

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра проблем теоретической физики (теоргруппа Горькова)

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Транспортные свойства топологического джозефсоновского контакта

Автор:

Студент 212 группы
А. М. Табурченко

Научный руководитель:

Ю. Г. Махлин



Москва 2026

Аннотация

В работе исследуется влияние сверхпроводящего тока на майорановские нулевые моды в топологическом джозефсоновском контакте. Он представляет собой гетероструктуру, состоящую из топологического изолятора, на поверхность которого нанесены s -волновые сверхпроводники. Сверхпроводящие области разделены зазором ширины W , который обеспечивает слабую связь ($S - TI - S$ контакт). В присутствии магнитного поля в области контакта появляются джозефсоновские вихри. На каждом из этих вихрей локализован набор андреевских состояний, в том числе майорановская нулевая мода. В работе теоретически исследуется влияние сверхпроводящего тока на волновые функции состояний в вихрях. Также изучается динамика состояний при мгновенном включении тока. Для описания системы используются уравнения Боголюбова–де Жена.

Показано, что при включении сверхпроводящего тока с импульсом куперовских пар K_y вдоль зазора волновые функции состояний сначала деформируются анизотропным образом, а при превышении током значения $\frac{\Delta_0}{v}$ делокализуются. При этом значении K_y щель в объемном спектре закрывается.

Также исследуется эволюция состояний на вихре при мгновенном включении тока. В случае включения тока вдоль зазора показано, что при нулевом химическом потенциале, обеспечивающем киральную симметрию, майорановская нулевая мода покидает ядро вихря как локализованный волновой пакет. Ненулевые состояния вылетают из вихря в виде двух волновых пакетов, распространяющихся в противоположных направлениях перпендикулярно контакту. При конечном химическом потенциале майорановское состояние может распасться на несколько волновых пакетов, летящих в противоположных направлениях. В работе аналитически рассмотрены случаи малого и большого химического потенциала, для которых количество, а также свойства вылетающих волновых пакетов определяются химическим потенциалом и сверхпроводящим током.

Рассмотрено также влияние поперечного тока, текущего через контакт, на майорановские состояния. Полученные эффекты качественно аналогичны случаю продольного тока. Пороговое значение тока для делокализации в этом случае может быть значительно меньше.

Полученные результаты открывают возможность экспериментально наблюдать майорановские нулевые моды, а также изучать их необычные физические свойства. Кроме этого, появляется возможность управления майорановскими модами при помощи сверхпроводящего тока, что может быть использовано при создании топологических квантовых устройств.

Содержание

1	Введение	4
2	Влияние сверхпроводящего тока на состояния	5
2.1	Нулевой ток	6
2.2	Конечный продольный ток	11
2.3	Влияние поперечного тока на волновые функции майорановских состояний	15
3	Динамика состояний при включении тока в квазиклассическом приближении	18
3.1	Движение поперек зазора при нулевом химическом потенциале	18
3.2	Конечный химический потенциал	23
3.2.1	Малый химический потенциал	23
3.2.2	Большой химический потенциал	26
3.3	Движение частицы вдоль контакта	29
4	Результаты и обсуждение	31

1 Введение

Майорановские нулевые моды – квазичастицы, которые совпадают со своими античастицами, – обладают рядом нетривиальных физических свойств. Они характеризуются нулевыми значениями энергии, заряда, спина и массы. Однако эти моды обладают определенной киральностью, знак которой задается направлением магнитного поля в ядре вихря. Майорановские моды подчиняются неабелевой статистике [1]. По этой причине данные состояния рассматриваются в качестве кандидатов для топологически защищённых квантовых вычислений, поскольку информация, закодированная в них, устойчива к возмущениям со стороны внешней среды.

Одной из систем, в которых могут появиться майорановские нулевые моды, является гетероструктура, состоящая из топологического изолятора, на поверхность которого нанесен s -волновой сверхпроводник [2]. За счет эффекта близости на поверхности топологического изолятора индуцируется сверхпроводимость. В присутствии магнитного поля, приложенного перпендикулярно плоскости структуры, образуются вихри Абрикосова, на каждом из которых есть набор дискретных состояний Кароли–де Жена–Матрикона [3]. На вихрях в топологическом сверхпроводнике имеется нулевое состояние, также как и в p -волновом сверхпроводнике [4], являющееся собственным для оператора зарядового сопряжения.

Остается открытым вопрос, как можно контролируемо влиять на майорановские состояния внешними полями. В работах [5, 6] изучались абрикосовские вихри в объеме сверхпроводника при нулевом химическом потенциале. Было показано, что при приложении сверхпроводящего тока с импульсом куперовских пар K волновые функции нулевых мод изменялись, приобретая дополнительный множитель e^{Ky} . Вследствие наличия этого множителя состояния сначала деформировались анизотропным образом, а при превышении импульсом куперовских пар порогового значения $\frac{\Delta_0}{v}$ делокализовались, формируя майорановский уровень Ландау. Кроме того, мгновенное включение тока приводило к высвобождению нулевой моды из вихря в виде локализованного волнового пакета.

В настоящей работе изучается STIS-контакт в магнитном поле в присутствии сверхпроводящего тока при наличии химического потенциала. Исследуется влияние тока на волновые функции локализованных состояний, а также их динамика при мгновенном включении тока. Показано, что под воздействием постоянного сверхпроводящего тока андреевские состояния сначала деформируются анизотропным образом, а при превышении импульсом куперовских пар K порогового значения делокализуются. При резком включении тока в случае нулевого химического потенциала, для которого реализуется киральная симметрия, майорановская мода покидает контакт как локализованный волновой пакет в направлении, перпендикулярном контакту. При этом направление движения зависит от киральности майорановского состояния. Ненулевые состояния распадаются на два квазичастичных волновых пакета, летящие в противоположных направлениях перпендикулярно контакту. При конечном химическом потенциале майорановское состояние может распасться на несколько квазичастичных волновых пакетов в зависимости от параметров тока и химического потенциала. Аналитически рассмотрены случаи малого и большого химического потенциала. Кроме этого, рассмотрен случай протекания тока через контакт (перпендикулярно зазору). Показано, что делокализация майорановского состояния может происходить при значении тока, значительно меньшем $\frac{\Delta_0}{v}$. Пороговое значение определяется характеристиками джозефсоновского контакта и величиной магнитного поля.

Недавние исследования показывают [7, 8], что создание и изучение STIS-гетероструктуры экспериментально осуществимо. Таким образом, полученные в данной работе результаты, в частности свойства майорановских состояний в присутствии сверхпроводящего тока, могут быть проверены экспериментально.

2 Влияние сверхпроводящего тока на состояния

В разделе 2 приведена общая информация о STIS гетероструктуре, описан формализм в стационарном случае. В разделах 2.1 и 2.2 приведен вывод спектра и волновых функций локализованных состояний в двух предельных случаях. В первом рассмотрен режим в отсутствие сверхпроводящего тока при конечном химическом потенциале μ . Во втором - нулевой химический потенциал при учете сверхпроводящего тока, текущего вдоль зазора с импульсом куперовских пар K_y . Получим, что при приложении тока состояния в контакте сначала деформируются, а при $K_y > \frac{\Delta_0}{v}$ - делокализуются. В разделе 2.3 рассмотрено влияние поперечного тока K_x , который получается изменением фазы одного из сверхпроводников, на продольные волновые функции майорановских состояний. При этом наблюдаются похожие эффекты, что и для продольного тока.

STIS контакт - гетероструктура, состоящая из двух сверхпроводников s -типа, которые нанесены на поверхность топологического изолятора. Он отличается от обычного изолятора

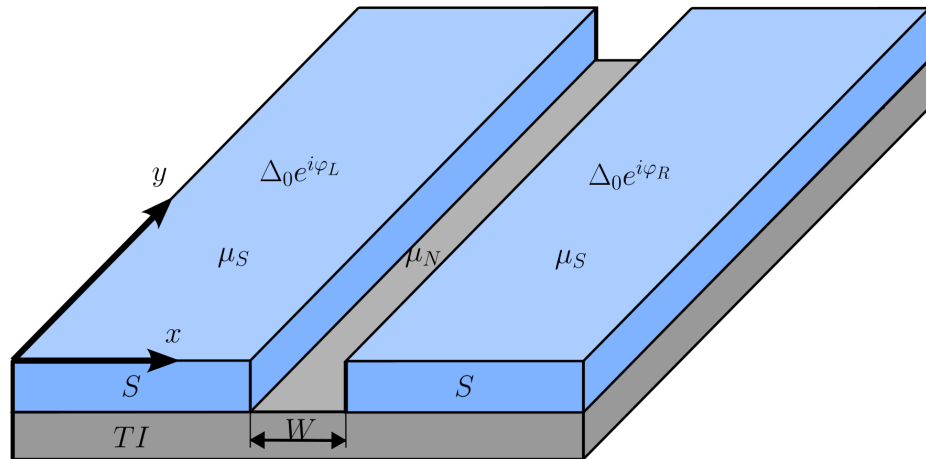


Рис. 1: Схема прямоугольной STIS гетероструктуры. Серым цветом обозначен топологический изолятор, синим - сверхпроводники.

наличием поверхностных состояний. В экспериментах используются такие топологические изоляторы как $(Bi,Sb)_2Te_3$ [7], $HgTe$ [8], а в качестве сверхпроводника используется ниобий Nb . В силу эффекта близости на поверхности топологического изолятора индуцируется сверхпроводимость. При включении магнитного поля, перпендикулярного плоскости структуры, в области контакта появляются джозефсоновские вихри. Согласно результатам Фу и Кейна [2] андреевские состояния локализуются вблизи точек, где локальная разность фаз между сверхпроводниками равна $\pi \bmod 2\pi$ (далее будем опускать $\bmod 2\pi$). Эти точки являются центрами джозефсоновских вихрей. Интерес представляет спектр, а также волновые функции андреевских состояний.

Постановка задачи

Состояния на поверхности гетероструктуры описываются гамильтонианом Боголюбова–де Жена $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Psi^\dagger H \Psi$ во вторичном квантовании, где $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\uparrow & \psi_\downarrow & \psi_\downarrow^\dagger & -\psi_\uparrow^\dagger \end{pmatrix}$. Одночастичный гамильтониан

$$H = v\tau_z \left(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} \tau_z \right) - \tau_z \mu(\mathbf{r}) + |\Delta(\mathbf{r})| (\tau_x \cos \varphi(\mathbf{r}) - \tau_y \sin \varphi(\mathbf{r})), \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ вектор матриц Паули в спиновом пространстве, τ_i матрицы Паули в пространстве Намбу, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ векторный потенциал, μ химический потенциал, $|\Delta(\mathbf{r})|$ модуль и $\varphi(\mathbf{r})$ фаза локального параметра порядка, заряд электрона $-e < 0$. Химический потенциал μ отсчитывается от дираковской точки. При помощи внешних затворов можно отдельно регулировать химический потенциал в области топологического изолятора и сверхпроводника. Гамильтониан (2.1) задан относительно уровня электрохимического потенциала μ_{el} .

Свойства решений определяются симметриями гамильтониана, о которых сейчас пойдет речь. В системе есть частично-дырочная симметрия $\hat{\mathcal{C}}_{ph} = \sigma_y \tau_y \mathcal{K}$, которая меняет знак энергии состояний $\hat{\mathcal{C}}_{ph}^{-1} H \hat{\mathcal{C}}_{ph} = -H$ и $\hat{\mathcal{C}}_{ph}^2 = 1$, где $\mathcal{K}$ оператор комплексного сопряжения в стандартном базисе. Нам будет интересен случай нулевого химического потенциала, в котором имеет место симметрия обращения времени $\mathcal{T} = \sigma_x \tau_x \mathcal{K}$, которая коммутирует с гамильтонианом $\mathcal{T}^{-1} H \mathcal{T} = H$ и $\mathcal{T}^2 = 1$. При наличии частично-дырочной симметрии и симметрии обращения времени имеет место также киральная симметрия $\Theta = \sigma_z \tau_z$, антикоммутирующая с гамильтонианом $\Theta^{-1} H \Theta = -H$ и $\Theta^2 = 1$.

В силу наличия в системе частично дырочной симметрии собственные состояния разбиваются на пары с противоположными энергиями $|\psi_E\rangle$ и $|\psi_{-E}\rangle = \hat{\mathcal{C}}_{ph} |\psi_E\rangle$. На языке операторов $\psi, \psi^\dagger$ состоянию $|\psi_E\rangle$ соответствует рождение квазичастицы с энергией E . Состоянию же $|\psi_{-E}\rangle = \hat{\mathcal{C}}_{ph} |\psi_E\rangle$ соответствует рождению квазичастицы с энергией $-E$ или же уничтожение квазичастицы с энергией E . Двойной учет является следствием удвоения переменных при переходе к пространству Намбу. Помимо пар решений $|\psi_E\rangle$ и $|\psi_{-E}\rangle = \hat{\mathcal{C}}_{ph} |\psi_E\rangle$, есть также состояния собственные для оператора частично-дырочной симметрии $\hat{\mathcal{C}}_{ph} |\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle$. Эти состояния называются майорановскими нулевыми модами. Майорановские состояния несут нулевую энергию, спин, заряд, а также массу, тем не менее они могут иметь определенную киральность - знак локального магнитного поля.

2.1 Нулевой ток

Найдем вид дискретных состояний в отсутствие сверхпроводящего тока K_y при наличии химического потенциала μ . Для этого сначала решим задачу при однородной разности фаз, равной значению в центре вихря. Затем учтем зависимость фаз, вызванную магнитным полем, при помощи теории возмущений.

Рассмотрим случай прямоугольного контакта (рис. 1), в котором модуль параметра порядка, фаза, а также химический потенциал считаются ступенчатыми функциями $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 e^{i\varphi_L} \theta(x < -\frac{W}{2}) + \Delta_0 e^{i\varphi_R} \theta(x > \frac{W}{2})$, где W толщина зазора, φ_L, φ_R фазы на левом и правом сверхпроводниках соответственно. Химический потенциал μ примем равным μ_S в сверхпроводящей области и μ_N в области топологического изолятора. Будем иметь ввиду короткий контакт $W \lesssim \xi^1$, где $\xi = \frac{v}{\Delta_0}$ длина когерентности. Введем систему координат в плоскости так, чтобы ось x была направлена перпендикулярно зазору, а ось y вдоль зазора. Назовем направление x поперечным, а y - продольным.

В отличие от вихрей в объемной части сверхпроводника, в случае джозефсоновского контакта есть явная анизотропия направлений вдоль и поперек зазора. В слабом магнитном поле, а именно в таком пределе мы будем работать, движение вдоль контакта можно учесть

¹Это нужно для того, чтобы не рассматривать высоколежащие андреевские состояния, энергию которых для длинного контакта $W \gg \xi$ можно оценить как $E \sim \Delta_0 \frac{\xi}{W}$.

при помощи вырожденной теории возмущений. Иными словами, можно адиабатически разделить переменные. В этом случае направление, перпендикулярное контакту, будет "быстрым", а вдоль контакта - "медленным". Для получения гамильтониана по "медленному" направлению нужно усреднить возмущение V по двум состояниям поперечной подсистемы, которые мы будем обозначать как $|\psi_{1/2}\rangle$. Состояния $|\psi_{1/2}\rangle$ получаются при нахождении решений невозмущенного гамильтониана (2.1) для однородных фаз сверхпроводников φ_L, φ_R . При наличии магнитного поля фазы сверхпроводников начинают зависеть от координаты, что мы и хотим учесть при помощи теории возмущений. Под невозмущенным гамильтонианом H_0 и возмущением V понимаются

$$H_0 = v\tau_z p_x \sigma_x - \tau_z \mu + |\Delta(\mathbf{r})| \tau_x \cos \varphi(\mathbf{r}), \quad (2.2)$$

$$V = vp_y \sigma_y \tau_z + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \boldsymbol{\sigma} v - |\Delta(\mathbf{r})| \tau_y \sin \varphi(\mathbf{r}). \quad (2.3)$$

Мы будем исследовать только низколежащие андреевские состояния, для которых энергия E много меньше щели Δ_0 . Как следствие, для них фазы сверхпроводников близки к значению в центре вихря, иными словами $|\sin \varphi| \ll 1$.

Решение для однородных фаз сверхпроводников

Получим локализованные состояния для однородного распределения фаз сверхпроводников $\varphi_L = \pi$, $\varphi_R = 0$, соответствующего значению в центре вихря.

Гамильтониан системы имеет вид

$$H = v\tau_z (\sigma_x p_x + \sigma_y p_y) - \tau_z \mu + |\Delta(\mathbf{r})| (\tau_x \cos \varphi(\mathbf{r}) - \tau_y \sin \varphi(\mathbf{r})). \quad (2.4)$$

Для удобства дальнейших вычислений сделаем унитарное преобразование, которое переставляет компоненты биспинора

$$\tilde{H} = U^\dagger H U, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

После преобразования базис имеет вид $(\psi_\uparrow, -\psi_\uparrow^\dagger, \psi_\downarrow, \psi_\downarrow^\dagger)$, который мы будем называть киральным. В дальнейших рассуждениях пометим состояния написанные в киральном базисе индексом ch . Итоговый ответ приведем для стандартного базиса. В киральном базисе гамильтониан представляется в виде

$$H = \begin{pmatrix} -\mu \hat{\rho}_z & \hat{\Xi} \\ \hat{\Xi}^\dagger & -\mu \hat{\rho}_z \end{pmatrix} = v \hat{\rho}_z p_x \hat{f}_x - \hat{\rho}_z \mu \hat{f}_0 + \hat{f}_x |\Delta| (\hat{\rho}_x \cos \varphi - \hat{\rho}_y \sin \varphi) + v \hat{\rho}_0 \hat{f}_y p_y, \quad (2.6)$$

$$\hat{\Xi} = v \begin{pmatrix} p_x - ip_y & \frac{\Delta}{v} \\ \frac{\Delta^*}{v} & -p_x - ip_y \end{pmatrix} = v \hat{\rho}_z p_x + |\Delta| (\hat{\rho}_x \cos \varphi - \hat{\rho}_y \sin \varphi) - iv \hat{\rho}_0 p_y, \quad (2.7)$$

где $\hat{\rho}, \hat{f}$ матрицы Паули в этом базисе. Опустим шляпки в дальнейших рассуждениях. Приведем также явный вид матриц Паули σ, τ после преобразования U (2.5)

$$\begin{aligned} U^\dagger \tau_0 \sigma_x U &= f_x \rho_0, & U^\dagger \tau_0 \sigma_y U &= f_y \rho_z, & U^\dagger \tau_0 \sigma_z U &= f_z \rho_z, \\ U^\dagger \sigma_0 \tau_x U &= f_x \rho_x, & U^\dagger \sigma_0 \tau_y U &= f_x \rho_y, & U^\dagger \sigma_0 \tau_z U &= f_0 \rho_z. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Найдем решение в центре вихря для фиксированных фаз $\varphi_L = \pi$, $\varphi_R = 0$. В этом случае задача стала эффективно одномерной по оси x , ведь все параметры трансляционно инвариантны по y . В нулевом порядке по теории возмущений считаем $p_y = 0$. При таком выборе

фаз $\Xi = \Xi^\dagger$. Как было показано в статье [2], для такого выбора фаз есть два состояния с нулевой энергией. При этом строго нулевая энергия "защищена" киральной симметрией $\Theta_2 = \sigma_x \tau_y = \rho_y$. Иными словами, если состояние $|\psi\rangle$ является собственным для оператора киральной симметрии, то оно может иметь только нулевую энергию. Это проистекает из того, что $E\lambda|\psi\rangle = E\Theta|\psi\rangle = \Theta H|\psi\rangle = -H\Theta|\psi\rangle = -E\lambda|\psi\rangle$, где $\Theta|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, $\Theta^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$. Таким образом нулевая энергия сохраняется при непрерывном изменении профиля $|\Delta(x)|$.

Будем искать состояние $|\psi\rangle$ в виде произведения некоторой постоянной биспинорной части $|h\rangle$, которая является собственной для Θ_2 , и волновой функции $\psi(x)$. При этом только два состояния будут локализованы.

Найдем собственные вектора Θ_2

$$|1_1\rangle = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch}, \quad |1_2\rangle = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}_{ch}, \quad |-1_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch}, \quad |-1_2\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}_{ch}, \quad (2.9)$$

где индекс ch обозначает киральный базис (2.5). Подставляем решение в виде $|\psi\rangle = |h\rangle \psi(x)$ для первой пары получаем:

$$0 = H|1_{1/2}\rangle \psi(x) = \begin{pmatrix} -\hat{\rho}_z \mu & \Xi \\ \Xi & -\hat{\rho}_z \mu \end{pmatrix} |1_{1/2}\rangle \psi(x) = (\mu \mp (vp_x + i\Delta)) |-1_{1/2}\rangle \psi(x), \quad (2.10)$$

где было использовано, что собственные состояния для оператора киральной симметрии Θ могут иметь только нулевую энергию. После решения уравнения (2.10) волновые функции имеют вид

$$\psi(x) = \exp\left(\int_0^x \frac{\pm i\mu(x') + \Delta(x')}{v} dx'\right). \quad (2.11)$$

При нашем выборе фаз $Re\Delta > 0$ при $x \rightarrow +\infty$, поэтому эта пара состояний не локализована. Рассмотрим вторую пару $|-1_{1/2}\rangle$

$$|\psi_{1/2}\rangle_{ch} = (i \quad 1 \quad \pm i \quad \pm 1)_{ch}^T \psi_{1/2}(x), \quad (2.12)$$

$$0 = H|\psi_{1/2}\rangle_{ch} = (\pm i\Delta \mp p_x + \mu)_{ch} \psi_{1/2}(x) (-i \quad 1 \quad \mp i \quad \pm 1)_{ch}^T, \quad (2.13)$$

$$[\mp i\mu + (ivp_x + \Delta)] \psi_{1/2} = 0 \Rightarrow \psi_{1/2}(x) = \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') \mp i\mu(x')}{v} dx'\right). \quad (2.14)$$

Эта пара состояний является локализованной, затухает экспоненциально вглубь образца. Обозначим их за $|\psi_{1/2}\rangle$. Они имеют смысл базиса в подсистеме перпендикулярной контакту

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle_{ch} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch} \psi_1(x) = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') - i\mu(x')}{v} dx'\right) \\ |\psi_2\rangle_{ch} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}_{ch} \psi_2(x) = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}_{ch} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') + i\mu(x')}{v} dx'\right), \end{aligned} \quad (2.15)$$

где индекс ch обозначает киральный базис, а N нормировку состояний. Других состояний на нулевой энергии нет. Сделаем обратное унитарное преобразование $U^\dagger$, чтобы вернуться к исходному базису

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') - i\mu(x')}{v} dx'\right), \quad |\psi_2\rangle = \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') + i\mu(x')}{v} dx'\right). \quad (2.16)$$

Получили базис низколежащих андреевских состояний в поперечном направлении относительно зазора контакта. Будем называть их поперечными состояниями. Этот результат совпадает например с [9].

Учет неоднородности фаз, обусловленной магнитным полем

Рассмотрим слабое магнитное поле, которое направлено перпендикулярно плоскости структуры. В этом случае фазы сверхпроводников φ_R, φ_L начинают зависеть от координаты y вдоль зазора.

Выберем калибровку вектор-потенциала по оси y

$$A_y(x) = H \begin{cases} x, & |x| < \frac{W}{2}, \\ \lambda_L + \frac{W}{2} - \lambda_L e^{-\frac{x-W/2}{\lambda_L}}, & x > \frac{W}{2}, \\ -A_y(-x), & x < 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

где предполагается лондоновский предел, а λ_L соответствующая глубина проникновения. Уравнение на локальную разность фаз вдоль контакта:

$$\frac{d(\varphi_R - \varphi_L)}{dy} = (2\lambda_L + W)H \frac{2\pi}{\Phi_0} := \gamma, \quad (2.18)$$

где γ имеет смысл обратной длины изменения фазы. В контакте будет набор точек, в которых $\varphi_R - \varphi_L = \pi \bmod 2\pi$. Рассмотрим для определенности точку $\varphi_R - \varphi_L = -\pi$. Удобно ввести отличие разности фаз от π : $\delta\varphi = \varphi_R - \varphi_L + \pi$. Тогда поведение фазы возле одной из точек:

$$\delta\varphi = \gamma(y - y_0). \quad (2.19)$$

Положим также для определенности $y_0 = 0$. В задаче предполагается главный малый параметр - характерная длина изменения фазы l_H много больше длины когерентности ξ , то есть $l_H \sim \frac{1}{\gamma} \gg \xi = \frac{v}{\Delta_0}$.

Найдем теперь поправку к гамильтониану вызванную магнитным полем. Для этого усредним возмущение V (2.3) по состояниям $|\psi_{1/2}\rangle$

$$V = vp_y \rho_0 f_y - |\Delta| \rho_y f_x \sin \varphi + v \frac{e}{c} A_y \rho_z f_y. \quad (2.20)$$

Получаем для каждой компоненты:

$$\begin{aligned} \langle \psi_{1/2} | |\Delta| \rho_y f_x \sin \varphi | \psi_{1/2} \rangle &= \int \psi_1^* |\Delta| \sin \varphi \psi_1 = \\ &= \frac{\Delta_0}{2} (\sin \varphi_L + \sin \varphi_R) \approx \Delta_0 \frac{\delta\varphi}{2} = \gamma y \frac{\Delta_0}{2} =: \alpha y, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\langle \psi_{1/2} | vp_y \rho_0 f_y | \psi_{2/1} \rangle = \pm i p_y v \int \psi_1^* \psi_2 dx := \pm i p_y \tilde{v}, \quad (2.22)$$

где α имеет смысл константы энергии, а $\tilde{v}$ перенормированная скорость. Остальные матричные элементы нулевые. Хотя в выражении (2.21) входит сумма синусов φ_L, φ_R , ответ все равно зависит от локальной разности фаз $\delta\varphi \ll 1$. Как будет видно далее (2.32), членом с вектор-потенциалом в выражении (2.20) можно пренебречь.

Получаем эффективный гамильтониан движения вдоль зазора:

$$H_{eff} = -\tilde{v}\tau_y p_y + \alpha y \tau_z, \quad \alpha = \gamma \frac{\Delta_0}{2}, \quad \tilde{v} = v \int \psi_1^* \psi_2 dx, \quad (2.23)$$

где τ матрицы Паули в базисе $|\psi_{1/2}\rangle$. Сделаем унитарное преобразование

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

После которого гамильтониан принимает вид

$$U^\dagger H_{eff} U = -\tilde{v}\tilde{\tau}_y p_y + \alpha y \tilde{\tau}_x. \quad (2.25)$$

Найдем состояния дискретного спектра:

$$U^\dagger H_{eff} U \psi = E \psi \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{v}h' + \alpha y h = E g \\ -\tilde{v}g' + \alpha y g = E h \end{cases}, \quad \psi = \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}^T. \quad (2.26)$$

Сведем систему к уравнению второго порядка:

$$-\tilde{v}^2 h'' + \alpha^2 y^2 h - \tilde{v} \alpha h = E^2 h, \quad (2.27)$$

которое представляет собой уравнение гармонического осциллятора. Введем частоту осциллятора ω_H , из которой можно получить спектр системы E , а также характерную длину волновой функции λ_H :

$$\omega_H = 2|\alpha|\tilde{v}, \quad E = \pm \sqrt{n\omega_H}, \quad \lambda_H^2 = \frac{\tilde{v}}{|\alpha|}. \quad (2.28)$$

Приведем также в явной форме:

$$\omega_H = \tilde{v}\Delta_0 \frac{2\pi H(2\lambda_L + W)}{\Phi_0}, \quad \lambda_H^2 = \frac{\tilde{v}}{v} \frac{\xi \Phi_0}{\pi H(2\lambda_L + W)}. \quad (2.29)$$

Получим связь размеров ξ, λ_H, l_H :

$$\lambda_H^2 = \frac{\tilde{v}}{|\alpha|} \sim \frac{v}{\Delta_0} \frac{1}{\gamma} \sim \xi l_H, \quad (2.30)$$

где λ_H характерный размер волновой функции вдоль контакта, l_H - характерная длина изменения фазы, а ξ длина когерентности, то есть размер волновой функции перпендикулярно контакту. Длина λ_H зависит от магнитного поля. Для использования теории возмущений мы требуем $\xi \ll \lambda_H$. Это условие дает малость магнитного поля:

$$\frac{\lambda_H}{\xi} \gg 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\tilde{v}\Phi_0}{v\pi H\xi(2\lambda_L + W)}} \gg 1 \quad (2.31)$$

Требование малости энергий андреевского спектра $E \ll \Delta_0$ приводит к такому же выражению.

Поясним, почему в выражении (2.20) членом с вектор-потенциалом можно пренебречь

$$v \frac{e}{c} A_y = v \frac{e}{c} H(2\lambda_L + W) = \Delta_0 \cdot \gamma \xi \ll \Delta_0 \cdot \gamma \lambda_H \sim |\Delta| \sin \varphi, \quad (2.32)$$

где в последнем выражении под φ понимается значение фазы на длине волновой функции вдоль контакта λ_H , то есть $\gamma \lambda_H$. Таким образом, член с вектор-потенциалом мал, по сравнению с $|\Delta| \sin \varphi$, поэтому им можно пренебречь.

Возвращаемся к системе (2.26). Введем оператор уничтожения для осциллятора

$$\hat{a} = \frac{\lambda_H^{-1} y + i p_y \lambda_H}{\sqrt{2}}. \quad (2.33)$$

Через этот оператор можно выразить вторую компоненту $g(y)$ из системы (2.26):

$$g = \frac{1}{\pm \sqrt{n\omega_H}} (\alpha y + i \tilde{v} p_y) h = \pm \begin{cases} \frac{\hat{a}}{\sqrt{n}} h, & \alpha > 0, \\ -\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}} h, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

где $\pm$ обозначает знак энергии E состояния. Рассмотрим случай $\alpha > 0$, то есть случай положительного магнитного поля $H > 0$. В этом режиме компоненты g, h имеют вид

$$h = \Psi_{osc,n}, \Rightarrow g = \pm \Psi_{osc,n-1}, \quad (2.35)$$

$$\Psi_{osc,n}(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_H}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_H^2}\right) H_n\left(\frac{y}{\lambda_H}\right). \quad (2.36)$$

Напишем теперь выражения для дискретного спектра изначальном базисе, используя $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.16):

$$|\psi_{disc,\pm n}\rangle = |\psi_1\rangle (-\Psi_{osc,n}(y) \pm \Psi_{osc,n-1}(y)) + |\psi_2\rangle (\Psi_{osc,n}(y) \pm \Psi_{osc,n-1}(y)), \quad (2.37)$$

где “ $\pm n$ ” означает состояния с энергией $\pm \sqrt{n\omega_H}$. При $n = 0$ мы получаем майорановскую нулевую моду в случае положительного магнитного поля

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \Psi_{osc,0}(y) = \\ &= \left[\frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') - i\mu(x')}{v} dx'\right) + \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') + i\mu(x')}{v} dx'\right) \right] \Psi_{osc,0}(y), \end{aligned} \quad (2.38)$$

где N нормировка волновых функций. Таким образом, при приложении однородного магнитного поля в области контакта появляется цепочка джозефсоновских вихрей, в центре которых локализован дискретный спектр в виде пар $|\psi_{disc,\pm n}\rangle$, в том числе майорановская нулевая мода. Можно заметить, что учет химического потенциала привел лишь к добавлению множителя $\exp(\pm i \int \frac{\mu}{v} dx)$ к волновым функциям, а также перенормировке эффективной скорости $\tilde{v}$ (2.23).

2.2 Конечный продольный ток

Учтем в данном разделе влияние сверхпроводящего тока с импульсом куперовских пар K_y на локализованные на вихрях состояния при нулевом химическом потенциале. Аналогично разделу 2.1 приведем сначала вычисления для фиксированных фаз сверхпроводников φ_L, φ_R . Затем учтем неоднородность фаз, вызванную магнитным полем, при помощи теории возмущений. В конце покажем, что при приложении тока состояния сначала деформируются, а при $K_y > \frac{\Delta_0}{v}$ делокализуются. При этом же значении параметров закрывается щель в непрерывном спектре.

Рассмотрим систему, в которой может появиться дополнительный градиент фазы $\Delta \sim e^{2i\mathbf{K}\mathbf{r}}$. Ток через свехпроводник в лондоновском пределе выражается формулой

$$\mathbf{j} = -en_s \mathbf{v} = -\frac{en_s}{m} \left(\nabla \varphi + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) = -\frac{en_s}{m} \left(2\mathbf{K} + \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right). \quad (2.39)$$

Приведем два случая:

- Пусть ток через сверхпроводник в отсутствие магнитного поля. В результате появится нужным нам градиент фазы K .
- Замкнем гетероструктуру в сверхпроводящий контур и приложим магнитное поле через него. В этом случае K_y будет зависеть от магнитного потока, проходящего через сверхпроводящий контур.

В дальнейших рассуждениях для простоты будем предполагать первый режим и писать "ток K ", то есть опускать слова "импульс куперовских пар", подразумевая при этом импульс куперовских пар K , который создает данный ток.

Зависимость параметра порядка при учете тока $\Delta \sim e^{2i\mathbf{K}\mathbf{r}}$ можно убрать при помощи унитарного преобразования

$$U_K = e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}\tau_z} \sigma_0. \quad (2.40)$$

Найдем гамильтониан после преобразования

$$\tilde{H} = U_K^\dagger H U_K = v\hat{\tau}_z (\hat{\sigma} \cdot \mathbf{p}) + v \left(\mathbf{K} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \boldsymbol{\sigma} \hat{\tau}_0 + |\Delta| (\hat{\tau}_x \cos \varphi - \hat{\tau}_y \sin \varphi). \quad (2.41)$$

Откуда видно, что весь вклад тока входит как добавка $v\mathbf{K}\boldsymbol{\sigma}\tau_0$ к изначальному гамильтониану. Пренебрежем членом, содержащим вектор потенциал, в силу его малости (2.32). Сделаем унитарное преобразование (2.5), которое приведет гамильтониан к киральной форме

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\Xi} \\ \hat{\Xi}^\dagger & 0 \end{pmatrix} = v\hat{\rho}_z(p_x\hat{f}_x + K_y\hat{f}_y) + |\Delta| (\hat{\rho}_x \cos \varphi - \hat{\rho}_y \sin \varphi) \hat{f}_x + v\hat{\rho}_0(K_x\hat{f}_x + \hat{f}_y p_y), \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Xi} &= v \begin{pmatrix} p_x - ip_y + K_x - iK_y & \frac{\Delta}{v} \\ \frac{\Delta^*}{v} & -p_x - ip_y + K_x + iK_y \end{pmatrix} = \\ &= v\hat{\rho}_z(p_x - iK_y) + |\Delta| (\hat{\rho}_x \cos \varphi - \hat{\rho}_y \sin \varphi) - iv\hat{\rho}_0(iK_x + p_y), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $\hat{\rho}, \hat{f}$ матрицы Паули в этом базисе (2.8). Опустим шляпки в дальнейших рассуждениях. Мы будем рассматривать только ток вдоль контакта K_y , то есть считать $K_x = 0$.

Дальнейшие рассуждения похожи на раздел 2.1. Сначала решаем задачу при фиксированных фазах $\varphi_R = 0, \varphi_L = \pi$, после чего учитываем вклад магнитного поля по теории возмущений.

Решение для однородных фаз сверхпроводников

Получим локализованные состояния для однородного распределения фаз сверхпроводников $\varphi_L = \pi, \varphi_R = 0$

Для гамильтониана в киральном базисе (2.42) явно прослеживается киральная симметрия $\Theta = f_z = \sigma_z \tau_z$. В киральном базисе она имеет вид $\Theta = f_z = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$. Как следствие, у состояний собственных для Θ отличны от нуля либо первые две компоненты (собственное число $\mathcal{C} = 1$), либо вторые две ($\mathcal{C} = -1$). Рассмотрим случай, когда ненулевыми являются вторые две компоненты. Тогда состояние будет собственным для оператора Ξ с нулевым собственным значением (так как энергия нулевая в силу киральности). Уравнение на состояние $|\psi_1\rangle$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\psi_1\rangle_{ch} = 0, \quad (2.44)$$

где

$$\Xi = v \begin{pmatrix} p_x - iK_y & \frac{\Delta}{v} \\ \frac{\Delta^*}{v} & -p_x + iK_y \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

Подставляем Ξ

$$\begin{pmatrix} 0 & \Xi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} |\psi_1\rangle_{ch} = \hat{f}_+ [v\hat{\rho}_z(p_x - iK_y) + \hat{\rho}_x\Delta] |\psi_1\rangle_{ch} = 0. \quad (2.46)$$

Так как Ξ содержит только ρ_z, ρ_x , то ищем состояние собственное для ρ_y

$$|\psi_1\rangle_{ch} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mp i & 1 \end{pmatrix}_{ch}^T \psi_1(x), \quad (2.47)$$

В этом случае компоненты не будут перемешиваться. Подставляем в (2.46) и получаем уравнение первого порядка:

$$\pm v(p_x - iK_y)\psi_1(x) + i\Delta\psi_1(x) = 0 \Rightarrow \psi_1(x) = \exp\left(\pm \int_0^x \frac{\Delta(x') - vK_y}{v} dx'\right). \quad (2.48)$$

Отбрасываем растущее решение. Волновая функция принимает вид

$$\psi_1(x) = \exp\left(- \int_0^x \frac{\Delta(x') - vK_y}{v} dx'\right). \quad (2.49)$$

Аналогично вычисляем волновую функцию второго состояния $|\psi_2\rangle$. Тогда два состояния в поперечной подсистеме имеют вид

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle_{ch} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch} \quad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}N_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch} \exp\left(- \int_0^x \frac{\Delta(x') - vK_y}{v} dx'\right), \\ |\psi_2\rangle_{ch} &= \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{ch} \quad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}N_2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{ch} \exp\left(- \int_0^x \frac{\Delta(x') + vK_y}{v} dx'\right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

где индекс ch обозначает киральный базис (2.5).

Учет неоднородности фаз, обусловленной магнитным полем

В присутствии магнитного поля фазы сверхпроводников начинают зависеть от координаты вдоль зазора (2.18). Найдем поправку к гамильтониану обусловленную этой неоднородностью. Для этого усредним возмущение V (2.3) по состояниям поперечной подсистемы $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.50):

$$H = H_0 + V, \quad V = v p_y \rho_0 f_y - |\Delta| \rho_y f_x \sin \varphi, \quad (2.51)$$

где мы отбросили член с вектор-потенциалом в силу малости (2.32). Находим матричные элементы по поперечным состояниям. В рассматриваемом случае будут только недиагональные компоненты:

$$\langle \psi_{1/2} | v p_y \rho_0 f_y | \psi_{2/1} \rangle = \pm i p_y v \int \psi_1^* \psi_2 dx := \pm i p_y \tilde{v}, \quad (2.52)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi_{1/2} | |\Delta| \rho_y f_x \sin \varphi | \psi_{2/1} \rangle &= \sin \varphi_R \int_{x>0} dx |\Delta| \psi_1^* \psi_2 + \sin \varphi_L \int_{x<0} dx |\Delta| \psi_1^* \psi_2 \approx \\ &\approx \Delta_0 \frac{\delta \varphi}{2} \int \psi_1^* \psi_2 dx := \Delta_0 \tilde{\alpha} y, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $\tilde{\alpha} = \Delta_0 \frac{\gamma}{2} \int \psi_1^* \psi_2 dx = \alpha \int \psi_1^* \psi_2 dx$ перенормированная константа энергии, а $\int \psi_1 \psi_2 dx$ задается выражением

$$\begin{aligned} \int \psi_1^* \psi_2 dx &= \frac{\int dx e^{\left(-\int^x \frac{\Delta(x')-vK_y}{v} dx'\right)} e^{\left(-\int^x \frac{\Delta(x')+vK_y}{v} dx'\right)}}{N_1 N_2} = \\ &= \frac{\int dx e^{\left(-2\int^x \frac{\Delta(x')}{v} dx'\right)}}{\sqrt{\int dx e^{\left(-2\int^x \frac{\Delta(x')-vK_y}{v} dx'\right)}} \sqrt{\int dx e^{\left(-2\int^x \frac{\Delta(x')+vK_y}{v} dx'\right)}}}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

В итоге получаем эффективный гамильтониан по y

$$H_{eff} = -\tilde{v} p_y \hat{f}_y + \tilde{\alpha} y \hat{f}_x, \quad \tilde{\alpha} = \alpha \int \psi_1^* \psi_2 dx, \quad \tilde{v} = v \int \psi_1^* \psi_2 dx. \quad (2.55)$$

Найдем состояния дискретного спектра:

$$H_{eff} \psi = E \psi \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{v} h' + \alpha y h = E g \\ -\tilde{v} g' + \alpha y g = E h \end{cases}, \quad \psi = \begin{pmatrix} g & h \end{pmatrix}^T. \quad (2.56)$$

Сведем систему к уравнению второго порядка:

$$-\tilde{v}^2 h'' + \alpha^2 y^2 h - \tilde{v} \alpha h = E^2 h, \quad (2.57)$$

которое представляет собой уравнение гармонического осциллятора. Введем частоту осциллятора ω_H , из которой получается спектр системы E , а также характерную длину волновой функции λ_H :

$$\omega_H = 2|\alpha|\tilde{v}, \quad E = \pm\sqrt{n\omega_H}, \quad \lambda_H^2 = \frac{\tilde{v}}{|\alpha|}, \quad (2.58)$$

Введем оператор уничтожения для осциллятора

$$\hat{a} = \frac{\lambda_H^{-1} y + i p_y \lambda_H}{\sqrt{2}}. \quad (2.59)$$

Через этот оператор можно выразить вторую компоненту $g(y)$ из системы (2.56):

$$g = \frac{1}{\pm\sqrt{n\omega_H}} (\alpha y + i\tilde{v} p_y) h = \pm \begin{cases} \frac{\hat{a}}{\sqrt{n}} h, & \alpha > 0, \\ -\frac{\hat{a}^\dagger}{\sqrt{n}} h, & \alpha < 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

где $\pm$ обозначает знак энергии E состояния. Рассмотрим случай $\alpha > 0$, то есть случай положительного магнитного поля $H > 0$. В этом режиме компоненты g, h имеют вид

$$h = \Psi_{osc,n}, \quad \Rightarrow g = \pm \Psi_{osc,n-1}, \quad (2.61)$$

$$\Psi_{osc,n}(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_H}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_H^2}\right) H_n\left(\frac{y}{\lambda_H}\right). \quad (2.62)$$

Полные волновые функции дискретных состояний имеют вид

$$|\psi_{disc,n}\rangle = g |\psi_1\rangle + h |\psi_2\rangle, \quad (2.63)$$

$$\begin{aligned} |\psi_{disc,\pm n}\rangle &= \pm \frac{1}{\sqrt{2} N_1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}_{ch} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x')-vK_y}{v} dx'\right) \Psi_{osc,n-1}(y) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2} N_2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{ch} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x')+vK_y}{v} dx'\right) \Psi_{osc,n}(y), \end{aligned} \quad (2.64)$$

где индекс ch обозначает киральный базис. Сделаем обратное унитарное преобразование (2.5), чтобы получить состояния в изначальном базисе

$$\begin{aligned} |\psi_{disc,\pm n}\rangle = & \pm \frac{1}{\sqrt{2}N_1} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') - vK_y}{v} dx'\right) \Psi_{osc,n-1}(y) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}N_2} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') + vK_y}{v} dx'\right) \Psi_{osc,n}(y), \end{aligned} \quad (2.65)$$

где “ $\pm n$ ” обозначает состояния с энергией $\pm\sqrt{n\omega_H}$, $N_{1/2}$ нормировка волновых функций.

Рассмотрим майорановское состояние. В случае нулевого химического потенциала μ , для нулевой моды можно ввести киральность $\mathcal{C} = \pm 1$ - собственное значение оператора $\Theta = \sigma_z \tau_z$, $\Theta |\psi_0\rangle = \mathcal{C} |\psi_0\rangle$, которое совпадает со знаком магнитного поля. Подставим $n = 0$ в уравнение (2.65), чтобы получить майорановскую нулевую моду положительной киральности $\mathcal{C} = 1$. В этом случае первое слагаемое в (2.65) сокращается, и мы получаем

$$|\psi_0\rangle = |\psi_2\rangle \Psi_{osc,0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}N_2} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') + vK_y}{v} dx'\right) \Psi_{osc,0}(y). \quad (2.66)$$

Аналогично майорановское состояние отрицательной киральности $\mathcal{C} = -1$ имеет вид

$$|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \Psi_{osc,0}(y) = \frac{1}{\sqrt{2}N_1} \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x') - vK_y}{v} dx'\right) \Psi_{osc,0}(y). \quad (2.67)$$

У майорановских состояний разных киральностей различается знак тока в показателе экспоненты, а также биспинорная часть. Отметим, что в каждом вихре существует только одно майорановское состояние, киральность которого соответствует знаку магнитного поля.

Таким образом, в присутствии однородного магнитного поля в области контакта появляется цепочка джозефсоновских вихрей, в центре которых локализован дискретный спектр в виде пар $|\psi_{disc,\pm n}\rangle$, в том числе майорановская нулевая мода. При этом учет сверхпроводящего тока K_y привел лишь к добавлению множителя $\exp(\pm K_y x)$ к волновым функциям поперечной подсистемы, а также перенормировке скорости $\tilde{v}$ и константы энергии $\tilde{\alpha}$ (2.55).

Для майорановских состояний в случае $\mu = 0$ учет тока K_y привел к дополнительному множителю $\exp(-\mathcal{C}K_y x)$, где $\mathcal{C} = \pm 1$ киральность $\Theta |\psi_0\rangle = \mathcal{C} |\psi_0\rangle$ майорановского состояния.

Из вида волновых функций локализованных состояний (2.65) мы можем сделать вывод, что при значении K_y меньшем порогового, состояния деформируются. При этом майорановское состояние деформируется анизотропным образом в зависимости от киральности, тогда как ненулевые - в обоих направлениях. При значении тока с импульсом куперовских пар K_y большем порогового значения, которое равно $\frac{\Delta_0}{v}$, волновые функции перестают затухать вглубь сверхпроводника, иными словами, андреевские состояния делокализуются. При этом значении тока K_y щель в непрерывном спектре закрывается, и в объеме появляется состояние с нулевой энергией, происходит топологический фазовый переход.

2.3 Влияние поперечного тока на волновые функции майорановских состояний

Рассмотрим как меняются продольные волновые функции майорановских состояний $\psi_0(y)$ при изменении фаз сверхпроводников. Дополнительная разность фаз на зазоре $\delta\varphi_0$ имеет смысл

градиента $K_x = \frac{\delta\varphi_0}{W}$, который, как показано в разделе 2.2, вызывает сверхпроводящий ток. Покажем, что и в этом случае волновые функции майорановских состояний приобретают деформирующий множитель $e^{\mathcal{C}\frac{W}{2\xi}K_xy}$, где $\mathcal{C}$ - киральность состояния.

В присутствии магнитного поля локальная разность фаз меняется с координатой вдоль зазора по закону

$$\frac{d\delta\varphi}{dy} = \frac{d(\varphi_R - \varphi_L)}{dy} = \gamma(y) = (2\lambda_L + W)H(y)\frac{2\pi}{\Phi_0} \Rightarrow \delta\varphi(y) = \delta\varphi(0) + \int_0^y \gamma(y')dy'. \quad (2.68)$$

Эффективный гамильтониан движения вдоль контакта (2.55):

$$H_{eff} = -vp_y\hat{f}_y + E_x(\delta\varphi(y))\hat{f}_x, \quad (2.69)$$

где $E_x(\delta\varphi) = \Delta_0\frac{\delta\varphi}{2}, \hat{f}$ матрицы Паули в базисе поперечных состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.16). Для гамильтониана (2.69) есть киральная симметрия $\Theta = f_z$. Майорановские состояния, собственные для оператора киральной симметрии, имеют вид:

$$|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \exp\left(\frac{1}{2\xi} \int_0^y \delta\varphi(y')dy'\right), \quad \mathcal{C} = -1, \quad (2.70)$$

$$|\psi_0\rangle = |\psi_2\rangle \exp\left(-\frac{1}{2\xi} \int_0^y \delta\varphi(y')dy'\right), \quad \mathcal{C} = 1, \quad (2.71)$$

где $\xi = \frac{v}{\Delta_0}$, а киральность определяется как $\Theta|\psi_0\rangle = \mathcal{C}|\psi_0\rangle$.

Изменим фазу одного из сверхпроводников на постоянную величину. При этом локальная разность раз изменится на величину $\delta\varphi_0 = const$ и станет $\delta\tilde{\varphi}(y) = \delta\varphi(y) + \delta\varphi_0$. После такого преобразования волновые функции будут иметь вид

$$|\psi_0\rangle = |\psi_1\rangle \exp\left(\frac{1}{2\xi} \int_0^y \delta\varphi(y')dy'\right) \exp\left(\frac{W}{2\xi}K_xy\right), \quad \mathcal{C} = -1, \quad (2.72)$$

$$|\psi_0\rangle = |\psi_2\rangle \exp\left(-\frac{1}{2\xi} \int_0^y \delta\varphi(y')dy'\right) \exp\left(-\frac{W}{2\xi}K_xy\right), \quad \mathcal{C} = 1, \quad (2.73)$$

где $K_x = \frac{\delta\varphi_0}{W}$. Получили, что при изменении фаз сверхпроводников майорановские состояния обретают дополнительный множитель $\exp\left(-\mathcal{C}\frac{W}{2\xi}K_xy\right)$.

Интерпретируем полученный результат. В случае однородного магнитного поля волновая функция майорановского состояния имеет вид гауссовой экспоненты

$$\psi_0(y) = \exp\left(-\frac{y^2}{2\lambda_H^2}\right). \quad (2.74)$$

Если домножить эту волновую функцию на $\exp\left(-\frac{W}{2\xi}K_xy\right)$, то гауссова экспонента сдвинется, но профиль $\psi_0(x)$ останется тем же. В этом смысле волновая функция не меняется при изменении фазы сверхпроводника. С другой стороны, при изменении фазы сверхпроводника вся цепочка джозефсоновских вихрей сдвигается вдоль зазора, что мы и наблюдаем как сдвиг центра гауссовой экспоненты.

Случай локализованного магнитного поля

Рассмотрим режим, в котором магнитное поле локализовано на малом масштабе $d_H \ll \lambda_H$ вдоль зазора. Вне этой области размером d_H магнитное поле равно нулю. В силу малости d_H можно приближенно считать, что магнитное поле имеет профиль дельта функции $H(y) = H_0 d_H \delta(y)$. В этом случае фазы слева и справа будут константами

$\delta\varphi(y < 0) := \delta\varphi_L$, $\delta\varphi(y > 0) := \delta\varphi_R$. Таким образом, волновая функция майорановского состояния имеет вид

$$\psi_0(y) = \theta(y) \exp\left(-\mathcal{C} \frac{\delta\varphi_R y}{2\xi}\right) + \theta(-y) \exp\left(-\mathcal{C} \frac{\delta\varphi_L y}{2\xi}\right). \quad (2.75)$$

Для того, чтобы состояние было локализовано, нужно чтобы фаза меняла знак $\delta\varphi_L < 0$, $\delta\varphi_R > 0$, $\mathcal{C} = 1$. Аналогичное условие для отрицательной киральности $\delta\varphi_L > 0$, $\delta\varphi_R < 0$, $\mathcal{C} = -1$.

При изменении фазы сверхпроводника на величину $\delta\varphi_0$ (то есть включении тока через контакт) состояние может перестать быть локализованным, если после изменения в области магнитного поля величины $\delta\varphi_L, \delta\varphi_R$ будут иметь одинаковый знак. В отличие от случая включения тока вдоль контакта (раздел 2.2), в рассматриваемом режиме может потребоваться значительно меньшее значение тока для делокализации $\frac{\delta\varphi_0}{W} \ll \frac{\Delta_0}{v}$.

3 Динамика состояний при включении тока в квазиклассическом приближении

Рассмотрим режим, в котором сверхпроводящий ток K подается мгновенно. В этом случае локализованные состояния смогут покинуть контакт при достаточно большом значении тока K . При приложении тока K_y вдоль контакта большем порогового значения, равного $\frac{\Delta_0}{2v}$, в случае $\mu = 0$ майорановское состояние покинет контакт как локализованный волновой пакет в направлении перпендикулярном зазору. В то же время ненулевые состояния распадутся на два волновых пакета, летящих в противоположных направлениях перпендикулярно контакту. При конечном химическом потенциале майорановское состояние может распасться на несколько волновых пакетов, летящих в противоположных направлениях, в зависимости от значения тока и химического потенциала. При приложении тока через джозефсоновский контакт K_x , иными словами при резком изменении фаз сверхпроводников, локализованное состояние начнет движение вдоль зазора.

Квазиклассическое рассмотрение позволит нам получить простые аналитические уравнения движения волновых пакетов, вылетающих из контакта. В рамках этого подхода состояния рассматриваются как локализованные волновые пакеты. Данное приближение справедливо, если характерная длина изменения $\Delta(\mathbf{r})$ много больше обратного импульса, который можно считать равным $\frac{1}{\xi} = \frac{\Delta_0}{v}$.

В разделе 2 мы считали параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ ступенчатой функцией координаты x . Рассмотрим теперь систему, в которой параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ плавно меняется на длине l_Δ , а модуль выходит на константу Δ_0 при отдалении от контакта. В этом случае критерий применимости квазиклассического приближения $l_\Delta \gg \xi$.

Требование плавности параметра порядка $\Delta(\mathbf{r})$ не выполняется для реальных систем, в которых параметр порядка изменяется на длине ξ . Тем не менее мы предполагаем, что динамика в данном случае качественно подобна квазиклассическому режиму, эволюция в котором описывается достаточно просто.

Исследуем динамику состояний, которые были локализованы в центре джозефсоновского вихря, при мгновенном включении тока K_y . Как было показано в разделе 2, характерный размер состояний вдоль зазора λ_H много меньше характерного размера изменения фазы $l_H \sim \lambda_H \frac{\lambda_H}{\xi} \gg \lambda_H$. Мы интересуемся динамикой состояний в главном порядке, поэтому пренебрежем отличием фазы сверхпроводников от значения в центре вихря, то есть положим $\varphi_L = \pi, \varphi_R = 0$. В результате $\Delta(\mathbf{r})$ станет действительным. По этой же причине мы опускаем динамику по оси y в разделах 3.1, 3.2. В данном приближении гамильтониан $H(2.1)$ обладает киральной симметрией $\Theta_2 = \sigma_x \tau_y$, $H\Theta_2 + \Theta_2 H = -2(|\Delta| \sin \varphi + p_y)$. Θ_2 не является точной симметрией гамильтониана, но в силу малости импульса p_y для локализованных состояний, а также малости $\sin \varphi$ на масштабе волновой функции λ_H , мы можем использовать эту симметрию. В силу замечаний выше, параметр порядка $\Delta(\mathbf{r})$ в интересующей нас области будет зависеть только от координаты x : $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(x)$.

В разделе 3.1 рассмотрим выход состояний из контакта при включении тока вдоль контакта для нулевого химического потенциала при наличии киральной симметрии Θ . В этом случае динамика сводится к движению частицы в эффективном потенциале. Отдельно рассмотрим случай нулевой моды. В разделе 3.2 рассмотрим выход нулевой моды из контакта в предельных случаях малого и большого химического потенциала. В разделе 3.3 рассмотрим движение состояния вдоль контакта при резком изменении фаз сверхпроводника (ток через контакт).

3.1 Движение поперек зазора при нулевом химическом потенциале

Квазиклассический спектр

Получим уравнения движения состояний. Для этого найдем энергии и уравнения движения квазиклассического спектра, после чего найдем разложение локализованных состояний по квазиклассическим ветвям при включении продольного тока.

Найдем биспинорные части квазиклассических состояний. Они имеют вид

$$|E_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ iu_1 \\ u_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-E_1\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \\ -iu_1 \\ -u_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |E_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -iu_2 \\ u_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-E_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ iu_2 \\ -u_2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$$u_{1/2} = \frac{vp_x + i(vK_y \pm \Delta)}{\sqrt{v^2p_x^2 + (vK_y \pm \Delta)^2}}, \quad \Delta(x) = \begin{cases} \Delta_0 & x \rightarrow \infty, \\ -\Delta_0 & x \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.2)$$

При этом волновая функция состояний $|E_i\rangle$ имеет вид плоской волны $e^{ip_x x}$, а $|u_i| = 1$.

В этом выражении p_x считается числом, а не оператором - импульсом волнового пакета. Здесь и далее считаем $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(x)$ действительной функцией, так как рассмотрение идет вблизи центра вихря $\varphi_L = \pi$, $\varphi_R = 0$. Соответствующие энергии задаются формулами

$$\pm E_1 = \pm v \sqrt{p_x^2 + \left(\frac{\Delta}{v} + K_y\right)^2}, \quad \pm E_2 = \pm v \sqrt{p_x^2 + \left(\frac{\Delta}{v} - K_y\right)^2}. \quad (3.3)$$

Пара состояний $|E_i\rangle, |-E_i\rangle$ не является независимой: решение с отрицательной энергией можно получить действием оператора частично-дырочной симметрии $\hat{\mathcal{C}}_{ph} = \sigma_y \tau_y \mathcal{K}$, например $|\mp E_1\rangle = i\hat{\mathcal{C}}_{ph} |\pm E_1\rangle$. Назовем их сопряженными.

В отсутствие химического потенциала у гамильтониана есть симметрия $\mathcal{S}_2 = \sigma_y \tau_x = \Theta \cdot \Theta_2$, для которой $\mathcal{S}_2^\dagger H \mathcal{S}_2 = H$. Для квазиклассических состояний получаем

$$\mathcal{S}_2 |\pm E_1\rangle = |\pm E_1\rangle, \quad \mathcal{S}_2 |\pm E_2\rangle = -|\pm E_2\rangle. \quad (3.4)$$

Перепишем энергии состояний с учетом этого квантового числа

$$E = s_1 v \sqrt{p_x^2 + \left(\frac{\Delta}{v} + s_2 K_y\right)^2}, \quad \mathcal{S}_2 |E_i\rangle = s_2 |E_i\rangle, \quad (3.5)$$

где $s_1, s_2 = \pm 1$. При значении тока $vK_y = \Delta_0$ в объемном спектре появляется нулевое состояние, то есть щель закрывается.

Траектории квазиклассических состояний задаются системой уравнений [10]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \partial_{\mathbf{p}} E - \dot{\mathbf{p}} \times (\partial_{\mathbf{p}} \times \mathcal{A}) + (\dot{\mathbf{r}} \cdot \partial_{\mathbf{r}}) \mathcal{A} - \partial_{\mathbf{p}} (\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial_{\mathbf{r}} E + \dot{\mathbf{r}} \times (\partial_{\mathbf{r}} \times \mathbf{a}) - (\dot{\mathbf{p}} \cdot \partial_{\mathbf{p}}) \mathbf{a} + \partial_{\mathbf{r}} (\mathcal{A} \cdot \dot{\mathbf{p}}) \end{cases} \quad (3.6)$$

где $\mathbf{r}$ - координата, $\mathbf{p}$ - импульс волнового пакета, $\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \langle u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) | i\partial_{\mathbf{p}} | u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle$, $\mathbf{a}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \langle u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) | i\partial_{\mathbf{r}} | u(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \rangle$ связности Берри. Усреднение берется по биспинорным частям состояний, опуская при этом множитель e^{ipr} плоской волны.

Рассмотрим движение поперек зазора. В случае нулевого химического потенциала μ можно сделать унитарное преобразование $|u\rangle \rightarrow e^{if(\mathbf{r}, \mathbf{p})} |u\rangle$ [6], после которого члены содержащие связности $\mathcal{A}, \mathbf{a}$ сокращаются. В этом случае квазиклассические уравнения упрощаются и для спектра (3.5) имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = s_1 \frac{v^2 p_x}{E}, \\ \dot{p}_x = -s_1 \frac{(\Delta(x) + s_2 K_y v)}{E} \frac{d(\Delta(x) + s_2 K_y v)}{dx}, \end{cases} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{v^2 (\Delta(x) \pm K_y v) \frac{d(\Delta(x) \pm K_y v)}{dx}}{E^2}, \quad (3.7)$$

где знак “ $\pm$ ” означает выбор ветви, “+” для $|E_1\rangle$ и “-” для $|E_2\rangle$. При этом уравнения движения $x(t)$ для состояний $|E_i\rangle$ и $|-E_i\rangle$ совпадают для фиксированного i . По этой причине в дальнейших рассуждениях будем рассматривать движение волновых пакетов положительной энергии $|E_i\rangle$, $i = 1, 2$.

Энергия E является константой. Найдём ее значение в начальный момент времени:

$$E = E(p_x = 0, x = 0) = \pm v |K_y| \quad (3.8)$$

Перепишем уравнение движения, вводя эффективный потенциал $U_{eff}(x)$:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial x}. \quad (3.9)$$

$$U_{eff}(x) = \frac{v^2 (\Delta(x) \pm K_y v)^2}{2E^2} = \frac{(\Delta(x) \pm K_y v)^2}{2K_y^2} = \frac{(\Delta(x) + s_2 K_y v)^2}{2K_y^2}, \quad (3.10)$$

где в последнем равенстве мы восстановили знак s_2 . Таким образом, при нулевом химическом потенциале ($\mu = 0$) уравнения динамики сводятся к уравнению Ньютона движения в эффективном потенциале $U_{eff}(x)$. На рис. 2.1 представлен график эффективного потенциала $U_{eff}(x)$.

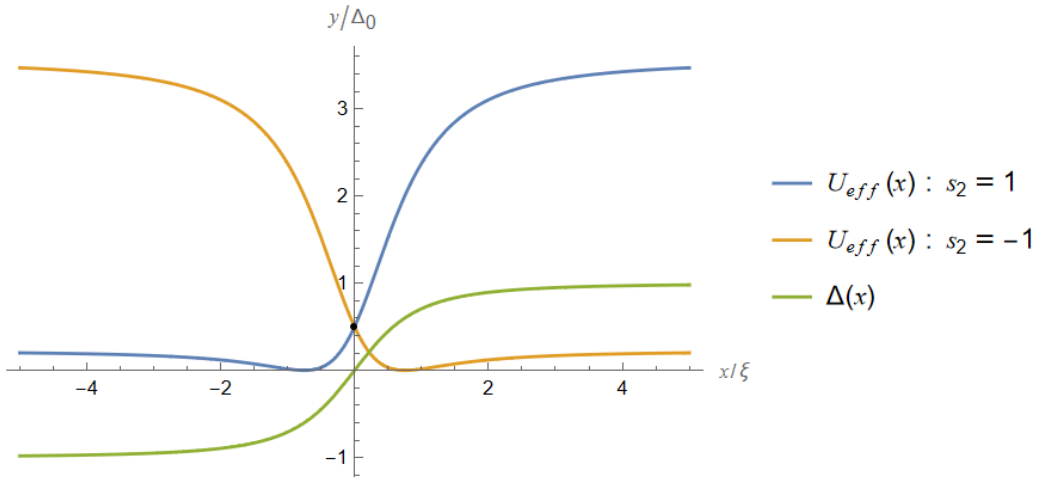


Рис. 2: График эффективного потенциала $U_{eff}(x) = \frac{(\Delta(x) + s_2 v K_y)^2}{2K_y^2}$, $v K_y = 0.6 \Delta_0$ и $\Delta(x)$ для профиля $\Delta(x) = \Delta_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + \xi^2}}$. $s_2 = \pm 1$ соответствует состояниям $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ соответственно.

Черная точка — майорановское состояние в начальный момент.

Отсюда следует, что сопряженные волновые пакеты $|\pm E_1\rangle$ движутся в эффективном потенциале $U_{eff}(x)$ (3.10), отвечающем значению параметра $s_2 = 1$, в то время как состояния $|\pm E_2\rangle$ движутся в потенциале $U_{eff}(x)$ при $s_2 = -1$.

Рассмотрим условие вылета волнового пакета из контакта при нулевой начальной скорости. Для этого необходимо, чтобы значение эффективного потенциала в начале было больше его значения на бесконечности $U_{eff}(0) > U_{eff}(\pm\infty)$

$$U_{eff}(0) = \frac{v^2}{2}, \quad U_{eff}(\infty) = \frac{(\Delta(\pm\infty) \pm K_y v)^2}{2K_y^2}, \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\Delta(\pm\infty)}{v K_y} \pm 1 \right)^2 < 1. \quad (3.12)$$

Так как $\Delta(\pm\infty) = \pm \Delta_0$, то условие вылета $|K_y| > \frac{\Delta_0}{2v}$ одинаково для ветвей $|E_{1/2}\rangle$, однако пакеты вылетают в разные стороны. Найдём скорость, с которой состояние покидает контакт v_{escape} . Воспользуемся законом сохранения квазиэнергии (3.10)

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{(\Delta(x) \pm K_y v)^2}{2K_y^2} = const. \quad (3.13)$$

Для скорости вылета получаем

$$v_{escape} = v \sqrt{\frac{\Delta_0}{v|K_y|} \left(2 - \frac{\Delta_0}{v|K_y|} \right)}. \quad (3.14)$$

Выражение под корнем положительно при значении тока K_y больше порогового $|K_y| > \frac{\Delta_0}{2v}$.

Меняя значение K_y , можно влиять на скорость вылета частицы. При значении тока K_y близком к пороговому, скорость вылета будет малой по сравнению со скоростью Ферми. Для примера, скорость Ферми в топологическом изоляторе Sb_2Te_3 равна $v = 3.8 \cdot 10^5$ м/с [7].

Динамика при включении тока

Рассмотрим ситуацию, в которой сверхпроводящий ток K_y вдоль контакта включается мгновенно. В этом случае система меняется, из-за чего старые стационарные локализованные состояния более не являются стационарными. В квазиклассическом приближении происходит разложение на непрерывный спектр. Состояние начинает двигаться как волновой пакет согласно уравнениям движения. Зададимся вопросом разложения локализованных состояний по ветвям непрерывного спектра для получения дальнейшей динамики.

Каждое состояние андреевского спектра состоит из суперпозиции состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.63). Найдем разложение состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.16) по волновым пакетам $|1/2\rangle$ при включении тока K_y . В случае нулевого химического потенциала $|\psi_{1/2}\rangle$ имеют вид

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x')}{v} dx'\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ i \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \psi_1(x), \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{2N} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\int_0^x \frac{\Delta(x')}{v} dx'\right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \psi_2(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Волновой пакет представляет собой набор плоских волн $e^{ip_x x}$. Запишем его в виде разложения по $|E_{i,p_x}\rangle$:

$$|\psi\rangle_{wave\ packet} = \sum_i \int dp_x \tilde{a}_i(p_x) |E_{i,p_x}\rangle, \quad (3.16)$$

где волновая функция состояний $|E_i\rangle$ имеет вид плоской волны $e^{ip_x x}$, $\tilde{a}_i(p_x)$ вес соответствующего разложения, в который включен вклад от биспинорной части, а сумма ведется по квазиклассическим ветвям.

При поиске разложения $|\psi_{1/2}\rangle$ нам будут нужны скалярные произведения $\langle E_i | \psi_j \rangle$. Они факторизуются на биспинорную часть и волновую функцию

$$\langle E_{i,p_x} | \psi_j \rangle = \langle E_{i,p_x} | \psi_j \rangle_{bispinor} \int \psi_{E_{i,p_x}}^*(x) \psi_j(x) dx, \quad (3.17)$$

где $\psi_{E_{i,p_x}}(x) \sim e^{ip_x x}$ волновая функция квазиклассического пакета. В этом случае вес состояний $a_{j,0}(p_x)$ задается формулой:

$$a_{j,0}(p_x) = \int \psi_{E_{i,p_x}}^*(x) \psi_j(x) dx, \quad (3.18)$$

где первый индекс j означает номер состояния $|\psi_j\rangle$, а второй индекс $a_{j,0}(p_x)$ обозначает импульс, который дает максимальное значение, то есть центр волнового пакета при разложении состояния $|\psi_j\rangle$. Так как волновые функции состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ при $\mu = 0$ совпадают, опустим первый

индекс $a_{1,0}(p_x) = a_{2,0}(p_x) := a_0(p_x)$. В случае нулевого химического потенциала $a_0(p_x) = a_0^*(-p_x)$, поэтому волновой пакет имеет нулевой средний импульс и размытие по импульсу порядка $\frac{\Delta_0}{v}$.

Найдем размер локализованного состояния для квазиклассического профиля $\Delta(x)$. Возьмем для оценки профиль

$$|\Delta(x)| = \Delta_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + l_\Delta^2}}, \quad l_\Delta \gg \xi, \quad (3.19)$$

где l_Δ характерный масштаб длины профиля $\Delta(x)$. Тогда

$$\psi \sim \exp\left(-\int \frac{\Delta(x)}{v} dx\right) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{2l_\Delta \xi}\right). \quad (3.20)$$

Получаем, что характерный масштаб затухания локализованного состояния равен $\sqrt{l_\Delta \xi}$. Сравним его с l_Δ и длиной когерентности $l_\Delta \gg \sqrt{l_\Delta \xi} \gg \xi$. По этой причине получившийся волновой пакет будет локализован вблизи минимума $\Delta(x)$.

Разложение состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ имеет вид

$$|\psi_1\rangle = \int dp_x a_0(p_x) \frac{1}{2} \{u_1^* (|E_1\rangle - |-E_1\rangle) + |E_2\rangle + |-E_2\rangle\}, \quad (3.21)$$

$$|\psi_2\rangle = \int dp_x a_0(p_x) \frac{1}{2} \{u_1^* (-|E_1\rangle + |-E_1\rangle) + |E_2\rangle + |-E_2\rangle\}, \quad (3.22)$$

где индекс $a_0(p_x)$ обозначает импульс центра волнового пакета. При анализе вкладов вылетающих из контакта волновых пакетов нам будут важны именно модули весов разложения $|a_0(p_x)|$.

Рассмотрим разложение нулевой моды. В случае нулевого химического потенциала имеет место киральная симметрия $\Theta = \sigma_z \tau_z$. Кроме того, в случае рассмотрения решения однородного вдоль оси контакта, имеется приближенная киральная симметрия $\Theta_2 = \sigma_x \tau_y$. Так как нулевая мода является собственной для операторов Θ, Θ_2 : $\Theta |\psi_0\rangle = \mathcal{C} |\psi_0\rangle$, $\Theta_2 |\psi_0\rangle = -|\psi_0\rangle$, где $\mathcal{C}$ обозначает киральность майорановского состояния, то она собственная и для $\mathcal{S}_2 = \Theta \Theta_2$: $\mathcal{S}_2 |\psi_0\rangle = -\mathcal{C} |\psi_0\rangle$. Поэтому она раскладывается только на состояния с таким же собственным значением $\mathcal{S}_2$ (3.4). Это следует из того, что собственные числа равны ± 1 . Разложение майорановского состояния с положительной киральностью имеет вид

$$|\psi_0\rangle = \psi_0(y) (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \psi_0(y) \int dp_x a_0(p_x) \{|E_2\rangle + |-E_2\rangle\}. \quad (3.23)$$

Аналогично для состояния с отрицательной киральностью получаем

$$|\psi_0\rangle = \psi_0(y) (|\psi_1\rangle - |\psi_2\rangle) = -\psi_0(y) \int dp_x a_0(p_x) u_1^* \{|E_1\rangle - |-E_1\rangle\}. \quad (3.24)$$

Таким образом, майорановское состояние при включении тока раскладывается на ветви $|\pm E_i\rangle$, где i определяется киральностью нулевой моды. Поэтому майорановская квазичастица покинет вихрь в направлении, перпендикулярном контакту, как локализованный волновой пакет с нулевой начальной координатой $x(0) = 0$ и нулевой начальной скоростью $\dot{x}(0) = 0$. Остальные же ненулевые состояния раскладываются на все четыре ветви. В результате ненулевые состояния при включении тока K_y распадаются на два волновых пакета, которые движутся в противоположных направлениях перпендикулярно контакту. При этом волновые пакеты будут двигаться согласно уравнениям Ньютона в эффективном потенциале (3.10) и при вылете будут иметь скорость v_{escape} (3.14). Отметим, что профиль волнового пакета вдоль зазора остается практически неизменным и совпадает с формой исходной волновой функции $\psi(y)$.

Отметим, что мы нашли распад и динамику (при включении тока K_y) квазичастичного возбуждения $\hat{\psi}_{disc,n}$: $\hat{\psi}_{disc,n} |0\rangle = |\psi_{disc,n}\rangle$, которое задавало андреевский спектр. Чтобы найти динамику полного многочастичного состояния $|\psi_{disc,n}\rangle$ при включении тока, нужно прибавить

к нашему результату также распад на волновые пакеты старого основного состояния системы $|0\rangle_{K_y=0}$ при резком включении тока K_y . Для получения волновых пакетов, получившихся из возбуждения $\hat{\psi}_{disc,n}$, нужно сравнить вылетающие пакеты для случая, когда состояние n свободно и когда оно занято.

3.2 Конечный химический потенциал

Рассмотрим динамику майорановских состояний в случае ненулевого химического потенциала, для которого нарушается киральная симметрия $\Theta = \sigma_z \tau_z$. Как мы увидим далее, нулевая мода может распасться на несколько волновых пакетов, которые продолжают движение в противоположных направлениях. Сначала напишем точные выражения для спектра и уравнений движения, после чего в разделах 3.2.1 и 3.2.2 найдем разложения нулевой моды по непрерывному спектру в случаях малого и большого химического потенциала.

Рассмотрим точные результаты, которые могут быть при учете химического потенциала μ и тока K_y в квазиклассическом приближении. Энергии состояний задаются формулой

$$E = s_1 \sqrt{\Delta^2 + \mu^2 + v^2 p_x^2 + v^2 K_y^2} + s_2 2v \sqrt{\mu^2 p_x^2 + \Delta^2 K_y^2 + \mu^2 K_y^2}, \quad (3.25)$$

где $s_1, s_2 = \pm 1$, $\Delta = \Delta(x)$. Обозначим квазиклассические состояния для соответствующих энергий

$$\begin{aligned} |E_1\rangle &= \{s_1 = 1, s_2 = 1\}, & |-E_1\rangle &= \{s_1 = -1, s_2 = 1\}, \\ |E_2\rangle &= \{s_1 = 1, s_2 = -1\}, & |-E_2\rangle &= \{s_1 = -1, s_2 = -1\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Напишем квазиклассические уравнения динамики в случае ненулевого химического потенциала μ

$$v_x = \frac{\partial E}{\partial p_x} = s_1 v^2 \frac{p_x}{E_0} \left(1 + \frac{s_2 \mu^2}{v \sqrt{\mu^2 p_x^2 + K_y^2 (\Delta^2 + \mu^2)}} \right), \quad (3.27)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial E}{\partial x} = -s_1 \frac{\Delta}{E_0} \frac{d\Delta}{dx} \left(1 + \frac{s_2 K_y^2 v}{\sqrt{\mu^2 p_x^2 + K_y^2 (\Delta^2 + \mu^2)}} \right). \quad (3.28)$$

При учете химического потенциала μ движение волновых пакетов уже не сводится к закону Ньютона движения в эффективном потенциале.

Рассмотрим теперь квазиклассические состояния. При произвольных параметрах Δ, μ, p_x, K_y квазиклассические собственные состояния гамильтониана (2.1) могут быть получены аналитически, однако они имеют достаточно сложный и громоздкий вид. По этой причине мы ограничимся лишь предельными случаями малого $\mu \ll \Delta_0, K_y$ и большого $\mu \gg \Delta_0, K_y$ химического потенциала при поиске собственных состояний, а также разложении майорановского состояния при включении тока K_y для получения динамики.

3.2.1 Малый химический потенциал

Рассмотрим динамику состояний для малого химического потенциала $\mu \ll \Delta_0$. В этом случае нулевая мода при включении тока K_y может распасться на несколько квазичастиц, две из которых покинут контакт в противоположных направлениях, а одна будет локализована вблизи контакта.

Укажем систему, в которой состояние изначально локализовано в области, где химический потенциал μ мал. Пусть $\Delta(x)$ имеет характерную длину изменения l_Δ . В этом случае состояние имеет длину затухания $\sqrt{\xi l_\Delta}$. Иными словами, оно локализовано вблизи минимума $\Delta(x)$ (3.20), то есть внутри зазора, где химический потенциал μ равен значению в топологическом

изоляторе $\mu = \mu_N$. При помощи внешних источников можно сделать μ_N малым $\mu = \mu_N \ll \Delta_0$. Иными словами в данной системе выполняется малость химического потенциала.

Будем работать в приближении $vK_y, \Delta_0 \gg |\Delta(\mathbf{r})|, \mu, vp_x$, а также считать химический потенциал положительным.

Введем величину $\Delta_L = (\sqrt{\xi l_\Delta})$, которую мы будем называть локальным значением параметра порядка $\Delta(x)$. Она имеет смысл значения $\Delta(x)$ на масштабе волновой функции. Анализ показывает, что квазиклассические состояния в случае малого химического потенциала $\mu \ll \Delta_0$ сильно зависят от соотношения μ и Δ_L . Для простоты рассмотрим предельные случаи:

1. $\mu \ll \Delta_L$. Этот режим был описан в разделе 3.1.
2. $\Delta_0 \gg \mu \gg \Delta_L$. Данный случай является промежуточным, между $\mu \ll \Delta_L$ и $\mu \gg \Delta_0$. Рассмотрим его в данном подразделе.

Режим $\mu \gg \Delta_0$ будет рассмотрен далее в подразделе 3.2.2.

Квазиклассические состояния с точностью до линейного порядка по $\frac{1}{K_y}$ имеют вид

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+u_2^2)}} \begin{pmatrix} -iu_2 \\ u_2 - \frac{iu_2 p_x}{K_y} \\ -i - \frac{p_x}{K_y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+u_1^2)}} \begin{pmatrix} -iu_1 \\ -u_1 + \frac{iu_1 p_x}{K_y} \\ i + \frac{p_x}{K_y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+u_1^2)}} \begin{pmatrix} iu_1 \\ -u_1 + \frac{iu_1 p_x}{K_y} \\ -i - \frac{p_x}{K_y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+u_2^2)}} \begin{pmatrix} iu_2 \\ u_2 - \frac{iu_2 p_x}{K_y} \\ i + \frac{p_x}{K_y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

где $u_{1/2} = \frac{\sqrt{\Delta^2 + \mu^2 \pm \mu}}{\Delta}$, а энергии соответствующих состояний были определены выше (3.26). Так как мы предполагаем, что параметр порядка $\Delta(x)$ мал на масштабе волновой функции $\Delta_L \ll \mu$, то им можно пренебречь при поиске разложения локализованных состояний. В этом случае квазиклассические состояния задаются формулами

$$|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i - \frac{p_x}{K_y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ -1 + \frac{ip_x}{K_y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ -1 + \frac{ip_x}{K_y} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i + \frac{p_x}{K_y} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Найдем разложение состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.16) при включении тока K_y . В силу наличия у локализованных состояний множителя $\psi \sim e^{\pm i \frac{\mu}{v} x}$ при разложении волновые пакеты будут иметь начальный импульс $\pm \frac{\mu}{v}$. В этом случае вес квазиклассических состояний имеет вид

$$a_{1/2, \pm \frac{\mu}{v}}(p_x) dp_x = \int \psi_{E_i, p_x}^*(x) \psi_{1/2}(x) dx, \quad (3.33)$$

где индексы сопоставляются следующим образом: “+” отвечает индексу “1”, а “-” - индексу “2”. Второй индекс $\pm \frac{\mu}{v}$ обозначает импульс центра волнового пакета при разложении.

Разложение состояний $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.16) по квазиклассическим состояниям в случае $\Delta_L \ll \mu \ll \Delta_0$ задается формулами

$$|\psi_1\rangle = \int dp_x a_{1,\frac{\mu}{v}}(p_x) \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(1 + i - \frac{\mu}{vK_y}\right) |E_1\rangle + \left(-1 - i + \frac{\mu}{vK_y}\right) |-E_1\rangle + \right. \\ \left. + \left(1 - i + \frac{\mu}{vK_y}\right) |E_2\rangle + \left(1 - i + \frac{\mu}{vK_y}\right) |-E_2\rangle \right), \quad (3.34)$$

$$|\psi_2\rangle = \int dp_x a_{2,-\frac{\mu}{v}}(p_x) \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\left(1 - i - \frac{\mu}{vK_y}\right) |E_1\rangle + \left(-1 + i + \frac{\mu}{vK_y}\right) |-E_1\rangle + \right. \\ \left. + \left(1 + i + \frac{\mu}{vK_y}\right) |E_2\rangle + \left(1 + i + \frac{\mu}{vK_y}\right) |-E_2\rangle \right). \quad (3.35)$$

Получаем, что каждое из решений $|\psi_{1/2}\rangle$, из суперпозиции которых состоит дискретный спектр, при включении тока K_y раскладывается на все четыре квазиклассические ветви с примерно одинаковым весом.

Для понимания дальнейшей динамики приведем траектории волновых пакетов $|E_{1/2}\rangle$ на плоскости (x, p_x) рис. 3.

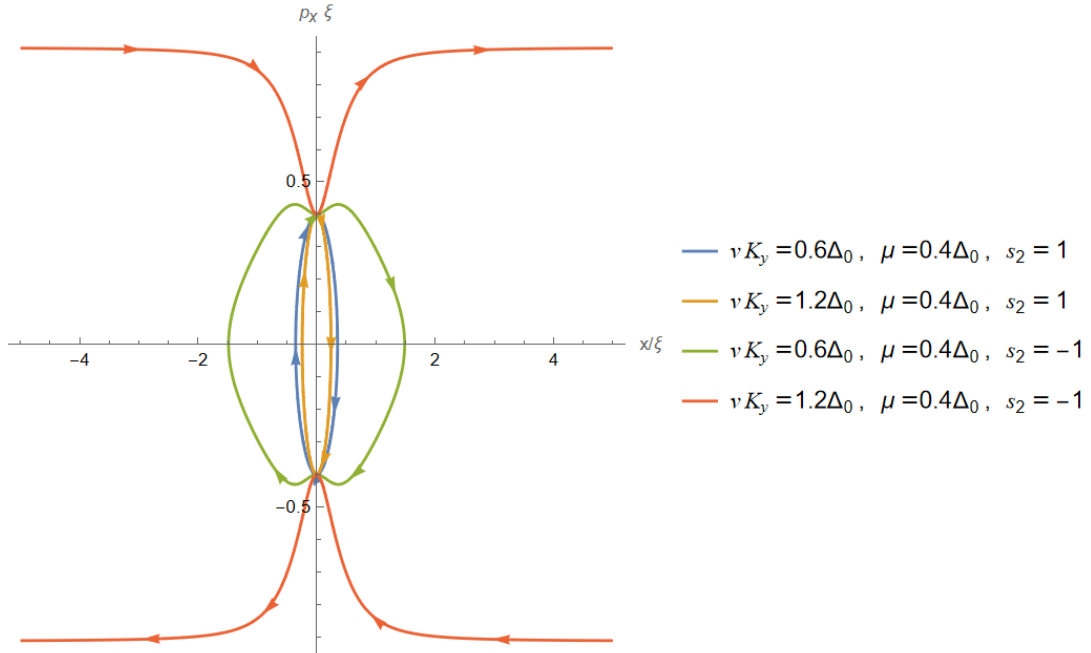


Рис. 3: Изоэнергетические кривые для различных значений $K_y, \mu, s_1 = 1$ для профиля $\Delta(x) = \Delta_0 \frac{x}{\sqrt{\xi^2 + x^2}}$. $s_2 = \pm 1$ соответствует состояниям $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ соответственно.

Рассмотрим разложение $|\psi_1\rangle$ при включении тока K_y . В случае, когда значение тока K_y меньше порогового значения, равного $\frac{\Delta_0}{2v}$ (3.12) при $\mu = 0$, оба волновых пакета $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ не смогут уйти на бесконечность (синяя и зеленая кривые). Таким образом, состояние $|\psi_1\rangle$ останется локализованным вблизи контакта.

При значении тока K_y больше порогового траектория $|E_2\rangle$ станет инфинитной (красная кривая), в то время как волновой пакет $|E_1\rangle$ не сможет покинуть контакт (оранжевая кривая). В этом режиме состояние $|\psi_1\rangle$ распадется на две квазичастицы с примерно одинаковым весом. Одна из них уйдет на бесконечность $x \rightarrow +\infty$, а вторая останется локализованной в области контакта.

Направление движения вылетающей частицы (красная кривая) зависит от начального импульса. В случае положительного импульса частица полетит в направлении $x \rightarrow +\infty$, а при отрицательном значении - в противоположном направлении. Для состояния $|\psi_2\rangle$ начальный

импульс будет отрицательным, поэтому соответствующий волновой пакет $|E_2\rangle$ покинет контакт в направлении $x \rightarrow -\infty$.

Майорановское состояние представляет собой суперпозицию состояний $|\psi_{1/2}\rangle$, то есть $|\psi_0\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle)\psi_0(y)$, где $\psi_0(y)$ волновая функция по оси y майорановского состояния, которая представляет собой $\psi_0(y) \sim e^{-y^2/\lambda_H^2}$. Этот профиль слабо меняется в процессе выхода квазичастицы из контакта. Таким образом, при включении тока K_y больше порогового значения нулевая мода распадется на три квазичастицы с примерно одинаковым весом. Одна останется локализованной в области контакта, а две другие полетят перпендикулярно контакту в противоположных направлениях.

Приведем скорость вылетающих частиц в рассматриваемом режиме, то есть в режиме, в котором в начальный момент времени частица локализована внутри зазора, где химический потенциал μ и параметр порядка $\Delta(x)$ малы. Для простоты рассмотрим случай большого тока и химического потенциала в сверхпроводниках $vK_y, \mu_S \gg \Delta_0$. Для получения скорости вылета используем закон сохранения энергии (3.25), а также выражение для скорости (3.27). В главном порядке получаем

$$v_{\text{escape}} = v \frac{\sqrt{\mu_S(2vK_y + \mu_S)}(vK_y + 2\mu_S)}{vK_y(vK_y + \mu_S)}. \quad (3.36)$$

Применимость квазиклассического приближения

Прямым вычислением связностей $\mathcal{A}, \mathbf{a}$ из выражения для квазиклассической динамики (3.6) можно удостовериться, что в случае химического потенциала μ много больше Δ_L , вклад членов $\mathcal{A}, \mathbf{a}$ мал, поэтому ими можно пренебречь при рассмотрении динамики.

В случае нулевого химического потенциала щель в спектре (3.25) между ветвями E_1 и E_2 пропадает. По этой причине могут происходить переходы Ландау–Зенера [11]. В разделе 3.1 ($\mu = 0$) эти переходы были учтены при помощи переобозначения соответствующих состояний для $\Delta(x) < 0$ и $\Delta(x) > 0$. Напротив, в ситуации, в которой $\mu \gg \Delta_L$, подобные переходы практически не осуществляются и ими можно пренебречь. Как следствие, состояния $|E_1\rangle$ не смогут перейти на другие ветви, чтобы покинуть контакт.

3.2.2 Большой химический потенциал

Рассмотрим динамику майорановского состояния для большого химического потенциала $\mu \gg \Delta_0$ при включении тока K_y . Это так называемый Андреевский предел. В этом случае нулевая мода может распасться на четыре квазичастицы. Первая пара полетит в направлении $x \rightarrow +\infty$, а вторая пара – в противоположном направлении.

В силу наличия у локализованных состояний (2.38) множителя $e^{\pm \frac{i\mu x}{v}}$, разложение при включении тока будет происходить на волновые пакеты с начальным импульсом $\pm \frac{\mu}{v}$, который много больше обратной длины когерентности $\frac{1}{\xi}$. Поэтому в данном режиме квазиклассическое приближение применимо и для профиля $\Delta(x)$, характерный масштаб которого равен длине когерентности $\xi = \frac{\Delta_0}{v}$.

Приведем физическую систему, в которой может реализоваться данный режим. Пусть есть контакт шириной $W \ll \xi$ (Рис. 1). Длина изменения профиля $\Delta(x)$, как и длина затухания волновой функции, равна ξ . В этом случае состояние локализовано внутри сверхпроводника, где химический потенциал μ равен значению в сверхпроводнике μ_S , который мы считаем большим $\mu_S \gg \Delta_0$. В силу этого будем считать химический потенциал однородным и равным $\mu = \mu_S$.

Будем работать в приближении $p_x v \sim \mu \gg \Delta_0, vK_y$, а также считать химический потенциал μ положительным. Квазиклассические состояния с точностью до первого порядка по $\frac{1}{\mu}$ задаются формулами

$$|E_1\rangle = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta}{4\mu} s_x \\ \frac{\Delta}{4\mu} \\ -s_x - \frac{ivK_y}{\mu} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-E_1\rangle = \begin{pmatrix} s_x - \frac{2ivK_y}{\mu} \\ -1 + \frac{ivK_y}{\mu} s_x \\ -\frac{\Delta}{4\mu} s_x \\ \frac{\Delta}{4\mu} \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

$$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta}\right) s_x \\ 1 + \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta} + \frac{ivK_y}{\mu} s_x \\ \frac{ivK_y}{\mu} + \left(1 - \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta}\right) s_x \\ 1 - \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta} \end{pmatrix}, \quad |-E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \left(-1 + \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta}\right) s_x \\ -1 + \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta} - \frac{ivK_y}{\mu} s_x \\ \frac{ivK_y}{\mu} + \left(1 + \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta}\right) s_x \\ 1 + \frac{v^2 K_y^2}{4\mu\Delta} \end{pmatrix}, \quad (3.38)$$

где $s_x = \frac{vp_x}{\mu}$.

Найдем разложение $|\psi_{1/2}\rangle$ (2.16). В силу того, что состояния $|\psi_{1/2}\rangle$ локализованы на масштабе ξ , разложение на квазиклассические волновые пакеты будет происходить при разных значениях $\Delta(x)$, то есть при включении тока получится протяженный по координате волновой пакет. В этом случае волновой пакет можно представить в виде

$$|\psi\rangle_{wave\ packet} = \sum_i \int dp_x dx \tilde{a}_i(p_x, x) |E_{i,p_x,x}\rangle, \quad (3.39)$$

где интегрирование ведется по волновым пакетам с координатой центра пакета x и шириной пакета dx , $\tilde{a}_i(p_x, x)$ соответствующий вес разложения (включая биспинорную часть). Введем вес $a_{1/2,\pm\frac{\mu}{v}}(p_x, x)$ для протяженного волнового пакета, полученного из $|\psi_{1/2}\rangle$:

$$a_{1/2,\pm\frac{\mu}{v}}(p_x, x) = \int \psi_{E_i,p_x}^*(x, x_1) \psi_{1/2}(x_1) dx_1. \quad (3.40)$$

где $\psi_{E_i,p_x}^*(x, x_1)$ волновая функция квазиклассического состояния с импульсом p_x и координатой центра пакета x , а индекс $\pm\frac{\mu}{v}$ соответствует импульсу центра волнового пакета. Тогда для разложения $|\psi_{1/2}\rangle$ верно

$$|\psi_1\rangle = \int dp_x a_{1,\frac{\mu}{v}}(p_x, x) dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{ivK_y}{\sqrt{2}\mu} |E_1\rangle - \frac{vK_y}{\sqrt{2}\mu} |-E_1\rangle + \left((1+i) - \frac{(\frac{1}{4} - \frac{i}{4})(v^2 K_y^2 - 2\Delta v K_y)}{\Delta\mu} \right) |E_2\rangle + \left((1-i) + \frac{(\frac{1}{4} + \frac{i}{4})(v^2 K_y^2 - 2\Delta v K_y)}{\Delta\mu} \right) |-E_2\rangle \right), \quad (3.41)$$

$$|\psi_2\rangle = \int dp_x a_{2,-\frac{\mu}{v}}(p_x, x) dx \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{ivK_y}{\sqrt{2}\mu} |E_1\rangle - \frac{vK_y}{\sqrt{2}\mu} |-E_1\rangle + \left((1-i) - \frac{(\frac{1}{4} + \frac{i}{4})(v^2 K_y^2 - 2\Delta v K_y)}{\Delta\mu} \right) |E_2\rangle + \left((1+i) + \frac{(\frac{1}{4} - \frac{i}{4})(v^2 K_y^2 - 2\Delta v K_y)}{\Delta\mu} \right) |-E_2\rangle \right). \quad (3.42)$$

Получили, что при большом химическом потенциале $\mu \gg vK_y, \Delta_0$, разложение $|\psi_1\rangle$ происходит на волновой пакет $|\pm E_2\rangle$ и с небольшим весом на волновой пакет $|\pm E_1\rangle$, при этом начальный импульс каждого волнового пакета равен $\frac{\mu}{v}$. Аналогичное представление имеет место для $|\psi_2\rangle$, в котором состояние раскладывается на волновые пакеты с начальным импульсом $-\frac{\mu}{v}$. Майорановское состояние $|\psi_0\rangle = (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) \psi_0(y)$ представляет собой суперпозицию этих пакетов. Отметим также, что при достаточно большом значении тока $K_y \sim \mu$, вклад состояний $|\pm E_1\rangle$ не будет мал.

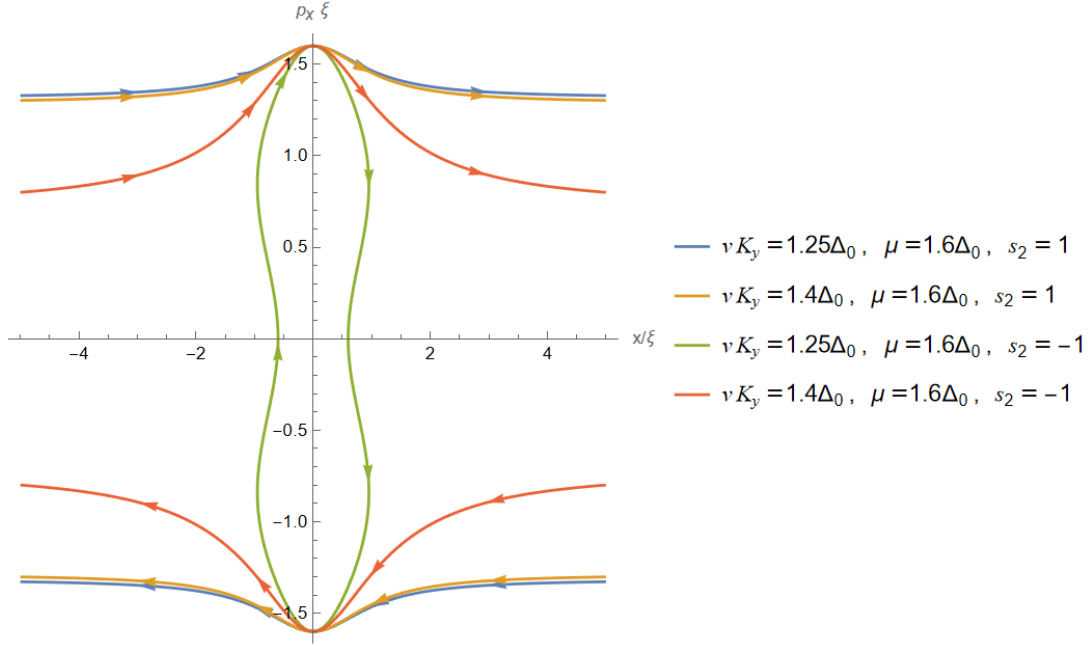


Рис. 4: Изоэнергетические кривые для различных значений $K_y, \mu, s_1 = 1$ для профиля $\Delta(x) = \Delta_0 \frac{x}{\sqrt{\xi^2 + x^2}}$. $s_2 = \pm 1$ соответствует состояниям $|E_1\rangle$ и $|E_2\rangle$ соответственно.

Для понимания дальнейшей динамики волновых пакетов представим изоэнергетические траектории на (x, p_x) плоскости, где энергия выражается формулой (3.25).

На рис. 4 представлены изоэнергетические траектории для различных значений тока K_y и химического потенциала μ для ветвей $|E_{1/2}\rangle$. Рассмотрим разложение $|\psi_1\rangle$. При значении тока K_y меньше порогового, который из численного счета примерно равен μ , волновой пакет $|E_2\rangle$ (зеленая кривая) не сможет уйти на бесконечность, в то время как траектория $|E_1\rangle$ (синяя кривая) будет инфинитной. Следовательно, состояние $|\psi_1\rangle$ разложится на две квазичастицы, которым отвечают локализованные волновые пакеты. Первая квазичастица, которой соответствует волновой пакет $|E_2\rangle$, будет все время локализована в области контакта, а вторая, которой соответствует волновой пакет $|E_1\rangle$, покинет его. Знак начального импульса покинувшей квазичастицы $p_{init} = \frac{\mu}{v}$, также задает направление конечного движения. В случае положительного импульса частица полетит к $x \rightarrow +\infty$, а при отрицательном - в противоположную сторону.

Рассмотрим теперь динамику волновых пакетов при значении тока K_y больше порогового. В этом случае обе квазичастицы (оранжевая и красная кривые) покинут контакт в одном направлении $x \rightarrow \infty$. Конечные импульсы квазичастиц в этом случае будут различаться на величину порядка $\frac{\Delta_0^2}{v\mu}$. Это различие мало в случае $\mu \gg \Delta_0$.

Аналогично можно получить динамику квазичастиц, полученных из состояния $|\psi_2\rangle$, начальный импульс которых равен $-\frac{\mu}{v}$. В этом случае квазичастицы будут покидать контакт в направлении $x \rightarrow -\infty$.

Майорановское состояние представляет собой суперпозицию состояний $|\psi_{1/2}\rangle$, поэтому при включении тока больше порогового значения происходит разложение на четыре квазичастицы, две из которых полетят в направлении $x \rightarrow \infty$, а две другие - в противоположном.

Приведем скорость вылета частицы. В рассматриваемом режиме мы считаем химический потенциал большим $\mu = \mu_S \gg \Delta_0$. По этой причине можно считать импульс p_x вылетающих пакетов примерно равным μ_S . Используя (3.25), а также (3.27), получим для скорости вылета в случае $K_y \gg \Delta_0$

$$v_{escape} = v \frac{\mu}{\sqrt{v^2 K_y^2 + \mu^2}}. \quad (3.43)$$

Отличие от случая малого химического потенциала (3.36) в том, что в рассматриваемом режиме

состояние изначально локализовано в сверхпроводнике, тогда как в разделе 3.2.1 рассматривался случай локализации внутри зазора.

Прямým вычислением связностей $\mathcal{A}, \mathbf{a}$ из выражения для квазиклассической динамики (3.6) можно удостовериться, что в случае большого химического потенциала $\mu \gg \Delta_0$, вклад членов $\mathcal{A}, \mathbf{a}$ мал, поэтому ими можно пренебречь при рассмотрении динамики. В рассматриваемом случае динамика происходит при больших импульсах $vp_x \sim \mu_S \gg \Delta_0$. По этой причине траектории частиц лежат далеко от дна зоны (щели) и движение можно считать классическим.

3.3 Движение частицы вдоль контакта

Рассмотрим динамику состояния при мгновенном изменении фаз одного из сверхпроводников. В этом случае движение происходит вдоль контакта, которое можно описать при помощи эффективного потенциала.

Пусть контакт находится в магнитном поле $H(y)$, характерный масштаб изменения которого много больше длины когерентности ξ , что необходимо для использования теории возмущений в разделе 2. Гамильтониан движения вдоль зазора в базисе $|\psi_{1/2}\rangle$ имеет вид (2.55)

$$H_{eff} = -vp_y \hat{f}_y + \Delta_0 \frac{\delta\varphi(y)}{2} \hat{f}_x, \quad \delta\varphi(y) = \delta\varphi(0) + \int_0^y \gamma(y') dy, \quad (3.44)$$

где $\hat{f}$ матрицы паули в базисе состояний $|\psi_{1/2}\rangle$, $\gamma(y) = (2\lambda_L + W)H(y)\frac{2\pi}{\Phi_0}$. Квазиклассический спектр имеет вид

$$E = \pm \sqrt{v^2 p_y^2 + \Delta_0^2 \frac{\delta\varphi^2(y)}{4}}. \quad (3.45)$$

Отметим, что в силу совпадения матричной структуры эффективных гамильтонианов движения вдоль зазора H_{eff} для случая $\mu = 0$, $K_y \neq 0$ (2.55), а также случая $\mu \neq 0$, $K_y = 0$ (2.25), в котором гамильтониан записан в повернутом базисе $|\psi_{1/2}\rangle$, квазиклассический спектр и уравнения движения окажутся идентичными.

Напишем квазиклассические уравнения движения:

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{\partial E}{\partial p_y} = \frac{v^2 p_y}{E}, \\ \dot{p}_y = -\frac{\partial E}{\partial y} = -\frac{\Delta_0^2 \delta\varphi(y)}{4E} \frac{d\delta\varphi(y)}{dy}. \end{cases} \quad (3.46)$$

В этом случае динамику можно описать в виде уравнения Ньютона с эффективным потенциалом

$$\ddot{y} = -\frac{\Delta_0^2 v^2 \delta\varphi(y)}{4E^2} \frac{d\delta\varphi(y)}{dy} = -\frac{d}{dy} \left(\frac{\Delta_0^2 v^2 \delta\varphi^2(y)}{8E^2} \right) = -\frac{dU_{eff}(y)}{dy}. \quad (3.47)$$

Рассмотрим резкое изменение фазы сверхпроводника на $\delta\varphi_0$. В результате этого волновая функция состояния “окажется” сдвинута относительно минимума потенциала на расстояние $y_0 = \frac{\varphi_0}{\gamma}$. Частица начнет двигаться в эффективном потенциале

$$\ddot{y} = -\frac{dU_{eff}}{dy}, \quad U_{eff} = \frac{\Delta_0^2 v^2 \delta\varphi^2(y)}{8E_0^2}, \quad E_0^2 = \Delta_0^2 \frac{\delta\varphi_0^2}{4} \quad (3.48)$$

с начальным условием

$$\dot{y}(0) = 0, \quad y(0) = y_0. \quad (3.49)$$

Мы не вычисляем в рассматриваемом режиме разложение локализованного состояния по квазиклассическому спектру при изменении фазы, так как квазиклассические волновые пакеты имеют одинаковый закон движения и эффективный потенциал.

В случае однородного магнитного поля H эффективный потенциал U_{eff} приобретает параболическую форму

$$U_{eff} = \frac{\Delta_0^2 v^2 \gamma^2 y^2}{8E_0^2}. \quad (3.50)$$

Получаем, что движения частицы будет осцилляторным периодическим.

Найдем максимальную скорость движения. Согласно уравнению (3.48), есть сохраняющаяся величина квазиэнергия

$$\frac{\dot{y}^2}{2} + \frac{\Delta_0^2 v^2 \delta\varphi^2(y)}{8E_0^2} = const. \quad (3.51)$$

Подставляя начальную точку, получаем уравнение на максимальную скорость в точке $\delta\varphi = 0$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} = \frac{\Delta_0^2 v^2 \delta\varphi_0^2}{8E_0^2} \Rightarrow \dot{y} = v. \quad (3.52)$$

Максимальная скорость не зависит от изменения фазы.

Получили, что при изменении фазы одного из сверхпроводников, локализованное состояние начнет двигаться внутри зазора согласно уравнениям Ньютона с эффективным потенциалом U_{eff} . Этот результат будет верен и при конечном химическом потенциале μ .

4 Результаты и обсуждение

В работе теоретически исследовалось влияние сверхпроводящего тока на состояния в вихрях в топологическом джозефсоновском контакте. Был рассмотрен режим постоянного тока, а также динамика состояний при резком его включении.

В ходе работы были получены следующие результаты:

Получен спектр и волновые функции локализованных состояний для двух предельных случаев: при конечном химическом потенциале в отсутствие сверхпроводящего тока и при конечном токе, текущем вдоль зазора, в отсутствие химического потенциала. Показано, что в присутствии тока при $\mu = 0$ андреевские состояния обретают множитель $e^{K_y x}$. При этом они сначала деформируются анизотропным образом, а при превышении импульсом куперовских пар K_y значения $\frac{\Delta_0}{v}$ делокализуются. Направление делокализации майорановского состояния зависит от его киральности.

Рассмотрено влияние тока, текущего через контакт (перпендикулярно зазору), на продольные волновые функции майорановских состояний. Ток в данном направлении можно получить, изменив фазы сверхпроводников. В случае однородного магнитного поля учет дополнительной фазы приводит к смещению вдоль контакта всей цепочки джозефсоновских вихрей, оставляя при этом профиль волновых функций неизменным. В режиме, в котором магнитное поле локализовано в малой области пространства (дельта-образный профиль), изменение фазы сверхпроводников приводит сначала к деформации, а при значении тока большем порогового, - делокализации майорановского состояния. При этом ток делокализации в данном случае значительно меньше $\frac{\Delta_0}{v}$ и определяется характеристиками джозефсоновского контакта и величиной магнитного поля.

Рассмотрена динамика локализованных состояний при резком включении тока K :

В случае продольного тока при $\mu = 0$ было показано, что вследствие наличия киральной симметрии Θ майорановское состояние покидает контакт как локализованный волновой пакет, направление движения которого зависит от киральности состояния. В то же время ненулевые состояния распадаются на два волновых пакета, распространяющиеся в противоположных направлениях. Движение квазичастичных волновых пакетов происходит в направлении перпендикулярном зазору. Его можно описать при помощи эффективного потенциала.

Рассмотрена динамика нулевых мод при конечном химическом потенциале (в отсутствие киральной симметрии Θ) при приложении продольного тока. Для описания движения были использованы изоэнергетические кривые. В рассматриваемом случае есть три характерных режима: $\mu \ll \Delta_L$, $\Delta_0 \gg \mu \gg \Delta_L$, $\mu \gg \Delta_0$. При $\mu \ll \Delta_L$ динамика аналогична случаю нулевого химического потенциала. В режиме малого химического потенциала $\Delta_0 \gg \mu \gg \Delta_L$ майорановское состояние может покинуть контакт только при значении тока больше порогового. В этом случае состояние распадется на 3 квазичастицы: две из них будут двигаться в противоположных направлениях перпендикулярно контакту в виде волновых пакетов, а третья - останется локализованной в области контакта. Вес квазичастиц будет примерно одинаковым.

В режиме большого химического потенциала $\mu \gg \Delta_0$ также существует пороговое значение тока, которое можно определить из численного счета. При токе, меньшем порогового, майорановское состояние распадается на три квазичастицы аналогично предыдущему случаю $\Delta_0 \gg \mu \gg \Delta_L$. При этом если $vK_y \ll \mu$, то вес вылетающих волновых пакетов мал. В случае, если ток превышает пороговое значение, майорановское состояние распадается на четыре волновых пакета: одна пара движется в одну сторону, вторая - в противоположную.

Рассмотрена динамика локализованных состояний при включении тока, текущего через контакт, в случае неоднородного магнитного поля. В этом случае движение происходит вдоль зазора, и его можно описать эффективным потенциалом.

В дальнейшей работе планируется исследовать движение частиц вдоль оси зазора при включении продольного тока и наличии конечного химического потенциала.

Также остается открытым для дальнейшего обсуждения вопрос, как сверхпроводящий ток влияет на квантовое состояние майорановской моды. В частности, представляет интерес

возможность реализации с его помощью взаимного переплетения майорановских состояний (операция braiding).

Как показывает анализ, при локализации магнитного поля в малой области с продольным размером меньше λ_H (дельта-образный профиль), среди локализованных вблизи нее состояний останется только нулевая мода. Такая конфигурация позволяет отделить майорановское состояние от остального андреевского спектра.

На основе полученных результатов может быть предложен метод экспериментального изучения свойств майорановских состояний, основанный на исследовании вылетающих волновых пакетов посредством туннельной спектроскопии. В частности, анализ пространственного профиля волнового пакета по оси y позволяет восстановить исходное состояние. За счет регулирования сверхпроводящего тока вылетающим квазичастицам можно придать скорость (3.14), много меньшую скорости Ферми v , что делает экспериментальную регистрацию более доступной.

Список литературы

- [1] J. Alicea, New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems, Reports on progress in physics. Physical Society (Great Britain) **75**, 076501 (2012).
- [2] L. Fu and C. L. Kane, Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator, Phys. Rev. Lett. **100**, 096407 (2008).
- [3] C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon, Bound Fermion states on a vortex line in a type II superconductor, Physics Letters **9**, 307 (1964).
- [4] G. E. Volovik, Fermion zero modes on vortices in chiral superconductors, JETP Letters **70**, 609 (1999), arXiv:cond-mat/9909426 .
- [5] M. J. Pacholski, G. Lemut, O. Ovdut, I. Adagideli, and C. W. J. Beenakker, Deconfinement of Majorana Vortex Modes Produces a Superconducting Landau Level, Phys. Rev. Lett. **126**, 226801 (2021).
- [6] G. Lemut, M. J. Pacholski, S. Plugge, C. W. J. Beenakker, and I. Adagideli, Magnus effect on a Majorana zero mode, Phys. Rev. B **107**, 205420 (2023).
- [7] P. Schüffelgen, D. Rosenbach, C. Li, T. W. Schmitt, M. Schleenvoigt, A. R. Jalil, J. Schmitt, C. Jünger, S. Rosen, J. Vogel, C. Volk, D. Grützmacher, Y. Ando, and T. Schäpers, Selective area growth and stencil lithography for in situ fabricated quantum devices, Nature Nanotechnology **14**, 825 (2019).
- [8] J. Wiedenmann, E. Bocquillon, R. S. Deacon, S. Hartinger, O. Herrmann, T. M. Klapwijk, L. Maier, C. Ames, C. Brüne, C. Gould, A. Oiwa, K. Ishibashi, S. Tarucha, H. Buhmann, and L. W. Molenkamp, 4π -periodic Josephson supercurrent in HgTe-based topological Josephson junctions, Nature Communications **7**, 10303 (2016).
- [9] K. Piasotski, O. Lesser, A. Reich, P. Ostrovsky, E. Grosfeld, Y. Makhlin, Y. Oreg, and A. Shnirman, Current flow in topological insulator Josephson junctions due to imperfections, Phys. Rev. B **111**, 174527 (2025).
- [10] D. Xiao, M.-C. Chang, and Q. Niu, Berry phase effects on electronic properties, Rev. Mod. Phys. **82**, 1959 (2010).
- [11] Д. Антоненко, И. Побойко, Н. Степанов, Семинары по квантовой механике, Электронное учебное пособие (2022).