Семинар 6 по теме “Дифференциальные уравнения”

Однородные линейные дифференциальные уравнения

Линейными дифференциальными уравнениями назвыаются уравнения вида:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \cdot y^{(k)}(x) = 0$$

Такие уравнения называются линейными, поскольку если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения этого уравнения, то их общая линейная комбинация $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ также является решением этого уравнения; это означает, что решения этого уравнения образуют линейное пространство. Таким образом, чтобы задать общее решение этого уравнения, необходимо найти все (как правило, их количество совпадает с порядком дифференциального уравнения n) линейно-независимые решения.

Задача 1 (разложение в ряд)

Часто решение линейного дифференциального уравнения можно найти в виде разложения в ряд по степеням x. Проиллюстрируем это на примере. Найдём решение дифференциального уравнения Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + y(x) = 0$$

в виде разложения $y(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

Решение

Подставля $y(x)$ в нужном виде в уравнение, мы получаем:

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \cdot a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot x^{k-2} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = 0$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$x^{-1} \to a_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$x^{k-2} \to k(k-1) a_k + k \cdot a_k + a_{k-2} = 0 \Rightarrow a_k = -\frac{1}{k^2} \cdot a_{k-2}$$

Таким образом, мы получаем:

$$a_{2k-1} \equiv 0$$

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2(k-1))^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{2^2} \cdot 1 = \frac{(-1)^k}{2^{2k} \cdot (k!)^2}$$

Таким образом, мы получаем функцию Бесселя нулевого порядка (которая является решением этого уравнения) в виде ряда:

$$y(x) \equiv J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Если $a_k(x) = \texttt{const}$, то говорят, что имеет место уравнение с постоянными коэффициентами. Подстановкой $y = \exp(\lambda \cdot x)$, это уравнение сводится к алгебраическому уравнению на λ:

$$P(\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{n} \lambda^k a_k = 0$$

тут $P(\lambda)$ называется характеристическим многочленом этого дифференциального уравнения.

В силу основной теоремы арифметики и теоремы Безу, этот многочлен всегда можно представить в виде $P(\lambda) = a_n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_n)$, где λ_k - (возможно комплексные) решения уравнения $P(\lambda) = 0$.

Невырожденный случай Если все λ_k, $k = 1 \dots n$ различны, то говорят, что имеет место невырожденный случай. В таком случае каждой λ_k соответствует ровно 1 решение исходного уравнения $y_k(x) = e^{\lambda_k x}$; общее решение (в силу линейности уравнения) записывается как

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot e^{\lambda_k x}$$

где C_k - произвольные константы.

Вырожденный случай Может случиться, что какое-то число λ повторяется m раз (говорят, что λ - корень кратности m уравнения $P(\lambda) = 0$). В таком случае оказывается, что можно тоже построить m линейно-независимых решений в виде $y_k(x) = x^k e^{\lambda x}$, $k = 0 \dots m-1$.

Общий случай В общем случае имеется разложение

$$P(\lambda) = a_0(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\dots(\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

где $m_1 + \dots + m_p \equiv n$; все λ_k различны и m_k - кратность λ_k как корня. В этом случае, обобщая предыдущие 2 пункта, общее решение запишется как:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=1}^{p} e^{\lambda_k x} \sum_{i=0}^{m_k-1} C_{ki} x^i = e^{\lambda_1 x}\left(C_{10} + C_{11}x \dots + C_{1m_1}x^{m_1-1}\right) + \dots \\ &+ e^{\lambda_p x}\left(C_{p0} + C_{p1}x + \dots + C_{pm_p}x^{m_p-1}\right) \end{aligned}$$

где C_{ki} - произвольные константы; их количество ровно $m_1 + \dots + m_p \equiv n$.

Задача 2

Найдём общее решение дифференциального уравнения

$$y^{(4)} + 6y^{(3)} + 13y'' + 12y' + 4y = 0$$

Решение

Следуя алгоритму решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, составим характеристических многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4$$

Несложно видеть, $\lambda = -1$ и $\lambda = -2$ являются корнями кратности 2 этого многочлена:

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 (\lambda + 2)^2$$

Следовательно, общее решение записывается как:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)\, e^{-x} + (C_3 + C_4 x)\, e^{-2x}$$

Неоднородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Неоднородными уравнениями называются уравнения с ненулевой правой частью:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot y^{(k)}(x) = f(x)$$

Во-первых, в силу линейности, если $y_1(x)$ удовлетворяет уравнению с правой частью $f_1(x)$, а $y_2(x)$ - с $f_2(x)$, то $y_1(x) + y_2(x)$ будет удовлетворять уравнению с правой частью $f_1(x) + f_2(x)$. В силу этого, общее решение неоднородного уравнения будет представлять собой сумму общего решения однородного (с нулевой правой частью) и частного решения с заданной правой частью.

Далее удобно рассмотреть несколько наиболее интересных частных случаев вида правой части.

Полином Если правая часть имеет вид $f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, то решение уравнения стоит искать тоже в виде некоторого полинома, степень которого совпадает с n (это несложно увидеть, если проследить за максимальной степенью в левой части уравнения и в правой)

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k x^k$$

Подстановка такой функции даст ровно $n+1$ линейное уравнение на коэффициенты C_k, откуда их можно будет однозначно выразить.

Экспонента (а также $\sin$, $\cos$) Правая часть имеет вид $f(x) = e^{\lambda x}$. Тут тоже может быть случай резонанса, а именно: если λ - корень характеристического многочлена кратности m, то искать решение стоит в виде $C \cdot x^m \cdot e^{\lambda x}$; если же λ не является корнем - то решение стоит искать в виде $C \cdot e^{\lambda x}$.

Задача 3

$$y'' - y = e^x \cos x + e^x$$

Решение

Однородное Сперва найдём общее решение однородного уравнения:

$$y_0''(x) - y_0(x) = 0$$

Запишем характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Отсюда видно, что общее решение записывается как:

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Теперь перепишем правую часть в виде

$$f(x) = \frac{1}{2} e^x \left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + e^x = \frac{1}{2} e^{(1+i)x} + \frac{1}{2} e^{(1-i)x} + e^x$$

Неоднородное с правой частью $f_1(x) = \frac{1}{2}e^{(1+i)x} + \frac{1}{2}e^{(1-i)x}$ Ни $1+i$, ни $1-i$ не являются корнями характеристического многочлена. Поэтому, следуя общей схеме, будем искать решение в виде:

$$y_1(x) = \tilde{C}_1 e^{(1+i)x} + \tilde{C}_2 e^{(1-i)x}$$

Однако, поскольку нас, как правило, интересуют лишь вещественные решения, то можно сделать замену констант и искать решение в виде:

$$y_1(x) = C_1 e^x \sin x + C_2 e^x \cos x$$

Подстановка такой функции в уравнение дает нам:

$$y_1'(x) = (C_1 - C_2) e^x \sin x + (C_2 + C_1) e^x \cos x$$

$$y_1''(x) = 2C_1 e^x \cos x - 2C_2 e^x \sin x$$

Поэтому:

$$(2C_1 - C_2) e^x \cos x + (C_1 + 2C_2) e^x \sin x = e^x \cos x$$

$$\begin{cases} 2C_1 - C_2 & = 1 \\ C_1 + 2C_2 & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 & = \frac{2}{5} \\ C_2 & = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

значит, решение записывается как:

$$y_1(x) = \frac{2}{5} e^x \sin x - \frac{1}{5} e^x \cos x$$

Неоднородное с правой частью $f_2(x) = e^x$ Число $\lambda = 1$ является корнем характеристического многочлена кратности 1, поэтому решение ищем в виде:

$$y_2(x) = C \cdot x \cdot e^x$$

Подстановка в уравнение даёт нам:

$$y_2'(x) = C(x+1) e^x$$

$$y_2''(x) = C(x+2) e^x$$

Получаем:

$$2Ce^x = e^x \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Значит, решение записывается как:

$$y_2(x) = \frac{1}{2} x e^x$$

Таким образом, общее решение записывается как:

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{2}{5} e^x \sin x - \frac{1}{5} e^x \cos x + \frac{1}{2} x e^x$$

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называются уравнения, которые приводится к виду:

$$g(y)\,dy = f(x)\,dx$$

Решение таких уравнений получается просто интегрированием левой и правой части.

Задача 4

Рассмотрим классическое дифференциальное уравнение движения математического маятника ($\omega^2 = \frac{g}{l}$):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \sin\varphi$$

Если из положения равновесия маятнику придать необходимую начальную скорость, конечное положение маятника может оказаться точно перевёрнутым. Найдём такое решение.

Решение

Для такого уравнения можно записать некую сохраняющуюся величину $I\left[\varphi\left(t\right)\right]$ (так называемый "первым интегралом"; он может зависеть как от φ в некий момент времени, так и от производных). Сохранение этой величины означает, что для любого $\varphi\left(t\right)$ - решения уравнения, будет выполнено $\frac{d}{dt}I\left[\varphi\left(t\right)\right] \equiv 0$. В данном случае, выражение для первого интеграла можно написать из физических соображений - известно, что для консервативных систем имеется закон сохранения энергии; в нашем случае его можно записать как:

$$I\left[\varphi\left(t\right)\right] = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\varphi$$

Действительно:

$$\frac{d}{dt}I\left[\varphi\left(t\right)\right] = \ddot{\varphi}\cdot\dot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\left(\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi\right) \equiv 0$$

При помощи первых интегралов можно понижать степень уравнения. Действительно, если величина I - сохраняется, то мы можем просто записать уравнение уже первого порядка:

$$I = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2\cos\varphi$$

Решим его. Перепишем в виде:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\left(I + \omega^2\cos\varphi\right)}$$

Мы получили уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2\left(I + \omega^2\cos\varphi\right)}} = dt$$

Если теперь проинтегрировать полученное тождество и разрешить его, выразив $\varphi\left(t\right)$, мы полностью решим задачу в общем виде. Однако, в общем случае интеграл в левой части не выражается через элементарные функции; для таких интегралов введен целый класс специальных функций, называемые эллиптическими функциями.

В случае малых φ его можно взять приближённо, заменив $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$; полученный ответ будет ни чем иным как гармоническим решением $\sin\left(\omega t + \varphi_0\right)$.

Нас такое разложение не устраивает, поскольку нас интересует решение, которое в некий момент времени достигает большого угла $\varphi\left(\dots\right) = \pi$ (при этом мы хотим, чтобы маятник остановился, то есть $\dot{\varphi}\left(\dots\right) = 0$). Оказывается, что интеграл можно взять точно и для этого частного случая. Действительно, значение "энергии" для такого решения будет равно

$$I = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\left(t_0\right) - \omega^2\cos\varphi\left(t_0\right) = \omega^2$$

Это значит, что интеграл записывается как:

$$\int\limits_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2\left(1 + \cos\varphi\right)}} = t$$

Универсальная тригонометрическая подстановка даёт нам:

$$\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\tan\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right)} \frac{2\cdot dz}{1+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}} = \int\limits_0^{\tan\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right)} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

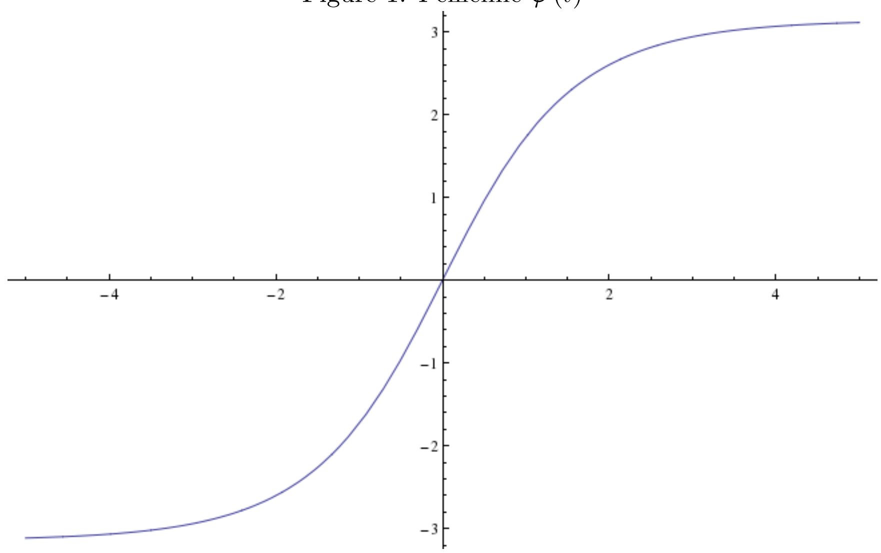
Тривиальной подстановкой $z = \sinh u \Rightarrow dz = \cosh u \cdot du$ этот интеграл получается:

$$\omega t = \texttt{arcsinh}\left(\tan\left(\frac{1}{2}\varphi(t)\right)\right)$$

откуда, выражая $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 2\arctan(\sinh(\omega t))$$

Figure 1: Решение $\varphi(t)$



Во-первых, для того, чтобы маятнику “добраться” до точки $\varphi = \pi$, ему требуется бесконечное время (он лишь асимптотически приближается к этому значению). В обратную сторону это означает, что из вертикального положения маятник будет падать вечно. Этот ответ сам по себе не очень интересен (ведь $\varphi = \pi$ - тоже положение равновесия системы); однако интересным является тот результат, что если маятник отклонить на очень малый угол $\delta\varphi \ll 1$, то падать он будет логарифмически долго: $\omega_0 T \sim \ln \frac{1}{\delta\varphi}$.

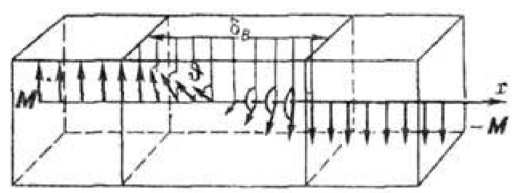
Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти разложение в ряд по x функции Бесселя целого порядка m, определяемой как решение дифференциального уравнения:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) \cdot y(x) = 0$$

Задача 2 (доменная стенка Блоха) В классическом ферромагнетике намагниченность каждой “точки” постоянна, а меняется лишь её направление (имеются “вращающиеся стрелочки” в каждой точке). Также известно, что в ферромагнетиках, как правило, устанавливается доменная структура - имеются большие области, в которых “стрелочки” смотрят преимущественно в одном направлении.

Figure 2: Доменная стенка



В одномерном случае зависимость угла от координаты $\theta(x)$ определяется дифференциальным уравнением:

$$A\theta''(x) + K\sin(\theta(x))\cos(\theta(x)) = 0$$

Предлагается определить такую зависимость для “доменной стенки”, что соответствует граничным условиям $\theta(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\theta'(\pm\infty) = 0$.

Задача 3 Найти по определению матричную экспоненту e^A для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Задача 4 (осциллятор с трением) Найти решение дифференциального уравнения, описывающее грузик на пружинке с трением ($\dot{x}(t) \equiv \frac{dx}{dt}$):

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

с начальными условиями $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$, в случае большого затухания $\gamma \gg \omega_0$; найти максимальное отклонение такого осциллятора от положения равновесия.