

Задачи к лекции 2

1. Рассмотреть интеграл $\int_x^\infty dt e^{-t}/t$ при $x \gg 1$ и написать для него разложение по обратным степеням x . Сколько членов этого разложения следует оставить для достижения наибольшей точности результата?

2. Рассмотреть интеграл $I(\beta) = \int_0^\infty dt e^{-\beta t}/(t+1)$ при $\beta \ll 1$ и вывести интегральное представление для числа A входящего в разложение $I(\beta)$ при малых β как $I(\beta) = \ln(1/\beta) + A + O(\beta)$. Показать, что A выражается через число Эйлера $\mathbf{C} = 0.577\dots$

3. Исследовать асимптотики интеграла

$$\int_0^\infty dt e^{-\beta t^2} \sin x^2 \quad \text{при } b \ll 1 \text{ и } b \gg 1$$

4. Исследовать асимптотики интеграла

$$\int_0^\infty dt \sin(t)/[t(t^2+a^2)] \quad \text{при } a \ll 1 \text{ и } a \gg 1$$

5. Приближенно (при малом $0 < \varepsilon = 1 - q$) вычислить ряд

а) $\sum_n^\infty q^n \sqrt{n}$

б) $\sum_n^\infty q^n / (n+1)$