

Задачи по теме “Интегралы с малым параметром”

Задача 1

Найти асимптотики интеграла

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

при $x \gg 1$ и $x \ll 1$.

Решение

Подынтегральная функция аналитична в нуле, поэтому при $x \ll 1$ можно просто разложить $\cos t$ в ряд Тейлора; имеем:

$$I(x) \approx \int_0^x \frac{t^2/2}{t} dt = \frac{1}{4}x^2$$

При $x \gg 1$, для интеграла важна вся область интегрирования; это связано с тем, что при $x \rightarrow \infty$ этот интеграл расходится. Для выделения ведущей асимптотики можно воспользоваться трюком. Во-первых, поведение функции в нуле аналитично, поэтому интеграл можно представить в виде:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Поскольку на области интегрирования $\cos x$ успевает осциллировать много раз, во втором слагаемом мы можем его выбросить (известно, что $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ сходится и равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому при выбрасывании косинуса мы потеряем некую константу ~ 1). Во-вторых, поскольку подынтегральная функция аналитична в нуле, то первое слагаемое тоже даст число ~ 1 . Таким образом формально можно записать:

$$I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} + O(1) \approx \ln(x)$$

На фоне большого слагаемого $\ln x \gg 1$ (при $x \gg 1$), выброшенные константы порядка единицы являются малой добавкой. Это называется взятием интеграла с логарифмической точностью. Точное вычисление асимптотики дает ответ $\ln x + C + o(1)$, где $C \approx 0.577$ - постоянная Эйлера-Маскерони.

Задача 2

Найти асимптотики интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x/a)}{\sqrt{x(x+b)}} dx$$

при $a \gg b$ и $a \ll b$.

Решение

Обезразмерим интеграл. Введем переменную $t = \frac{x}{a}$, имеем:

$$I(a, b) \equiv I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t\left(t + \frac{b}{a}\right)}} dt$$

Случай $b \gg a$

Из-за экспоненты, подынтегральное выражение быстро затухает на масштабах $t \sim 1$ вблизи нуля. Поэтому в существенной области интегрирования $t \ll \frac{b}{a}$ и в знаменателе можно выбросить t на фоне большого члена $\frac{b}{a}$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t}} dt$$

Заменой $t = z^2$ этот интеграл сводится к известному интегралу Пуассона. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\exp(-z^2)}{z} \cdot 2 \cdot z \cdot dz = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi a}{b}}$$

Случай $b \ll a$

Тут экспонента тоже затухает очень быстро на масштабах ~ 1 . Однако, если выбросить $\frac{b}{a}$ в знаменателе, мы получим расходящийся интеграл - около нуля экспонента ведет себя примерно как 1, и подынтегральная функция имеет асимптотику $\sim \int_0^{\dots} \frac{1}{t} dt$, то есть расходится логарифмически. Поэтому тут существенная область интегрирования теперь - вблизи нуля. Интеграл можно переписать как:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^1 \frac{\exp(-t)}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt + \int_1^{\infty} \dots$$

Второе слагаемое - сходящийся интеграл, который из-за экспоненты - число порядка 1 (формально можно оценить как $I_2 < \int_1^{\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{e} \sim 1$); на фоне большого первого слагаемого его можно выбросить. Далее, поскольку, как было уже сказано, существенная область интегрирования лежит около нуля, экспоненту можно положить равной 1. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt$$

Этот интеграл уже можно просто взять. Введем замену $t = z^2$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{2z dz}{\sqrt{z^2(z^2 + \frac{b}{a})}} = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \frac{b}{a}}}$$

Теперь введем замену $z = \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh u$; тогда $z^2 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a} (\sinh^2 u + 1) = \frac{b}{a} \cosh^2 u$:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh}(\sqrt{\frac{a}{b}})} \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cosh u du}{\sqrt{\frac{b}{a}} \cosh u} = 2 \operatorname{arcsinh}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

Для гиперболического арксинуса есть выражение через элементарные функции:

$$\sinh x = a \Leftrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = a$$

Если $t = e^x$, то

$$\frac{t - \frac{1}{t}}{2} = a \Leftrightarrow t^2 - 1 = 2at \Leftrightarrow t^2 - 2at - 1 = 0 \Leftrightarrow t = a \pm \sqrt{a^2 + 1}$$

Поскольку $t > 0$, то оставляем лишь положительный корень; имеем: $x = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1}) = \operatorname{arcsinh}(a)$. Значит:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b} + 1}\right) \approx 2 \ln\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right) \approx \ln \frac{a}{b} \gg 1$$

(тут мы выбросили малый член $2 \ln 2$ на фоне большой основной асимптотики).

Задача 3

Найти асимптотики интеграла

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{x(x^2 + b^2)} dx$$

при $a \ll b$ и $a \gg b$

Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную $t = \frac{x}{a}$. Имеем:

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{at(a^2t^2 + b^2)} \cdot a \cdot dt = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t(t^2 + \frac{b^2}{a^2})} dt \equiv \frac{1}{a^2} I\left(\frac{b}{a}\right)$$

Случай $a \gg b$

Если выбросить $\frac{b^2}{a^2} \ll 1$ по сравнению с t в знаменателе, то мы получим расходящийся интеграл (в нуле как $\sim \int_0^{\dots} \frac{dt}{t^2}$). Из этого можно заключить, что основная область, где интеграл набирается - вблизи нуля. Поэтому $\sin t$ можно разложить; имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b} \cdot \arctan\left(\frac{b}{a}t\right) \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi a}{2b}$$

Поэтому для исходного интеграла имеем:

$$I(a, b) \approx \frac{\pi}{2ab}$$

Случай $a \ll b$

Поскольку интеграл от функции $\frac{\sin t}{t}$ набирается на масштабах порядка ~ 1 (из-за осциллирующего синуса), то в знаменателе можно выбросить t^2 на фоне $\frac{b^2}{a^2} \gg 1$. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x \cdot \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Поэтому для исходного интеграла имеем:

$$I(a, b) \approx \frac{\pi}{2b^2}$$

Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(\varepsilon) = \int_0^{\infty} \exp(-x^2 - \alpha x^4) dx$$

при $\alpha \ll 1$

Задача 2 Найти асимптотическое поведение интеграла

$$I_n(a, b) = \int_0^b \frac{x^n \cdot dx}{e^{x/a} - 1}$$

при целых $n \gg 1$, для случаев $a \gg b$ и $a \ll b$.

Задача 3 Найти асимптотическое поведение интеграла:

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{x \cdot dx}{a^2 x^2 + (1 - x^2)^2}$$

для случая $a \ll 1$.

Задача 4 Найти асимптотическое поведение интеграла

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x/a)}{\sin(x)} dx$$

при $a \ll 1$