

# Задачи по теме “Метод перевала”

## Задача 1

Найти асимптотику гамма-функции, определяемой выражением:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z \cdot e^{-t} \cdot dt$$

при  $z \gg 1$

## Решение

Покажем сперва, чем интересна гамма-функция. Во-первых, проинтегрируем по частям:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt = -t^z e^{-t} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} z t^{z-1} e^{-t} dt = z \Gamma(z)$$

Поскольку при этом  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ , то видно, что  $\Gamma(n+1) = n!$ .

Во-вторых, значение интеграла Пуассона тоже выражается через Гамма функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

откуда  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . Кроме того, через гамма-функцию легко выражаются интегралы вида:

$$I(n, m) = \int_0^{\infty} x^n \exp(-x^m) dx = \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{m}} e^{-t} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} t^{\frac{n+1}{m}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{m} \Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

Займёмся теперь поиском асимптотики. Перепишем интеграл в виде:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} \exp(-t + z \ln t) \cdot dt$$

Найдем стационарные точки функции  $f(t) = -t + z \ln t$  и разложим ее до второго порядка малости в их окрестности:

$$f'(t) = -1 + \frac{z}{t} \Rightarrow t_0 = z \Rightarrow f(t_0) = -z + z \ln z$$

$$f''(t) = -\frac{z}{t^2} \Rightarrow f''(t_0) = -\frac{1}{z}$$

Отсюда получаем:

$$\Gamma(z+1) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-z + z \ln z - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} \cdot (t-z)^2\right) dt = \sqrt{2\pi z} \cdot \exp(z \ln z - z)$$

В случае натуральных  $z = n \in \mathbb{N}$ , мы получаем известную формулу Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

## Задача 2

Найти поведение интеграла

$$I(a, x) = \int_0^x \exp(a \cdot \sin t) dt$$

при  $a \gg 1$  (и различных  $x$ ).

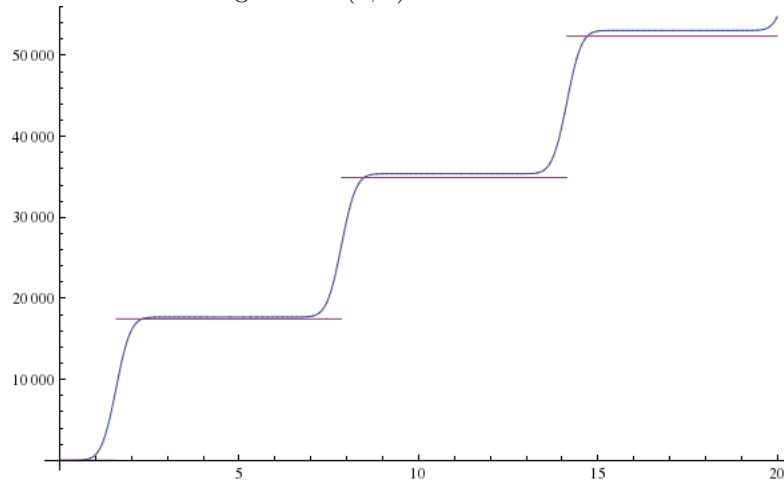
### Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением  $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами:  $f''(t) = -a \sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$ ; поэтому локальные максимумы - лишь точки  $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2\right) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения  $x$ , в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому  $x$  будет достигать  $t_{2n}$ , функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой “лесенку”; ширина перехода ступеньки будет порядка  $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$ .

Figure 1:  $I(a, x)$  и асимптотика



Важно однако отметить, что погрешность от реального значения интеграла такой функции по периоду отличается от аппроксимации, полученной методом перевала; и при больших  $x$ , когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Этой погрешностью можно пренебречь при  $x \lesssim a$ , поскольку погрешность от каждой перевальной точки - порядка  $\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a \cdot O\left(\frac{1}{a}\right)$ .

## Задача 3

Найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(N) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-N(\cosh x + \cosh y + \alpha xy)) dx \cdot dy$$

при  $N \gg 1$  и  $|\alpha| < 1$ .

## Решение

В многомерном случае, стационарная точка определяется условием  $\text{grad} f(x, y) = 0$ , то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh x + \alpha y = 0 \\ \sinh y + \alpha x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Дальше следует поступать абсолютно аналогично. Разложение вблизи стационарной точки дает:

$$f(x, y) \approx -N \left( 1 + \frac{x^2}{2} + 1 + \frac{y^2}{2} + \alpha xy \right) = -2N + N \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \alpha xy \right)$$

В этом случае применение метода перевала сводится к взятию многомерного интеграла Пуассона (общий вид такого интеграла - когда в показателе экспоненты стоит некая квадратичная форма). Этот интеграл можно взять, выделяя полный квадрат:

$$\begin{aligned} I(N) &\approx \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left( -2N - N \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \alpha xy \right) \right) dx \cdot dy = \\ &= e^{-2N} \iint \exp \left( -\frac{N}{2} (x^2 - 2\alpha xy + \alpha^2 y^2 + (1 - \alpha^2) y^2) \right) dx \cdot dy = \\ &= e^{-2N} \iint \exp \left( -\frac{N}{2} ((x - \alpha y)^2 + (1 - \alpha^2) y^2) \right) dx \cdot dy = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{N}} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{N(1 - \alpha^2)}} e^{-2N} = \frac{2\pi}{N\sqrt{1 - \alpha^2}} e^{-2N} \end{aligned}$$

Это и есть искомая асимптотика. Тут видно, зачем нужно условие  $|\alpha| < 1$ : если  $|\alpha| \geq 1$ , при  $y^2$  в показателе экспоненты стоит положительная величина, из-за чего соответствующий интеграл расходится. Поскольку исходный интеграл, очевидно, сходится (функция  $\cosh x$  - быстро растет на бесконечности), то это значит лишь что точка  $(0, 0)$  уже не является минимумом функции в показателе экспоненты, и перевальная точка смещается.

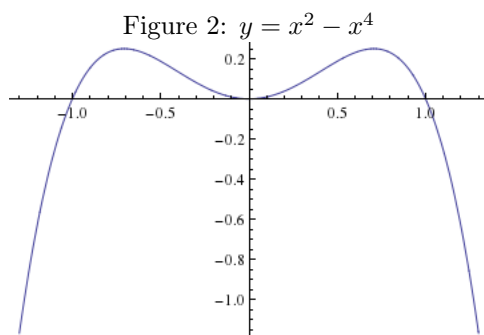
## Задача 4

Найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2)) dx$$

при  $A \gg 1$

## Решение



Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

$$f(x_{1,2}) = -A \left( \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) = -A \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A \cdot (12x_{1,2}^2 - 2) = -A \cdot \left( 12 \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \right) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$\begin{aligned} I(A) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_1)^2\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_2)^2\right) dx = \\ &= e^{A/4} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2A}} \cdot 2 = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{A/4} \end{aligned}$$

## Задача 5

Найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A \left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right) dx$$

при  $A \gg 1$

### Решение

Поскольку функция  $\cosh x$  вблизи нуля раскладывается как  $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$ , то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок  $x^4$ . Поэтому следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A \left(1 + \frac{x^4}{24}\right)\right) dx = e^{-A} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{A}{24} x^4\right) dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой  $t = \frac{A}{24} x^4$ , сведущей его к гамма-функции:

$$\begin{aligned} I(A) &\approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \cdot \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \cdot \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \cdot \int_0^{\infty} t^{-3/4} e^{-t} dt = \\ &= \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot e^{-A} \end{aligned}$$

Тут  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$  - просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы ( $\pi$ ,  $e$ ,  $C$ , ...); однако это и не требуется.

## Задачи для домашнего решения

**Задача 1** Найти асимптотическое поведение интеграла при  $\alpha \ll \beta$  или  $\alpha \gg \beta$ :

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x \cdot \arctan(\beta x)) dx$$

**Задача 2** Найти асимптотическое поведение ряда при  $A \gg 1$ ,  $N \gg A$ :

$$S(N, A) = \sum_{n=0}^{\infty} n^N e^{-An^2}$$

**Задача 3** Найти асимптотическое поведение интеграла при  $N \gg 1$ :

$$I(N) = \int_N^{\infty} (x - N)^2 e^{-x^2} dx$$

**Задача 4\*** Найти асимптотическое поведение интеграла при  $N \gg 1$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ,  $s \sim 1$ :

$$I(s, N, \varepsilon) = \int_0^{\infty} x^s \exp(-N(1 - \cos x) - \varepsilon x) dx$$

**Задача 5** Найти асимптотическое поведение интеграла при  $\alpha \ll 1$ :

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x)} dx$$

где  $f(x)$  задана неявно уравнением

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + \alpha \cdot f(x)^4}}$$

**Задача 6** Найти асимптотическое поведение интеграла из задачи 3 при  $N \gg 1$  и  $\alpha > 1$ , но  $\alpha - 1 \ll 1$ :

$$I(N) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-N(\cosh x + \cosh y + \alpha xy)) dx \cdot dy$$