|l|R_J, \xi_v\}}. \quad (54)$$

Отметим, что знак наклона  $dE_l/dl$  при  $l = 0$  всегда отрицателен независимо от знака  $\alpha$ . Интересно также, что, опуская логарифмический множитель, мы можем записать  $E_l^v \sim l \Delta_{\text{eff}}^2/(J + \mu)$ , что напоминает стандартный результат для состояний Кароли-де Жен-Матрикона [9]. Кроме того, результат (54) по форме совпадает с ур. (50), если вместо  $L$  использовать  $\Lambda_{\text{so}}$  (и вновь опустить логарифм).

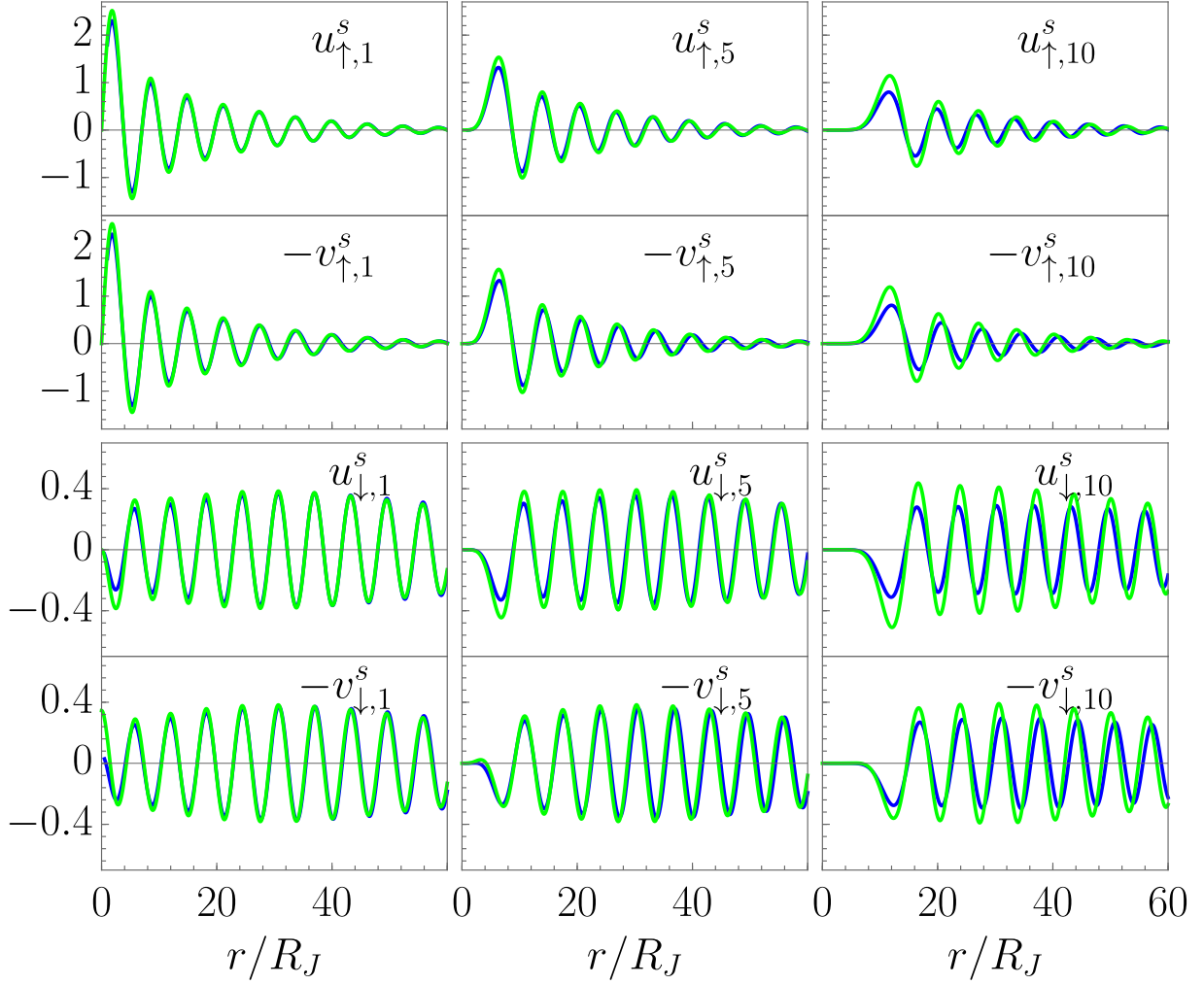


Рис. 9: Волновые функции для состояний, локализованных на вихре в присутствии скирмиона: сравнение численных (синий) и аналитических (зелёный) решений для  $l = 1, 5$ , и  $10$ . Здесь  $R = 30R_J$  и  $\delta = 20R_J$  (что соответствует кривой “4” на рис. 10). Аналитические решения даются ур. (55). Все остальные параметры такие же, как на рис. 2. Волновые функции нормированы согласно ур. (12) и дополнительно умножены на  $10^2 R_J$ .

Зелёные точки на рис. 6 обозначают энергии, вычисленные с помощью выражения (53). Мы подчёркиваем хорошее согласие между аналитическим выражением (53) и численно рассчитанными энергиями (синие точки) даже для относительно больших величин углового момента  $l \simeq \pm 15$ .

## 5.2 Конфигурация со скирмионом

В присутствии скирмиона энергетический спектр также состоит из двух ветвей. Первая ветвь соответствует состояниям, локализованным вблизи края. При условии  $L \gg R$  эти состояния не подвержены влиянию намагниченности скирмиона  $\theta_{R\delta}(r \gg R) \approx 0$ , и, следовательно, эта ветвь описывается уравнением (50).

Ситуация сложнее со второй ветвью. Для нее мы используем описанный в подразделе 3.1.3 аналитический подход, основанный на вращении гамильтониана (подробности см. в приложении D). Предполагая условия (26) и (38), мы выводим волновые функции типа ВКБ, аналогичные (39), для связанных состояний с ненулевым  $l$ :

$$\begin{aligned} u_{\uparrow,l}^s(r) &= \chi \left[ \underline{u}_{\downarrow,l}(r) \cos \frac{\theta(r)}{2} + \underline{u}_{\uparrow,l}(r) \sin \frac{\theta(r)}{2} \right], \\ u_{\downarrow,l}^s(r) &= \chi \left[ \underline{u}_{\downarrow,l}(r) \sin \frac{\theta(r)}{2} - \underline{u}_{\uparrow,l}(r) \cos \frac{\theta(r)}{2} \right], \\ v_{\uparrow,l}^s(r) &= \chi \left[ \underline{v}_{\downarrow,l}(r) \cos \frac{\theta(r)}{2} + \underline{v}_{\uparrow,l}(r) \sin \frac{\theta(r)}{2} \right], \\ v_{\downarrow,l}^s(r) &= \chi \left[ \underline{v}_{\downarrow,l}(r) \sin \frac{\theta(r)}{2} - \underline{v}_{\uparrow,l}(r) \cos \frac{\theta(r)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \underline{u}_{\uparrow,l} &\simeq -(\operatorname{sgn} \alpha) \underline{v}_{\uparrow,l} \simeq -\frac{2\tilde{c}_l R_J J}{\alpha} e^{-S(r)} \mathcal{J}_l\left(\frac{r}{R_J}\right), \\ \underline{u}_{\downarrow,l} &\simeq \tilde{c}_l e^{-S(r)} \left[ \mathcal{J}_{l+1}\left(\frac{r}{R_J}\right) + \frac{\Delta R_J}{|\alpha|} \mathcal{J}_l\left(\frac{r}{R_J}\right) \right], \\ \underline{v}_{\downarrow,l} &\simeq -(\operatorname{sgn} \alpha) \tilde{c}_l e^{-S(r)} \left[ -\mathcal{J}_{l-1}\left(\frac{r}{R_J}\right) + \frac{\Delta R_J}{|\alpha|} \mathcal{J}_l\left(\frac{r}{R_J}\right) \right], \end{aligned} \quad (56)$$

где  $S(r)$  определено в ур. (28). Вновь отметим, что при  $r \gg R_J |l|$  компоненты частица-дырка волновых функций (56) приближённо связаны соотношениями  $v_{\uparrow,l} \simeq -\operatorname{sgn} \alpha u_{\uparrow,l}$  и  $v_{\downarrow,l} \simeq -\operatorname{sgn} \alpha u_{\downarrow,l}$ . Мы сравниваем аналитические результаты (55) с численными на рис. 9. Как видно, аналитические и численные волновые функции находятся в качественном согласии. Отметим, что с увеличением величины  $l$  количественное согласие ухудшается. Это связано, во-первых, с тем, что результаты (56) строго справедливы лишь для  $r \gg R_J |l|$ ; во-вторых, величина  $E_l^s$  с ростом  $|l|$  увеличивается, в то время как при построении решения (56)  $E_l^s$  полагалась равной нулю.

Чтобы оценить энергии состояний, мы вычисляем среднее гамильтониана. В данном случае вычисления более громоздки, чем в ур. (53). Результат имеет вид:

$$\begin{aligned} E_l^s &= \langle \Phi_l^s | H^{(l)} | \Phi_l^s \rangle \simeq \frac{l}{2m} \left[ \int_0^\infty dr r e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(r/R_J) \right]^{-1} \\ &\times \int_0^\infty \frac{dr}{r} e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(r/R_J) \left\{ 1 + \cos \theta + (\Delta \operatorname{sgn} \alpha / J) \sin \theta \right. \\ &\quad \left. - 2m\alpha r \left[ \sin \theta - (\Delta \operatorname{sgn} \alpha / J) \cos \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (57)$$

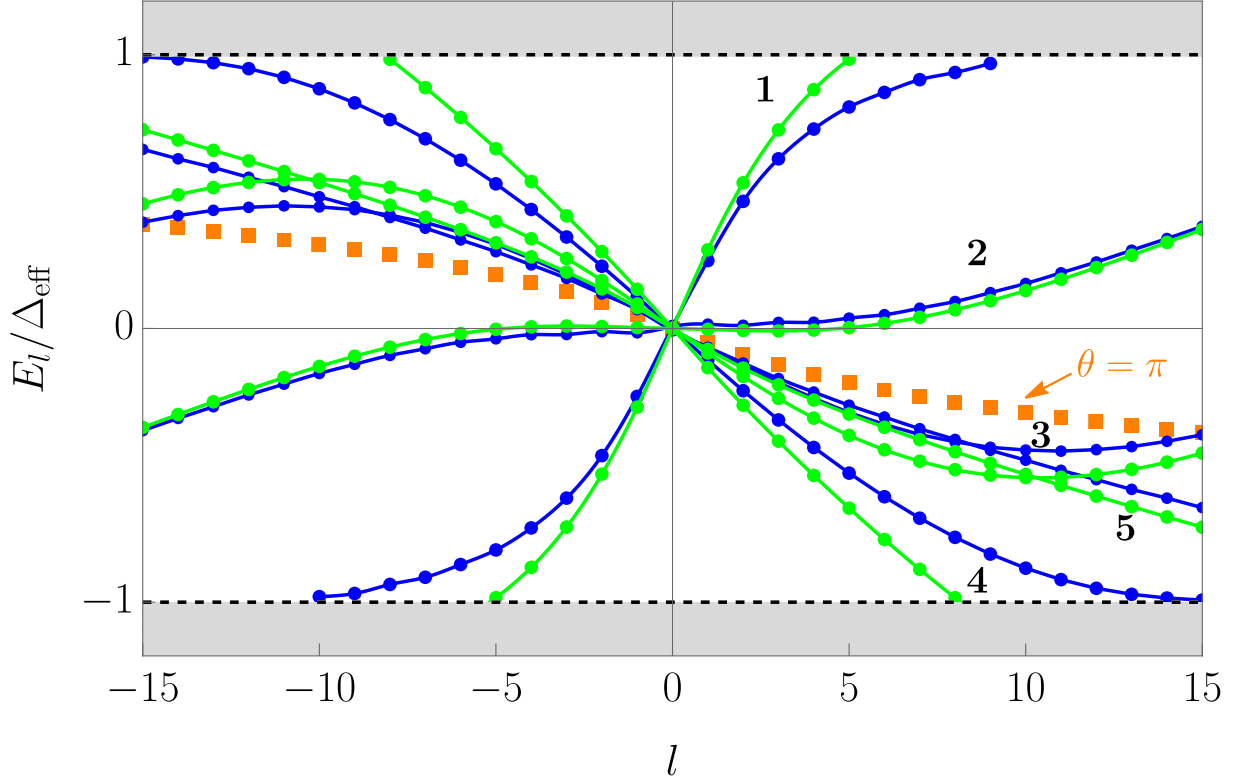


Рис. 10: Зависимость энергий  $E_l^s$  от  $l$  для различных радиусов скирмиона  $R$ : сравнение численных (синий) и аналитических (зелёный) результатов (см. уравнение (57)). Номера “1”–“5” на кривых соответствуют радиусам скирмиона  $R/R_J = 5, 10, 15, 30$  и  $100$  соответственно. Оранжевые точки соответствуют энергиям  $E_l^v$  для случая  $\theta \equiv \pi$ . Чёрная пунктирная линия изображает эффективную энергетическую щель (см. уравнение (47)). Мы используем  $\delta = 20R_J$ , и все остальные параметры такие же, как на рис. 2.

Отметим, что для  $\theta = \pi$  результат (57) совпадает с ур. (53). Для  $R \gg \delta$  мы можем аппроксимировать угол скирмиона ступенчатой функцией. Тогда для  $R \gg \delta$ ,  $\Lambda_{so}$  находим

$$E_l^s \simeq E_l^v + l \frac{\int_R^\infty dr (1/r + m|\alpha|\Delta/J) e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(r/R_J)}{m \int_0^\infty dr r e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(r/R_J)}. \quad (58)$$

Отметим, что в отличие от величины  $E_l^v$ , которая отрицательна, второй член в ур. (58) положителен. Следовательно, мы ожидаем, что знак наклона  $dE_l/dl$  при  $l = 0$  изменится с ростом  $R$  с положительного на отрицательный, ср. рис. 10.

На рис. 10 мы сравниваем аналитические и численные результаты. Мы видим, что, хотя нет идеального количественного согласия между численными расчётами и аналитикой, аналитический результат (57) качественно правильно воспроизводит зависимость  $E_l$  от  $l$  для различных величин  $R$ . Как и в случае волновых функций, согласие между аналитическими и численными результатами для  $E_l^s$  лучше для малых величин  $l$  и ухудшается с ростом  $|l|$ .

## 6 Заключение

В данной работе были аналитически и численно исследованы майорановские состояния, а также низколежащие состояния с ненулевой энергией, в гетероструктуре киральный ферромагнетик-сверхпроводник.

Для майорановских состояний были получены условия их существования, схожие с известными результатами из одномерных моделей: обменное взаимодействие  $J$  должно быть достаточно большим для того, чтобы эффективно спин-поляризовать систему; наличие спин-орбиты  $\alpha$  необходимо для поддержания сверхпроводящей фазы с эффективной щелью  $\Delta_{\text{eff}} \sim \alpha$ .

Аналитический расчет волновых функций собственных состояний был основан на квазиклассическом методе для уравнений Боголюдова-де Жена, применимом в пределе большого  $J$ . Полученные волновые функции осциллируют на фермиевской длине волны  $R_J$  и затухают на масштабе  $\Lambda_{\text{so}} \gg R_J$ . Влияние скирмиона на вид решений в принципе состоит в изменении как периода осцилляций, так и скорости затухания. Однако в пределе медленно меняющейся намагниченности остается лишь эффект поворота компонент спинора на скирмионный угол. Из-за этого поворота перекрытие волновых функций майорановских состояний со скирмионом и без оказывается весьма малым.

В вычислениях были также учтены такие реалистичные факторы, как векторный потенциал и изменение намагниченности пленки под действием поля вихря. Последний эффект, несмотря на кажущуюся малость, в случае однородно намагниченной пленки существенно меняет волновые функции и потому должен учитываться при вычислении каких-либо наблюдаемых.

Оценка энергий состояний с ненулевым орбитальным моментом показала, что в случае однородной намагниченности мини-щель, отделяющая нулевой уровень от следующих состояний, по порядку величины совпадает с результатом Кароли-де Жен-Матрикона  $\Delta_{\text{eff}}^2/(J + \mu) \ll \Delta_{\text{eff}}$ . В случае со скирмионом мини-щель, как и вид спектра в целом, сильно зависит от параметров скирмиона и может быть больше, чем в однородном случае. В этом смысле конфигурация со скирмионом может иметь преимущество перед однородной конфигурацией, поскольку на практике манипуляции с майорановскими состояниями требуют как можно большей их изолированности от остального спектра.

## Список литературы

- [1] E. S. Andriyakhina and I. S. Burmistrov. Interaction of a Néel-type skyrmion with a superconducting vortex. *Phys. Rev. B*, 103(17), May 2021.
- [2] S. S. Apostoloff, E. S. Andriyakhina, and I. S. Burmistrov. Deformation of a Néel-type skyrmion in a weak inhomogeneous magnetic field: Magnetization ansatz and interaction with a Pearl vortex. *Phys. Rev. B*, 109(10), March 2024.
- [3] S. S. Apostoloff, E. S. Andriyakhina, P. A. Vorobyev, Oleg A. Tretiakov, and I. S. Burmistrov. Chirality inversion and radius blowup of a Néel-type skyrmion by a Pearl vortex. *Phys. Rev. B*, 107:L220409, Jun 2023.
- [4] S.S. Apostoloff, E. S. Andriyakhina, and I. S. Burmistrov. The effect of Pearl vortices on the shape and position of Néel-type skyrmions in superconductor–chiral ferromagnet heterostructures. *Phys. Usp.*, 68:1092, 2025.
- [5] J. Bardeen, R. Kümmel, A. E. Jacobs, and L. Tewordt. Structure of vortex lines in pure superconductors. *Phys. Rev.*, 187:556, Nov 1969.
- [6] H. Bateman and A. Erdelyi. *Higher Transcendental Functions*, volume 2. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [7] K. Björnson and A. M. Black-Schaffer. Vortex states and Majorana fermions in spin-orbit coupled semiconductor-superconductor hybrid structures. *Phys. Rev. B*, 88:024501, 2013.
- [8] Gilson Carneiro and Ernst Helmut Brandt. Vortex lines in films: Fields and interactions. *Phys. Rev. B*, 61:6370–6376, Mar 2000.
- [9] C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon. Bound fermion states on a vortex line in a type II superconductor. *Phys. Lett.*, 9:307, 1964.
- [10] W. Chen and A. P. Schnyder. Majorana edge states in superconductor-noncollinear magnet interfaces. *Phys. Rev. B*, 92:214502, 2015.
- [11] Anindya Das, Yuval Ronen, Yonatan Most, Yuval Oreg, Moty Heiblum, and Hadas Shtrikman. Zero-bias peaks and splitting in an Al–InAs nanowire topological superconductor as a signature of Majorana fermions. *Nat. Phys.*, 8:887–895, 2012.
- [12] Liang Fu and C. L. Kane. Superconducting proximity effect and majorana fermions at the surface of a topological insulator. *Phys. Rev. Lett.*, 100:096407, Mar 2008.
- [13] M. Garnier, A. Mesaros, and P. Simon. Topological superconductivity with deformable magnetic skyrmions. *Commun. Phys.*, 2:126, 2019.
- [14] U. Güngördü, S. Sandhoefner, and A. A. Kovalev. Stabilization and control of Majorana bound states with elongated skyrmions. *Phys. Rev. B*, 97:115136, 2018.
- [15] F. Gygi and M. Schlüter. Self-consistent electronic structure of a vortex line in a type-II superconductor. *Phys. Rev. B*, 43:7609, 1991.
- [16] D. S. Katkov, S. S. Apostoloff, and I. S. Burmistrov. Bound states and scattering of magnons on a superconducting vortex in ferromagnet–superconductor heterostructures. *JETP Lett.*, 120:655, 2024.

- [17] A.Yu. Kitaev. Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.*, 303(1):2–30, 2003.
- [18] Roman M. Lutchyn, Jay D. Sau, and S. Das Sarma. Majorana fermions and a topological phase transition in semiconductor-superconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 105:077001, Aug 2010.
- [19] V. Mourik, K. Zuo, S. M. Frolov, S. R. Plissard, E. P. A. M. Bakkers, and L. P. Kouwenhoven. Signatures of Majorana fermions in hybrid superconductor-semiconductor nanowire devices. *Science*, 336(6084):1003–1007, 2012.
- [20] Yuval Oreg, Gil Refael, and Felix von Oppen. Helical liquids and Majorana bound states in quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 105:177002, Oct 2010.
- [21] A. P. Petrović, M. Raju, X. Y. Tee, A. Louat, I. Maggio-Aprile, R. M. Menezes, M. J. Wyszyński, N. K. Duong, M. Reznikov, Ch. Renner, M. V. Milosević, and C. Panagopoulos. Skyrmion-(Anti)vortex coupling in a chiral magnet-superconductor heterostructure. *Phys. Rev. Lett.*, 126:117205, 2021.
- [22] S. Rex, I. V. Gornyi, and A. D. Mirlin. Majorana bound states in magnetic skyrmions imposed onto a superconductor. *Phys. Rev. B*, 100:064504, 2019.
- [23] Masatoshi Sato and Yoichi Ando. Topological superconductors: A review. *Rep. Prog. Phys.*, 80(7):076501, may 2017.
- [24] Jay D. Sau, Roman M. Lutchyn, Sumanta Tewari, and S. Das Sarma. Generic new platform for topological quantum computation using semiconductor heterostructures. *Phys. Rev. Lett.*, 104:040502, Jan 2010.
- [25] Kuei Sun and Nayana Shah. General framework for transport in spin-orbit-coupled superconducting heterostructures: Nonuniform spin-orbit coupling and spin-orbit-active interfaces. *Phys. Rev. B*, 91:144508, Apr 2015.
- [26] Yongjie Xie, Ang Qian, Bin He, Yubiao Wu, Sheng Wang, Guoqiang Yu Bing Xu, Xiufeng Han, and Xianggang Qiu. Visualization of skyrmion-superconducting vortex pairs in a chiral magnet-superconductor heterostructure. *Phys. Rev. Lett.*, 133:166706, 2024.
- [27] G. Yang, P. Stano, J. Klinovaja, and D. Loss. Majorana bound states in magnetic skyrmions. *Phys. Rev. B*, 93:224505, 2016.

## А Условия существования майорановского состояния, локализованного вблизи вихря

В этом разделе мы анализируем асимптотическое поведение МС, локализованного вблизи начала координат, при  $r \rightarrow 0$  и  $r \rightarrow \infty$ . Анализ предела  $r \rightarrow 0$  необходим для формулировки правильных граничных условий.

### А.1 Режим $r \rightarrow 0$

Чтобы изучить асимптотическое поведение майорановской моды в области малых  $r$ , удобно использовать параметризацию  $\phi_{(o)}^\eta(r) = \{H_\uparrow(r), rH_\downarrow(r)\}$ . Тогда функции  $H_{\uparrow,\downarrow}(r)$  удовлетворяют следующим уравнениям

$$-\partial_r^2 H_\sigma - (2 - \sigma)r^{-1}\partial_r H_\sigma + X_\sigma(r)H_\sigma + Y_\sigma(r)H_{-\sigma} + 2m\alpha\sigma r^\sigma \partial_r H_{-\sigma} = 0. \quad (59)$$

Здесь функции  $X_\sigma$  и  $Y_\sigma$  определены как

$$\begin{aligned} X_\sigma(r) &= [(\sigma - 1)/r]eA_\varphi(r) + e^2 A_\varphi^2(r) - 2m[\mu - \sigma J \cos \theta(r)], \\ Y_\sigma(r) &= 2mr^\sigma [J \sin \theta(r) + \eta\sigma\Delta(r) - \alpha eA_\varphi(r) + (1 + \sigma)\alpha r^{-\sigma}]. \end{aligned} \quad (60)$$

Функции  $X_\uparrow(r)$ ,  $Y_\uparrow(r)$  имеют конечный предел при  $r \rightarrow 0$ , в то время как  $X_\downarrow(r)$ ,  $Y_\downarrow(r)$  имеют логарифмическую асимптотику из-за  $A_\varphi$  (см. (23)). Таким образом, при  $r \rightarrow 0$  можно записать:

$$X_\downarrow(r) = X_\downarrow^{(0)} + 2eB_0 \ln \frac{r}{d_S}, \quad X_\uparrow(r) = X_\uparrow^{(0)}, \quad Y_\downarrow(r) = Y_\downarrow^{(0)} + 2m\alpha eB_0 \ln \frac{r}{d_S}, \quad Y_\uparrow(r) = Y_\uparrow^{(0)}, \quad (61)$$

где  $X_\sigma^{(0)}$ ,  $Y_\sigma^{(0)}$  не зависят от  $r$ , а  $B_0 = \phi_0/(4\pi\lambda_L^2) \equiv H_{c1}/\ln(\lambda_L/\xi)$ .

Подставляя  $H_\sigma$  в виде степенного ряда по  $r$ :  $H_\uparrow = 1 + c_\uparrow r^2$  и  $H_\downarrow = c_0 + c_\downarrow r^2 \ln(r/d_S) + \tilde{c}_\downarrow r^2$ , в уравнения (59), находим

$$\tilde{c}_\downarrow = \frac{X_\downarrow^{(0)}c_0 + Y_\downarrow^{(0)}}{8} - m\alpha \frac{X_\uparrow^{(0)} + Y_\uparrow^{(0)}c_0}{8}, \quad c_\downarrow = \frac{eB_0}{4}(c_0 + m\alpha), \quad c_\uparrow = \frac{X_\uparrow^{(0)} + Y_\uparrow^{(0)}c_0}{4}. \quad (62)$$

Следовательно, функции  $H_\sigma$  имеют хорошо определённый предел при  $r = 0$ . Выведенные асимптотические выражения обосновывают граничные условия (15).

**Дополнение.** Как отмечалось во Введении, можно рассматривать гамильтониан более общего вида, чем (14). А именно, пусть значения завихренности вихря и скирмиона равны соответственно  $b$  и  $n$ . В таком случае необходимое условие существования МС состоит в четности  $b + n$  [27].

Для дальнейшего, заметим, что взаимодействие типа Рашбы, фигурирующее в нашей задаче (1), в цилиндрических координатах может быть записано как

$$H_{\text{soc}} = -\alpha\tau_z e^{-i\varphi} (-\sigma_y p_r + \sigma_x p_\varphi), \quad (63)$$

где  $p_r = -i\partial_r$ ,  $p_\varphi = -i\partial_\varphi/r$ . Введем более общее взаимодействие вида

$$H_{\text{soc}} = -\alpha\tau_z e^{-in'\varphi} (-\sigma_y p_r + \sigma_x p_\varphi) \quad (64)$$

с целым  $n'$ .

Для сохранения цилиндрической симметрии при произвольных  $n, b$  нужно брать спин-орбиту в форме (64) с  $n' = n$ . Оператором обобщенного углового момента в этом случае является  $L_z = -i\partial_\varphi + \frac{n}{2}\sigma_z - \frac{b}{2}\tau_z$ .

Чтобы получить гамильтониан для МС типа (14), надо провести те же рассуждения, что и в разделе 2.1. В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} H^n &= -\frac{1}{2m} \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r \right) + \frac{1}{2m} \left[ \frac{n\sigma_z - b}{2r} \right]^2 - \mu + i\eta\Delta(r)\sigma_y + J \sin \theta(r)\sigma_x + J \cos \theta(r)\sigma_z \\ &\quad + i\alpha\sigma_y \left( \partial_r + \frac{n}{2r} \right) + \alpha\sigma_x \frac{b}{2r}, \end{aligned} \quad (65)$$

где мы для простоты пренебрегли вектор-потенциалом.

Вводя функции  $H_{\uparrow,\downarrow}$  как  $\phi_{(o)}^\eta(r) = \{r^{|n-b|/2} H_\uparrow(r), r^{|n+b|/2} H_\downarrow(r)\}$ , получим ур-я

$$-\partial_r^2 H_\sigma - (1 + |n\sigma - b|) r^{-1} \partial_r H_\sigma + X_\sigma(r) H_\sigma + Y_\sigma(r) H_{-\sigma} + 2m\alpha\sigma r^{\sigma\kappa(n,b)} \partial_r H_{-\sigma} = 0 \quad (66)$$

$$\begin{aligned} \kappa(n,b) &= (|n+b| - |n-b|)/2, \quad X_\sigma = -2m[\mu - \sigma J \cos \theta(r)], \\ Y_\sigma &= 2mr^{\sigma\kappa(n,b)} \left[ J \sin \theta(r) + \eta\sigma\Delta(r) + \frac{\alpha}{2r} (n\sigma + b + |n\sigma + b|) \right]. \end{aligned} \quad (67)$$

## A.2 Режим $r \rightarrow \infty$

Теперь проанализируем поведение решения при  $r \rightarrow \infty$ . Удобно ввести  $\tilde{\phi}_{(o)}^\eta(r) = \sqrt{r}\phi_{(o)}^\eta(r)$ . Тогда  $\tilde{\phi}_{(o)}^\eta(r)$  подчиняется следующему уравнению

$$\left[ -\frac{1}{2m} \left( \partial_r^2 + \frac{1}{4r^2} - \frac{1-\sigma_z}{2r^2} \right) - \mu + J\sigma_z + i\eta\Delta_\infty\sigma_y + i\alpha\sigma_y\partial_r + \frac{\alpha\sigma_x}{2r} \right] \tilde{\phi}_{(o)}^\eta = 0. \quad (68)$$

Будем искать его решение в виде разложения по степеням  $1/r$ :

$$\tilde{\phi}_{(o)}^\eta(r) = e^{-Qr} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \frac{1}{r^z} \begin{pmatrix} \beta_{Q,\uparrow} \\ \beta_{Q,\downarrow} \end{pmatrix} + \dots \right] \quad (69)$$

Здесь  $Q$ ,  $\zeta_Q$ ,  $\beta_{Q,\uparrow}$ ,  $\beta_{Q,\downarrow}$  и  $z$  должны быть определены. Подставляя анзац (69) в уравнение (68), находим

$$W_Q \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \frac{1}{r^z} W_Q \begin{pmatrix} \beta_{Q,\uparrow} \\ \beta_{Q,\downarrow} \end{pmatrix} + \frac{\alpha\sigma_x}{2r} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_Q \end{pmatrix} + \dots = 0, \quad (70)$$

где

$$W_Q = \begin{pmatrix} -\frac{Q^2}{2m} - \mu + J & \eta\Delta_\infty - \alpha Q \\ -\eta\Delta_\infty + \alpha Q & -\frac{Q^2}{2m} - \mu - J \end{pmatrix} \quad (71)$$

Уравнение (70) определяет показатель степени  $z = 1$  и распадается на два уравнения

$$W_Q \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_Q \end{pmatrix} = 0, \quad W_Q \begin{pmatrix} \beta_{Q,\uparrow} \\ \beta_{Q,\downarrow} \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{2} \sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_Q \end{pmatrix}. \quad (72)$$

Чтобы решение первого уравнения существовало, определитель матрицы  $W_Q$  должен быть равен нулю. Это приводит к уравнению (16). Отметим, что левый собственный вектор из ядра  $W_Q$  имеет вид  $(1, -\zeta_Q)$ , где

$$\zeta_Q = \frac{Q^2/(2m) + \mu - J}{\eta\Delta_\infty - \alpha Q}. \quad (73)$$

Как можно проверить, справедливо следующее тождество:  $(1, -\zeta_Q)\sigma_x(1, \zeta_Q)^T = 0$ . Это гарантирует, что второе уравнение в системе (72) имеет решение для  $\beta_{\uparrow,\downarrow}$ .

Как обсуждалось в основном тексте для  $\eta = -\text{sgn } \alpha$ , уравнение (16) имеет три корня  $Q$  с положительной действительной частью. Обозначим их как  $Q_{1,2,3}^{(-)}$ . Тогда мы можем построить асимптотическое решение для майорановской нулевой моды, локализованной вблизи начала координат, в виде

$$\tilde{\phi}_+^{(o)}(r) = \sum_{j=1}^3 c_j e^{-Q_j^{(-)} r} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_{Q_j^{(-)}} \end{pmatrix} + \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \beta_{Q_j^{(-)},\uparrow} \\ \beta_{Q_j^{(-)},\downarrow} \end{pmatrix} + \dots \right]. \quad (74)$$

Таким образом, мы имеем четыре константы  $c_{1,2,3}$  и  $c_0$ , которые определяют асимптотическое поведение майорановской нулевой моды при  $r \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$ . Их можно определить, сшивая асимптотики в некотором промежуточном  $r$ , как описано в основном тексте.

### А.3 Анализ характеристического уравнения

Напомним вид характеристического ур-я (16):

$$\left(\frac{Q^2}{2m} + \mu\right)^2 + (\Delta_\infty - \eta\alpha Q)^2 = J^2. \quad (75)$$

Решая ур. (75) пертурбативно по малой  $\alpha$ :

$$m\alpha^2 \ll \frac{J^2 - \Delta_\infty^2}{\Delta_\infty^2} (\sqrt{J^2 - \Delta_\infty^2} - \mu), \quad (76)$$

находим

$$Q_\pm = Q_\pm^{(0)} \pm \frac{\eta m \alpha \Delta_\infty}{\sqrt{J^2 - \mu^2}}, \quad \frac{(Q_\pm^{(0)})^2}{2m} = -\mu \pm \sqrt{J^2 - \Delta_\infty^2}. \quad (77)$$

Заметим, что корни (77) действительно соответствуют трем затухающим при  $r \rightarrow \infty$  решениям при  $\eta = -\text{sgn}(\alpha)$  и трем растущим – при  $\eta = \text{sgn}(\alpha)$ . Характерная длина затухания/роста равна

$$\Lambda_{\text{so}} = (J^2 - \Delta_\infty^2)^{1/2} / (m|\alpha|\Delta_\infty). \quad (78)$$

Теперь рассмотрим ситуацию, когда параметры близки к границе топологической фазы:

$$J - \sqrt{\Delta_\infty^2 + \mu^2} \ll m\alpha^2 \frac{\Delta_\infty^2}{J\mu}. \quad (79)$$

В этом предельном случае при  $\eta\alpha < 0$  корни ур. (75) будут соответствовать растущему ( $Q_1$ ) и трем затухающим ( $Q_{2,3,4}$ ) решениям. При этом решения  $e^{-Q_{3,4}r}$  затухают на прежнем масштабе (78), тогда как длина затухания  $e^{-Q_1 r}$  расходуется как  $1/(J - \sqrt{\mu^2 + \Delta_\infty^2})$ .

Более явно, предположив также помимо ур. (79) соотношение  $m\alpha^2 \ll \max[\mu, \mu(\frac{\mu}{\Delta})^2]$ , получим

$$Q_1 = \frac{2\eta m \alpha \Delta_\infty}{\mu}, \quad Q_2 = -\left(J - \sqrt{\mu^2 + \Delta_\infty^2}\right) \frac{J}{\eta\alpha\Delta_\infty}, \\ Q_{3,4} = \pm 2i\sqrt{m\mu} - \frac{\eta m \alpha \Delta_\infty}{\sqrt{J^2 - \Delta_\infty^2}}. \quad (80)$$

## В Аналитические результаты для волновой функции майорановского состояния, локализованного вблизи вихря

В этом Приложении мы представляем детали вывода асимптотического поведения майорановского состояния, локализованного вблизи центра вихря, в присутствии как однородной намагниченности (см. уравнения (27)), так и скирмиона, а также обсуждаем, как можно учесть ненулевые  $A_\varphi$  и  $\theta_v$ . Как и в основном тексте, мы предполагаем выполненным условие (26). Удобно ввести следующие безразмерные параметры:  $x = r/R_J$ ,  $\bar{\alpha} = 2m\alpha R_J$ ,  $\bar{\Delta}(x) = \Delta(r)/(J + \mu)$  и  $a_\varphi = eA_\varphi R_J$ . Также для простоты предположим, что  $\alpha > 0$ . Тогда уравнения (13) и (14) принимают вид

$$\partial_x^2 u_\uparrow + \frac{\partial_x u_\uparrow}{x} - u_\uparrow \left[ \frac{J \cos \theta(x) - \mu}{J + \mu} + a_\varphi^2(x) \right] = -u_\downarrow \left[ \bar{\Delta}(x) - \frac{J \sin \theta(x)}{J + \mu} + \bar{\alpha} a_\varphi(x) \right] + \bar{\alpha} \left( \partial_x u_\downarrow + \frac{u_\downarrow}{x} \right), \\ \partial_x^2 u_\downarrow + \frac{\partial_x u_\downarrow}{x} + u_\downarrow \left[ \frac{J \cos \theta(x) + \mu}{J + \mu} - \left( \frac{1}{x} - a_\varphi(x) \right)^2 \right] = u_\uparrow \left[ \bar{\Delta}(x) + \frac{J \sin \theta(x)}{J + \mu} - \bar{\alpha} a_\varphi(x) \right] - \bar{\alpha} \partial_x u_\uparrow. \quad (81)$$

## В.1 Случай однородной намагниченности $\theta = 0$ и большой длины Пирла $A_\varphi = 0$

В этом разделе мы строим решение для волновой функции майорановского состояния, локализованного вблизи центра вихря, для однородной намагниченности. Начнём со случая бесконечной длины Пирла  $\lambda \rightarrow \infty$ . Тогда мы можем положить  $\theta$  и  $a_\varphi$  равными нулю в уравнениях (81). Ключевая идея заключается в том, что поскольку для  $\alpha = \Delta_\infty = 0$  характеристическое уравнение (16) имеет решение  $Q = \pm i/R_J$ , соответствующее быстрым (поскольку  $R_J$  – наименьший масштаб длины) осцилляциям волновой функции, мы ищем решение для  $u_{\uparrow,\downarrow}^v$  в виде

$$u_{\uparrow,\downarrow}^v(x) = \frac{A_{\uparrow,\downarrow}^v(x)}{\sqrt{x}} e^{ix} + \text{c.c.}, \quad (82)$$

где  $A_{\uparrow,\downarrow}^v(x)$  – медленные функции  $x$ . Тогда мы получаем следующие (пока что точные) уравнения для  $A_{\uparrow,\downarrow}^v(x)$ :

$$\partial_x^2 A_\uparrow^v + 2i\partial_x A_\uparrow^v + \frac{A_\uparrow^v}{4x^2} - \frac{2J}{J+\mu} A_\uparrow^v = -\bar{\Delta}(x) A_\downarrow^v + \bar{\alpha} \left( \partial_x A_\downarrow^v + iA_\downarrow^v + \frac{A_\downarrow^v}{2x} \right), \quad (83)$$

$$\partial_x^2 A_\downarrow^v + 2i\partial_x A_\downarrow^v - \frac{3A_\downarrow^v}{4x^2} = \bar{\Delta}(x) A_\uparrow^v - \bar{\alpha} \left( \partial_x A_\uparrow^v + iA_\uparrow^v - \frac{A_\uparrow^v}{2x} \right). \quad (84)$$

Далее мы решаем приведенные уравнения пертурбативно по  $\frac{1}{x}$  и  $\bar{\alpha}, \bar{\Delta}$ , считая для простоты  $\bar{\alpha} \sim \bar{\Delta}$ . Как будет видно из полученного ответа,  $A_\uparrow^v \simeq \mathcal{O}(\bar{\alpha}) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}}{x})$ ,  $A_\downarrow^v \simeq \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(\frac{1}{x})$ ,  $\partial_x A_\uparrow^v \simeq \mathcal{O}(\bar{\alpha}^3) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}^3}{x}) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}}{x^2})$ ,  $\partial_x A_\downarrow^v \simeq \mathcal{O}(\bar{\alpha}^2) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}^2}{x}) + \mathcal{O}(\frac{1}{x^2})$ ,  $\partial_x^2 A_\uparrow^v \simeq \mathcal{O}(\bar{\alpha}^5) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}^5}{x}) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}^3}{x^2}) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}}{x^3})$ ,  $\partial_x^2 A_\downarrow^v \simeq \mathcal{O}(\bar{\alpha}^4) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}^4}{x}) + \mathcal{O}(\frac{\bar{\alpha}^2}{x^2}) + \mathcal{O}(\frac{1}{x^3})$ . С учетом этого, получаем приближенные ур-я:

$$\begin{aligned} A_\uparrow^v(x) &\simeq \frac{J+\mu}{2J} \left[ \bar{\Delta}(x) - i\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{2x} \right] A_\downarrow^v + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^3) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^3}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}}{x^2}\right), \\ 2i\partial_x A_\downarrow^v &\simeq \left[ \bar{\Delta}(x) - i\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}}{2x} \right] A_\uparrow^v + \frac{3}{4x^2} A_\downarrow^v + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^4) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^4}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{x^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned} \quad (85)$$

Подставляя верхнее ур-е из (85) в нижнее, получаем:

$$2i\partial_x A_\downarrow^v = \frac{3}{4x^2} A_\downarrow^v + \frac{J+\mu}{2J} (\bar{\Delta}^2 - \bar{\alpha}^2) A_\downarrow^v - \frac{J+\mu}{2J} 2i\bar{\alpha}\bar{\Delta}(x) A_\downarrow^v + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^4) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^4}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{x^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^3}\right). \quad (86)$$

Интегрирование ур. (86) дает

$$A_\downarrow^v \simeq \frac{2Jb_0}{(J+\mu)} e^{-\mathcal{S}(r)} e^{i\mathcal{W}(r)} \left[ 1 + \frac{3i}{8x} \right] + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^4) + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^4 \ln x) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^2}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad (87)$$

а для  $A_\uparrow^v$  находим:

$$A_\uparrow^v \simeq b_0 e^{-\mathcal{S}(r)} e^{i\mathcal{W}(r)} \left[ \bar{\Delta}(x) \left( 1 + \frac{3i}{8x} \right) - i\bar{\alpha} \left( 1 - \frac{i}{8x} \right) \right] + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^3) + \mathcal{O}(\bar{\alpha}^3 \ln x) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}^3}{x}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{\bar{\alpha}}{x^2}\right). \quad (88)$$

$\mathcal{S}(r)$  выше задаётся уравнением (28), а

$$\mathcal{W}(r) = \frac{m\alpha^2 r}{2JR_J} - \frac{1}{4J(J+\mu)R_J} \int_0^r dr_1 \Delta^2(r_1). \quad (89)$$

Функция  $\mathcal{W}(r)$  описывает малую поправку (порядка  $\max(\bar{\Delta}^2, \bar{\alpha}^2)$ ) к периоду быстрых осцилляций. Мы пренебрегаем этой поправкой, как это было сделано в основном тексте статьи.

Асимптотические выражения (88) определяют асимптотические выражения для  $u_{\uparrow,\downarrow}^v$ . Последние можно сравнить с асимптотиками функций Бесселя первого рода при  $x \gg \max(1, |\nu|)$  [6]:

$$\mathcal{J}_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Re} e^{i(x-\pi(2\nu+1)/4)} \left[ 1 + i \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \right]. \quad (90)$$

Как можно проверить, выбор  $b_0 = e^{i\pi/4} \tilde{c}_v \sqrt{1/2\pi}/\bar{\alpha}$  позволяет нам выразить асимптотические выражения для  $u_{\uparrow,\downarrow}^v$  через функции Бесселя, откуда и получаются ур. (27).

## В.2 Случай однородной намагниченности $\theta = 0$ и конечной длины Пирла $A_\varphi \neq 0$

В этом разделе мы демонстрируем, как наличие ненулевого векторного потенциала влияет на решение для волновой функции майорановского состояния, локализованного на вихре. Используя параметризацию (82), находим следующие (пока что точные) уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 A_\uparrow^v + 2i\partial_x A_\uparrow^v + \frac{A_\uparrow^v}{4x^2} - a_\varphi^2(x)A_\uparrow^v - \frac{2J}{J+\mu}A_\uparrow^v &= -[\bar{\Delta}(x) + \bar{\alpha}a_\varphi(x)]A_\downarrow^v + \bar{\alpha} \left( \partial_x A_\downarrow^v + iA_\downarrow^v + \frac{A_\downarrow^v}{2x} \right), \\ \partial_x^2 A_\downarrow^v + 2i\partial_x A_\downarrow^v + \frac{A_\downarrow^v}{4x^2} - \left( \frac{1}{x} - a_\varphi(x) \right)^2 A_\downarrow^v &= [\bar{\Delta}(x) - \bar{\alpha}a_\varphi(x)]A_\uparrow^v - \bar{\alpha} \left( \partial_x A_\uparrow^v + iA_\uparrow^v - \frac{A_\uparrow^v}{2x} \right). \end{aligned} \quad (91)$$

Повторяя анализ, описанный в предыдущем разделе, получаем

$$A_\uparrow^v \simeq b_0 e^{-S(r)} e^{iW_{A_\varphi}(r)} \left\{ \bar{\Delta}(x) \left[ 1 + \frac{3i}{8x} \right] - i\bar{\alpha} \left[ 1 - \frac{i}{8x} + ia_\varphi(x) \right] \right\}, \quad (92)$$

и

$$A_\downarrow^v \simeq \frac{2Jb_0}{J+\mu} e^{-S(r)} e^{iW_{A_\varphi}(r)} \left[ 1 + \frac{3i}{8x} \right]. \quad (93)$$

Здесь мы вводим

$$W_{A_\varphi}(r) = W(r) - \frac{eR_J}{2} \int_r^\infty dr_1 A_\varphi(r_1) \left[ eA_\varphi(r_1) + \frac{2}{r_1} \right]. \quad (94)$$

Как мы обсуждали в основном тексте,  $A_\varphi^m$ , как правило, меньше  $A_\varphi^v$ . Тогда разность  $W_{A_\varphi}(r) - W(r)$  может быть оценена как порядка  $(R_J/\lambda) \ln(1 + \lambda/r)$ . Следовательно, векторный потенциал индуцирует малый (порядка  $R_J/\lambda$ ), почти постоянный фазовый сдвиг быстрых осцилляций. Более серьёзный эффект связан с членом  $a_\varphi$  в ур. (92). При  $r \ll \lambda$  этот член мал  $a_\varphi \ll 1/x$ , но на больших расстояниях  $r \gg \lambda$   $a_\varphi = -1/(2x)$ , что влияет на асимптотическое поведение  $A_\uparrow^v$ . В частности, для  $r \gg \lambda$   $u_\uparrow^v$  не может быть описано уравнением (27). Однако на таких больших расстояниях решение уже сильно затухает.

## В.3 Случай наличия скирмиона

Теперь опишем, как построить волновую функцию майорановского состояния, локализованного на вихре, в присутствии скирмиона. Рассмотрим повернутый гамильтониан (31). Мы предполагаем, что длина Пирла достаточно велика и, таким образом, опускаем векторный потенциал. Как и прежде, ищем нулевые собственные моды повернутого гамильтониана (31) при  $x \gg 1$  в следующем виде:

$$\underline{u}_{\uparrow,\downarrow} = \underline{A}_{\uparrow,\downarrow}(x) e^{ix/\sqrt{x}} + \text{c.c.} \quad (95)$$

Тогда функции  $\underline{A}_{\uparrow,\downarrow}(x)$  удовлетворяют

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{A}_\uparrow + 2i\partial_x \underline{A}_\uparrow + \frac{\underline{A}_\uparrow}{4x^2} - \frac{1 - \cos \vartheta}{2x^2} \underline{A}_\uparrow - \frac{1}{4} (2\bar{\alpha} + \partial_x \vartheta) \partial_x \vartheta \underline{A}_\uparrow - \bar{\alpha} \frac{\sin \vartheta}{2x} \underline{A}_\uparrow \\ = \frac{\sin \vartheta}{2x^2} \underline{A}_\downarrow - \left( \bar{\Delta}(x) - \frac{\partial_x^2 \vartheta}{2} \right) \underline{A}_\downarrow + \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{A}_\downarrow + i\underline{A}_\downarrow + \frac{\cos \vartheta}{2x} \underline{A}_\downarrow \right) + \partial_x \vartheta (\partial_x \underline{A}_\downarrow + i\underline{A}_\downarrow), \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{A}_\downarrow + 2i\partial_x \underline{A}_\downarrow + \frac{\underline{A}_\downarrow}{4x^2} - \frac{1 + \cos \vartheta}{2x^2} \underline{A}_\downarrow - \frac{2J}{J+\mu} \underline{A}_\downarrow - \frac{1}{4} (2\bar{\alpha} + \partial_x \vartheta) \partial_x \vartheta \underline{A}_\downarrow + \bar{\alpha} \frac{\sin \vartheta}{2x} \underline{A}_\downarrow \\ = \frac{\sin \vartheta}{2x^2} \underline{A}_\uparrow + \left( \bar{\Delta}(x) - \frac{\partial_x^2 \vartheta}{2} \right) \underline{A}_\uparrow - \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{A}_\uparrow + i\underline{A}_\uparrow - \frac{\cos \vartheta}{2x} \underline{A}_\uparrow \right) - \partial_x \vartheta (\partial_x \underline{A}_\uparrow + i\underline{A}_\uparrow). \end{aligned} \quad (97)$$

Далее, аналогично проделанному в разделе B.1, мы решаем уравнения выше пертурбативно по  $\frac{1}{x}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\bar{\Delta}$ , а также  $\partial_x \vartheta$ , считая  $\bar{\alpha} \sim \bar{\Delta} \sim \partial_x \vartheta$ . Для краткости не будем выписывать все промежуточные шаги. Для нижней компоненты получаем

$$\underline{A}_\downarrow \simeq -\frac{J+\mu}{2J} \left[ \bar{\Delta}_\vartheta - i\bar{\alpha}_\vartheta + \bar{\alpha} \frac{\cos \vartheta}{2x} + \frac{\sin \vartheta}{2x^2} \right] \underline{A}_\uparrow. \quad (98)$$

где  $\bar{\Delta}_\vartheta = \bar{\Delta} - \partial_x^2 \vartheta / 2$  и  $\bar{\alpha}_\vartheta = \bar{\alpha} + \partial_x \vartheta$ . Верхняя компонента удовлетворяет следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \partial_x \underline{A}_\uparrow \simeq & \frac{i}{2} \left[ \bar{\Delta}_\vartheta - i\bar{\alpha}_\vartheta - \bar{\alpha} \frac{\cos \vartheta}{2x} - \frac{\sin \vartheta}{2x^2} \right] \underline{A}_\downarrow - \frac{i}{2} \left[ \frac{1-2\cos \vartheta}{4x^2} \right. \\ & \left. + \frac{\bar{\alpha} \sin \vartheta}{2x} + \frac{1}{4} (2\bar{\alpha} + \partial_x \vartheta) \partial_x \vartheta \right] \underline{A}_\uparrow. \end{aligned} \quad (99)$$

Решая уравнения (98) и (99), находим

$$\begin{aligned} \underline{A}_\uparrow \simeq & \frac{2Jb_0}{J+\mu} e^{-\mathcal{S}_\vartheta(r)} e^{i\mathcal{W}_\vartheta(r)} \left( 1 + i \frac{3\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{8x} \right), \\ \underline{A}_\downarrow \simeq & -b_0 e^{-\mathcal{S}_\vartheta(r)} e^{i\mathcal{W}_\vartheta(r)} \left[ \bar{\Delta}_\vartheta \left( 1 + i \frac{3\sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{8x} \right) - i\bar{\alpha}_\vartheta \left( 1 + i \frac{3\cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \frac{4\partial_x \vartheta \cos \vartheta}{\bar{\alpha}_\vartheta}}{8x} \right) \right]. \end{aligned} \quad (100)$$

Здесь мы вводим следующие функции

$$\mathcal{S}_\vartheta(r) = \frac{m}{J} \int_0^r dr_1 \left( \alpha + \frac{\partial_r \vartheta}{2m} \right) \left( \Delta(r_1) - \frac{\partial_r^2 \vartheta}{4m} \right), \quad (101)$$

и

$$\mathcal{W}_\vartheta(r) = \frac{m}{2JR_J} \int_0^r dr_1 \left( \alpha + \frac{\partial_r \vartheta}{2m} \right)^2 - \frac{1}{4J(J+\mu)R_J} \int_0^r dr_1 \Delta(r_1) \left( \Delta(r_1) - \frac{\partial_r^2 \vartheta}{2m} \right) \quad (102)$$

$$- \frac{1}{4(J+\mu)R_J} \int_0^r dr_1 \left( \alpha + \frac{\partial_r \vartheta}{4m} \right) \partial_r \vartheta - \frac{m\alpha R_J}{2} \int_0^r dr_1 \frac{\sin \vartheta(r_1)}{r_1}. \quad (103)$$

Отметим, что присутствие скирмиона приводит к модификации фазы решения. Хотя в основном тексте мы пренебрегаем этим эффектом, тем не менее, это изменение фазы заметно в численном решении (см. рис. 3). Ниже мы предполагаем  $\partial_x \vartheta \ll \bar{\alpha}, \bar{\Delta}$ .

Асимптотические выражения (100) определяют асимптотические выражения для  $\underline{u}_{\uparrow, \downarrow}$ . Последние можно сравнить с асимптотиками при  $x \gg \max(1, |\nu|)$  для функций Бесселя первого рода (см. уравнение (90)) и для функций Бесселя второго рода [6]:

$$\mathcal{Y}_\nu(x) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{Im} e^{i(x-\pi(2\nu+1)/4)} \left[ 1 + i \frac{4\nu^2 - 1}{8x} \right]. \quad (104)$$

Как можно проверить, выбор  $b_0 = -e^{-i\pi/4} \tilde{c}_v / (\bar{\alpha} \sqrt{\pi})$  позволяет нам выразить асимптотические выражения для  $\underline{u}_{\uparrow, \downarrow}$  через функции Бесселя:

$$\underline{u}_\uparrow \simeq -\frac{2\tilde{c}_v R_J J}{\alpha} e^{-\mathcal{S}(r)} \left[ \mathcal{J}_0(r/R_J) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \mathcal{Y}_1(r/R_J) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right], \quad (105)$$

$$\underline{u}_\downarrow \simeq \tilde{c}_v e^{-\mathcal{S}(r)} \left\{ \mathcal{J}_1(r/R_J) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \mathcal{Y}_0(r/R_J) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{R_J \Delta}{\alpha} \left[ \mathcal{J}_0(r/R_J) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \mathcal{Y}_1(r/R_J) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \right\}. \quad (106)$$

Отметим, что при  $x \gtrsim 10$  функции  $\mathcal{Y}_{0,1}(x)$  отклоняются от функций  $\pm \mathcal{J}_{1,0}(x)$  менее чем на  $10^{-2}$  соответственно. Таким образом, для  $x \gtrsim 10$  мы используем упрощённые выражения  $\underline{u}_\uparrow \simeq u_\uparrow^{v, \pi}$  и  $\underline{u}_\downarrow \simeq u_\downarrow^{v, \pi}$ , которые приводят к ур. (39).

Надо оговориться, что в восстановлении выражений (105), (106) по их асимптотикам, конечно, есть неоднозначность. Так, например, вместо функций  $\mathcal{J}_0, \mathcal{Y}_1$  в ур. (105) можно было выбрать любую другую пару функций Бесселя. Но это не существенно, поскольку при  $x \gg 1$  все такие альтернативные варианты будут иметь одну асимптотику в главном порядке по  $1/x$ .

## С Асимптотическое поведение майорановского состояния, локализованного вблизи края

В этом Приложении мы изучаем поведение майорановской нулевой моды, локализованной на границе системы. Мы предполагаем, что размер системы достаточно велик, чтобы положить  $A_\varphi(r)$  и  $\theta(r)$  равными нулю в гамильтониане (14). Тогда  $\tilde{\phi}_{+1}^{(o)}(r)$  подчиняется уравнению (68). Как обсуждалось выше в Приложении А, мы можем построить решение в виде

$$\tilde{\phi}_{+1}^{(o)}(r) = \sum_{j=1}^3 c_j e^{-Q_j^{(+)} r} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_{Q_j^{(+)}} \end{pmatrix} \quad (107)$$

где  $Q_j^{(+)} = -Q_j^-$  и, следовательно,  $\text{Re } Q_j^{(+)} < 0$ . Чтобы удовлетворить граничным условиям (18), пока неизвестные параметры  $c_{1,2,3}$  и  $c_\infty$  должны удовлетворять следующему линейному уравнению:

$$M_\zeta M_s \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

где матрицы  $M_\zeta$  и  $M_s$  имеют вид

$$M_\zeta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \zeta_{Q_1^{(+)}} & \zeta_{Q_2^{(+)}} & \zeta_{Q_3^{(+)}} & 0 \\ Q_1^{(+)} & Q_2^{(+)} & Q_3^{(+)} & 0 \\ Q_1^{(+)} \zeta_{Q_1^{(+)}} & Q_2^{(+)} \zeta_{Q_2^{(+)}} & Q_3^{(+)} \zeta_{Q_3^{(+)}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_s = \begin{pmatrix} e^{-Q_1^{(+)} L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-Q_2^{(+)} L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-Q_3^{(+)} L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (109)$$

Определитель произведения  $M_\zeta M_s$  задаётся как

$$\det(M_\zeta M_s) = e^{-(Q_1^{(+)} + Q_2^{(+)} + Q_3^{(+)} L)} \frac{(Q_3^{(+)} - Q_2^{(+)})}{(\Delta - \alpha Q_1^{(+)})} \frac{(Q_1^{(+)} - Q_3^{(+)})}{(\Delta - \alpha Q_2^{(+)})} \frac{(Q_2^{(+)} - Q_1^{(+)})}{(\Delta - \alpha Q_3^{(+)})} \left( \alpha^2 (\mu - J) + \frac{\Delta_\infty^2}{2m} \right). \quad (110)$$

Далее, уравнение (108) может быть решено явно, так что мы находим

$$c_\infty = \frac{\alpha [Q_1^{(+)} Q_2^{(+)} Q_3^{(+)} + 2m(J - \mu)(Q_1^{(+)} + Q_2^{(+)} + Q_3^{(+)})]}{2m[2m\alpha^2(\mu - J) + \Delta_\infty^2]} - \frac{\Delta_\infty [2m(J - \mu) + Q_1^{(+)} Q_2^{(+)} + Q_2^{(+)} Q_3^{(+)} + Q_3^{(+)} Q_1^{(+)}]}{2m[2m\alpha^2(\mu - J) + \Delta_\infty^2]}, \quad (111)$$

$$c_1 = \frac{\Delta_\infty (Q_2^{(+)} + Q_3^{(+)}) - \alpha [2m(J - \mu) + Q_2^{(+)} Q_3^{(+)}]}{(Q_1^{(+)} - Q_2^{(+)}) (Q_1^{(+)} - Q_3^{(+)})} \times e^{Q_1^{(+)} L} \frac{(\Delta_\infty - \alpha Q_1^{(+)})}{2m\alpha^2(\mu - J) + \Delta_\infty^2},$$

$$c_2 = \frac{\Delta_\infty (Q_1^{(+)} + Q_3^{(+)}) - \alpha [2m(J - \mu) + Q_1^{(+)} Q_3^{(+)}]}{(Q_2^{(+)} - Q_1^{(+)}) (Q_2^{(+)} - Q_3^{(+)})} \times e^{Q_2^{(+)} L} \frac{(\Delta_\infty - \alpha Q_2^{(+)})}{2m\alpha^2(\mu - J) + \Delta_\infty^2},$$

$$c_3 = \frac{\Delta_\infty (Q_1^{(+)} + Q_2^{(+)}) - \alpha [2m(J - \mu) + Q_1^{(+)} Q_2^{(+)}]}{(Q_3^{(+)} - Q_1^{(+)}) (Q_3^{(+)} - Q_2^{(+)})} \times e^{Q_3^{(+)} L} \frac{(\Delta_\infty - \alpha Q_3^{(+)})}{2m\alpha^2(\mu - J) + \Delta_\infty^2}. \quad (112)$$

Таким образом, ур. (107) и (112) полностью определяют решение для МС.

Введём следующие величины:

$$I_{ab} = - \sum_{j,j'=1}^3 \frac{c_j c_{j'}}{Q_j^{(+)} + Q_{j'}^{(+)}} \zeta_{Q_j^{(+)}}^a \zeta_{Q_{j'}^{(+)}}^b e^{-Q_j^{(+)} L - Q_{j'}^{(+)} L} \quad (113)$$

Для  $J - \mu \gg m\alpha^2, \Delta_\infty$  можно записать:

$$\begin{aligned} Q_1^{(+)} &\simeq -\sqrt{2m(J-\mu)} - m\alpha\Delta_\infty/J, \\ Q_{2,3}^{(+)} &\simeq \pm i\sqrt{2m(J+\mu)} - m\alpha\Delta_\infty/J. \end{aligned} \quad (114)$$

Тогда мы находим

$$I_{00} \simeq \frac{1}{2\bar{\Delta}_\infty \bar{\alpha}} \left( \frac{J+\mu}{J} \right)^{3/2} \left[ \left( \frac{J+\mu}{J} \right)^{1/2} \bar{\Delta}_\infty^2 + \bar{\alpha}^2 \right] \times \left[ \left( \frac{J+\mu}{J} \right)^{1/2} \bar{\Delta}_\infty^2 + 2\bar{\Delta}_\infty \bar{\alpha} + \bar{\alpha}^2 \frac{J-\mu}{[J(J+\mu)]^{1/2}} \right], \quad (115)$$

$$I_{11} \simeq \frac{2}{\bar{\alpha}\bar{\Delta}_\infty} \left( \frac{J}{J+\mu} \right)^{1/2} \left[ \bar{\Delta}_\infty + \bar{\alpha} \left( \frac{J-\mu}{J+\mu} \right)^{1/2} \right] \quad (116)$$

и  $I_{01} \simeq -\Delta_\infty I_{11}/(2J)$ . Используя эти выражения, мы получаем уравнение (50) в основном тексте.

## D Аналитические оценки для собственных функций и собственных энергий состояний с ненулевым $l$ , локализованных на вихре

В этом Приложении мы строим решения для волновых функций состояний с ненулевым  $l$ , локализованных на сверхпроводящем вихре. Мы используем тот же подход типа ВКБ, который мы применяем в Приложении B.

### D.1 Случай однородной намагниченности $\theta = 0$

Начнём с переписывания уравнения (9) в явном виде в терминах безразмерных параметров:

$$\partial_x^2 u_\uparrow + \frac{1}{x} \partial_x u_\uparrow - \frac{l^2}{x^2} u_\uparrow - u_\uparrow \frac{J-\mu}{J+\mu} + \bar{E}_l u_\uparrow = \bar{\alpha} (\partial_x u_\downarrow + \frac{l+1}{x} u_\downarrow) + \bar{\Delta}(x) v_\downarrow, \quad (117)$$

$$\partial_x^2 u_\downarrow + \frac{1}{x} \partial_x u_\downarrow - \frac{(l+1)^2}{x^2} u_\downarrow + (1 + \bar{E}_l) u_\downarrow = -\bar{\alpha} (\partial_x u_\uparrow - \frac{l}{x} u_\uparrow) - \bar{\Delta}(x) v_\uparrow, \quad (118)$$

$$\partial_x^2 v_\downarrow + \frac{1}{x} \partial_x v_\downarrow - \frac{(l-1)^2}{x^2} v_\downarrow + (1 - \bar{E}_l) v_\downarrow = -\bar{\alpha} (\partial_x v_\uparrow + \frac{l}{x} v_\uparrow) - \bar{\Delta}(x) u_\uparrow, \quad (119)$$

$$\partial_x^2 v_\uparrow + \frac{1}{x} \partial_x v_\uparrow - \frac{l^2}{x^2} v_\uparrow - v_\uparrow \frac{J-\mu}{J+\mu} - \bar{E}_l v_\uparrow = \bar{\alpha} (\partial_x v_\downarrow + \frac{1-l}{x} v_\downarrow) + \bar{\Delta}(x) u_\downarrow, \quad (120)$$

где  $\bar{E}_l = E_l/(J+\mu)$ . По причинам, объяснённым ранее, мы опускаем  $A_\varphi$  и  $\theta_v$ . Далее при  $x \rightarrow \infty$  мы ищем решения уравнений (117) – (120) в следующем виде

$$u_{\uparrow,\downarrow} = \frac{A_{\uparrow,\downarrow}}{\sqrt{x}} e^{ix} + \text{с.с.}, \quad v_{\uparrow,\downarrow} = \frac{B_{\uparrow,\downarrow}}{\sqrt{x}} e^{ix} + \text{с.с.} \quad (121)$$

Здесь  $A_{\uparrow,\downarrow}$  и  $B_{\uparrow,\downarrow}$  – медленные функции  $x$ . Далее, аналогично Приложению B, из уравнений (117) – (120) находим следующие соотношения:

$$A_\uparrow = -\frac{J+\mu}{2J} \left[ \bar{\alpha} \left( iA_\downarrow + \frac{2l+1}{2x} A_\downarrow \right) + \bar{\Delta} B_\downarrow \right], \quad (122)$$

$$B_\uparrow = -\frac{J+\mu}{2J} \left[ \bar{\alpha} \left( iB_\downarrow + \frac{1-2l}{2x} B_\downarrow \right) + \bar{\Delta} A_\downarrow \right], \quad (123)$$

и следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

$$2i\partial_x A_\downarrow - \frac{4(l+1)^2-1}{4x^2} A_\downarrow = \bar{\alpha} \left[ \frac{2l+1}{2x} - i \right] A_\uparrow - \bar{\Delta} B_\uparrow, \quad (124)$$

$$2i\partial_x B_\downarrow - \frac{4(l-1)^2-1}{4x^2} B_\downarrow = \bar{\alpha} \left[ \frac{1-2l}{2x} - i \right] B_\uparrow - \bar{\Delta} A_\uparrow. \quad (125)$$

Здесь мы пренебрегаем энергией  $\bar{E}_l$ , поскольку, как мы получим ниже,  $|\bar{E}_l| \ll \max\{\bar{\alpha}^2, \bar{\Delta}_\infty^2\}$ .

Далее, подставляя ур. (122) и (123) в ур. (124) и (125), получаем

$$\begin{pmatrix} \partial_x A_\downarrow \\ \partial_x B_\downarrow \end{pmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{J+\mu}{2J}(\bar{\Delta}^2 - \bar{\alpha}^2) + \frac{4(l+1)^2-1}{4x^2} & 2i\bar{\alpha}\bar{\Delta} \frac{J+\mu}{2J} \\ 2i\bar{\alpha}\bar{\Delta} \frac{J+\mu}{2J} & \frac{J+\mu}{2J}(\bar{\Delta}^2 - \bar{\alpha}^2) + \frac{4(l-1)^2-1}{4x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\downarrow \\ B_\downarrow \end{pmatrix} \quad (126)$$

Далее мы пренебрегаем членами  $\sim (\bar{\Delta}^2 - \bar{\alpha}^2)$ , которые приводят к малой поправке к фазе (см. Приложение B), и получаем следующие решения:

$$A_\downarrow \simeq -\tilde{c}_0 \frac{2J}{J+\mu} e^{-S(x)} \left[ 1 + i \frac{4(l+1)^2-1}{8x} \right], \quad (127)$$

$$B_\downarrow \simeq (\text{sgn } \alpha) \tilde{c}_0 \frac{2J}{J+\mu} e^{-S(x)} \left[ 1 + i \frac{4(l-1)^2-1}{8x} \right], \quad (128)$$

которые получаются из (126) при учете “майорано-подобного” свойства  $B_\downarrow = -(\text{sgn } \alpha) A_\downarrow + \mathcal{O}(1/x)$ .

Принимая во внимание асимптотическое разложение (90) для функции Бесселя, мы выбираем  $\tilde{c}_0 = -c_0 e^{-i\pi/4 - i\pi(l+1)/2} / \sqrt{2\pi}$  и получаем решения для  $u_\downarrow$  и  $v_\downarrow$  как в ур. (52).

Далее из ур. (122)-(123) находим

$$A_\uparrow \simeq (\text{sgn } \alpha) \tilde{c}_0 e^{-S(x)} \left[ i|\bar{\alpha}| \left( 1 + i \frac{4l^2-1}{8x} \right) - \bar{\Delta} \left( 1 + i \frac{4(l-1)^2-1}{8x} \right) \right], \quad (129)$$

$$B_\uparrow \simeq -\tilde{c}_0 e^{-S(x)} \left[ i|\bar{\alpha}| \left( 1 + i \frac{4l^2-1}{8x} \right) - \bar{\Delta} \left( 1 + i \frac{4(l+1)^2-1}{8x} \right) \right]. \quad (130)$$

Снова, используя асимптотическое разложение (90), мы строим решения для  $u_\uparrow$  и  $v_\uparrow$  в терминах функций Бесселя (см. ур. (51)). Отметим, что строго говоря, асимптотические решения (127)-(130) работают при  $x \gg \max(1, |l|)$ .

Используя условие нормировки

$$\int d^2\mathbf{r} \left[ u_{\uparrow,l}^2 + u_{\downarrow,l}^2 + v_{\uparrow,l}^2 + v_{\downarrow,l}^2 \right] = 1, \quad (131)$$

находим

$$c_{v,l}^{-2} \simeq 8\pi \left( \frac{R_J^2 J}{\alpha} \right)^2 \int_0^\infty dx x e^{-2S(r)} \left[ \mathcal{J}_{l-1}^2(x) + \mathcal{J}_{l+1}^2(x) \right] \simeq 16\pi \left( \frac{R_J^2 J}{\alpha} \right)^2 \int_0^\infty dx x \mathcal{J}_l^2(x) e^{-2S(r)}. \quad (132)$$

Чтобы оценить собственные энергии  $E_l$ , мы вычисляем среднее значение гамильтониана  $H^{(l)}$  с собственной функцией  $\Phi_l$ , заданной ур. (51)-(52). Мы находим

$$\langle \Phi_l | H^{(l)} | \Phi_l \rangle \simeq -16\pi l c_{v,l}^2 \frac{R_J^3 J}{|\alpha|} \int_0^\infty dx \Delta(r) \left[ \mathcal{J}_l^2(x) - \frac{1}{2x} \partial_x \mathcal{J}_l^2(x) \right] e^{-2S(r)} \quad (133)$$

Мы опускаем член  $\sim \partial_x \mathcal{J}_l^2(x)$  в уравнении выше, поскольку он даёт поправку порядка 1 по сравнению с логарифмом в ур. (54). Тогда получаем

$$E_l^v \simeq -\frac{|\alpha| l}{R_J J} \frac{\int_0^\infty dx \Delta e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(x)}{\int_0^\infty dx x e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(x)} \quad (134)$$

Вычисляя интеграл, как описано в основном тексте, получаем ур. (54) в основном тексте. Отметим, что для оценки энергий  $E_l$ , вместо усреднения гамильтониана, можно считать и другие величины. Например, можно вычислить среднее от  $dH^{(l)}/d\Delta_\infty$ , которое равно  $dE_l/d\Delta_\infty$  в силу теоремы Гельмана-Фейнмана. Как можно проверить, это даёт ту же зависимость энергии  $E_l$  от параметров, но с численным коэффициентом в 2 раза меньшим, чем в уравнении (54).

## D.2 Случай наличия скирмиона

Теперь построим решения для волновых функций состояний с ненулевым  $l$ , локализованных на сверхпроводящем вихре в присутствии скирмиона. Мы применяем унитарное преобразование (30) к гамильтониану  $H^{(l)}$  (см. ур. (10)) и получаем

$$\begin{aligned} \underline{H}^{(l)} = & -\frac{\tau_z}{2mR_J^2} \left( \partial_x^2 + \frac{1}{x} \partial_x \right) + \frac{\tau_z}{2mR_J^2 x^2} \left( l + \frac{1}{2} (\tau_z - \sigma_z \cos \vartheta + \sigma_x \sin \vartheta) \right)^2 - \mu \tau_z + \Delta \tau_x - J \sigma_z + \\ & + i \tau_z \sigma_y \frac{\partial_x^2 \vartheta}{4mR_J^2} + \frac{i \tau_z \sigma_y}{R_J} \left( \alpha + \frac{\partial_x \vartheta}{2mR_J} \right) \left( \partial_x + \frac{1}{2x} \right) + \tau_z \frac{(\partial_x \vartheta)^2}{8mR_J^2} + \tau_z \frac{\alpha \partial_x \vartheta}{2R_J} + \\ & + \frac{\alpha}{2R_J x} \left( 1 + 2l \tau_z \right) \left( \sigma_x \cos \vartheta + \sigma_z \sin \vartheta \right). \end{aligned} \quad (135)$$

Пренебрегая пространственными производными  $\vartheta$ , находим, что 4-компонентная волновая функция определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{u}_\uparrow + \frac{1}{x} \partial_x \underline{u}_\uparrow - \frac{1}{x^2} \left( \left( l + \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{u}_\uparrow + \underline{u}_\uparrow - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{u}_\uparrow + \bar{E}_l \underline{u}_\uparrow \\ - \frac{\sin \vartheta (l+1/2)}{x^2} \underline{u}_\downarrow - \bar{\Delta} \underline{v}_\downarrow - \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{u}_\downarrow + \frac{\underline{u}_\downarrow}{2x} \right) - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{u}_\downarrow = 0, \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{u}_\downarrow + \frac{1}{x} \partial_x \underline{u}_\downarrow - \frac{1}{x^2} \left( \left( l + \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{u}_\downarrow - \frac{J - \mu}{J + \mu} \underline{u}_\downarrow + \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{u}_\downarrow + \bar{E}_l \underline{u}_\downarrow \\ - \frac{\sin \vartheta (l+1/2)}{x^2} \underline{u}_\uparrow + \bar{\Delta} \underline{v}_\uparrow + \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{u}_\uparrow + \frac{\underline{u}_\uparrow}{2x} \right) - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{u}_\uparrow = 0, \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{v}_\uparrow + \frac{1}{x} \partial_x \underline{v}_\uparrow - \frac{1}{x^2} \left( \left( l - \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{v}_\uparrow + \underline{v}_\uparrow - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{v}_\uparrow - \bar{E}_l \underline{v}_\uparrow \\ + \frac{\sin \vartheta (l-1/2)}{x^2} \underline{v}_\downarrow - \bar{\Delta} \underline{u}_\downarrow - \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{v}_\downarrow + \frac{\underline{v}_\downarrow}{2x} \right) - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{v}_\downarrow = 0, \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{v}_\downarrow + \frac{1}{x} \partial_x \underline{v}_\downarrow - \frac{1}{x^2} \left( \left( l - \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{v}_\downarrow - \frac{J - \mu}{J + \mu} \underline{v}_\downarrow + \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{v}_\downarrow - \bar{E}_l \underline{v}_\downarrow \\ + \frac{\sin \vartheta (l-1/2)}{x^2} \underline{v}_\uparrow + \bar{\Delta} \underline{u}_\uparrow + \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{v}_\uparrow + \frac{\underline{v}_\uparrow}{2x} \right) - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{v}_\uparrow = 0. \end{aligned} \quad (139)$$

Теперь подставляем  $\underline{u}_{\uparrow,\downarrow}$  и  $\underline{v}_{\uparrow,\downarrow}$  в форме ур. (121). Тогда мы получаем следующие точные уравнения для  $\underline{A}_{\uparrow,\downarrow}$  и  $\underline{B}_{\uparrow,\downarrow}$ :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{A}_\uparrow + 2i \partial_x \underline{A}_\uparrow + \frac{\underline{A}_\uparrow}{4x^2} - \frac{1}{x^2} \left( \left( l + \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{A}_\uparrow - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{A}_\uparrow + \bar{E}_l \underline{A}_\uparrow \\ - \frac{\sin \vartheta (l+1/2)}{x^2} \underline{A}_\downarrow - \bar{\Delta} \underline{B}_\downarrow - \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{A}_\downarrow + i \underline{A}_\downarrow \right) - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{A}_\downarrow = 0, \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{A}_\downarrow + 2i \partial_x \underline{A}_\downarrow + \frac{\underline{A}_\downarrow}{4x^2} - \frac{1}{x^2} \left( \left( l + \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{A}_\downarrow - \frac{2J}{J + \mu} \underline{A}_\downarrow + \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{A}_\downarrow \\ + \bar{E}_l \underline{A}_\downarrow - \frac{\sin \vartheta (l+1/2)}{x^2} \underline{A}_\uparrow + \bar{\Delta} \underline{B}_\uparrow + \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{A}_\uparrow + i \underline{A}_\uparrow \right) - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{A}_\uparrow = 0, \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{B}_\uparrow + 2i \partial_x \underline{B}_\uparrow + \frac{\underline{B}_\uparrow}{4x^2} - \frac{1}{x^2} \left( \left( l - \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{B}_\uparrow - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{B}_\uparrow - \bar{E}_l \underline{B}_\uparrow \\ + \frac{\sin \vartheta (l-1/2)}{x^2} \underline{B}_\downarrow - \bar{\Delta} \underline{A}_\downarrow - \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{B}_\downarrow + i \underline{B}_\downarrow \right) - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{B}_\downarrow = 0, \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \underline{B}_\downarrow + 2i \partial_x \underline{B}_\downarrow + \frac{\underline{B}_\downarrow}{4x^2} - \frac{1}{x^2} \left( \left( l - \frac{1}{2} (1 + \cos \vartheta) \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \vartheta \right) \underline{B}_\downarrow - \frac{2J}{J + \mu} \underline{B}_\downarrow + \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \sin \vartheta \underline{B}_\downarrow \\ - \bar{E}_l \underline{B}_\downarrow + \frac{\sin \vartheta (l-1/2)}{x^2} \underline{B}_\uparrow + \bar{\Delta} \underline{A}_\uparrow + \bar{\alpha} \left( \partial_x \underline{B}_\uparrow + i \underline{B}_\uparrow \right) - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \cos \vartheta \underline{B}_\uparrow = 0. \end{aligned} \quad (143)$$

Как и прежде, мы пренебрегаем  $\bar{E}_l$  и предполагаем, что  $\underline{A}_{\uparrow,\downarrow}$  и  $\underline{B}_{\uparrow,\downarrow}$  являются медленными функциями. Тогда получаем следующие соотношения:

$$\underline{A}_{\downarrow} = \frac{J + \mu}{2J} \left[ \bar{\Delta} \underline{B}_{\uparrow} + \left( i\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}(1+2l)}{2x} \cos \vartheta \right) \underline{A}_{\uparrow} \right], \quad (144)$$

$$\underline{B}_{\downarrow} = \frac{J + \mu}{2J} \left[ \left( i\bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \cos \vartheta \right) \underline{B}_{\uparrow} + \bar{\Delta} \underline{A}_{\uparrow} \right], \quad (145)$$

и следующие дифференциальные уравнения первого порядка:

$$2i\partial_x \underline{A}_{\uparrow} = (2l+1)(2l+1-2\cos\vartheta) \frac{\underline{A}_{\uparrow}}{4x^2} + \frac{\bar{\alpha}(2l+1)}{2x} \sin\vartheta \underline{A}_{\uparrow} + \bar{\Delta} \underline{B}_{\downarrow} + i\bar{\alpha} \underline{A}_{\downarrow}, \quad (146)$$

$$2i\partial_x \underline{B}_{\uparrow} = (2l-1)(2l-1+2\cos\vartheta) \frac{\underline{B}_{\uparrow}}{4x^2} + \frac{\bar{\alpha}(1-2l)}{2x} \sin\vartheta \underline{B}_{\uparrow} + \bar{\Delta} \underline{A}_{\downarrow} + i\bar{\alpha} \underline{B}_{\downarrow}. \quad (147)$$

Решая систему уравнений (144)-(147), находим

$$\underline{A}_{\uparrow} = \frac{2Jb_l}{J + \mu} e^{-S(r)} \left[ 1 + i \frac{(2l+1)(2l+1-2\cos\vartheta)}{8x} \right], \quad (148)$$

$$\underline{B}_{\uparrow} = -(\text{sgn } \alpha) \frac{2Jb_l}{J + \mu} e^{-S(r)} \left[ 1 + i \frac{(2l-1)(2l-1+2\cos\vartheta)}{8x} \right], \quad (149)$$

и

$$\underline{A}_{\downarrow} = -(\text{sgn } \alpha) b_l e^{-S(r)} \left[ \left( 1 + i \frac{(2l-1)(2l-1+2\cos\vartheta)}{8x} \right) \bar{\Delta} - i \left( 1 + i \frac{(2l+1)(2l+1+2\cos\vartheta)}{8x} \right) |\bar{\alpha}| \right], \quad (150)$$

$$\underline{B}_{\downarrow} = b_l e^{-S(r)} \left[ \left( 1 + i \frac{(2l+1)(2l+1-2\cos\vartheta)}{8x} \right) \bar{\Delta} - i \left( 1 + i \frac{(2l-1)(2l-1-2\cos\vartheta)}{8x} \right) |\bar{\alpha}| \right], \quad (151)$$

Принимая во внимание асимптотические выражения для функций Бесселя (уравнения (90) и (104)), мы выбираем константу  $b_l = -(\tilde{c}_l/(\bar{\alpha}\sqrt{2\pi})) \exp(-i\pi/4 - i\pi l/2)$  и затем строим решения как

$$\underline{u}_{\uparrow} \simeq -\frac{2\tilde{c}_l R_J J}{\alpha} e^{-S(r)} \left[ \mathcal{J}_l(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \mathcal{Y}_{l+1}(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \quad (152)$$

$$\underline{v}_{\uparrow} \simeq \frac{2\tilde{c}_l R_J J}{|\alpha|} e^{-S(r)} \left[ \mathcal{J}_l(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \mathcal{Y}_{l-1}(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right] \quad (153)$$

и

$$\underline{u}_{\downarrow} = \tilde{c}_l e^{-S(r)} \left[ \mathcal{J}_{l+1}(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \mathcal{Y}_l(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{\Delta R_J}{|\alpha|} \left( \mathcal{J}_l(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \mathcal{Y}_{l-1}(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right], \quad (154)$$

$$\underline{v}_{\downarrow} = -(\text{sgn } \alpha) \tilde{c}_l e^{-S(r)} \left[ -\mathcal{J}_{l-1}(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \mathcal{Y}_l(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \frac{\Delta R_J}{|\alpha|} \left( \mathcal{J}_l(x) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \mathcal{Y}_{l+1}(x) \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) \right]. \quad (155)$$

Отметим, что при  $x \gtrsim 10$  можно использовать следующие приближённые соотношения:  $\mathcal{Y}_{l\pm 1}(x) \simeq \mp \mathcal{J}_l(x)$  и  $\mathcal{Y}_l(x) \simeq \pm \mathcal{J}_{l\pm 1}(x)$ . Тогда уравнения (152) – (155) упрощаются до уравнений (56).

Подобно случаю без скирмиона, чтобы оценить энергию  $E_l$  состояний с ненулевым  $l$ , мы вычисляем среднее значение повернутого гамильтониана  $\underline{H}^{(l)}$  по волновым функциям (56). Отметим, что мы не используем выражения (152)-(155) с функциями Бесселя второго рода. После утомительных, но прямолинейных вычислений находим

$$\begin{aligned} \langle \Phi_l | \underline{H}^{(l)} | \Phi_l \rangle &\simeq \frac{8\pi l c_{v,l}^2}{m} \left( \frac{R_J J}{\alpha} \right)^2 \int_0^\infty dx e^{-2S(r)} \mathcal{J}_l^2(x) \\ &\times \left[ \frac{1 - \cos \vartheta}{x} + \bar{\alpha} \sin \vartheta - \frac{\Delta (\text{sgn } \alpha) \sin \vartheta}{Jx} - \frac{|\bar{\alpha}| \Delta \cos \vartheta}{J} \right], \end{aligned} \quad (156)$$

где нормировочная константа  $c_{v,l}$  задаётся ур.(132). Используя приведённый выше результат, мы получаем ур. (57) в основном тексте.

## Е Векторный потенциал: точные результаты

В этом Приложении мы приводим общие выражения для вкладов магнитной пленки  $\mathbf{A}^m$  и сверхпроводящего вихря  $\mathbf{A}^v$  в вектор-потенциал. Из них, после некоторых вычислений, получаются приближенные результаты, используемые в основном тексте.

Вектор-потенциал пленки выражается через угол намагниченности  $\theta(r)$  следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^m(r) &= e_\varphi 4\pi M_s \int_0^\infty dq \frac{\mathcal{J}_1(qr) G(q) (1 - e^{-qd_F})}{\tilde{F}(q)}, \\ \tilde{F}(q) &= \frac{(\kappa + q)^2 - (\kappa - q)^2 e^{-2\kappa d_S}}{(\kappa + q) + (\kappa - q) e^{-2\kappa d_S}}, \quad G(q) = \int_0^\infty dr r \mathcal{J}_1(qr) [q + \partial_r \theta(r)] \sin \theta(r), \end{aligned} \quad (157)$$

где  $M_s$  – намагниченность насыщения магнетика,  $\kappa = \sqrt{q^2 + \lambda_L^{-2}}$ , а все остальные величины введены в основном тексте.

Вектор-потенциал одиночного пирловского вихря, как известно, имеет вид [8]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^v(r) &= -e_\varphi \phi_0 \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi} \frac{\mathcal{J}_1(qr)}{F(q)}, \\ F(q) &= \lambda_L^2 \kappa [q + \kappa - (\kappa - q) e^{-\kappa d_S}] [1 - e^{-\kappa d_S}]^{-1}, \end{aligned} \quad (158)$$

где  $\phi_0 = h/2|e|$  – квант магнитного потока, а  $\mathcal{J}_k(x)$  – функция Бесселя.