Семинар по теме “Дифференциальные уравнения с малым параметром”

Исследование гармонического осцилятора с возбуждающей силой

Найдём решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \phi(t)$$

для произвольной “силы” $\phi(t)$. Для этого воспользуемся методом вариации постоянных. Решение однородного уравнения (с $\phi(t) \equiv 0$) записывается как:

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

Следуя методу вариации постоянных, мы делаем следующую подстановку в уравнение:

$$x(t) = C_1(t)\cos\omega t + C_2(t)\sin\omega t$$

Очевидно, что поставленная так задача избыточна (имеются целых 2 произвольных функции). Для того, чтобы задача имела однозначное решение, наложим дополнительные ограничения. А именно, потребуем, чтобы при дальнейших дифференцированиях члены с первыми производными констант пропадали:

$$\dot{x} = \dot{C}_1 \cos\omega t - \omega C_1 \sin\omega t + \dot{C}_2 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t$$

Требуем:

$$\dot{C}_1 \cos\omega t + \dot{C}_2 \sin\omega t \equiv 0$$

$$\dot{x} = -\omega C_1 \sin\omega t + \omega C_2 \cos\omega t$$

$$\ddot{x} = -\omega\dot{C}_1 \sin\omega t - \omega^2 C_1 \cos\omega t + \omega\dot{C}_2 \cos\omega t - \omega^2 C_2 \sin\omega t$$

Подставляем в уравнение:

$$\dot{C}_1(-\omega\sin\omega t) + \dot{C}_2(\omega\cos\omega t) = \phi(t)$$

Таким образом, с учётом дополнительного требования мы получаем алгебраическую систему уравнений на производные наших варьирующихся постоянных:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos\omega t + \dot{C}_2 \sin\omega t & = 0 \\ \dot{C}_1(-\omega\sin\omega t) + \dot{C}_2(\omega\cos\omega t) & = \phi(t) \end{cases}$$

Решаем:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 & = -\frac{1}{\omega}\sin\omega t \cdot \phi(t) \\ \dot{C}_2 & = \frac{1}{\omega}\cos\omega t \cdot \phi(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 & = -\frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\omega\tau \cdot \phi(\tau)\, d\tau + \tilde{C}_1 \\ C_2 & = \frac{1}{\omega}\int_0^t \cos\omega\tau \cdot \phi(\tau)\, d\tau + \tilde{C}_2 \end{cases}$$

Значит, решение исходного неоднородного уравнения записывается как:

$$x\left(t\right)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\int\limits_0^t\sin\left(\omega\left(t-\tau\right)\right)\phi\left(\tau\right)d\tau$$

Интересно, что такой вид ответа - общий. Всегда решение неоднородного линейного дифференциального уравнения можно записать в виде

$$x\left(t\right)=x_0\left(t\right)+\int\limits_0^t G\left(t,\tau\right)\phi\left(\tau\right)d\tau$$

(где $x_0\left(t\right)$ - решение однородного уравнения); причём если уравнение однородно по времени (не зависит явно от времени), то $G\left(t,\tau\right)\equiv G\left(t-\tau\right)$. Функция $G\left(t,\tau\right)$ называется функцией Грина этого уравнения.

Задача 1 (теория возмущений)

При помощи изложенного выше метода можно исследовать задачи с возмущением. Исследуем задачу:

$$\begin{cases}\ddot{x}+\omega^2x & =-\epsilon\omega^2x\\ x\left(0\right) & =a\\ \dot{x}\left(0\right) & =0\end{cases}$$

Точное её решение записывается как:

$$\begin{aligned}x\left(t\right) &= a\cos\left(\sqrt{1+\epsilon}\omega t\right)\approx a\cos\left(\left(1+\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{8}\epsilon^2\right)\omega t\right)\approx\\ &\approx a\cos\left(\omega t\right)+\left(\frac{1}{2}\epsilon-\frac{1}{8}\epsilon^2\right)\omega t\cdot\left(-a\sin\left(\omega t\right)\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\epsilon\omega t\right)^2\cdot\left(-a\cos\omega t\right)\approx\\ &\approx a\cos\left(\omega t\right)-\frac{1}{2}\epsilon\omega t\cdot a\sin\omega t-\frac{1}{8}\epsilon^2a\left(\omega t\sin\omega t-\omega^2t^2\cos\omega t\right)\end{aligned}$$

На примере этой простой задачи продемонстрируем, как разложение по ϵ можно получить по-другому. Если мы подставим решение в виде $x\left(t\right)=x_0\left(t\right)+\epsilon x_1\left(t\right)+\epsilon^2x_2\left(t\right)+\ldots$ и соберём члены с одинаковыми степенями ϵ, то мы получим систему уравнений:

$$\ddot{x}_k+\omega^2x_k=-\omega^2x_{k-1}$$

Система уравнений в таком виде позволяет построить итерационный процесс, находя поправки высших порядков по ϵ. Используя метод, изложенный выше, можно записать:

$$x_k\left(t\right)=-\omega\int\limits_0^t\sin\left(\omega\left(t-\tau\right)\right)x_{k-1}\left(\tau\right)d\tau$$

Начальное приближение записывается как $x_0\left(t\right)=a\cos\omega t$. Таким образом, первая поправка находится как:

$$\begin{aligned}x_1\left(t\right) &= -\omega\int\limits_0^t\sin\left(\omega\left(t-\tau\right)\right)a\cos\omega\tau\cdot d\tau=-\frac{a\omega}{2}\int\limits_0^t\left(\sin\omega t+\sin\left(\omega t-2\omega\tau\right)\right)d\tau=\\ &= -\frac{a\omega}{2}t\sin\omega t-\frac{a\omega}{2\cdot2\omega}\cos\left(\omega t-2\omega\tau\right)|_{\tau=0}^{\tau=t}=-\frac{1}{2}a\omega t\sin\omega t\end{aligned}$$

Мы видим, что эта поправка совпадает с точным разложением до $\sim \epsilon$. Вторая поправка:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\omega \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) \cdot \left(-\frac{1}{2} a\omega\tau \sin \omega\tau\right) d\tau = \frac{1}{4} a\omega^2 \int_0^t \tau (\cos(\omega t) - \cos(\omega(t-2\tau))) d\tau = \\ &= \frac{1}{8} a\omega^2 t^2 \cos \omega t - \frac{1}{4} a\omega^2 \int_0^t \tau \cos(\omega(t-2\tau)) d\tau = \frac{1}{8} a\omega^2 t^2 \cos \omega t + \frac{1}{4} a\omega^2 \frac{1}{2\omega} \int_0^t \tau d(\sin(\omega(t-2\tau))) = \\ &= \frac{1}{8} a\omega^2 t^2 \cos \omega t + \frac{1}{8} a\omega \left(\tau \sin \omega(t-2\tau)\right)|_0^t - \int_0^t \sin(\omega(t-2\tau)) d\tau = \frac{1}{8} a\omega^2 t^2 \cos \omega t - \frac{1}{8} a\omega t \sin \omega t \end{aligned}$$

Исходя из этого, с точностью до ϵ^2 мы получаем ответ (конечно, совпадающий с разложением точного ответа, полученного выше):

$$x(t) \approx a \cos \omega t - \epsilon \cdot \frac{1}{2} a\omega t \sin \omega t + \epsilon^2 \cdot \frac{1}{8} a\omega t (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)$$

Задача 2 (ангармонический осциллятор)

Расмотрим приближенное решение уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x &= -\epsilon x^3 \\ x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

Решение

Метод, изложенный в задаче 1, можно применить и тут. Раскладывая по малости ϵ решение в виде $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t)$, мы получаем следующую систему уравнений, дающую нам первый шаг итерационного процесса:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 &= 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 &= -x_0^3 \end{cases}$$

Первое уравнение опять имеет такое же невозмущенное решение $x_0(t) = a \cos \omega t$; решение второго уравнения записывается с помощью функции Грина:

$$x_1(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-\tau)) \cdot a^3 \cos^3 \omega\tau \cdot d\tau = -\frac{a^3}{\omega} \int_0^t [\sin \omega t \cos \omega\tau - \sin \omega\tau \cos \omega t] \cos^3 \omega\tau \cdot d\tau$$

Второе слагаемое дает нам:

$$\frac{a^3}{\omega} \cos \omega t \int_0^t \sin \omega\tau \cos^3 \omega\tau d\tau \quad = \quad \frac{a^3}{\omega^2} \cos \omega t \left(-\frac{1}{4} \cos^4 \omega\tau\right)_0^t = \frac{a^3}{4\omega^2} \cos \omega t \left(1 - \cos^4 \omega t\right)$$

Первое слагаемое:

$$\begin{aligned} -\frac{a^3}{\omega} \sin \omega t \int_0^t \cos^4 \omega\tau \cdot d\tau &= -\frac{a^3}{\omega} \sin \omega t \int_0^t \frac{1}{8} (\cos 4\omega\tau + 4 \cos 2\omega\tau + 3) d\tau = \\ &= -\frac{a^3}{\omega} \sin \omega t \left(\frac{3}{8} t + \frac{1}{4\omega} \sin 2\omega t + \frac{1}{32\omega} \sin 4\omega t\right) \end{aligned}$$

Используя формулы понижения степени, ответ можно привести к виду:

$$x_1(t) = -\frac{a^3}{\omega^2} \left(\frac{3}{8} \omega t \sin \omega t + \frac{1}{32} \cos \omega t - \frac{1}{32} \cos 3\omega t\right)$$

Мы получили интересный результат: в нелинейном осциляторе появилось колебание с третьей гармоникой (то есть с частотой 3ω вместо ω).

Задача 3 (параметрический резонанс)

Рассмотрим теперь уравнение:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x &= -\epsilon x \cos \Omega t \\ x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

в условиях близости к параметрическому резонансу $\Omega = 2\omega - \gamma$ ($\gamma \lesssim \frac{\epsilon}{2\omega}$, $\epsilon \ll \omega^2$)

Решение

Будем искать решение в виде:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi(t))$$

Формальная подстановка даёт:

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\omega t + \phi) - A\left(\omega + \dot{\phi}\right) \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}\left(\omega + \dot{\phi}\right) \sin(\omega t + \phi) - \left(\omega + \dot{\phi}\right)^2 A \cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi} \sin(\omega t + \phi)$$

Получаем:

$$\ddot{A} \cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}\left(\omega + \dot{\phi}\right) \sin(\omega t + \phi) - \left(2\omega\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\right) A \cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi} \sin(\omega t + \phi) = -\epsilon A \cos(\omega t + \phi) \cos \Omega t$$

Правую часть можно представить в виде $\frac{1}{2}(\cos(\omega t + \phi + \Omega t) + \cos(\Omega t - \omega t - \phi))$. При $\Omega \sim 2\omega$, первый член будет близок к $\cos 3\omega t$. В этом смысле он отвечает за третью гармонику и нас не интересует; выбросим его. Получаем:

$$\ddot{A} \cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}\left(\omega + \dot{\phi}\right) \sin(\omega t + \phi) - \left(2\omega\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\right) A \cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi} \sin(\omega t + \phi) = -\frac{\epsilon A}{2} \cos(\omega t + \gamma t - \phi)$$

Из структуры уравнения видно, что если взять $\phi = \frac{\gamma t}{2} + \varphi$, все тригонометрические функции будут одного и того же вида. Поэтому, обозначив $\tilde{\omega} = \omega + \frac{\gamma}{2}$:

$$\ddot{A} \cos(\tilde{\omega} t + \varphi) - 2\dot{A}(\tilde{\omega} + \dot{\varphi}) \sin(\tilde{\omega} t + \varphi) - \left(2\omega\left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A \cos(\tilde{\omega} t + \varphi) - A\ddot{\varphi} \sin(\tilde{\omega} t + \phi) = -\frac{\epsilon A}{2} \cos(\tilde{\omega} t - \varphi)$$

Собирая "быстрые" члены при $\cos\tilde{\omega} t$ и $\sin\tilde{\omega} t$, мы получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \ddot{A} \cos\varphi - 2\dot{A}(\tilde{\omega} + \dot{\varphi}) \sin\varphi - \left(2\omega\left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A \cos\varphi - A\ddot{\phi} \sin\phi &= -\frac{\epsilon A}{2} \cos\varphi \\ -\ddot{A} \sin\varphi - 2\dot{A}(\tilde{\omega} + \dot{\varphi}) \cos\varphi + \left(2\omega\left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A \sin\varphi - A\ddot{\phi} \cos\phi &= -\frac{\epsilon A}{2} \sin\varphi \end{cases}$$

Мы ожидаем, что A и φ - медленные переменные; это значит, что в этом уравнении можно выбросить члены $\ddot{A}$, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\phi}$ а также выбросить члены γ на фоне ω. Это позволяет нам сильно упростить систему:

$$\begin{cases} 2\dot{A}\omega &= -A \cot\varphi\left(-\frac{\epsilon}{2} + \omega\gamma\right) \\ 2\dot{A}\omega &= -A \tan\varphi\left(-\frac{\epsilon}{2} - \omega\gamma\right) \end{cases}$$

Отсюда, из условия самосогласованности этой системы, мы получаем результат, что фаза φ выходит на константу, определяемую из условия:

$$\frac{\epsilon - 2\omega\gamma}{\epsilon + 2\omega\gamma} = \tan^2\varphi$$

И при этом уравнение на амплитуду получается как

$$\dot{A} = A\frac{\sqrt{\epsilon^2 - (2\omega\gamma)^2}}{4\omega}$$

откуда мы получаем экспоненциальный рост амплитуды

$$A(t) \sim \exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\epsilon^2 - (2\omega\gamma)^2}{\omega^2}}t\right)$$

При этом мы воспользовались условием $\gamma < \frac{\epsilon}{2\omega}$. Это значение определяет область параметрического резонанса; при большем отклонении частоты мы не получим резонанс (то есть экспоненциальный рост), а получим биения ограниченной амплитуды. В этом случае ход решения должен измениться.

Чтобы получить этот ответ, мы сделали предположения, а именно - мы предполагали "медленность" функций $A(t)$ и $\varphi(t)$; из этих предположений мы получили приближенное решение, которое эти предположения подтверждает. Таким образом, наше приближенное решение нашей системы непротиворечиво.

Задачи для домашнего решения

Задача 1 С помощью метода вариации постоянных, найти функцию Грина уравнения:

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) = \phi(t)$$

(то есть представить решение этого уравнения в виде $x(t) = x_0(t) + \int_0^t G(t-\tau)\phi(\tau)\,d\tau$)

Задача 2 При помощи результата предыдущей задачи, найти поведение решения $x(t)$ с граничным условием $x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0$ и вынуждающей силой

$$\phi(t) = \phi_0\frac{\tau}{\tau^2 + t^2}$$

где $\gamma\tau \ll 1$.

Задача 3 Частица с зарядом $q > 0$ налетает на закрепленную заряженную частицу с зарядом $Q > 0$ с прицельным параметром b. Оценить угол отклонения частицы от исходного направления, считая частицу очень быстрой ($\frac{mv^2}{2} \gg \frac{qQ}{b}$)

Задача 4 Частица массы m движется в потенциале маятника $U(x) = -U_0\cos\frac{x}{a}$. Помимо этого, на частицу действует сила вязкого трения $-\gamma m\dot{x}$, а также приложена постоянная сила F. Пока сила $F > \frac{U_0}{a}$, у частицы имеется режим движения с некой постоянной средней скоростью. Если силу F постепенно понижать, то из-за инерции этот режим может сохраняться вплоть до некоего критического значения F_c. Найти значение F_c в случае малого трения. Что в данном случае означает малость трения?