Тема 5. Оценка интегралов от быстро меняющихся и быстро осциллирующих функций

На этом занятии рассматривается вычисление интегралов от быстро меняющихся и быстро осциллирующих функций. Обсуждаются случаи собственных и несобственных интегралов. Рассматривается асимптотика функции интегральной экспоненты. Как пример, очень быстро меняющейся функции рассматривается дельта-функция Дирака.

Рассмотрим интеграл

$$I(a) = \int_a^\infty e^{-x} f(x) dx, \tag{1}$$

где функция $f(x)$ монотонно убывает при $x \to \infty$. Из-за наличия экспоненциального множителя подынтегральная функция быстро убывает. Поэтому при $a \gg 1$ для интеграла (1) может быть найдена общая асимптотическая формула. Проинтегрируем в (1) по частям:

$$I(a) = \int_a^\infty e^{-x} f(x) dx = e^{-a} f(a) + \int_a^\infty e^{-x} f'(x) dx \tag{2}$$

Интегрируя по частям еще раз, находим для $a \gg 1$:

$$I(a) = e^{-a} \big[f(a) + f'(a) + \dots \big] \tag{3}$$

Пример 1. Интегральная экспонента

Рассмотрим интеграл, который называется интегральной экспонентой:

$$E_m(z) = \int_1^\infty e^{-zx} \frac{dx}{x^m} = z^{m-1} \int_z^\infty e^{-x} \frac{dx}{x^m} \tag{4}$$

Здесь m натуральное число. Пользуясь общей формулой (3), получаем для $z \gg 1$

$$E_m(z) \approx \frac{e^{-z}}{z} \left(1 - \frac{m}{z} + \dots \right). \tag{5}$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b f(x) g(x) dx \tag{6}$$

Если функция $f(x)$ меняется на отрезке $[a,b]$ медленно по сравнению с функцией $g(x)$, т.е. $|f'(x)/f(x)| \ll |g'(x)/g(x)|$, то интеграл (6) можно оценить следующим образом

$$I \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int\limits_a^b g(x)dx \tag{7}$$

<u>Пример 2.</u> Дельта-функция Дирака

Рассмотрим интеграл

$$I(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2+x^2}e^{-x^2}dx. \tag{8}$$

Найдем его значение при $a \ll 1$. Если считать, что медленная функция $f(x) = \exp(-x^2)$, а быстрая функция $g(x) = a/(a^2+x^2)$, то так как $|f'(x)/f(x)| = 2x$ и $|g'(x)/g(x)| = 2x/(a^2+x^2)$, при $|x| \lesssim 1$ функция $f(x)$ медленная по-сравнению с $g(x)$. При $|x| > 1$ функция $f(x)$ быстро убывает, поэтому можно думать, что эта область вносит в интеграл (8) малый вклад и для его оценки можно воспользоваться формулой (7):

$$I(a) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}e^{-a^2x^2}dx \approx \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi. \tag{9}$$

Этот же ответ можно получить более аккуратно. Сделаем ряд точных преобразований:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}e^{-a^2x^2}dx = 2\int\limits_0^{\infty} dt e^{-t}\left(\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2-tx^2}dx\right) = \sqrt{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t+a^2}}dt \\ &= \sqrt{\pi}e^{a^2}\int\limits_{a^2}^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{\pi}e^{a^2}\int\limits_a^{\infty}e^{-x^2}dx = 2\sqrt{\pi}e^{a^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_0^a e^{-x^2}dx\right). \end{aligned} \tag{10}$$

При $a \ll 1$ интеграл

$$\int\limits_0^a e^{-x^2}dx \approx \int\limits_0^a dx = a \tag{11}$$

Поэтому из (10), находим при $a \ll 1$

$$I(a) = \pi\left(1 - \frac{2a}{\sqrt{\pi}}\right). \tag{12}$$

Таким образом, если определить функцию

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}, \tag{13}$$

то мы доказали следующее равенство

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_a(x)e^{-x^2}dx = 1 \tag{14}$$

Аналогично можно показать, что для функции $f(x)$, убывающей на бесконечности, выполняется равенство

$$\lim_{a\to 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta_a(x)f(x)dx = f(0) \tag{15}$$

Предел функции $\delta_a(x)$ при $a \to 0$ называется дельта-функцией Дирака

Дельта-функция Дирака $\delta(x)$ определяется как функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\begin{aligned} 1)\qquad \delta(x) \quad &= 0 \text{ при } x \neq 0,\\ 2)\quad \delta(x=0) \quad &= +\infty,\\ 3)\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx \quad &= 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Из определения (16) следуют свойства:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x)f(x)dx = f(0), \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad \delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x-x_0) \tag{17}$$

Здесь функция $g(x)$ обращается в нуль при $x = x_0$, $g(x_0) = 0$.

Рассмотрим интеграл на конечном отрезке $[a, b]$:

$$I(\omega) = \int\limits_a^b f(x)\sin(\omega x)dx. \tag{18}$$

Для определенности будем считать, что $f(x)$ при $x \in [a, b]$. Для выяснения поведения этого интеграла при $\omega \gg 1$ можно воспользоваться интегрированием по частям:

$$I(\omega) = \int\limits_a^b f(x)\sin(\omega x)dx = \frac{1}{\omega}[f(a)\cos(\omega a) - f(b)\cos(\omega b)] + \frac{1}{\omega}\int\limits_a^b f'(x)\cos(\omega x)dx \tag{19}$$

При $\omega \gg 1$, можно отбросить второй член в правой части выражения (19), и найти

$$I(\omega) = \int\limits_a^b f(x)\sin(\omega x)dx = \frac{1}{\omega}[f(a)\cos(\omega a) - f(b)\cos(\omega b)] + \overline{o}\left(\frac{1}{\omega}\right) \tag{20}$$

В случае, когда $f(a) = f(b) = 0$ необходимо учесть следующий член в $1/\omega$ разложении с помощью интегрирования по частям интеграла в правой части в выражении (19). Тогда получаем:

$$I(\omega) = \frac{1}{\omega^2}[f'(b)\sin(\omega b) - f'(a)\sin(\omega a)] + \overline{o}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) \tag{21}$$

Пусть теперь интервалы интегрирования бесконечные. Тогда для сходимости интеграла (18) нужно, чтобы функция $f(x)$ вместе со всеми своими производными обращалась в нуль при $x \to \pm\infty$. Тогда видно, что разложение по степеням $1/\omega$ будет давать нуль во всех порядках. Рассмотрим интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\omega x) dx. \tag{22}$$

Поведение интеграла при $\omega \gg 1$ определяется поведением функции $f(x)$ в комплексной плоскости.

Пример 3.

Рассмотрим интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx. \tag{23}$$

Перепишем интеграл (23) в следующем виде:

$$I(\omega) = \int_{0}^{\infty} dt e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) e^{-tx^2} dx. \tag{24}$$

Интеграл по x может быть вычислен точно (см. задачу к теме 4). Тогда находим

$$I(\omega) = \sqrt{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t-\omega^2/4t}\frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi\omega}\int_{0}^{\infty} e^{-\omega g(x)}\frac{dx}{\sqrt{x}} \tag{25}$$

где функция $g(x) = x + 1/4x$. При $\omega \gg 1$ интеграл можно вычислить методом перевала. Функция $g(x)$ имеет максимум: $g'(x) = 0$ при $x = 1/2$. Поэтому

$$I(\omega) \approx \sqrt{2\pi\omega} e^{-\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\omega(x-1/2)^2} dx = \pi e^{-\omega} \tag{26}$$

Заметим, что приближенное выражение (26) совпадает с точным ответом. Обратим внимание, что $I(\omega)$ при $\omega \gg 1$ ведет себя экспоненциально.

Для оценки интегралов (18) и (22) было существенно, что функция $f(x)$ непрерывна и конечна на интервале интегрирования.

Пример 4.

Рассмотрим интеграл

$$I(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\sin(\omega x)\frac{dx}{\sqrt{x}}. \tag{27}$$

Интегрируя по частям, находим:

$$I(\omega) = 2\int_0^\infty e^{-x} x\big[\sin(\omega x) - \omega\cos(\omega x)\big]\frac{dx}{\sqrt{x}}. \tag{28}$$

С другой стороны, дифференцирование по параметру дает

$$I'(\omega) = 2\omega\int_0^\infty e^{-x}\sqrt{x}\cos(\omega x)dx. \tag{29}$$

Сравнивая выражения (28) и (29), при $\omega \gg 1$, находим

$$I(\omega) \approx -2\omega I'(\omega) \qquad \Longrightarrow \qquad I(\omega) = \frac{C}{\sqrt{\omega}}. \tag{30}$$

Обратим внимание, что интеграл (27) при $\omega \gg 1$ убывает медленнее, чем в примерах выше. Вычисление постоянной C требует точного вычисления интеграла (27).

Вопрос: найти точное выражение для интеграла (27). Вычислить постоянную C.

Задача 5.1 Функция

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-x^2}dx$$

называется функцией ошибок. Вычислить первые два члена ее асимпточеского разложения при $z \gg 1$.

Задача 5.2 Функция

$$\operatorname{Ci}(z) = -\int_z^\infty \frac{\cos x}{x}dx$$

называется интегральным косинусом. Вычислить первые два члена ее асимпточеского разложения при $z \gg 1$.

Задача 5.3 Доказать следующие соотношения:

$$\int_{-\infty}^\infty \delta(x)f(x)dx = f(0), \qquad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \qquad \delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|}\delta(x - x_0)$$

Задача 5.4 Вычислить точно интегралы

$$\text{а)}\ \int_a^b e^{-x}\sin(\omega x)dx, \qquad \text{б)}\ \int_0^b xe^{-x}\sin(\omega x)dx$$

и проверить выполнение асимптотических формул (20) и (21).

Задача 5.5 Вычислить асимптотики интегралов при $\omega \gg 1$ и $\omega \ll 1$:

$$\text{а)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega x)}{x(1+x^2)} dx, \qquad \text{б)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \sin^2(\omega x) dx$$

Задача 5.6 Вычислить асимптотику интеграла при $\omega \gg 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega x)}{\omega x^2} e^{-x^2} dx$$

Показать, что функция $\delta_\omega(x) = \sin^2(\omega x)/[\pi \omega x^2]$ в пределе $\omega \to \infty$ является дельта-функцией Дирака.

Задача 5.7 Вычислить асимптотику интеграла при $\omega \ll 1$ и $\omega \gg 1$:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\omega x)}{\sin x} dx$$