

Лекция 1. Размерные оценки в физике. Приближенные оценки с использованием «малого параметра».

1 Размерные оценки

(источник: [1], стр. 9-12)

1.1 Теорема Пифагора: доказательство по размерности

Рассмотрим прямоугольный треугольник A с острым углом α и гипотенузой a . Его площадь равна, по размерности, $S_A = a^2 f(\alpha)$, где $f(\alpha)$ - какая-то функция (неважно, какая именно). Опустим перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу, получим что исходный треугольник состоит из 2-х треугольников B и C с гипотенузами b и c соответственно (это также катеты исходного треугольника A). Тогда $S_B = b^2 f(\alpha)$ и $S_C = c^2 f(\alpha)$. Но $S_A = S_B + S_C$, т.к. площадь исходного треугольника A полностью и точно покрывается треугольниками B и C . Получаем равенство $a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha)$, сокращаем на $f(\alpha)$ и получаем ожидаемое: $a^2 = b^2 + c^2$.

1.2 Движение шара в вязкой среде

Рассмотрим движение шара радиуса R со скоростью u относительно жидкости с вязкостью η и плотностью ρ . Уравнение Навье-Стокса для скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ движения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид (для стационарного случая, когда $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$):

$$\rho(\mathbf{v} \nabla \mathbf{v}) = \eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p \quad (1)$$

где $p = p(\mathbf{r})$ - давление жидкости. Чтобы можно было рассматривать задачу как стационарную, следует перейти в систему координат, где шар неподвижен (т.е. скорость жидкости равна u на большом расстоянии от шара).

Задача в том, чтобы найти силу F сопротивления движению шара со стороны жидкости. Кинематическая вязкость жидкости $\nu = \eta/\rho$ имеет размерность cm^2/sec . Из величин R , u и ν можно составить безразмерную комбинацию $Re = uR/\nu$, называемую числом Рейнольдса. Рассмотрим задачу качественно, при малых и больших числах Рейнольдса.

При $Re \ll 1$ нелинейный член уравнения Найвье-Стокса (левая часть в 1) мал по сравнению с "вязким" членом, по крайней мере на расстояниях порядка радиуса шара: $(\mathbf{v}\nabla\mathbf{v}) \ll \nu\nabla^2\mathbf{v}$ при $r \sim R$. Поэтому опустим нелинейный член в (1) и получим тогда

$$\eta\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p = 0 \quad (2)$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

где мы включили также уравнение непрерывности. Система уравнений (2,3) не содержит плотности жидкости ρ , поэтому сила трения F тоже не может ее содержать. Из оставшихся величин можно составить лишь одну комбинацию размерности силы:

$$F_1 = A\eta R u \quad (4)$$

где A - численный коэффициент. Аккуратное решение задачи (см. например книгу [2], параграф 20) приводит к ответу $A = 6\pi$. При произвольном числе Re выражение для силы можно записать в виде

$$F = 6\pi\eta R u\Phi(Re) \quad (5)$$

где $\Phi(x)$ некоторая функция, причем $\Phi(0) = 1$.

При $Re \gg 1$ следует, напротив, пренебречь "вязким" членом в уравнении Навье-Стокса. В самом деле, отношение этого члена к нелинейному члену имеет порядок $\nu/ux \ll 1$ на расстояниях $x \sim R$ от поверхности шара (лишь в тонком слое толщины порядка R/Re вязкость становится существенна). Тогда соображения размерности определяют единственно возможное выражение для силы трения:

$$F_2 = B R^2 \rho u^2 \quad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), убеждаемся, что при больших x функция $\Phi(x) \rightarrow (B/6\pi)x$. Определение коэффициента B является более сложной задачей. Оказывается, что B численно мало, так что переход от "медленного" движения, описываемого формулой (4), к "быстрому", формула (6), происходит лишь при $Re \sim 100$, а не при $Re \sim 1$, как можно было бы подумать. Большие численные множители нечасто возникают в подобных оценках, но иногда это случается, указывая на ограниченность применимости оценок "по порядку величины".

1.3 Нелинейность уравнений Максвелла в пустоте

Оценим величину электрического поля \mathcal{E}_c , при котором можно ожидать нелинейности уравнений электромагнитного поля, связанной с рождением электронно-позитронно пар из вакуума. Она оценивается умножением силы $e\mathcal{E}_c$ на длину r_e порядка "размера электрона", составленную из постоянной Планка, массы электрона и скорости света: $r_e = \hbar/mc$. Произведение $e\mathcal{E}_c r_e$ имеет размерность энергии, и его надо сравнивать с энергией $2mc^2$ необходимой для рождения двух частиц массы m . Получим $\mathcal{E}_c \sim m^2 c^3 / e\hbar \sim 2 \cdot 10^{16} V/cm$. Сравним с типичным

Электронметр для изучения дискретности заряда

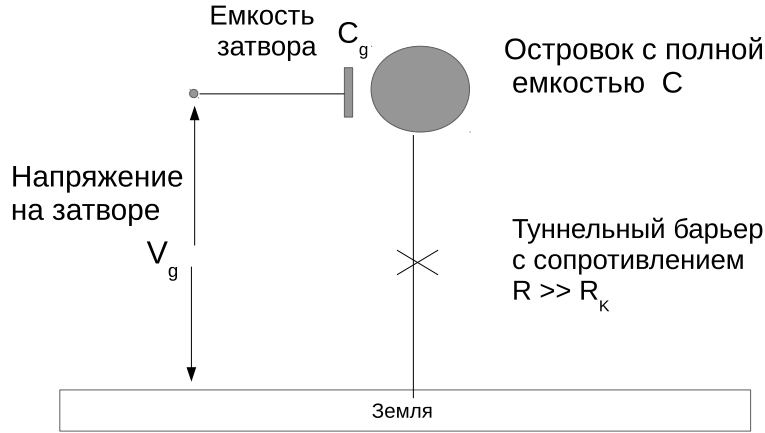


Рис. 1: Электронметр, использующий явление "кулоновской блокады".

электрическим полем в атоме $\mathcal{E}_a = Ry/ea_0 = 3 \cdot 10^9 V/cm$ и убедимся, что эти поля отличаются на 7 порядков.

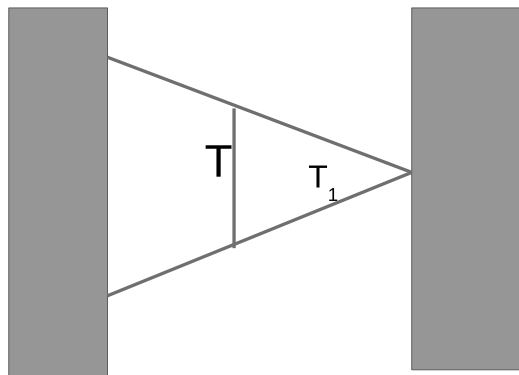
1.4 Квант сопротивления

Размерность квадрата заряда $[e^2] = [energy * length]$, а размерность сопротивления $[Ohm] = [V/cm] = (erg/e)/(e/sec) = [erg * sec/e^2] = [(velocity)^{-1}]$. Мы знаем, что $e^2/\hbar c = 1/137$ - безразмерная величина - "постоянная тонкой структуры". Таким образом, e^2/\hbar имеет размерность скорости, а обратная величина \hbar/e^2 - сопротивление. Выражая это сопротивление в привычных единицах, получим $R_K = h/e^2 = 2\pi\hbar/e^2 \approx 26 KOhm$. Квант сопротивления R_K играет очень важную роль в проводимости наноструктур. Простейший пример: квантова-

ние числа электронов на маленьком островке металла возможно, если сопротивление контакта между островком и внешним миром много больше R_K , см. Рис. 1. В самом деле, при изменении заряда на островке электрометра на заряд электрона e , электростатическая энергия меняется на величину порядка $E_C = e^2/2C$. Это изменение энергии существенно, если эта энергия определена с точностью много лучше чем E_C . С другой стороны, время изменения заряда на конденсаторе емкости C , соединенном с внешней цепью сопротивлением R , имеет порядок $\tau = RC$, а соответствующая квантовая неопределенность энергии $\delta E \sim h/\tau$. Для того, чтобы δE было мало по сравнению с E_C , и необходимо условие $R \gg R_K$.

1.5 Парадокс последовательно включенных сопротивлений

Треугольная пленка между двумя массивными контактами



Треугольники T и T1 подобны. Казалось бы, их сопротивления между основанием и вершиной должны быть равны. Но это невозможно, т.к. один есть часть другого. В чем состоит разгадка парадокса ?

Рис. 2: Парадокс о сопротивлении треугольников.

2 Нелинейный осциллятор

Уравнение движения

$$m d^2 x / dt^2 = -\kappa(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (7)$$

где потенциальная энергия приведена с точностью до кубического члена разложения вблизи его минимума $x = x_0$. Как узнать, существенна ли роль нелинейных членов ?

Пример: полярная молекула $\text{H}^+ \text{Cl}^-$. Минимум потенциала $U(x)$ расположен при $x = x_0 = 1.5 \cdot 10^{-8} \text{cm}$, его глубина $U_0 = 4 \text{эВ}$. Частота колебаний молекулы известна и равна $f_0 = 9 \cdot 10^{13} \text{Hz}$, что соответствует круговой частоте $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 6 \cdot 10^{14} \text{s}^{-1}$. Знание величины ω_0 позволяет определить константу κ . В самом деле, массы ядер известны ($m_{\text{H}} = 1.67 \cdot 10^{-24} \text{g}$, $m_{\text{Cl}} = 35m_{\text{H}}$) и тем самым легко определить приведенную массу осциллятора m , после чего при помощи выражения для частоты осциллятора $\omega_0^2 = \kappa/m$ и находится κ .

Теперь оценим степень нелинейности этого 1-мерного осциллятора. Начнем с "нулевых" колебаний из-за квантовой неопределенности "координата-импульс". С одной стороны, энергия основного состояния осциллятора равна $\frac{1}{2}\hbar\omega_0$, а с другой стороны, она должны быть примерно равна величине κx_Q^2 где x_Q - типичная амплитуда нулевых колебаний. Отсюда получим $x_Q = \hbar\omega_0/\kappa$. Отношение квадратичного члена в уравнении (7) к линейному члену при $x \sim x_Q$ и определит степень нелинейности нашего осциллятора при самых низких температурах:

$$\alpha_{\text{nonlin}}^Q = \frac{\beta x_Q}{\kappa} = \frac{\beta \hbar}{\kappa(\kappa m)^{1/4}} \quad (8)$$

Остается еще вопрос: откуда взять величину β ? Тут мы используем метод оценки "по порядку величины" , заметив, что

потенциал $U(x)$ указанного вида характеризуется только одним масштабом энергии U_0 и одним масштабом длины x_0 , поэтому $U_0 \sim \kappa x_0^2 \sim \beta x_0^3$. Таким образом, $\beta \sim \kappa x_0$.

Упражнение 1 : получить численную оценку для величины α_{nonlin}^Q для рассмотренной молекулы, явным образом проведя все изложенные выше рассуждения. Затем выяснить, как меняется полученный результат в последовательности молекул $\text{H}^+ \text{Cl}^-$, $\text{H}^+ \text{Br}^-$, $\text{H}^+ \text{I}^-$, предполагая что потенциал взаимодействия ионов в молекуле один и тот же во всех этих случаях.

Перейдем теперь к рассмотрению тепловых колебаний той же молекулы и приравняем энергию колебаний κx_T^2 тепловой энергии $k_B T$. Получим $x_T = \sqrt{k_B T / \kappa}$. Температуры, при которых $x_T \gg x_Q$ - достаточно высокие, чтобы можно было пренебречь квантовыми нулевыми колебаниями по сравнению с тепловыми. При учете члена x_T^2 в уравнении движения, положение равновесия уже не будет соответствовать $x = x_0$, оно сдвинется. Сдвиг Δx определим из соотношения $\kappa \Delta x = \beta x_T^2$, так что его величина пропорциональна температуре.

Упражнение 2. Тепловое расширение молекул. Для газа тех же молекул $\text{H}^+ \text{Cl}^-$ оценить (в %) изменение среднего расстояния между ионами при нагревании от комнатной температуры до 700 градусов Цельсия.

3 Движение с трением в потенциале “стиральной доски”.

Частица находится в периодическом потенциале

$$U(x) = -\cos(x) + \beta \cos(2x) + \gamma \cos(3x) \quad (9)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\eta dx/dt = -dU/dx \quad (10)$$

Коэффициент трения η можно положить равным 1, переопределив масштаб времени, что мы далее и сделаем. Затем включается еще однородная сила F , добавляющаяся к правой части уравнения (10). С превышением величины F некоторого критического значения F_c , (равного 1 при $\beta = \gamma = 0$), частица начинает двигаться с некоторой средней скоростью $v(F)$, которая обращается в нуль степенным образом при F , стремящемся к F_c . Как найти эту зависимость $v(F)$ вблизи F_c ? Первый и очевидный способ - проинтегрировать уравнение движения при наличии силы F :

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dy}{F - dU/dy} \quad (11)$$

Однако выполнить это интегрирование в явном виде для потенциала (9) довольно сложно. Поэтому мы поступим следующим образом: сначала рассмотрим частный случай потенциала (9), а именно положим $\beta = \gamma = 0$. Тогда интеграл (11) легко вычисляется, и приводит к критическому значению $F_c = 1$:

$$t - t_0 = -\frac{2}{\sqrt{F^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{F \operatorname{ctg} \frac{y}{2} - 1}{\sqrt{F^2 - 1}} \quad (12)$$

Как видно из (12), период осцилляций τ обращается в бесконечность как $f^{-1/2}$, при $f = F - 1$ стремящемся к нулю. Соответственно, средняя скорость движения $\overline{dx/dt}$ обращается в нуль на пороге пропорционально

$$1/\tau \propto \sqrt{f} \quad (13)$$

Этот результат на самом деле гораздо более общий, чем конкретное вычисление интеграла (11) с потенциалом $U(x) =$

$-\cos(x)$. Для более общего вида потенциала меняется, как правило, лишь критическое значение F_c . Сейчас мы увидим, откуда берется зависимость типа (13) и сколь она универсальна.

Рассмотрим знаменатель $D(y)$ подинтегрального выражения (11) для случая $f \ll 1$ и $U(x) = -\cos(x)$. Минимум знаменателя достигается при $y = \pi/2$ и вблизи минимума можно написать $D(y) = f + (y - \pi/2)^2/2$. Поэтому главный вклад в интеграл (11) приходит именно от области $|y| \sim \sqrt{f}$ и этот вклад имеет порядок величины $1/\sqrt{f}$. Вклады от других областей интегрирования в (11) оказываются порядка единицы, и потому играют относительно малую роль. Более точно, вычисляя интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy/(f + y^2/2) = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{f}}$$

и сравнивая с (12), мы обнаруживаем что вся сингулярная при $f \rightarrow 0$ зависимость периода τ может быть правильно определена при помощи такого приближенного вычисления. Это позволяет применить такой же приближенный метод к вычислению критического поведения $v(F)$ в более общем случае, когда явным образом вычислить интеграл (12) не удастся.

Упражнение 3. Слабо надкритическое движение.

Найти вид зависимости $v(F)$ при F очень близком к F_c , для двух случаев:

- а) $\beta > 0, \gamma = 0$
- б) $\beta = 0, \gamma > 0$

Исследовать для каждого из этих случаев зависимость $v(F)$ при произвольном β или γ .

Список литературы

- [1] А. Б. Мигдал, "Качественные методы в квантовой теории"
 , "Наука" , Москва, 1975.
- [2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теоретическая физика, т.
 6 - "Гидродинамика".