

Семинар по теме “Вариационные задачи”

Общая теория

Вариационные задачи, возникающие чаще всего в приложениях, сводятся к минимизации функционала (назовём его “действием”):

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

где $L(x, \dot{x}, t)$ - некая функция трех переменных (ее мы назовём “лагранжианом”). Этот функционал каждой функции $x(t)$ ставит в соответствие некое число; и вариационная задача заключается в отыскании такой функции $x(t)$, чтобы действие на ней было минимальным.

Известно, что если имеется обычная функция одного переменного $f(x)$, достигающая минимума в точке $x = x_{min}$, и если мы разложимся до линейного члена по $\delta x = x - x_{min}$, то этот линейный член должен занулиться. В случае функции это записывается как:

$$f(x) - f(x_{min}) \approx f'(x_{min}) \cdot \delta x = 0 \Rightarrow f'(x_{min}) = 0$$

Аналогичное соображение можно применить и к случаю функционала. Пусть $x_{min}(t)$ - функция, на которой достигается минимум функционала $S[x(t)]$. Рассмотрим значение функционала на функции $x(t) = x_{min}(t) + \delta x(t)$ и разложимся до линейных по $\delta x(t)$ членов (при этом функция $\delta x(t)$ называется вариацией аргумента, а линейное разложение $\delta S \approx S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)]$ - вариацией функционала). Получаем:

$$\delta S = S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)] \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(L(x_{min}(t) + \delta x(t), \dot{x}_{min}(t) + \dot{\delta x}(t), t) - L(x_{min}(t), \dot{x}_{min}(t), t) \right) dt$$

Лагранжиан $L(x, \dot{x}, t)$ - уже обычная функция многих переменных, которую можно раскладывать в ряд. Получаем:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x}(t) \right) dt$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать по частям. Для того, чтобы не рассматривать внеинтегральный член, добавим к нашей вариационной задаче так называемое условие закреплённых концов, а именно: функционал минимизируется на таких функциях $x(t)$, что $x(t_1) \equiv x_1$ и $x(t_2) \equiv x_2$ (значения на краях фиксированы). Это значит, что вариация $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, поэтому внеинтегрального члена не будет. Получаем:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt$$

Требование $f'(x_{min}) = 0$ в нашем случае заменяется на требование равенства нулю так называемой вариационной производной:

$$\frac{\delta S}{\delta x} \equiv \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Это - дифференциальное уравнение. Таким образом, мы свели задачу о минимизации функционала к задаче решения обыкновенного дифференциального уравнения. Это уравнение (для действия $S[x(t)]$ и лагранжиана $L(x, \dot{x}, t)$) называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Геометрическая оптика

Для геометрической оптики имеется принцип Ферма, который гласит: свет движется по траектории, на которой время распространения его минимально.

В случае постоянного показателя преломления, это просто сводится к тому, что свет движется по прямой линии. Однако, пусть теперь показатель преломления как-то меняется в пространстве $n(\mathbf{r})$. В этом случае, скорость света в среде записывается как $v(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$. Пусть теперь свет “движется” по траектории $\bar{\mathbf{r}}(t)$. Для времени распространения можно записать:

$$T = \frac{1}{c} \int n(\mathbf{r}(t)) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

Это значит, что траектория распространения луча соответствует минимизации функционала (“действия”):

$$S[\mathbf{r}(t)] = \int n(\mathbf{r}(t)) \cdot |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

Этот функционал - ровно такого вида, как мы рассматривали; “лагранжиан” для него записывается как (в трёхмерье):

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv n(\mathbf{r}) \cdot |\dot{\mathbf{r}}| = n(x, y, z) \cdot \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

В случае многих координат необходимо писать систему уравнений Эйлера-Лагранжа на каждую из координат, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{cases}$$

Задача 1

Пусть теперь свет распространяется в среде с переменным показателем преломления, с зависимостью:

$$n(x, y) = n_0 - \beta xy$$

причём параметр β мал. Исследуем траекторию, по которой луч будет двигаться из точки $(0; 0)$ в точку $(x_0; 0)$.

Решение

Пусть свет распространяется по траектории $y(x)$. Перепишем “действие” на такой траектории в виде:

$$S[y(x)] = \int_0^{x_0} n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Обезразмерим задачу. Введём безразмерный $\tilde{x} = \frac{x}{x_0}$ и $\tilde{y} = \frac{y}{x_0}$. В таком случае, “действие” переписывается как:

$$S[y(x)] = \int_0^1 (n_0 - \beta x_0^2 \cdot \tilde{x} \cdot \tilde{y}) \sqrt{1 + \tilde{y}'(\tilde{x})^2} \cdot x_0 d\tilde{x}$$

граничные условия переписутся как:

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = 0 \\ \tilde{y}(1) = 0 \end{cases}$$

Введём единственный важный безразмерный параметр нашей задачи $\kappa = \frac{\beta x_0^2}{n_0}$ и обезразмерим задачу (тут и далее знак \sim писаться не будет, но будет подразумеваться):

$$S[y(x)] = n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa \cdot x \cdot y) \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx$$

Малость β теперь подразумевается в смысле $\kappa \ll 1$. В этом случае отклонения $y(x)$ должны быть маленькими, и мы можем разложить корень. Получаем:

$$S[y(x)] \approx n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa \cdot x \cdot y) \left(1 + \frac{1}{2} (y')^2\right) \cdot dx$$

Пробная функция Найдём приближённую траекторию, минимизируя “действие” в классе пробных функций $y_\alpha(x) = \alpha x(1-x)$. Такие решения представляют собой параболы; они, конечно, отличаются от настоящего решения этой задачи. Однако, вариационный принцип позволяет нам найти параболу, которая больше всего “похожа” на точное решение.

В нашем случае, “действие”, в которое мы подставим такое решение, становится функцией параметра α . По этому параметру можно его минимизировать, и найти оптимальное значение α . Получаем:

$$S[y_\alpha(x)] = n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa \cdot x \cdot y_\alpha(x)) \left(1 + \frac{1}{2} (y'_\alpha(x))^2\right) \cdot dx = n_0 x_0 \left(1 + \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha\kappa}{12} - \frac{\alpha^3\kappa}{120}\right)$$

Последний член можно выбросить, поскольку он мал. Оставшееся выражение минимизируем по α . Производная этого выражения по α даёт нам:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\kappa}{12} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}\kappa$$

Это - оптимальная α , соответствующая наиболее “близкой” параболе к точному решению. “Действие” на этой параболе достигает значения (с необходимой точностью).

$$S \approx n_0 x_0 \left(1 - \frac{1}{96}\kappa^2\right)$$

Оптимальное решение (не обезразмеренное) записывается как:

$$y(x) = \frac{1}{4} \frac{\kappa^2}{x_0} x(x_0 - x) = \frac{\beta^2 x_0^3}{4n_0^2} x(x_0 - x)$$

Заодно посчитаем наибольшее отклонение по оси y . Оно достигается в точке $x = \frac{1}{2}x_0$ и равно:

$$y_{max} = \frac{1}{16}\kappa x_0 = \frac{\beta x_0^3}{16n_0}$$

Аналитическое приближенное решение Можно еще дальше разложить лагранжиан:

$$L(x, y, y') \approx 1 - \kappa xy + \frac{1}{2} (y')^2$$

Уравнения Эйлера-Лагранжа для этого случая можно записать:

$$y'' + \kappa \cdot x = 0$$

В этом приближении его можно решить (с учётом граничных условий):

$$y(x) = x(1-x) \cdot (\alpha x + \beta) = (x-x^2)(\alpha x + \beta) = (\alpha - \beta)x^2 - \alpha x^3 + \beta x$$

$$y''(x) = 2(\alpha - \beta) - 6\alpha x \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 6\alpha = \kappa \end{cases}$$

Значит, оптимальное решение записывается как:

$$y(x) = \frac{\kappa}{6} \cdot x(1-x)(1+x)$$

На этом решении “действие” равно:

$$S[y(x)] \approx n_0 x_0 \int_0^1 \left(1 - \kappa \cdot x \cdot y + \frac{1}{2} (y')^2 \right) \cdot dx = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\kappa^2}{90} \right)$$

Это выражение можно сравнивать с предыдущим пунктом. Там было получена поправка $-\frac{\kappa^2}{96}$; значит, “действие” на той траектории чуть больше, и эта траектория ближе к истинной. Также можно сравнить максимальное отклонение. Оно достигается при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (приравнивая производную $y'(x) = 0$) и равно:

$$y_{max} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\kappa \approx \frac{1}{15.59}\kappa$$

Чтобы вернуться к размерным параметрам, это значение нужно домножить на x_0 . Видно, что и действие, и максимальное отклонения очень близки в случае этих обоих приближений.

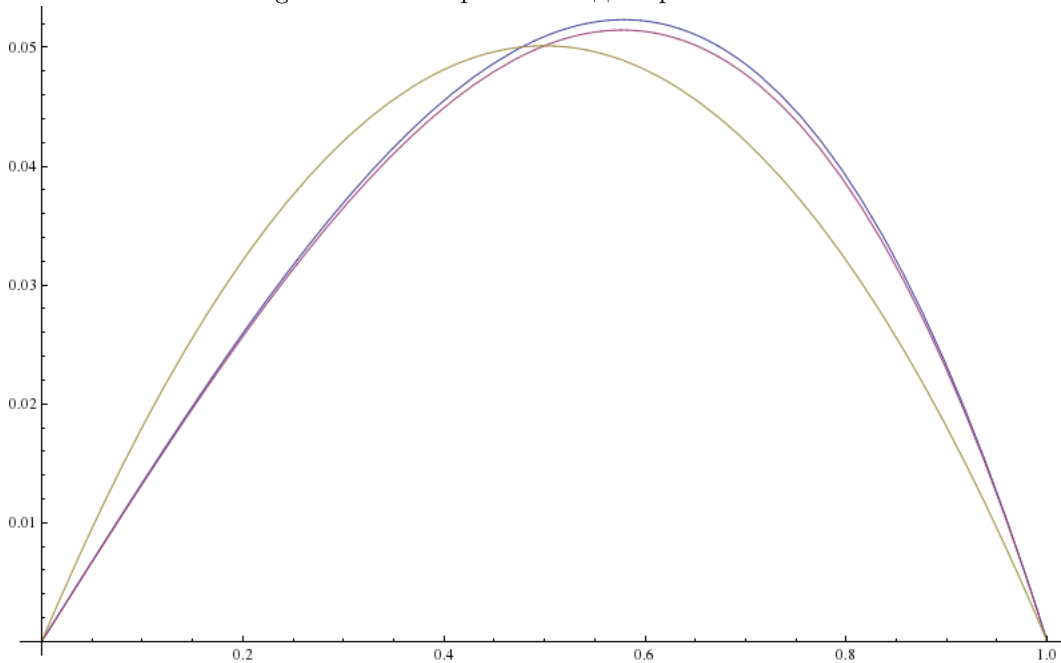
Численный анализ Во-первых, мы можем записать уравнения Эйлера-Лагранжа для этого “действия”:

$$L(x, y, y') \approx (1 - \kappa \cdot x \cdot y) \left(1 + \frac{1}{2} (y')^2 \right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \Rightarrow -\kappa \cdot y \left(1 + \frac{1}{2} (y')^2 \right) = \frac{d}{dx} [(1 - \kappa \cdot x \cdot y) \cdot y']$$

Это уравнение можно решать численно, в зависимости от параметра κ . Построим все три решения (точное и два приближенных) на одной картинке.

Figure 1: Точное решение и два приближённых



Статика

Из курса общей физики известно, что в отсутствии движения (статика) система занимает положение, соответствующее минимуму её энергии. Это тоже является вариационным принципом, продемонстрируем это на примере следующей задачи.

Задача 2

Пусть имеется цепочка из N точечных масс \tilde{m} , соединённых пружинками жёсткостью \tilde{k} ; пружинки в нерастянутом состоянии имеют длину a . Первый шарик закрепляют в точке $(0; 0)$, а последний - в точке $(x_0; 0)$ (ось y направлена вертикально вверх). Под действием силы тяжести, цепочка провисает. Исследовать это провисание в пределе $N \rightarrow \infty$.

Комментарий Чтобы задача имела конечный предел $N \rightarrow \infty$, параметры задачи тоже нужно менять в зависимости от N . Эта задача является моделью длинной пружинки массы M и жёсткостью k , которая провисает под собственным весом. Если это так, то жёсткости каждой из маленьких пружинки выражаются как $\tilde{k} = k \frac{L}{a} = kN$ (где L - длина большой пружины в нерастянутом состоянии; известно, что чем короче пружинка, тем больше у неё жёсткость, причём $k \sim \frac{1}{l}$); а массы равны $\tilde{m} = M \frac{a}{L} = \frac{M}{N}$.

Решение

Потенциальная энергия системы складывается из двух частей. Во-первых, имеется потенциальная энергия в поле тяжести:

$$U_1 = \sum_{n=1}^N \tilde{m} g \cdot y_n$$

а во-вторых, имеется потенциальная энергия каждой из растянутых пружин:

$$U_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} \tilde{k} \left(\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} - a \right)^2$$

Запишем теперь эту задачу в пределе $n \rightarrow \infty$. Во-первых, вместо x_n и y_n введём функции $x(l)$ и $y(l)$ так чтобы $x(na) \equiv x_n$ и $y(na) \equiv y_n$; при этом параметр $l \in [0; Na] = [0; L]$. Во-вторых, суммы заменятся на интеграл по правилу $\sum_{n=1}^N \rightarrow \int_0^L \frac{dl}{a}$ (из-за того, что мы заменили $l = na$). В третьих, конечные разности $x_{n+1} - x_n$ и $y_{n+1} - y_n$ свяжем с производными. Таким образом, потенциальная энергия переписется как функционал от функций $x(l)$ и $y(l)$ и будет выражаться как:

$$U_1[x(l), y(l)] = \int_0^L \frac{dl}{a} \cdot M \frac{a}{L} \cdot g \cdot y(l) = \frac{M}{L} g \int_0^L y(l) dl$$

$$U_2[x(l), y(l)] = \int_0^L \frac{dl}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot k \frac{L}{a} \left(\sqrt{(x'(l) \cdot a)^2 + (y'(l) \cdot a)^2} - a \right)^2 = \frac{1}{2} kL \int_0^L dl \cdot \left(\sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2$$

$$U[x(l), y(l)] = kL \int_0^L dl \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \frac{Mg}{kL^2} \cdot y(l) \right\}$$

Во-первых, мы избавились от всех бесконечно малых и бесконечно больших; все параметры, входящие в энергию - конечны. Это - явный признак того, что мы правильно выбрали зависимость параметров исходной задачи от N для воспроизведения непрерывного предела.

Физический смысл $x(l)$ и $y(l)$ можно понять следующим образом. Пусть в какой-то момент гравитацию “выключили”. Очевидно, пружинка будет располагаться в горизонтальном положении и будет равномерно сжата или растянута; при этом $x(l) = l$ и $y(l) = 0$. Затем гравитацию “включили”, и пружинка как-то провисла. Таким образом, $x(l)$ и $y(l)$ будут координатами той точки, которая исходно находилась в точке $(l; 0)$.а

Обезразмерим задачу полностью: заменим $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{y} = \frac{y}{L}$, $\tilde{l} = \frac{l}{L}$, $\tilde{\varkappa} = \frac{Mg}{kL}$, $\tilde{U} = \frac{U}{kL^2}$. Получим:

$$\tilde{U}[\tilde{x}(\tilde{l}), \tilde{y}(\tilde{l})] = \int_0^1 d\tilde{l} \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\tilde{x}'(\tilde{l})^2 + \tilde{y}'(\tilde{l})^2} - 1 \right)^2 + \tilde{\varkappa} \cdot \tilde{y}(\tilde{l}) \right\}$$

Тут и далее знак “ \sim ” тоже будет опускаться, но подразумеваться. Кроме того, необходимо поставить граничные условия. Для нашей задачи они записываются как:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(1) = 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Исследуем систему для $\varkappa \ll 1$, что соответствует сильно жесткой пружине. Провисание мало, поэтому корень можно разложить по $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(x' \sqrt{1 + \left(\frac{y'(l)}{x'(l)} \right)^2} - 1 \right)^2 + \varkappa \cdot y(l) \right\} \approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left(x' - 1 + \frac{y'(l)^2}{2x'(l)} \right)^2 + \varkappa \cdot y(l) \right\}$$

Размерный анализ Получим из соображений размерности характерную высоту провисания пружинки. Пусть пружинка провисла на величину h . Тогда в интеграле можно сделать следующие оценки: $x' \sim 1$, $y \sim -h$, $y' \sim -h$ (напомним, что в обезразмеренной задаче $L = 1$; иначе оценка выглядела бы как $y' \sim -\frac{h}{L}$). Таким образом, потенциальная энергия имеет вид:

$$U \sim (h^4 - \varkappa h)$$

Имеется противоборство двух вкладов: член $\sim \varkappa h$, связанный с силой тяжести, стремится к наибольшему провисанию, в то время как член $\sim h^4$, связанный с упругой энергией, стремится “выровнять” пружинку и минимизировать провисание. Равновесие наступает, когда эти вклады примерно одинаковы, что дает нам размерную оценку на масштаб величины провисания:

$$h^4 \sim \varkappa h \Rightarrow h \sim \sqrt[3]{\varkappa}$$

А потенциальная энергия при этом имеет масштаб:

$$U \sim h^4 \sim \varkappa^{4/3}$$

(напомним, что мы работаем в обезразмеренных единицах; в исходной задаче $h \sim L \sqrt[3]{\varkappa}$).

Аналитический подход Запишем уравнения Эйлера-Лагранжа для такого функционала:

$$\begin{cases} \frac{d}{dl} \left(\left(x' - 1 + \frac{y'^2}{2x'} \right) \cdot \left(1 - \frac{y'^2}{2x'^2} \right) \right) = 0 \\ \frac{d}{dl} \left(\left(x' - 1 + \frac{y'^2}{2x'} \right) \cdot \frac{y'}{x'} \right) = \varkappa \end{cases}$$

Это - сложные дифференциальные уравнения, и решать мы их не будем. Вместо этого, сделаем еще одно приближение: а именно, положим $x(l) = l$. Если мы вспомним физическую интерпретацию $x(l)$, то увидим, что физически это означает, что мы пренебрегаем горизонтальным смещением шарика при “включении” гравитации; такое приближение кажется разумным: по крайней мере, эти смещения малы. Это приближение приводит функционал к гораздо более простому виду:

$$U[x(l) \equiv l, y(l)] \approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{y'(l)^4}{8} + \varkappa \cdot y(l) \right\}$$

Для этой задачи уже можно записать и решить уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} y'^3 \right) = \varkappa \Rightarrow y'(l) = \sqrt[3]{2\varkappa(l - l_0)} \Rightarrow y(l) = (2\varkappa)^{1/3} \cdot \frac{3}{4} (l - l_0)^{4/3} + y_0$$

Постоянные l_0 и y_0 найдём из граничных условий $y(0) = y(1) = 0$:

$$y_1(l) = \frac{3}{8} \varkappa^{1/3} \left\{ (2l - 1)^{4/3} - 1 \right\}$$

Из симметрии очевидно, что максимум провисания проходит ровно посередине пружинки, поэтому:

$$h = -y_1 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} = 0.375 \kappa^{1/3}$$

Тем самым мы воспроизвели результат, полученный из размерной оценки ($h \sim \kappa^{1/3}$), но теперь мы получили оценку на численный коэффициент. Потенциальная энергия на этом решении равна:

$$U [x(l) \equiv l, y(l) \equiv y_1(l)] \approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{y_1'(l)^4}{8} + \varkappa \cdot y_1(l) \right\} = -\frac{9}{56} \kappa^{4/3} \approx -0.161 \kappa^{4/3}$$

Напомним, что U и h - безразмерные; чтобы восстановить размерность, U необходимо домножить на kL^2 , а h - на L .

Пробная функция Кроме того, можно воспользоваться подходом, который мы применяли ранее: рассмотреть решение задачи на классе пробных функций, в качестве которой можно рассмотреть опять параболу. Поскольку она должна удовлетворять граничным условиям $y(0) = y(1) = 0$, то общий вид такой параболы:

$$y(l) = -Al(1-l)$$

Подставляя её в приближенный функционал:

$$U [x(l) \equiv l, y(l)] \approx \int_0^1 dl \cdot \left\{ \frac{y'(l)^4}{8} + \varkappa \cdot y(l) \right\} = \frac{A^4}{40} - \frac{A\kappa}{6}$$

Минимум достигается на $A^* = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}$, функция при этом равна

$$y_2(l) = -\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \kappa l(1-l)$$

Максимальное провисание равно:

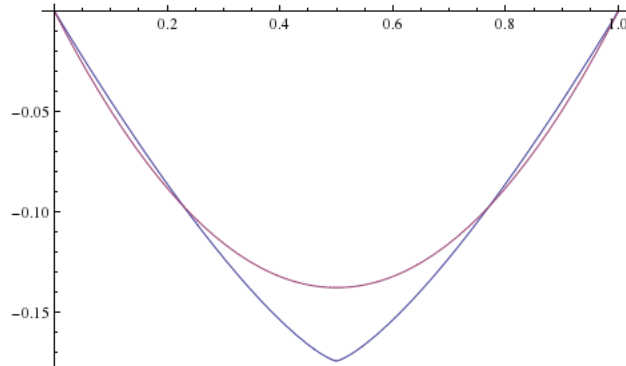
$$h = -y_2 \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \kappa \approx 0.296 \kappa^{1/3}$$

и энергия на этом решении равна:

$$U [x(l) \equiv l, y(l) = y_2(l)] \approx -\frac{1}{8} \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \kappa^{4/3} \approx -0.148 \kappa^{4/3}$$

Видно, что энергия в этом случае больше, чем в предыдущем; значит, предыдущее решение лучше.

Figure 2: Различные приближения к решению



Задачи для домашнего решения

Задача 1 Получить наилучшее приближенное решение в задаче 1 этого семинара, используя кубическую пробную функцию.

Задача 2 Исследовать задачу 2 этого семинара в случае, когда длина пружины в нерастянутом состоянии L_0 сильно не совпадает с расстоянием между точками закрепления L . При этом κ по-прежнему считать малым.

Остальные задачи Также стоит решать задачи из конспекта лекции.