Задачи по теме “Интегралы с параметрами”

Бета-функция Эйлера

Порой приходится иметь дело с интегралами вида:

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$$

или интегралами, которые сводятся к интегралам такого вида подстановкой. Это - так называемый бета-интаграл Эйлера или просто бета-функция. Этот интеграл удобно выражается через $\Gamma(z)$ - гамма-функцию Эйлера, значения и свойства которой уже хорошо известны; это позволяет просто получать значения этого интеграла в различных точках.

Выражение его через гамма-функцию следующее:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Добавим еще одно полезное свойство гамма-функции (приводим без доказательства):

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

Задача 1

Вычислим интеграл Френеля:

$$I = \int\limits_0^\infty \cos\left(x^2\right)\cdot dx$$

Решение:

Перейдем к переменной интегрирования $t = x^2$. Получим:

$$\int\limits_0^\infty \cos\left(x^2\right)\cdot dx = \int\limits_0^\infty \frac{\cos(t)}{2\sqrt{t}}\cdot dt$$

Представим $\frac{1}{\sqrt{t}}$ исполльзуя интеграл Пуассона:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty e^{-tx^2}dx$$

Подстановки такого вида позволяют перейти от одих функций к другим, интегралы с которыми порой взять проще. Мы получаем кратный интеграл, в котором можем поменять порядок интегрирования:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \cos(t)\,e^{-tx^2}dx\cdot dt$$

Теперь возьмем интеграл по t. Для этого разберемся с интегралом: $J(a) = \int_0^\infty \cos(t)\,e^{-a\cdot t}dt$. Рассписав $\cos(t) = \mathtt{Re}\left(e^{it}\right)$, получим:

$$J(a) = \int\limits_0^\infty \cos(t)\,e^{-at}dt = \mathtt{Re}\int\limits_0^\infty e^{-at+it}dt = \mathtt{Re}\frac{1}{a-i} = \frac{a}{a^2+1}$$

Для исходного интеграла $a = x^2$, поэтому получаем:

$$I \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Приведём два способа взятия этого интеграла.

“Правильный” способ Этот интеграл можно взять стандартными методами (разбиением на элементарные дроби). Однако способ получается громоздким, поэтому воспользуемся другим методом. Во-первых, заметим, что если сделать в этом интеграле замену $t = \frac{1}{x}$, то получим:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_\infty^0 \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \frac{1/t^2}{1+1/t^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+t^4} dt$$

Это позволит представить интеграл в виде:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Теперь можно перейти к стандарнтой переменной для интегрирования симметрических многочленов $t = x - \frac{1}{x}$; при этом $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\arctan\left(+\infty\right) - \arctan\left(-\infty\right)\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

“Главный” способ Очень полезно научиться сводить такие интегралы к B-функции, о которой было рассказано выше. Перейдем в этом интеграле к переменной $t = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$. Имеем:

$$I \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} \cdot t \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_0^1 t^{-3/4} \left(1-t\right)^{-1/4} dt = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Используя приведенные выше свойства бета-функции, получаем:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(1\right)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}$$

Поэтому

$$I = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot \pi\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Как ни странно, ответ получился таким же.

Замечание Заметим, что этот же ответ можно было получить гораздо проще, используя трюк с комплексными переменными и комплексным интегралом Пуассона. Нужно лишь обратить внимание на тонкость, связанную с тем, что $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$, и необходимо выбрать правильный знак.

$$I = \int\limits_0^\infty \cos\left(x^2\right) dx = \frac{1}{2}\mathtt{Re} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{2}\mathtt{Re}\sqrt{\frac{\pi}{i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathtt{Re}\left\{e^{-i\pi/4}\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Задача 2

Возьмём интеграл:

$$I\left(\alpha, \beta\right) = \int\limits_0^\infty \frac{\ln\left(\alpha^2 + x^2\right)}{\beta^2 + x^2} \cdot dx$$

Решение:

Заметим, что без логарифма интеграл легко считается. Если мы продиффиренцируем интеграл по α, то логарифм заменится на дробь, а интегралы с дробями считать легче:

$$\frac{\partial I\left(\alpha,\beta\right)}{\partial\alpha}=\int\limits_0^\infty\frac{2\alpha}{\left(\beta^2+x^2\right)\left(\alpha^2+x^2\right)}\cdot dx$$

Пусть $\alpha\neq\beta$, тогда верно разложение : $\frac{1}{(\beta^2+x^2)(\alpha^2+x^2)}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)$; каждый полученый интеграл легко считается:

$$\frac{\partial I\left(\alpha,\beta\right)}{\partial\alpha}=2\alpha\int\limits_0^\infty\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)\cdot dx=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{\left(\alpha+\beta\right)\beta}$$

Тут мы считаем $\alpha>0,\beta>0$. Однако при $\alpha=\beta$, эта формула тоже верна:

$$\int\limits_0^\infty\frac{2\alpha}{\left(\alpha^2+x^2\right)^2}\cdot dx=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_0^\infty\frac{dx}{\alpha^2+x^2}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{2a^2}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение по α:

$$I\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\pi}{\beta}\ln\left(\alpha+\beta\right)+C\left(\beta\right)$$

Тут постоянная $C\left(\beta\right)$ - произвольная функция, которая не зависит от α. Чтобы найти значение этой функции, подставим в исходный интеграл $\alpha=0$:

$$I\left(0,\beta\right)=2\int\limits_0^\infty\frac{\ln x}{\beta^2+x^2}\cdot dx=\Bigg/\begin{array}{c}x=\beta\cdot t\\ dx=\beta\cdot dt\end{array}\Bigg/=2\int\limits_0^\infty\frac{\ln t+\ln\beta}{\beta\left(1+t^2\right)}\cdot dt=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}+2\int\limits_0^\infty\frac{\ln t}{1+t^2}\cdot dt$$

Последний интеграл равен нулю, это посто показать сделав замену $t=e^z$:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\ln t}{1+t^2}\cdot dt=\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{z}{1+e^{2z}}e^z\cdot dz=\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{z}{e^{-z}+e^z}\cdot dz$$

Итого $I\left(0,\beta\right)=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}\Rightarrow C\left(\beta\right)=0$. Формально ответ был получен в предположении $\alpha>0$ и $\beta>0$; поскольку исходный интеграл зависит лишь от их квадратов, то ответ в общем виде записывается как:

$$I\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\pi}{|\beta|}\ln\left(|\alpha|+|\beta|\right)$$

Задача 3

Вычислим интегралы Лапласа:

$$I_0\left(a,\omega\right)=\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{\cos\left(\omega x\right)}{x^2+a^2}\cdot dx$$

$$I_1\left(a,\omega\right)=\int\limits_{-\infty}^\infty\frac{x\cdot\sin\left(\omega x\right)}{x^2+a^2}\cdot dx$$

Решение:

Перейдем к переменной интегрирования $x = at$; введем обозначение $\omega a = \alpha$, и для определенности далее будем считать, что $\alpha > 0$. Получим:

$$I_0(a,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} J(\alpha)$$

Возьмем производную $J(\alpha)$ по α:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2+1} \cdot dx = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot dx$$

Получившийся интеграл сходится, однако производная от него уже расходится. В таком случае используем такой трюк:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{x} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(x^2+1\right) \sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{x} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{x} = -\pi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{x}$$

Теперь можно вычислять вторую производную, так как получающийся интеграл сходится:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot \frac{dx}{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2+a^2} \cdot dx = J(\alpha)$$

Заметим, что мы получили замкнутое дифференциальное уравнение на функцию $J(\alpha)$. Это уравнение линейно и с постоянными коэффициентами, поэтому оно решается с помощью подстановки $J(\alpha) = e^{\lambda \alpha}$. Такая подстановка приводит к алгебраическому уравнению на λ: $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ и, следовательно, общее решение уравнения записывается как:

$$J(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$$

Константа C_1 должна быть положена равной нулю. Действительно, исходный интеграл ограничен: $|J(\alpha)| \le \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \right| = \pi$. Константу C_2можно найти из значения интеграла при $\alpha = 0 \Rightarrow J(0) = \pi$. Значит, наш интеграл записывается как:

$$J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$$

Ответ был получен в предположении $\alpha > 0$. Поскольку исходный интеграл зависит лишь от модулей параметров a и ω, то ответ в общем виде записывается как:

$$I_0(a,\omega) = \frac{\pi}{|a|} e^{-|a\omega|}$$

Теперь, поскольку мы ранее получили, что:

$$I_1(a,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot \sin(\alpha x)}{x^2+1} \cdot dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$$

то, восстанавливая зависимость от исходных параметров, получим:

$$I_1(a,\omega) = \pi e^{-|a\omega|} \cdot \mathtt{sign}(\omega)$$

Задача 4

Используя экспоненциальную регуляризацию, найти "сумму" ряда из натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

Указание Суть экспоненциальной регуляризации - домножение на $e^{-\varepsilon n}$ и затем рассмотрение поведения функции при $\varepsilon \to 0$.

Решение:

Нам необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot e^{-\varepsilon n}$$

Этот ряд можно представить как производную по ε от геометрической прогрессии:

$$S(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}} = \left(\frac{1}{e^{\varepsilon}-1}\right)^2 \cdot e^{\varepsilon}$$

А теперь разложимся по ε, чтобы взять предел $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned}
S(\varepsilon) &= \left(\frac{1}{1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{6}\varepsilon^3-1+o(\varepsilon^3)}\right)^2 \left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o\left(\varepsilon^2\right)\right) = \\
&= \left(\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^3}{6}+o\left(\varepsilon^3\right)\right)^{-2} \cdot \left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o\left(\varepsilon^2\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{6}+o\left(\varepsilon^2\right)\right)^{-2} \left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o\left(\varepsilon^2\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{3\varepsilon^2}{4}+o\left(\varepsilon^2\right)\right)\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o\left(\varepsilon^2\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}-\varepsilon-\varepsilon^2+\frac{5\varepsilon^2}{12}+o\left(\varepsilon^2\right)\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-\frac{1}{12}\varepsilon^2+o\left(\varepsilon^2\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{12}+o(1)
\end{aligned}$$

Это и есть ответ.

Замечание Дзета-функция Римана при $\mathtt{Re}z > 1$ определяется как сумма ряда:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

Используя экспоненциальную регуляризацию, мы, на самом деле, получили значение $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Эту функцию можно доопределить (единственным образом) и для $\mathtt{Re}z < 1$ так, чтобы полученная функция получилась аналитической; и значение в $z = -1$ получено именно в смысле аналитического продолжения. Этот результат означает, что в определенном смысле сумма всех натуральных чисел равна $-\frac{1}{12}$.

Задачи для домашнего решения:

Задача 1 Вычислить интеграл:

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{\left(x^2+1\right)^2} \cdot dx$$

Задача 2 Вычислить интеграл:

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot dx$$

Задача 3* Вычислить интеграл:

$$I(m) = \int_{0}^{\infty} \frac{\cos x}{x^m} dx$$

при $0 < m < 1$. Указание: воспользуйтесь трюком, аналогичным задаче 1, а именно, представьте

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_{0}^{\infty} t^{m-1} e^{-xt} dt$$

Задачи 4, 5 Функция Бесселя первого рода целого индекса n можно определить как интеграл:

$$J_n\left(z\right) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\left(n\varphi - z\cos\varphi\right) d\varphi$$

Показать, что она удовлетворяет так называемому уравнению Бесселя:

$$z^2 J_n''\left(z\right) + zJ_n'\left(z\right) + \left(z^2 - n^2\right) J_n\left(z\right) = 0$$

Также выразить производную функции Бесселя через её же, но, возможно, с другими индексами n.

Задача 6 Точное значение периода колебаний математического маятника можно записать как:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K\left(\sin\frac{\phi_0}{2}\right)$$

тут ϕ_0 - амплитуда колебаний, а $K\left(k\right)$ - так называемый полный эллиптический интеграл, определяемый следующим образом:

$$K\left(k\right) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dz}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 z}}$$

Найти первые два члена разложения периода T по малости амлитуды ϕ_0.

Задачи 7, 8 Используя размерную регуляризацию и регуляризацию Паули-Вилларса, рассмотрите интеграл:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{p^3}{p^2 + h^2} dp$$

Задача 9* Найти выражение для площади сферы σ_d в d-мерном пространстве. Указание: рассмотрите интеграл Гаусса $\int e^{-\lambda x^2} dx$ в d-мерном пространстве.