Семинар по теме “Кратные и криволинейные интегралы”

Задача 1

Найдём энергию гравитационного взаимодействия шара массы M радиуса r и точечной частицы массы m, которая находится на расстоянии $R > r$ от него.

Решение

Результат известен из курса общей физики; эта энергия совпадает с энергией взаимодействия двух точечных частиц: $E = G\frac{M \cdot m}{R}$ (G - гравитационная постоянная). Получим этот результат непосредственным вычислением.

Из закона приятяжения следует, что энергия выражается в виде следующего интеграла по шару:

$$E = G \iiint\limits_{\Omega} \frac{\rho \cdot m}{\left|\overline{r} - \overline{R}\right|} d^3\overline{r}$$

где вектор $\overline{R}$ направлен на точечную массу, $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$ - плотность, а область интегрирования Ω представляет собой шар. Введем систему координат - поместим шар в начало координат; ось Oz направим на частицу, так что её координаты $\overline{R} = (0; 0; R)$. Запишем этот интеграл в сферических координатах: $d^3\overline{r} = \rho^2 \cdot d\rho \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$, причём вектор $\overline{r} = (r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi; r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi; r \cdot \cos\theta)$. Получаем:

$$E = G \cdot \frac{3Mm}{4\pi r^3} \cdot \int\limits_0^r \rho^2 d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(R - \rho\cos\theta\right)^2 + \rho^2 \sin^2\theta}}$$

Интеграл по φ даёт просто 2π; раскрывая скобки в знаменателе, получаем:

$$E = G \cdot \frac{3Mm}{2r^3} \cdot \int\limits_0^r \rho^2 d\rho \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin\theta \cdot d\theta}{\sqrt{R^2 - 2R\rho\cos\theta + \rho^2}}$$

Сделаем замену во внешнем интеграле $z = -\cos\theta \Rightarrow dz = \sin\theta \cdot d\theta$:

$$E = G \cdot \frac{3Mm}{2r^3} \cdot \int\limits_0^r \rho^2 d\rho \int\limits_{-1}^{1} \frac{dz}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z}}$$

Этот интеграл можно взять:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot R \cdot \rho} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\left(R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z\right)}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z}} &= \frac{1}{R\rho}\left(\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho} - \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2R\rho}\right) = \\ &= \frac{1}{R\rho}\left(R + \rho - |R - \rho|\right) \end{aligned}$$

Поскольку $R > \rho$, то этот интеграл равен $\frac{2}{R}$. Получаем:

$$E = G \cdot \frac{3Mm}{2r^3} \cdot \frac{2}{R} \cdot \int\limits_0^r \rho^2 d\rho = G \cdot \frac{3Mm}{r^3} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{r^3}{3} = G\frac{M \cdot m}{R}$$

как и должно было получиться.

Задача 2

Найдём момент инерции тора большого радиуса R и малого радиуса r относительно оси, перпендикулярной "плоскости тора".

Решение

Введём координаты на торе:

$$\begin{cases} x &= (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (R+\rho\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= \rho\sin\theta \end{cases}$$

При этом $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; 2\pi]$, $\rho \in [0; r]$. Найдём якобиан перехода к таким координатам:

$$\begin{aligned} J &= \mathtt{det}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \mathtt{det}\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -(R+\rho\cos\theta)\sin\varphi & (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \\ &= (R+\rho\cos\theta)\cdot\rho\cdot\left\{\cos^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi\right\} = (R+\rho\cos\theta)\cdot\rho \end{aligned}$$

Посчитаем объём тора Ω:

$$V = \iiint\limits_{\Omega} d^3\overline{r} = \int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta \cdot (R+\rho\cos\theta) = \pi r^2 \times 2\pi R$$

поэтому плотность тора равна $\frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}$. Момент инерции тора определяется как:

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)d^3\overline{r} = \frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}\int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\pi} d\theta\,(R+\rho\cos\theta)\cdot(R+\rho\cos\theta)^2 = \\ &= \frac{M}{\pi r^2 \times R}\int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta\,(R+\rho\cos\theta)^3 = \frac{M}{\pi r^2 \times R}\int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta\left\{R^3 + 3R^2\rho\cos\theta + 3R\rho^2\cos^2\theta + \rho^3\cos^3\theta\right\} = \\ &= \frac{M}{\pi r^2 \times R}\int\limits_0^r \rho d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\theta\left\{R^3 + 3R^2\rho\cos\theta + 3R\rho^2\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) + \rho^3\frac{1}{4}(\cos 3\theta + 3\cos\theta)\right\} \end{aligned}$$

Поскольку интеграл по θ - по полному периоду, то все интегралы от $\cos n\theta$ зануляются. Остаётся:

$$I_z = \frac{2M}{r^2}\int\limits_0^r \rho d\rho \cdot \left(R^2 + \frac{3}{2}\rho^2\right) = \frac{2M}{r^2}\left(R^2\frac{r^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{r^4}{4}\right) = M\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$$

Задача 3

Найдём площадь σ_D единичной сферы в D-мерном пространстве.

Решение

Рассмотрим D-мерный Гауссов интеграл:

$$I = \int\limits_{\mathbb{R}^D}\!\cdots\!\int \exp\left(-|\overline{x}|^2\right) d^D\overline{x}$$

С одной стороны, если рассмотреть его в D-мерных декартовых координатах, мы получим:

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx_D \exp\left(-\left(x_1^2 + \dots + x_D^2\right)\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} dx_2 \dots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x_D^2} dx_D = \\ &= \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^D = \pi^{D/2} \end{aligned}$$

С другой стороны, мы можем его же рассмотреть в D-мерных сферических координатах. Поскольку подынтегральная функция зависит лишь от расстояния до центра, то мы можем сразу взять интеграл по всем углам; несложно заметить, что полученный интеграл даст нам как раз площадь единичной сферы в D-мерном пространстве (например, в трёхмерье d^3x заменится на $4\pi x^2 dx$, и 4π - как раз площадь единичной сферы в трёхмерье). Таким образом, мы можем записать:

$$I = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sigma_D x^{D-1} dx$$

Как мы уже знаем, этот интеграл выражается через Г-функцию Эйлера. Сделаем замену $t = x^2$, получим:

$$I = \sigma_D \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{D-1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \sigma_D \int\limits_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{D}{2}-1} dt = \frac{1}{2} \sigma_D \Gamma\left(\frac{D}{2}\right)$$

Таким образом, приравнивая два выражения одного и того же интеграла, мы получим:

$$\sigma_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$$

$$\sigma_{2n} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$$

$$\sigma_{2n-1} = \frac{2\pi^{n-\frac{1}{2}}}{\left(n-\frac{3}{2}\right)\left(n-\frac{5}{2}\right)\dots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{(2n-3)!!}$$

Несколько частных случаев:

$$\begin{cases} \sigma_1 &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 2 \\ \sigma_2 &= \frac{2\pi}{\Gamma(1)} = 2\pi \\ \sigma_3 &= \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = 4\pi \\ \sigma_4 &= \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = 2\pi^2 \end{cases}$$

Мы видим, что известные нам результаты (для $D = 1, 2, 3$) воспроизводятся.

Комментарий про размерную регуляризацию Аналитичность полученного результата как функции параметра D позволяет рассматривать такие, на первый взгляд абсурдные вещи, как “площадь сферы в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$”, при нецелых ϵ. На этом основан один из способов регуляризации расходящихся интегралов - так называемая “размерная регуляризация”, о которой рассказывалось ранее.

Допустим, нас интересует интеграл в пространстве размерности $D = 4$, и он расходится. Тогда можно формально доопределить D-мерный интеграл на нецелые D, как замену $d^D\overline{x}$ на $\sigma_D x^{D-1} dx$; и при этом может оказаться, что интеграл сходится при любых $D < 4$. Это позволяет формально рассмотреть интеграл в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$ (где интеграл сходится), а затем устремить $\epsilon \to 0$.

Задача 4

Пусть C - замкнутая кривая, соответствующая обходу единичной окружности против часовой стрелки. Найдём значение интеграла

$$I = \oint\limits_C \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2 + y^2}$$

Решение

Неправильный способ Функция под интегралом является полным дифференциалом. Действительно:

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x^2}=\frac{x\cdot dy-y\cdot dx}{x^2+y^2}$$

поэтому, казалось бы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, достаточно взять разницу первообразной на концах контура C. Поскольку контур замкнут, то эта разница тождественно равна нулю.

Однако такой способ рассуждений ошибочен, что связано с неаналитичностью "первообразной" в точках $x=0$ (и неаналитичностью подынтегральной функции в начале координат).

Этот интеграл играет важнейшую роль в теории вычетов (теория функций комплексного переменного).

Правильный способ Поступим по определению. Запараметризуем контур C как $C=\{\overline{r}(\varphi),\varphi\in[0;2\pi]\}$, причём $x(\varphi)=\cos\varphi$ и $y(\varphi)=\sin\varphi$. В таком случае интеграл запишется как:

$$I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi+\sin\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi}{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\pi\neq0$$

Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти энергию взаимодействия точечной массы m с однородным шаром массы M и радиуса R, если расстояние от центра шара до точечной массы $r<R$.

Задача 2 Найти момент инерции тора из задачи 2 относительно оси, лежащей в "плоскости тора".

Задача 3 Найти интеграл по единичной сфере

$$I=\iint\limits_{|\overline{r}|=1}e^{i\left(\overline{k}\cdot\overline{r}\right)}d^2\Omega_{\overline{r}}$$

(где $d\Omega_{\overline{r}}$ означает элемент площади поверхности)

Задача 4 Частица переходит с северного полюса сферы на южный за время T по закону $\theta=\pi\frac{t}{T}$ и $\phi=2\pi\frac{t}{T}$. Найти длину пройденной траектории.

Задача 5* Найти значение интеграла

$$I=\frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{1-\cos(x+y)}{2-\cos x-\cos y}dxdy$$

где интегрирование происходит по квадрату $x\in[0;2\pi]$ и $y\in[0;2\pi]$.

Подсказка: задачу удобней решать, если повернуть систему координат, перейдя к переменным $x+y$ и $x-y$.