Метод перевала (для вещественных функций)

I. ОСНОВНАЯ ИДЕЯ МЕТОДА ПЕРЕВАЛА

Рассмотрим важный класс интегралов вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} dt, \tag{1.1}$$

где $f(t)$ имеет *резкий* (условие резкости обсудим чуть позже) максимум при $t = t_0$.

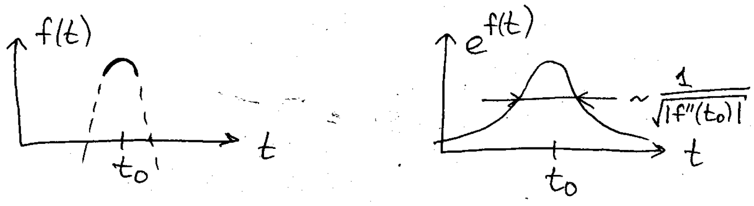

Figure 1:

Вблизи t_0 (см. рис. 1):

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2, \qquad f''(t_0) < 0. \tag{1.2}$$

Подставив это разложение в экспоненту, получаем гауссов интеграл, который элементарно вычисляется:

$$\boxed{I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}}\, e^{f(t_0)}} \tag{1.3}$$

Это главная формула метода перевала.

Откуда взялось название «метод перевала»? Дело в том, что выше рассмотрен лишь частный случай более общего метода, который работает также в случае функций комплексного переменного. Пусть $f(x) = -x^2$. Обобщим её, заменив x на комплексную переменную z. Тогда при движении вдоль вещественной оси наша функция имеет максимум, а при движении вдоль мнимой оси — минимум ($z = iy$, $f(z) = y^2$). Поэтому получается конфигурация типа перевала, см. рис. 2. При этом наше интегрирование по x происходит в направлении наискорейшего спуска с перевала. Примерно так идея метода перевала возникает в комплексном случае. Мы же дальше будем говорить только про вещественный случай.

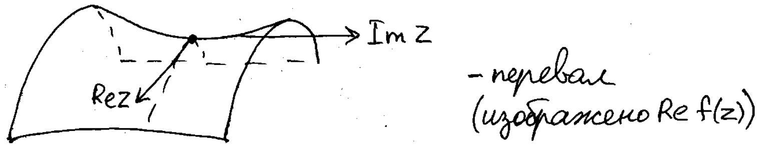

Figure 2:

Посмотрим, чем мы пренебрегли в ряде Тейлора (1.2):

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \frac{f^{(4)}(t_0)}{4!}(t-t_0)^4 + \ldots. \tag{1.4}$$

Если подставить это в экспоненту и разложить по кубическому члену, в результате интегрирования в первом порядке получим ноль из-за нечётности относительно t_0, так что по кубическому члену экспоненту нужно раскладывать до второго порядка. Кроме того есть четвёртый порядок в ряде Тейлора, который даёт вклад непосредственно (при разложении экспоненты — в первом порядке). Из-за разного характера этих поправок неочевидно, какая окажется главной, поэтому нужно требовать малости обеих. Без этих поправок наш интеграл (1.3) набрался на $\Delta t \sim 1/\sqrt{|f''(t_0)|}$, где $\Delta t = t - t_0$. Пренебрежение поправками от третьего и четвёртого порядков в ряде Тейлора было законным, если на таких Δt поправки малы:

$$\left[f^{(3)}(t_0)\Delta t^3\right]^2 \ll 1, \quad f^{(4)}(t_0)\Delta t^4 \ll 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{[f^{(3)}(t_0)]^2}{[f''(t_0)]^3} \ll 1, \quad \frac{f^{(4)}(t_0)}{[f''(t_0)]^2} \ll 1. \tag{1.5}$$

Это и есть условие применимости метода перевала, оно же условие резкости максимума функции $f(t)$.

II. ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Бывают так называемые однопараметрические функции, у которых существенная область изменения $F(x)$ характеризуется одним параметром λ. Тогда

$$F'(\lambda) \sim \frac{F(\lambda)}{\lambda}, \qquad F''(\lambda) \sim \frac{F(\lambda)}{\lambda^2} \qquad \text{и т.д.} \tag{2.1}$$

На первый взгляд может показаться, что это что-то особенное, но на самом деле это довольно частая ситуация. Важно, чтобы функция менялась от некоторого значения до нуля на характерном масштабе порядка λ (см. рис. 3). Если же она меняется до константы, то эту константу можно вычесть, переопределив функцию.

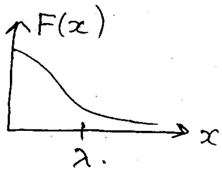

Figure 3:

Рассмотрим примеры:
а) $F(x) = e^{-x^2/\lambda^2}$. Тогда

$$F'(x) = -\frac{2x}{\lambda^2}e^{-x^2/\lambda^2}, \qquad F'(\lambda) \sim \frac{F(\lambda)}{\lambda}. \tag{2.2}$$

б) $F(x) = x^n$, если n не является особенно большим или малым числом. Её масштаб даётся самой переменной x:

$$F'(x) = nx^{n-1} = \frac{nF(x)}{x} \sim \frac{F(x)}{x}. \tag{2.3}$$

Для однопараметрической функции (с параметром t_0) условие применимости метода перевала записывается совсем просто. Поскольку $f''(t_0) \sim f(t_0)/t_0^2$, $f^{(3)}(t_0) \sim f(t_0)/t_0^3$, $f^{(4)}(t_0) \sim f(t_0)/t_0^4$, два условия в формуле (1.5) оказываются эквивалентными и сводятся к единственному требованию

$$f(t_0) \gg 1. \tag{2.4}$$

III. КАК ЕЩЁ МОГУТ ВЫГЛЯДЕТЬ ИНТЕГРАЛЫ, ДЛЯ КОТОРЫХ РАБОТАЕТ МЕТОД ПЕРЕВАЛА

1. $I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\ln g(t)}dt$. Нужно, чтобы функция $\ln g(t)$ имела резкий максимум.

2. $I = \int_0^{\infty} e^{f(t)}dt$, если $|f''(t_0)| \gg 1/t_0^2$. Тогда при $t = 0$ экспонента сильно затухла (а экспонента затухает очень быстро: например, $e^{-1}/e^{-10} \sim 10^4$), и можно распространить интегрирование до $-\infty$. См. рис. 4(а).

3. $I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{f(t)} dt$, если $g(t)$ медленно меняется вблизи t_0 (см. рис. 4(b)). Тогда под интегралом можно заменить $g(t) \mapsto g(t_0)$.

4. $I(x) = \int e^{x\tilde{f}(t)} dt$ при $x \to \infty$. Большое x делает резким любой максимум. Действительно, определим $f(t) = x\tilde{f}(t)$. Тогда

$$\frac{[f^{(3)}(t_0)]^2}{[f''(t_0)]^3} = \frac{1}{x} \frac{[\tilde{f}^{(3)}(t_0)]^2}{[\tilde{f}''(t_0)]^3}, \qquad \frac{f^{(4)}(t_0)}{[f''(t_0)]^2} = \frac{1}{x} \frac{\tilde{f}^{(4)}(t_0)}{[\tilde{f}''(t_0)]^2}, \tag{3.1}$$

и обе эти величины малы при $x \to \infty$, как того и требуют условия применимости метода перевала (1.5). В результате

$$I(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x|\tilde{f}''(t_0)|}}\, e^{x\tilde{f}(t_0)}. \tag{3.2}$$

5. Функция $f(t)$ может иметь несколько резких максимумов: при t_1, t_2 и т.д. Если расстояния между ближайшими максимумами больше ширины соответствующих максимумов подынтегральной функции $e^{f(t)}$ (напомним, что ширина максимума экспоненты определяется параметром $1/\sqrt{|f''(t_i)|}$), то для вычисления вклада от каждого максимума можно воспользоваться основной формулой метода перевала (1.3). Тогда полный интеграл дается суммой по максимумам:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} dt \approx \sum_i \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_i)|}}\, e^{f(t_i)}. \tag{3.3}$$

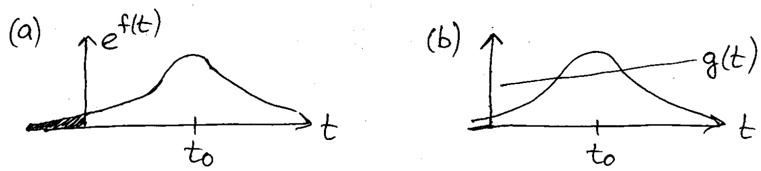

Figure 4:

IV. ГАММА-ФУНКЦИЯ И ФОРМУЛА СТИРЛИНГА

В качестве примера применения метода перевала рассмотрим гамма-функцию

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt. \tag{4.1}$$

Будем рассматривать $x > 0$. Занося экспоненту под дифференциал и интегрируя по частям, получаем рекуррентное соотношение

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{4.2}$$

При целых аргументах гамма-функция превращается в факториал. Действительно, $\Gamma(1) = 1$, а далее с помощью рекуррентного соотношения (4.2) при целых n получаем

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{4.3}$$

Теперь рассмотрим гамма-функцию при произвольных (не обязательно целых) $x \gg 1$ с помощью метода перевала. В обозначениях формулы (1.1) получаем

$$f(t) = x \ln t - t. \tag{4.4}$$

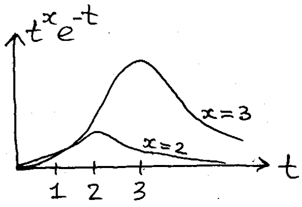

Figure 5:

У этой функции имеется максимум при $t_0 = x$, см. рис. 5. При этом

$$f(t_0) = x\ln x - x, \qquad f''(t_0) = -\frac{1}{x}, \qquad f^{(3)}(t_0) \sim \frac{1}{x^2}, \qquad f^{(4)}(t_0) \sim \frac{1}{x^3}. \tag{4.5}$$

Можно считать, что

$$f''(t_0) \sim \frac{f(t_0)}{t_0^2}, \qquad f^{(3)}(t_0) \sim \frac{f(t_0)}{t_0^3}, \qquad f^{(4)}(t_0) \sim \frac{f(t_0)}{t_0^4}, \tag{4.6}$$

т.к. $\ln x$ — очень медленная функция порядка единицы (чтобы проиллюстрировать это утверждение, заметим, например, что $\ln 1000 \approx 7$).

Таким образом, функция $f(t)$ — однопараметрическая, и условие применимости метода перевала (2.4) даёт $x \gg 1$. Формула метода перевала (1.3) при этом даёт соотношение, известное как формула Стирлинга:

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x. \tag{4.7}$$

При целых значениях аргумента эта формула даёт приближение для факториала:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n. \tag{4.8}$$

Существует элегантный способ получить поправку к формуле Стирлинга. Для этого запишем точный результат в виде

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x [1+\varphi(x+1)] \tag{4.9}$$

— здесь мы просто закодировали отличие формулы Стирлинга от точного результата в функцию φ. Рекуррентное соотношение (4.2) приводит к точному соотношению

$$\frac{1+\varphi(x+1)}{1+\varphi(x)} = e^{1+\left(x-\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}. \tag{4.10}$$

При $x \gg 1$, раскладывая правую часть по Тейлору (логарифм нужно разложить до третьего порядка по $1/x$, а в целом в экспоненте сохранить второй порядок), получаем примерно $1 - 1/(12x^2)$. При этом левая часть $\approx 1 + \varphi(x+1) - \varphi(x)$. В результате

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) \approx \varphi'(x) \approx -\frac{1}{12x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi(x) \approx \frac{1}{12x} \tag{4.11}$$

[мы воспользовались тем, что разность функций при отличающихся на единицу значениях аргумента мала, поэтому эту разность можно заменить на производную].

В результате получаем формулу Стирлинга с поправкой:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \left[1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]. \tag{4.12}$$

Интересно, что формула с первой поправкой хорошо работает даже при небольших x: при $x = 1$ получается 0,9990 вместо 1; при $x = 2$ получается 1,9990 вместо 2.

V. СУММИРОВАНИЕ РЯДОВ

Метод перевала может пригодиться при вычислении сумм рядов через посредство формулы Эйлера-Маклорена:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)\right]. \tag{5.1}$$

Здесь B_{2k} — числа Бернулли. Их можно определить рекуррентно:

$$B_0 = 1, \qquad B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5.2}$$

Свойства: все числа Бернулли с нечётными номерами, кроме B_1, равны нулю, а знаки чисел Бернулли с чётными номерами чередуются.

Если отбросить сумму с числами Бернулли, то оставшаяся часть формулы (5.1) имеет просто смысл приближённой формулы интегрирования методом трапеций. В сумму же входят производные — если они малы, то поправочный ряд мал. В то же время, интеграл при некоторых $f(x)$ может быть вычислен методом перевала.