

Задачи по теме “Трансцендентные уравнения”

Задача 1

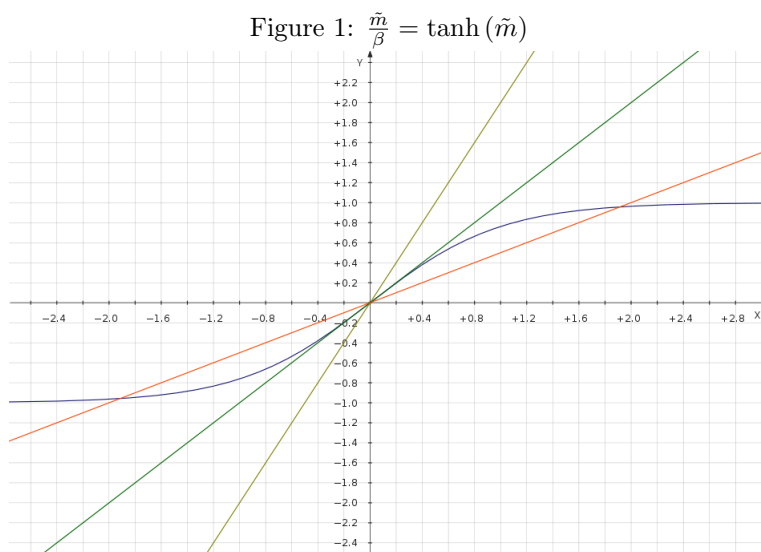
Рассмотрим уравнение

$$m = \tanh(m/T)$$

Оно всегда имеет тривиальное решение $m = 0$. Однако существует критическая точка, вблизи которой появляется нетривиальное решение $m(T)$. Найти асимптотическое поведение этого решения вблизи критической точки.

Решение

Решать задачу будем графически. Для удобства сделаем перемасштабирование - введем $\tilde{m} = m/T$; уравнение переписется как $T\tilde{m} = \tanh \tilde{m}$. Нарисуем на графике левую и правую часть уравнения.



Функция $\tanh x$ ведет себя вблизи нуля линейно: $\tanh x \sim x$. Из-за симметрии уравнения относительно замены m на $-m$, всегда будут иметься как положительные, так и отрицательные решения, поэтому следить мы будем только за положительными. Из этого и из картинки можно сделать следующие выводы:

- при $T < 1$, прямая идет полого, и имеются точки пересечения обоих графиков, отличные от $m = 0$; это и есть наши нетривиальные решения
- при $T \rightarrow 0$, прямая идет практически горизонтально. Ордината точки пересечения y стремится к 1, поэтому решение уравнения $m \rightarrow 1$.
- при $T > 1$, прямая идет более круто и точек пересечения нет
- при $T = 1$, прямая касается графика $\tanh \tilde{m}$. Это и есть искомая критическая точка.

Перейдем обратно от переменной \tilde{m} к переменной m и найдем асимптотику аналитически. Видно, что вблизи критической точки, $m(T)$ близко к нулю. Это позволяет нам разложить гиперболический тангенс по малости своего аргумента, и переписать уравнение приближенно как:

$$m \approx \frac{m}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{m}{T}\right)^3$$

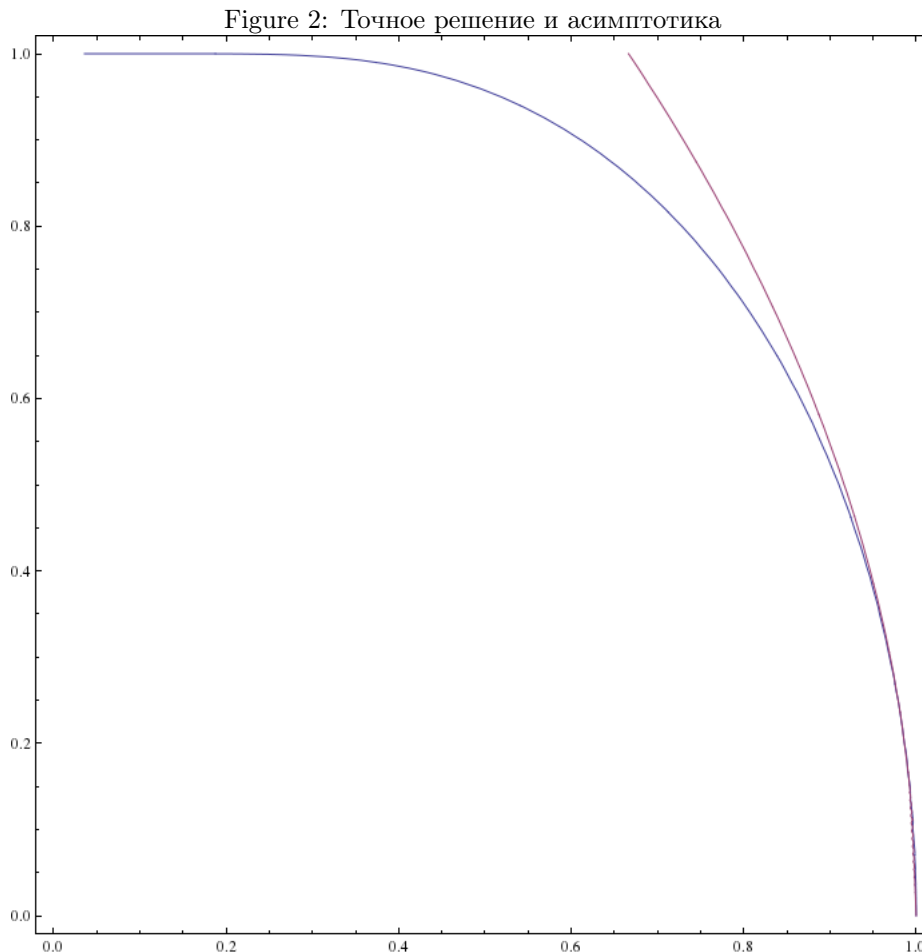
Теперь это уравнение решается тривиально; отбрасывая тривиальное решение $m = 0$, имеем:

$$1 - T \approx \frac{1}{3} \frac{m^2}{T^2}$$

Слева имеется малая величина $1 - T$; справа же величина $\frac{1}{T^2}$ конечна и близка к 1. В рамках ведущего разложения по $T - 1$, мы можем положить ее равной единице. Имеем:

$$m(T) \approx \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - T}, T \rightarrow 1$$

Можно сверить асимптотику с точным решением, полученным численно. Видно, что их поведение вблизи критической точки с хорошей точностью совпадает.



Задача 2

Рассмотрим уравнение

$$\tan Ax = \frac{1}{x}$$

Его решения нумеруются натуральным числом n . Найти асимптотическое поведение решений при $n \ll A$ и $n \gg A$.

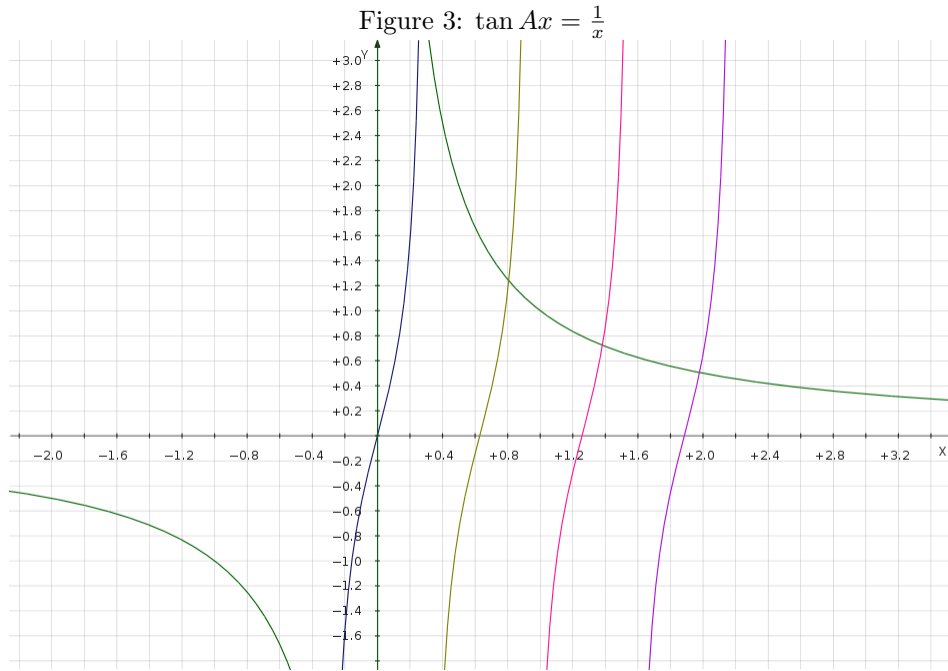
Решение

Будем решать уравнение опять графически. Нарисуем левую и правую часть уравнения.

Видно, что имеется целая серия точек пересечения, которые являются решением нашего уравнения. Из картинке также можно сделать вывод о том, вблизи каких точек расположены корни в обоих случаях и в окрестности каких точек стоит искать решение.

Случай $n \ll A$

При $n \ll A$, период тангенса мал ($A \gg 1$) и все решения лежат вблизи нуля. Значит, ордината точек пересечения $\frac{1}{x_n} \rightarrow +\infty$; это означает, что решения наши лежат вблизи точек $\tan Ax = +\infty \Rightarrow x_n \approx \frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)$. Найдём поправки к этому выражению. Для этого рассмотрим $\delta_n = Ax - \frac{\pi}{2} + \pi n \ll 1$; сделаем такую подстановку в уравнение и разложимся по малости δ_n :



$$\tan\left(\delta_n + \frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{A}{\delta_n + \frac{\pi}{2} + \pi n}$$

$$-\cot(\delta_n) = \frac{A}{\delta_n + \frac{\pi}{2} + \pi n}$$

Теперь займемся разложением. Функция $\cot x \sim \frac{1}{x}$ вблизи нуля; справа же $\delta_n \ll 1$ и ей можно пренебречь. Имеем:

$$\delta_n \approx -\frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

(видно, что $A\delta_n \sim \frac{1}{a} \ll 1$, поэтому наше предположение было верным).

Таким образом, в этом случае приближенно ответ записывается как:

$$x_n \approx \frac{1}{A} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) - \frac{1}{A^2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

Случай $n \gg A$

В этом случае решения $Ax_n \gg 1$, поэтому $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ и решения стоит искать вблизи точек $\tan Ax = 0 \Rightarrow x_n \approx \frac{\pi n}{A}$. Аналогичным путем найдем поправки к этому выражению. Положим $\delta_n = Ax - \pi n \ll 1$, подставим в уравнение:

$$\tan(\delta_n + \pi n) = \frac{A}{\delta_n + \pi n}$$

В силу периодичности, $\tan(\delta_n + \pi n) = \tan \delta_n$; в первом порядке разложения слева $\tan \delta_n$ можно заменить на аргумент, а справа - выбросить по сравнению с $\pi n \gg 1$. Имеем:

$$\delta_n \approx \frac{A}{\pi n}$$

Поэтому ответ записывается как:

$$x_n \approx \frac{\pi n}{A} + \frac{1}{\pi n}$$

Задачи для домашнего решения

Задачи 1 и 2 Найти приближенно решения следующих уравнений:

$$x = e^{-\alpha x}$$

$$x = 1 + e^{-\alpha x}$$

при $\alpha \gg 1$ и $\alpha \ll 1$.

Зонная задача Рассмотрим неравенство

$$\left| \cos x + \alpha \frac{\sin x}{x} \right| > 1$$

При малых α на числовой оси располагается бесконечное количество узких “зон” для x , при которых это неравенство выполняется. Найти асимптотическое поведение ширины d_n этих зон при $n \gg 1$.