

Семинар 5 по теме “Интегралы от быстроменяющихся функций и асимптотические разложения”

Метод стационарной фазы

Часто в приложениях встречаются осциллирующие интегралы типа:

$$\int \cos(f(x)) \cdot dx$$

с очень быстроменяющейся функцией $f(x)$. К таким интегралам часто применим так называемый метод стационарной фазы. Этот метод тесно связан с методом перевала; идея заключается в том, что, как и в методе перевала, поведение интеграла определяется окрестности стационарных точек $f'(x_0) = 0$. Это связано с тем, что именно в окрестности этих точек функция осциллирует меньше всего; вдали же от них за счёт быстрых осцилляций интеграл быстро сходится. Вклад от каждой стационарной точки можно получить путём разложения функции в ряд Тейлора в окрестности. Получается интеграл

$$\int \cos\left(f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots\right) dx$$

где пределы интегрирования уже можно распространить на всю числовую ось. Такой интеграл мы уже умеем считать, т.к он выражается через уже известные нам интегралы Френеля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Обсудим теперь применимость метода. Интеграл от разложенной функции набирается в малой окрестности стационарной точки шириной $|x-x_0| \sim \frac{1}{\sqrt{|f''(x_0)|}}$. Чтобы можно было пренебречь вкладом от следующих членов разложения выше второго, требуется выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3| &\ll |f''(x_0)(x-x_0)^2| \\ |f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4| &\ll |f''(x_0)(x-x_0)^2| \end{aligned}$$

в области сходимости интеграла. Это даёт нам следующие критерии применимости метода:

$$\begin{aligned} |f^{(3)}(x_0)| &\ll |f''(x_0)|^{3/2} \\ |f^{(4)}(x_0)| &\ll |f''(x_0)|^2 \end{aligned}$$

Задача 1

В качестве примера разберём поведение функции Эйри (Airy)

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

при $x \rightarrow -\infty$

Решение

Найдем стационарные точки фазы:

$$f'(t) = t^2 + x = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm |x|^{1/2}$$

Только одна стационарная точка $t_1 = \sqrt{|x|}$ попадает в отрезок интегрирования, и необходимо рассматривать вклад только от ее окрестности. Для поведения фазы в окрестности этой точки можно записать:

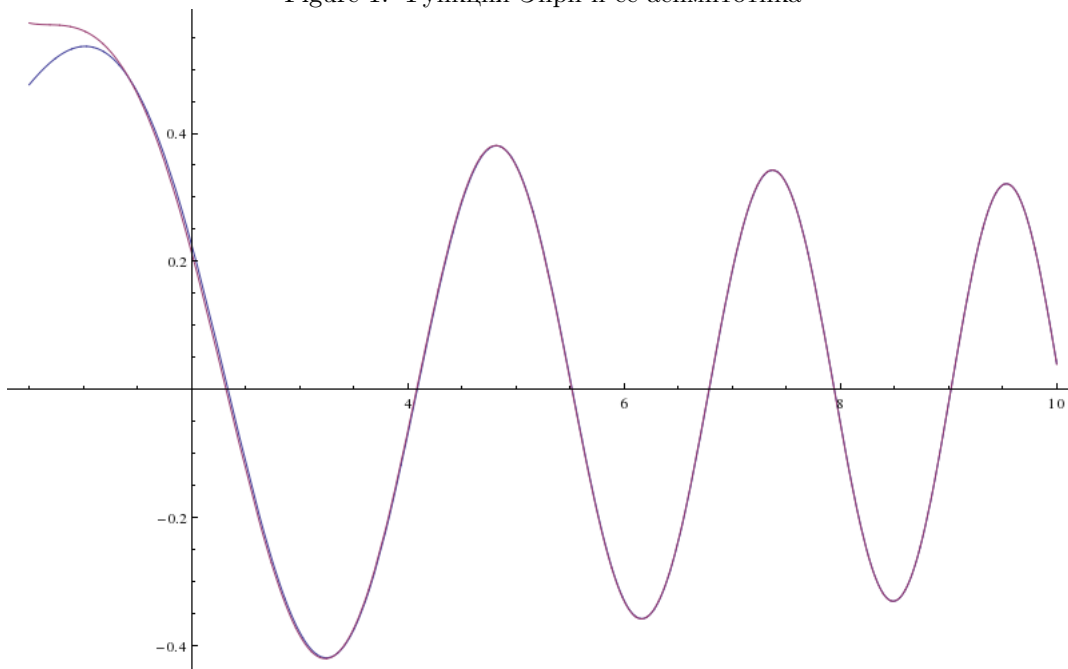
$$f''(t) = 2t \Rightarrow f''(t_1) = 2|x|^{1/2}$$

$$f(t) \approx -\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2} (t - |x|^{1/2})^2$$

Поэтому вклад в интеграл от окрестности стационарной точки записывается как:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2} (t - |x|^{1/2})^2\right) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \cos\left(|x|^{1/2} (t - |x|^{1/2})^2\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \sin\left(|x|^{1/2} (t - |x|^{1/2})^2\right) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2|x|^{1/2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cdot \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Figure 1: Функция Эйри и её асимптотика



Задача 2

Разберем поведение функции Бесселя:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$$

при $x \rightarrow \infty$

Решение

Стационарные точки фазы даются условием:

$$f'(t) = x \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

В отрезок интегрирования попадает одна стационарная точка t_0 ; поведение функции определяется вкладом в интеграл лишь от окрестности этой точки. Имеем:

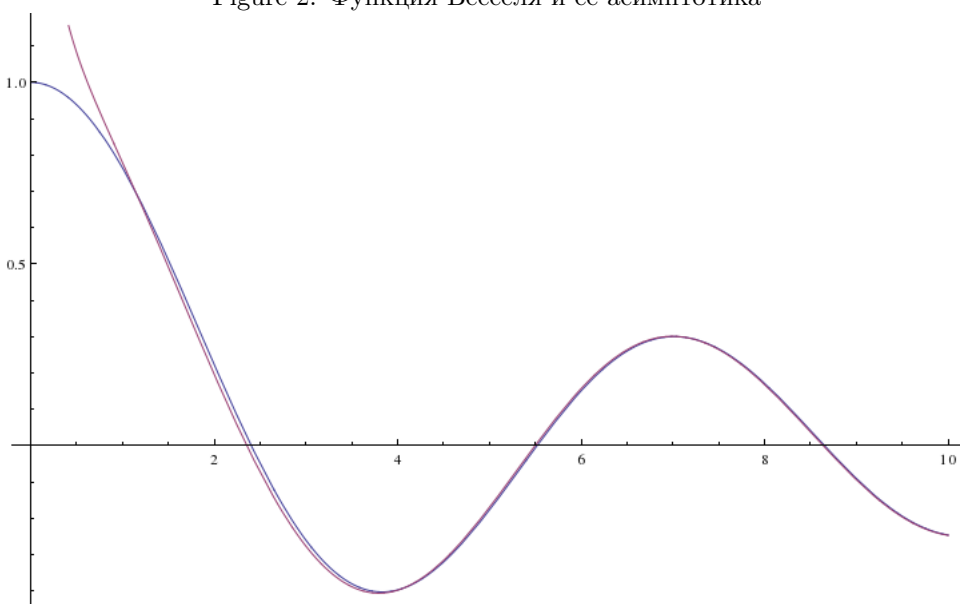
$$f''(t) = -x \sin t \Rightarrow f''(t_0) = -x$$

$$f(t) \approx x - \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

поэтому для оценки асимптотики функции Бесселя получаем:

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left(x - \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\cos x \cdot \cos \left(\frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) + \sin x \cdot \sin \left(\frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} (\cos x + \sin x) \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Figure 2: Функция Бесселя и её асимптотика



Асимптотические разложения

Задача 3

Найти полный асимптотический ряд для интеграла

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx$$

при $\alpha \rightarrow \infty$.

Решение

Асимптотический ряд можно просто получить, раскладывая корень по малости $\frac{x}{\alpha}$. Имеем:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-1/2} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{-1/2}^k \left(\frac{x}{\alpha}\right)^k dx \end{aligned}$$

Тут C_{α}^k при нецелых α - обобщенный биномиальный коэффициент, определяемый как:

$$C_{\alpha}^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

В случае $\alpha = -\frac{1}{2}$ это можно переписать:

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k-1)!!}{k!}$$

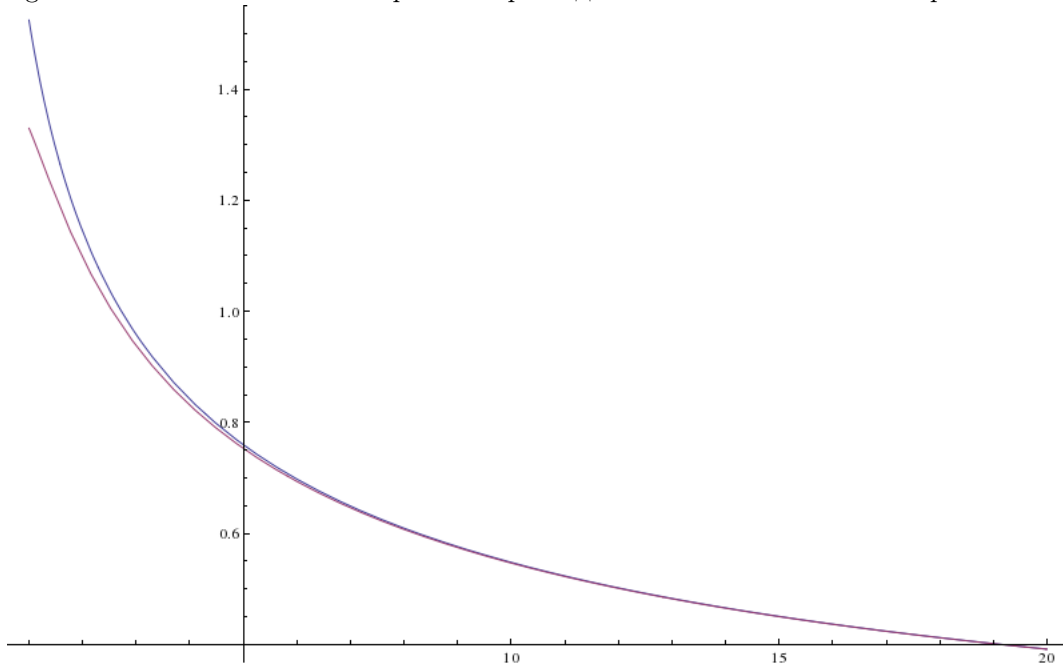
Дальше можно поменять местами сумму и интеграл; каждый из полученных интегралов представляет собой просто интеграл Эйлера; получаем:

$$\begin{aligned} I(a) &\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} C_{-1/2}^k \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x^{k-\frac{1}{2}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} C_{-1/2}^k \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \cdot \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k-1)!!}{k!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \cdot \frac{(-1)^k ((2k-1)!!)^2 \sqrt{\pi}}{2^{2k} k!} \end{aligned}$$

Тут мы воспользовались тем, что $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \left(k - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(k - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \cdot \sqrt{\pi}$. Для первых нескольких членов разложения имеем:

$$I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\alpha} + \frac{9}{32} \cdot \frac{1}{\alpha^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\right)$$

Figure 3: Точное значение интеграла и первые два члена асимптотического разложения



Задача 4

Найдём полное асимптотическое разложение интегрального синуса:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

при $x \rightarrow \infty$

Решение

Перепишем выражение следующим образом, используя интеграл Дирихле:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Можно получить асимптотический ряд, просто интегрируя по частям:

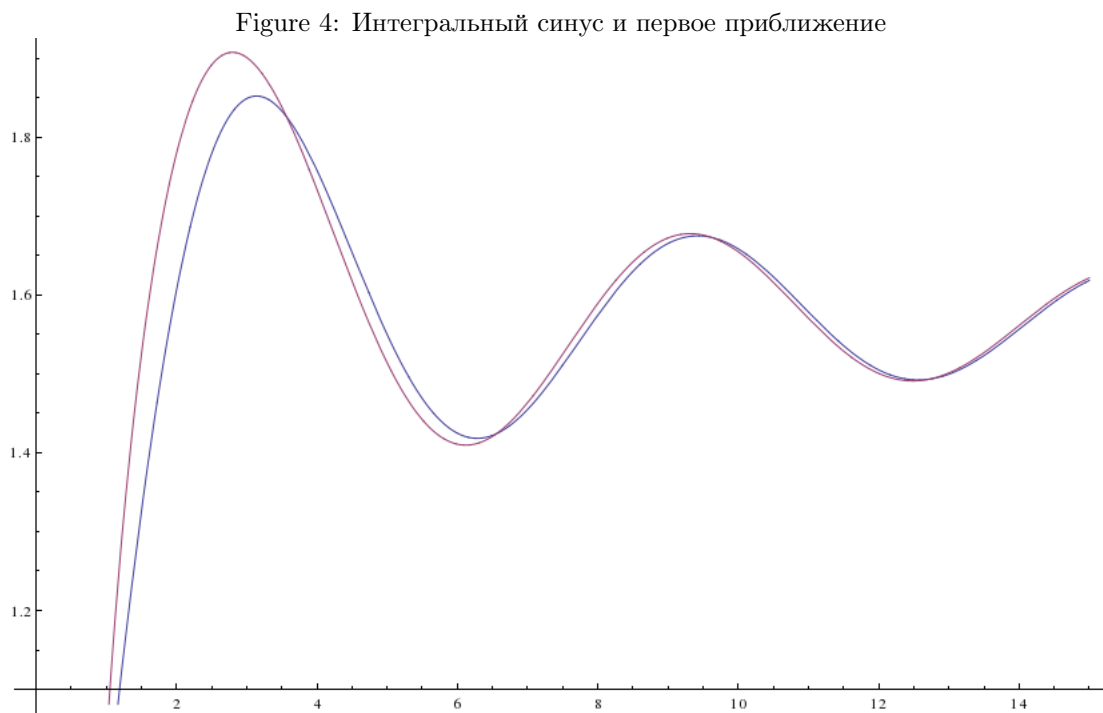
$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t^3} dt$$

В общем виде мы получаем следующую сумму:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot (2k)!}{x^{2k+1}} - \sin x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{x^{2k}}$$

Заметим, что эти ряды расходятся. Первые несколько членов ряда дают:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \frac{\cos x}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$



Задача 5

Найдем асимптотическое поведение интеграла

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cdot dx$$

при $n \rightarrow \infty$

Решение

Для асимптотики можно воспользоваться уже известным нам методом перевала. Действительно, интеграл можно переписать:

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \exp(n \cdot \log(\sin x)) dx$$

Стационарная точка находится из условия

$$f'(x) = \frac{n}{\sin x} \cdot (-\cos x) = -n \cdot \cot x = 0 \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Лишь одна стационарная точка x_0 попадает в отрезок интегрирования, и поведение интеграла определяется вкладом от окрестности этой точки.

$$f''(x) = -\frac{n}{\sin^2 x} \Rightarrow f''(x_0) = -n$$

$$f(x) \approx -\frac{1}{2}n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Тут имеется тонкость. Стационарная точка попадает ровно на границу отрезка интегрирования. Это означает, что мы не можем распространять интеграл от разложенной функции на всю числовую ось, как мы поступали в методе перевала. Это обходится следующим образом: поскольку в области интегрирования лежит ровно половина Гауссова колокола (а в малой окрестности стационарной точки подынтегральная функция симметрична), то вклад от метода перевала нужно просто поделить на 2. Получаем:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Заметим, что интеграл чуть более общего вида

$$I(n, m) = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cdot \sin^n x \cdot dx$$

можно свести к B -интегралу Эйлера. Действительно, введём замену $t = \sin^2 x$; при этом $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = (1 - t)^{1/2}$ и $dt = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \cdot dx$. Имеем:

$$\begin{aligned} I(n, m) &= \int_0^1 \cos^m x \cdot \sin^n x \cdot \frac{dt}{2 \cdot \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2} \int_0^1 \cos^{m-1} x \cdot \sin^{n-1} x \cdot dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{m-1}{2}} \cdot t^{\frac{n-1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \end{aligned}$$

В случае $m = 0$, точный ответ получается:

$$I(n) = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}$$

Для оценки асимптотики этого выражения можно воспользоваться формулой Стирлинга

$$\Gamma(n+1) \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
 I(n) &\approx \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi(n-1)}}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{n}{2}}}{e^{\frac{n-1}{2}}} = \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)^{-1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{e} \approx \\
 &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \cdot e^{\frac{n}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \cdot \sqrt{e} \approx \\
 &\approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot e^{\frac{n}{2} \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)} \sqrt{e} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \left(1 - \frac{1}{4n}\right)
 \end{aligned}$$

Этот способ, в отличие от метода перевала, позволил нам получить следующий член асимптотического разложения (с помощью метода перевала получить его не получится).

Задача 6

Покажем, что функция

$$\delta_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega x)}{\omega x^2}$$

при $\omega \rightarrow 0$ представляет собой δ -функцию Дирака.

Решение

Область, в которой функция существенно отлична от нуля, имеет ширину $|x| \sim \frac{1}{\omega}$, и при $\omega \rightarrow \infty$ она сужается:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_\omega(x \neq 0) = 0$$

Поэтому при рассмотрении интеграла вида

$$I = \int \delta_\omega(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

при $\omega \rightarrow 0$ поведение определяется окрестностью нуля (область интегрирования должна содержать ноль, а функция $f(x)$ не должна иметь сингулярностей в нуле). Получаем:

$$I \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) \cdot f(0) \cdot dx = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega x}{\omega x^2} dx$$

Этот интеграл как раз равен π . Поэтому можно записать:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) f(x) dx = f(0)$$

Это и означает по определению, что

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_\omega(x) = \delta(x)$$

Задачи для домашнего решения

Задача 1 Найти асимптотический ряд для интегрального косинуса

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

при $x \rightarrow \infty$

Задача 2 Найти асимптотический ряд для неполной гамма-функции

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

при фиксированном s и $x \rightarrow \infty$

Задача 3 Найти асимптотику функции Бесселя целого порядка n , определяемой как

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt$$

при фиксированном n и $x \gg n^2$

Задача 4 Найти асимптотику интеграла

$$I(x) = \int_0^{\infty} \cos(x \cdot (t^4 - t^2)) dt$$

при $x \rightarrow \infty$

Задача 5 Вычислить точно интеграл

$$\int_0^b x \cdot e^{-x} \cdot \sin(\omega x) dx$$

Задача 6 Найти значение функции Эйри (см. задачу 1) в нуле $\text{Ai}(0)$.

Задача 7 Найти дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функцию Эйри. Подсказка: это уравнение не содержит производных выше второй.