Тема 4. Определенные интегралы, зависящие от параметра

На этом занятии рассматриваются различные примеры вычисления интегралов с помощью метода дифференцирования и интегрирования по параметру, от которого зависит подынтегральное выражение. Также рассматривается вычисление расходящихся несобственных интегралов с помощью различных способов регуляризации (размерная регуляризация, регуляризация Паули-Вилларса).

Метод вычисления и оценки интегралов, зависящих от параметра, основан на следующих соотношениях:

$$I(\lambda) = \int\limits_a^b f(x,\lambda)dx \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \displaystyle\int\limits_a^b \frac{\partial f(x,\lambda)}{\partial\lambda}dx \\ \displaystyle\int\limits_\alpha^\beta I(\lambda)d\lambda = \int\limits_a^b \left(\int\limits_\alpha^\beta f(x,\lambda)d\lambda\right)dx \end{cases} \tag{1}$$

Пример 1. Гамма-функция и факториал

Рассмотрим следующий интеграл

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt, \qquad p = 1, 2, \dots \tag{2}$$

определённый для всех натуральных p. Заметим, что $\Gamma(1) = 1$. Определим функцию

$$f(p,\lambda) = \int\limits_0^\infty t^{p-1}e^{-\lambda t}dt. \tag{3}$$

Дифференцируя обе стороны равенства (3) по параметру λ, находим, что

$$\frac{\partial f(p,\lambda)}{\partial\lambda} = -f(p+1,\lambda). \tag{4}$$

С другой стороны, замена переменной интегрирования с $t \to t/\lambda$, приводит к следующей связи между $f(p,\lambda)$ и $\Gamma(p)$:

$$f(p,\lambda) = \lambda^{-p}\Gamma(p). \tag{5}$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), находим

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \tag{6}$$

отсюда

$$\Gamma(p+1) = p!\,\Gamma(1) \equiv p! \tag{7}$$

Заметим, что в определении $\Gamma(p)$ через интеграл (2), значения p, вообще говоря, не обязаны быть натуральными числами. Функция $\Gamma(p)$ называется гамма-функцией.

Пример 2. Гауссов интеграл и гамма-функция от полуцелого аргумента

Рассмотрим интеграл

$$f(p,\lambda) = \int_0^\infty t^{2p} e^{-\lambda t^2} dt. \tag{8}$$

Дифференцируя обе части выражения (8) по λ, находим

$$\frac{df(p,\lambda)}{d\lambda} = -f(p+1,\lambda). \tag{9}$$

С другой стороны, с помощью замены переменной $t \to t/\sqrt{\lambda}$, получаем, что

$$f(p,\lambda) = \lambda^{-p-1/2} f(p,1). \tag{10}$$

Подставляя выражение (10) в уравнение (9), находим реккурентное соотношение

$$f(p+1,1) = \left(p + \frac{1}{2}\right) f(p,1). \tag{11}$$

Отсюда,

$$f(p,1) = \Gamma\left(p+1/2\right) = f(0,1) \prod_{k=0}^{p-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \tag{12}$$

Таким образом, гауссов интеграл (8) выражается через гамму-функцию от полуцелого аргумента. Заметим, что

$$f(0,1) = \Gamma\left(1/2\right) = \sqrt{\pi}/2. \tag{13}$$

Напомним, что ответ (13) может быть получен следующим способом

$$[\Gamma\left(1/2\right)]^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+y^2} dx dy = \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\phi = \frac{\pi}{4}$$

Пример 3. Интегральное представление логарифма

Рассмотрим функцию

$$L(\lambda) = \int_0^\infty \left[e^{-t} - e^{-\lambda t}\right] \frac{dt}{t} \tag{14}$$

Продифференцируем обе части равенства (14) по λ:

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \tag{15}$$

Учитывая, что $L(1) = 0$, и интегрируя выражение (15) по λ, находим

$$L(\lambda) = \ln \lambda \tag{16}$$

Вопрос: в чём состоит ошибка в следующей цепочке равенств:

$$L(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} - \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} - \int\limits_0^\infty e^{-t}\frac{dt}{t} = 0$$

Пример 4. Интеграл от экспоненциальной и тригонометрической функции

Рассмотрим интеграл

$$f(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\sin t\,dt \tag{17}$$

Диффиренцируя обе части выражения (17) по λ, находим

$$f''(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,t^2\sin t\,dt \tag{18}$$

С другой стороны, интегрируя два раза по частям, получаем

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\,t^2\sin t\,dt = -\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}[2-4\lambda t+\lambda^2 t^2]\sin t\,dt = -2f(\lambda) - 4\lambda f'(\lambda) - \lambda^2 f''(\lambda) \tag{19}$$

Сравнивая выражения (18) и (19), находим, что $f(\lambda)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$(1+\lambda^2)f'' + 4\lambda f' + 2f = 0, \tag{20}$$

которое элементарно решается

$$\big[(1+\lambda^2)f(\lambda)\big]'' = 0 \qquad \Longrightarrow f(\lambda) = \frac{C_1\lambda + C_2}{1+\lambda^2}. \tag{21}$$

Здесь C_1 и C_2 две произвольные константы интегрирования. Их значения можно найти, вычисляя асимптотику функции $f(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$:

$$f(\lambda) = \lambda^{-1}\int\limits_0^\infty e^{-t}\sin(t/\lambda)\,dt \approx \lambda^{-2}\int\limits_0^\infty e^{-t}\,t\,dt = \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \tag{22}$$

Отсюда видно, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$. Таким образом,

$$f(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\sin t\,dt = \frac{1}{1+\lambda^2} \tag{23}$$

Заметим, что ответ (23) может быть получен другим способом:

$$f(\lambda) = \mathrm{Im}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t+it}dt = \mathrm{Im}\,\frac{1}{\lambda-i} = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

Проинтегрируем выражение (23) по λ от a до ∞:

$$\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_a^\infty e^{-\lambda t}d\lambda\right)\sin t\,dt = \int\limits_0^\infty e^{-at}\frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_a^\infty\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\pi}{2}-\arctan a \tag{24}$$

Отсюда в пределе $a\to 0$ получаем ответ для известного интеграла:

$$\int\limits_0^\infty\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

Пример 5. Логарифмически расходящийся интеграл. Размерная регуляризация

Рассмотрим интеграл

$$f(h) = \int\limits_0^\infty\frac{p}{p^2+h^2}\,dp \tag{26}$$

Делая замену переменных $p\to\sqrt{x}$, находим, что регуляризованный с помощью обрезки интеграл (26) равен

$$f(h,L) = \int\limits_0^L\frac{p}{p^2+h^2}\,dp = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{L^2}{h^2}\right), \tag{27}$$

т.е. $f(h)$ логарифмически расходится на верхнем пределе. Заметим, что в пределе $L\to\infty$ получаем, что

$$f(h,L) = \ln L - \ln h + \overline{o}\,(1)\,. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$f(h,\epsilon) = \int\limits_0^\infty\frac{p^{1-\epsilon}}{p^2+h^2}\,dp, \tag{29}$$

При всех $\epsilon>0$ этот несобственный интеграл сходится. Найдем его поведение при $\epsilon\to 0^+$. Во-первых, заметим, что $f(h,\epsilon)=h^{-\epsilon}f(h,1)$. С другой стороны, дифференцируя обе части выражения (29) по h, находим

$$\frac{\partial f(h,\epsilon)}{\partial h} = -2h\int\limits_0^\infty\frac{p^{1-\epsilon}}{(p^2+h^2)^2}\,dp, \qquad\Longrightarrow\qquad \epsilon f(1,\epsilon) = -2\int\limits_0^\infty\frac{p^{1-\epsilon}}{(p^2+1)^2}\,dp, \tag{30}$$

Интеграл в правой части выражения (30) сходится при $\epsilon=0$, поэтому в пределе $\epsilon\to 0^+$ находим

$$\epsilon f(1,\epsilon)\approx 2\int\limits_0^\infty\frac{p}{(p^2+1)^2}\,dp = 1 \tag{31}$$

Отсюда получаем, что

$$f(1,\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \tag{32}$$

и, наконец,

$$f(h,\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \ln h + \overline{o}\,(1) \tag{33}$$

Заметим, что интеграл (29) может быть вычислен точно:

$$f(h,\epsilon) = h^{-\epsilon}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty p^{1-\epsilon}e^{-tp^2-t}\,dpdt = \frac{1}{2}h^{-\epsilon}\int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{\epsilon/2-1}dt\int\limits_0^\infty u^{-\epsilon/2}e^{-u}\,du = \frac{1}{2}h^{-\epsilon}\Gamma(\epsilon/2)\Gamma(1-\epsilon/2) = \frac{h^{-\epsilon}}{\epsilon}\Gamma(1+\epsilon/2)\Gamma(1-\epsilon/2)$$

Регуляризация (29) называется размерной, т. к. $f(h)$ может быть записано в виде двумерного интеграла:

$$f(h) = \frac{1}{S_2}\int\limits_0^\infty \frac{S_2 p dp}{p^2+h^2} = \frac{1}{S_2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dp_x dp_y}{p_x^2+p_y^2+h^2} \equiv \frac{1}{S_2}\int \frac{d^2\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+h^2}$$

Здесь $S_2 = 2\pi$ - площадь двумерной единичной сферы, т.е. окружности единичного радиуса. По аналогии

$$f(h,\epsilon) = \frac{1}{S_D}\int \frac{d^D\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{p}^2+h^2},$$

где размерность $D = 2-\epsilon$.

Вопрос: Чему равна площадь S_D сферы единичного радиуса в D-мерном пространстве?

Пример 6. Логарифмически расходящийся интеграл. Регуляризация Паули-Вилларса

Рассмотрим интеграл

$$f(h,L,M) = \sum_{f=0}^K e_f \int\limits_0^L \frac{p}{p^2+h^2+M_f^2}\,dp, \tag{34}$$

где $e_0 = 1$, $M_0 = 0$, и для $1 \leqslant f \leqslant K$ выполняются соотношения $L \gg M_f \gg 1$. Выбор величин e_f с $1 \leqslant f \leqslant K$ и значение K будет сделано ниже. Интегрируя по p, находим

$$f(h,L,M) = \frac{1}{2}\sum_{f=0}^K e_f \ln\frac{L^2+h^2+M_f^2}{h^2+M_f^2} \approx \ln L\sum_{f=0}^K e_f - \ln h - \sum_{f=1}^K e_f \ln M_f + \overline{o}\,(1) \tag{35}$$

Как видно для того, чтобы убрать зависимость от L в правой части выражения (35) достаточно выбрать $K = 1$ и $e_1 = -1$, $M_1 = M$, тогда

$$\lim_{L\to\infty} f(h,L,M) = \ln M - \ln h + \overline{o}\,(1) \tag{36}$$

Регуляризация Паули-Вилларса наиболее удобно, когда необходимо выделить логарифмически расходящийся член в интеграле, который расходится сильнее чем логарифмически. Например, рассмотрим интеграл

$$g(h) = \int\limits_0^\infty \frac{p^3}{p^2+h^2}\,dp, \tag{37}$$

$$g(h,L,M) = \sum_{f=0}^{K} e_f \int\limits_0^L \frac{p^3}{p^2+h^2+M_f^2}\, dp, \tag{38}$$

Интегрируя по p, находим

$$g(h,L,M) = \frac{1}{2}\sum_{f=0}^{K} e_f \left(L^2 - (h^2+M_f^2)\ln\frac{L^2+h^2+M_f^2}{h^2+M_f^2} \right) \approx \frac{1}{2}(L^2 - 2h^2\ln L)\sum_{f=0}^{K} e_f$$
$$- \ln L \sum_{f=0}^{K} e_f M_f^2 + h^2 \ln h + h^2 \sum_{f=1}^{K} e_f \ln M_f + \sum_{f=1}^{K} e_f M_f^2 \ln M_f + \frac{1}{2}h^2 \sum_{f=1}^{K} e_f + \overline{o}\,(1) \tag{39}$$

Для того, чтобы сократить все расходимости кроме логарифмической достаточно выбрать $K=3$, и наложить следующие условия:

$$\sum_{f=1}^{3} e_f = -1, \qquad \sum_{f=1}^{3} e_f M_f^2 = 0, \qquad \sum_{f=1}^{3} e_f M_f^2 \ln M_f = 0 \tag{40}$$

Решая уравнения (40), найдём, что

$$e_1 = -\frac{M_2^2 M_3^2 \ln\frac{M_3}{M_2}}{M_1^2 M_2^2 \ln\frac{M_2}{M_1} + M_2^2 M_3^2 \ln\frac{M_3}{M_2} + M_3^2 M_1^2 \ln\frac{M_1}{M_3}} \tag{41}$$

и аналогично для e_2 и e_3. Заметим, что если выбрать, массы $M_j = c_j M$, тогда e_j не будут зависить от M. Если потребовать, что $\sum\limits_{f=1}^{K} e_f \ln M_f = -\ln M$, то найдем

$$g(h,L,M) = -h^2 \ln M - h^2/2 + \overline{o}\,(1) \tag{42}$$

Вопрос: найти явный вид коэффициентов c_j.

<u>**Задача 4.1**</u> С помощью дифференцирования по параметру вычислить следующие интегралы

$$\text{а)} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\cos t\, dt, \qquad \text{б)} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t^2}\cos t\, dt, \qquad \text{в)} \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$$

<u>**Задача 4.2**</u> С помощью интегрирования по параметру вычислить а) в размерной регуляризации, б) в регуляризации Паули-Вилларса логарифмически расходящийся интеграл:

$$\int\limits_0^\infty \frac{p^3}{(p^2+h^2)(p^2+ah^2)} dp$$