Преобразования Фурье

М. А. Скворцов

В этой лекции определяется интегральное преобразование Фурье и изучаются его свойства. Обсуждается применение преобразования Фурье для решения дифференциальных и интегральных уравнений. Рассматривается преобразование Фурье для периодических функций и функций, определенных на решетке.

I. ВВЕДЕНИЕ

Олимпиадная задача. Сопротивление между двумя соседними узлами квадратной сетки сопротивлений. Ответ: $R/2$. Решается путем комбинации решения с источником и со стоком. Проблема в том, как посчитать сопротивление между произвольными узлами.

II. НЕПРЕРЫВНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

A. Определение

Пусть $f(x)$ — функция координаты x. ПФ:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(p)\, e^{ipx}\, \frac{dp}{2\pi} \tag{1}$$

Обратное ПФ дается формулой:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ipx}\, dx \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) дает разложение δ-функции по плоским волнам:

$$f(x) = \int f(y)\, dy \int e^{ip(x-y)}\, \frac{dp}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \delta(x) = \int e^{ipx}\, \frac{dp}{2\pi} \tag{3}$$

B. Элементарные свойства

- Если $f(x)$ действительна, то $F(-p) = F^*(p)$.
- ФП производной:

$$f'(x) \mapsto ipF(p) \tag{4}$$

- ФП δ-функции:

$$\delta(x) \mapsto 1 \tag{5}$$

- ФП функции Гаусса:

$$e^{-ax^2} \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-p^2/4a} \tag{6}$$

Два последних примера говорят о дуальности координатного и импульсного представлений. Чем у́же функция в одном — тем шире в другом: $\Delta p\, \Delta x \sim 1$. В квантовой механике это станет соотношением неопределенности Гейзенберга.

<u>**Задача 11.1.**</u> Парный коррелятор плотностей состояний для случайных матриц унитарной симметрии[1] имеет вид

$$R(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Найдите фурье-образ функции $R(x)$. Возникающие в нем изломы связаны с осциллирующим характером $R(x)$. Обратите внимание на связь положения излома с периодом осцилляций.

Пример 1: Кулоновский потенциал

Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ точечного заряда удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$-\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \tag{7}$$

Для его решения воспользуемся ПФ, которое в многомерном случае является естественным обобщением одномерного выражения (1):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \Phi(\mathbf{p})\, e^{i\mathbf{pr}}\, \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \tag{8}$$

Левая часть уравнения (7) преобразуется с использованием свойства (4), а правая — с использованием свойства (5). В результате получим

$$(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\Phi(\mathbf{p}) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2} \tag{9}$$

Теперь закон Кулона получается путем вычисления интеграла (8) в сферических координатах:

$$\begin{aligned}\varphi(r) = \int \frac{e^{ipr\cos\theta}}{p^2}\,\frac{2\pi p^2\,dp\,\sin\theta\,d\theta}{(2\pi)^3} &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dp \int_0^\pi e^{ipr\cos\theta}\,\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dp\int_{-1}^1 e^{ipr\mu}\,d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{2\sin pr}{pr}\,dp = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{\sin q}{q}\,dq = \frac{1}{4\pi r}\end{aligned} \tag{10}$$

где мы воспользовались известным значением последнего интеграла.

Пример 2: Потенциал Юкавы

Потенциал Юкавы точечного заряда определяется путем решения дифференциального уравнения

$$-\nabla^2\varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \tag{11}$$

Для решения можем сразу записать

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r}\int_0^\infty \frac{p\sin pr}{p^2+\kappa^2}\,dp = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} \tag{12}$$

<u>**Задача 11.2.**</u> Вычислите интеграл в уравнении (12).

---

[1] М. Л. Мета, *Случайные матрицы*, М., 2012, глава 6.

Пример 3: Решение уравнения диффузии

Пусть имеется поле $\rho(x,t)$, подчиняющееся уравнению диффузии:

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2} \tag{13}$$

Стандартной задачей является определение эволюции $\rho(x,t)$, если известно его значение в нулевой момент времени: $\rho(x,0) = \rho_0(x)$.

Применим к функции $\rho(x,t)$ ПФ, перейдя к фурье-гармоникам $R(q,t)$. Тогда уравнение (13) перепишется в виде

$$\frac{\partial R(q,t)}{\partial t} = -Dq^2 R(q,t) \tag{14}$$

Принципиальное отличие уравнения (14) от (13) заключается в том, что в ФП разные фурье-гармоники оказываются расцепленными. Так что, в отличие от (13), уравнение (14) является не уравнением в частных производных, а всего лишь обыкновенным дифференциальным уравнением, которое может быть элементарно решено:

$$R(q,t) = R(q,0)e^{-Dq^2t} \tag{15}$$

Осталось просто собрать все гармоники:

$$\rho(x,t) = \int R(q,0)\, e^{-Dq^2t}\, e^{iqx}\, \frac{dq}{2\pi} \tag{16}$$

Можно получить и явную формулу через $\rho_0(x)$:

$$\rho(x,t) = \iint dy\, \rho_0(y)\, e^{-iqy}\, e^{-Dq^2t}\, \frac{dq}{2\pi} = \int G_D(x-y,t)\, \rho_0(y)\, dy \tag{17}$$

где

$$G_D(x-y,t) = \frac{e^{-(x-y)^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \tag{18}$$

является функцией Грина уравнения диффузии.

Пример 4: Решение интегральных уравнений

ПФ позволяет эффективно решать интегральные (и интегро-дифференциальные) уравнения, содержащие *свертку функций*.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу об определении плотности заряда, создающего заданный потенциал. Пусть потенциал точечного (δ-функционного) заряда есть $V(x)$. Тогда распределение заряда $\rho(x)$ приводит к потенциалу

$$\varphi(x) = \int V(x-y)\rho(y)dy \tag{19}$$

Правая часть называется сверткой функций V и ρ. Необходимо восстановить $\rho(x)$ по заданному $\varphi(x)$.

Выполняя ПФ, видим, что свертка в (19) превратилась в произведение фурье-образов:

$$\Phi(p) = V(p)R(p) \tag{20}$$

Таким образом,

$$R(p) = \frac{\Phi(p)}{V(p)} \tag{21}$$

и осталось просто собрать $\rho(x)$ из известных плоских волн.

Задача 11.3. Выведите преобразование фурье для свертки функций.

III. РЯД ФУРЬЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Если функция $f(x)$ периодическая с периодом L, то ее ПФ содержит только гармоники с импульсом кратным $2\pi/L$, и интеграл фурье превращается в ряд фурье:

$$f(x) = \sum_n F_n \, e^{2\pi i n x/L} \tag{22}$$

Обратное ПФ дается формулой:

$$F_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \, e^{-2\pi i n x/L} \, dx \tag{23}$$

Согласованность ПФ основана на формуле суммирования Пуассона:

$$\sum_k \delta(x + kL) = \frac{1}{L} \sum_n e^{2\pi i n x/L} \tag{24}$$

Пример 5: Уравнение диффузии на окружности

Рассмотрим снова уравнение диффузии (13), на сей раз заданное на окружности длиной L. Разрешенные импульсы $q_n = 2\pi n/L$ (моды оказались проквантованными). Для компонент фурье вместо уравнения (14) получим

$$\frac{\partial R_n(t)}{\partial t} = -D q_n^2 R_n(t) \qquad \Longrightarrow \qquad R_n(t) = R_n(0) e^{-D q_n^2 t} \tag{25}$$

Собираем гармоники назад:[2]

$$\rho(x,t) = \sum_n R_n(0) e^{-D q_n^2 t} \, e^{i q_n x} \tag{26}$$

Таким образом, в конечной системе неоднородности плотности затухают экспоненциально. На больших временах скорость затухания определяется первой ненулевой гармоникой: $\tau_D^{-1} = D(2\pi/L)^2$.

Задача 11.4. Разложите функцию $f(x) = x$, определенную на отрезке $[0,1]$ в ряд фурье а) по косинусам, б) по синусам. Для этого нужно доопределить $f(x)$ на отрезке $[-1,0]$ четным или нечетным образом и воспользоваться формулой (23) для функций с периодом $L = 2$.

---

[2] В явном виде

$$\rho(x,t) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho_0(y) \, dy \sum_n e^{-D q_n^2 t} \, e^{i q_n (x-y)}$$

Для того, чтобы избавиться от суммирования по гармоникам в этом уравнении, воспользуемся тем, что, согласно (17), $e^{-D q_n^2 t}$ есть фурье-компонента функции Грина уравнения диффузии (18)

$$e^{-D q_n^2 t} = \int G_D(s,t) e^{-i q_n s} ds$$

Теперь можно просуммировать по q_n с помощью формулы суммирования Пуассона (24). Таким образом, получаем

$$\rho(x,t) = \int_0^L \rho_0(y) \, dy \int_{-\infty}^{\infty} G_D(s,t) \, ds \sum_k \delta(x - y - s + kL) = \sum_k \int_0^L G_D(x - y + kL, t) \, \rho_0(y) \, dy$$

Последнее есть ни что иное, как формула (17), записанная для плотности $\rho_0(y)$, периодически продолженной на всю действительную ось.

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА РЕШЕТКЕ

Пусть функция f_n задана на узлах решетки с координатами $x_n = na$. В этом случае ПФ имеет вид:

$$f_n = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} F(q)\, e^{iqx_n}\, \frac{dq}{2\pi} \tag{27}$$

Область интегрирования по импульсам в (27) называется зоной Бриллюэна. ОПФ:

$$F(q) = a \sum_n f_n\, e^{-iqx_n} \tag{28}$$

Давайте подставим (28) в (27).

$$f_n = \sum_m f_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{ip(n-m)}\, \frac{dp}{2\pi} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ip(n-m)}\, \frac{dp}{2\pi} = \delta_{nm} \tag{29}$$

Пример 6: Классическая цепочка осцилляторов

Рассмотрим одномерную цепочку атомов массы m, соединенную пружинками с жесткостью K. Обозначив через x_i смещение i-го атома от положения равновесия, запишем уравнения движения:

$$m\ddot{x}_i = K(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) \tag{30}$$

Будем искать решение в виде плоской волны (a — расстояние между атомами в положении равновесия):

$$x_n = e^{iqan - i\omega t} x(q) \tag{31}$$

Подставляя в уравнение (30), получаем

$$m\omega^2 x(q) = 2K(1 - \cos qa)x(q) \tag{32}$$

Откуда находим закон дисперсии

$$\omega^2(q) = \frac{2K}{m}(1 - \cos qa) = \frac{4K}{m} \sin^2(qa/2) \tag{33}$$

Длинноволновые возбуждения являются акустическими фононами со скоростью звука $c = \sqrt{Ka^2/m}$.

Задача 11.5. Найдите закон дисперсии колебаний в цепочке, состоящей из двух типов чередующихся атомов с массами m_1 и m_2. Жесткость всех пружин одинакова и равна K, расстояние между соседними атомами равно a. *Указание*: обратите внимание на то, чему равен период структуры (два атома в элементарной ячейке!), и не ошибитесь с размером зоны Бриллюэна.

Пример 7: Сетка сопротивлений

Вернемся к исходной задаче о сетке сопротивлений. Узлы сетки будем параметризовать двумя целочисленными координатами (n_x, n_y). Потенциал в узле будем обозначать через φ_{n_x,n_y}. Запишем уравнение Кирхгофа для узла (n_x, n_y):

$$\varphi_{n_x+1,n_y} + \varphi_{n_x-1,n_y} + \varphi_{n_x,n_y+1} + \varphi_{n_x,n_y-1} - 4\varphi_{n_x,n_y} = IR\left[\delta_{n_x,0}\delta_{n_y,0} - \delta_{n_x,N_x}\delta_{n_y,N_y}\right] \tag{34}$$

Левая часть представляет собой дискретный оператор Лапласа на квадратной решетке. Правая — источник и сток тока, расположенные в точках $(0,0)$ и (N_x, N_y). Делаем двумерное ПФ:

$$-(4 - 2\cos q_x - 2\cos q_y)\Phi(q_x, q_y) = IR\left[1 - e^{-iq_xN_x - iq_yN_y}\right] \tag{35}$$

откуда

$$\Phi(q_x, q_y) = -IR\frac{1 - e^{-iq_xN_x - iq_yN_y}}{2(2 - \cos q_x - \cos q_y)} \tag{36}$$

Теперь осталось найти разность потенциалов между точкам стока и истока:

$$\varphi_{0,0} - \varphi_{N_x,N_y} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi(q_x, q_y)\,\left[1 - e^{iq_xN_x + iq_yN_y}\right]\,\frac{dq_xdq_y}{(2\pi)^2} = -IR\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 - \cos(q_xN_x + q_yN_y)}{2 - \cos q_x - \cos q_y}\,\frac{dq_xdq_y}{(2\pi)^2} \tag{37}$$

Откуда для сопротивления

$$R(N_x, N_y) = R\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 - \cos(q_xN_x + q_yN_y)}{2 - \cos q_x - \cos q_y}\,\frac{dq_xdq_y}{(2\pi)^2} \tag{38}$$

Задача 11.6.* С помощью формулы (38) вычислите сопротивление квадратной сетки между точкам, находящимися на диагонали элементарного квадрата.