Теория возмущений для линейных уравнений.

Начнем с простейшего уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = \lambda x. \tag{1}$$

Точка здесь обозначает производную по времени t. Для небольших t решение может быть получено простыми итерациями:

$$x(t) = x(0) + x^{(1)},\ x^{(1)} = x(0)\lambda t + x^{(2)},\ x^{(2)} = x(0)(\lambda t)^2 + x^{(3)} \dots \tag{2}$$

С другой стороны, для малых временных интервалов ϵ уравнение (1) означает следующее:

$$x(t+\epsilon) = (1+\epsilon\lambda)x(t). \tag{3}$$

Очевидным следствием этого равенства, вместе со вторым замечательным пределом, является соотношение:

$$x(t) = (1+\epsilon\lambda)^{t/\epsilon}x(0) = e^{\lambda t}x(0). \tag{4}$$

Сравнивая с (2), мы получаем известное разложение числа e.

Очевидным является обобщение (4) для диагональных матриц: пусть $\boldsymbol{x}$ - N – компонентный вектор:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix}, \tag{5}$$

Уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \hat{\Lambda}\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

где
$$\hat{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\mathrm{N}}) \tag{7}$$
(то есть, диагональная матрица с элементами на диагонали $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$) имеет очевидное решение:

$$\boldsymbol{x}(t) = (1+\epsilon\hat{\Lambda})^{t/\epsilon} x(0) = e^{\hat{\Lambda}t}\boldsymbol{x}(0), e^{\hat{\Lambda}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0, & 0, \ldots \\ 0 & e^{\lambda_2 t}, & 0, \ldots, 0 \\ \ddots & & \\ 0, 0 & , 0, & \ldots, e^{\lambda_N t} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Для любого преобразования подобия $\hat{Q}$ матрицы $\hat{M}$ и произвольной гладкой функции $F(\hat{M})$, имеет место матричное равенство:
$$F(\hat{M}) = \hat{Q} F(\hat{\Lambda}) \hat{Q}^{-1}, \tag{9}$$
Оно доказывается прямым разложением в ряд. Предположим далее, что матрица $\hat{M}$ – диагонализуема, пребразование подобия $\hat{Q}$ ее диагонализуеи и $\hat{\Lambda}$ – диагональна, то есть, имеет вид (7). Тогда решением системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \hat{M}\boldsymbol{x}, \tag{10}$$
является равенство:
$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(\hat{M}t)\boldsymbol{x}(0) = \hat{Q} F(\hat{\Lambda}t) \hat{Q}^{-1} \boldsymbol{x}(t). \tag{11}$$

Если же система уравнений неавтономна и имеются возмущения $\hat{V}(t)$, явно зависящие от времени:
$$\dot{\boldsymbol{x}} = \left(\hat{M} + \hat{V}(t)\right)\boldsymbol{x}, \tag{12}$$
тогда обобщением равенства (3) является следующее:
$$\boldsymbol{x}(t) = T\exp\left[\int_0^t d\tau \left(\hat{M} + \hat{V}(\tau)\right)\right]\boldsymbol{x}(0), \tag{13}$$
где знак $T\exp$ обозначает упорядоченную экспоненту, определяемую в общем случае так:
$$T\exp\left[\int_0^t d\tau \hat{G}(\tau)\right] = \left(1+\epsilon\hat{G}(t)\right)\left(1+\epsilon\hat{G}(t-\epsilon)\right)\left(1+\epsilon\hat{G}(t-2\epsilon)\right)\ldots \tag{14}$$

Стоит отметить, что такого рода операторы $\hat{G}(\tau)$ возникают во множестве других задач и могут действовать и в функциональном пространстве (быть операторами дифференцирования, умножения на функцию и т.д.)

Упорядоченные экспоненты в общем случае не выражаются явно как функционалы от матричнозначныхфункций типа $\hat{V}(\tau)$. Однако если такое возмущение мало, то осмыслена попытка разложения в ряд по $\hat{V}(\tau)$. В произведении в (14) в первом порядке по $\hat{V}(\tau)$ каждый сомножитель может быть разложен один раз, сумма по таким «инфинитезимальным» разложениям является интегральной суммой и результат первого порядка может быть представлен в виде::

$$\boldsymbol{x}(t) \approx e^{\hat{M}t}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t d\tau\, e^{\hat{M}(t-\tau)}\hat{V}(\tau)e^{\hat{M}(\tau)}\ \boldsymbol{x}(0). \tag{15}$$

В качестве примера рассмотрим уравнение движения осциллятора с переменной во времени частотой:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + f(t)x = 0. \tag{16}$$

Его можно переписать как систему линейных уравнений первого порядка, приводимую к матричному виду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - f(t) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \tag{17}$$

Пусть сначала $f(t) = 0$. Тогда диагонализующее преобразование, которое находится элементарно, комплексно и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \hat{Q}\begin{pmatrix} a(t) \\ a^*(t) \end{pmatrix}, \hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \hat{Q}^{-1} = \frac{i}{2\omega}\begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

Уравнение движения в новых «круговых» переменных a, a^* имеют простой вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \hat{\sigma}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}. \tag{19}$$

и также просто решаются:

$$a(t) = e^{i\omega t}a(0), \quad a^*(t) = e^{-i\omega t}a^*(0). \tag{20}$$

Вернёмся к возмущенному уравнению (17). В «круговых» переменных a, a^* оно принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \left[\hat{\sigma} + \hat{V}(t)\right]\begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}, \quad \hat{V}(t) = \frac{i}{2\omega} f(t)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Решение эволюционной задачи с точностью до первого порядка по $f(t)$, согласно (15), представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ a^*(t) \end{pmatrix} = \left[\hat{U}_0(t) + \delta\hat{U}(t)\right]\begin{pmatrix} a(0) \\ a^*(0) \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

$$\delta\hat{U}(t) \approx \frac{i}{2\omega}\int\limits_0^t d\tau\, f(\tau)\begin{pmatrix} e^{i\omega t} & e^{i\omega(t-2\tau)} \\ -e^{-i\omega(t-2\tau)} & -e^{-i\omega t} \end{pmatrix}.$$

Возмущение решения может расти со временем и становиться немалым даже при малой амплитуде возмущения уравнения. Например, для гармонической $f(t)$ с частотой, равной удвоенной частоте осциллятора при $\omega t \gg 1$

$$f(t) = \varepsilon\cos(2\omega t), \qquad \delta\hat{U}(t) \approx \frac{i\varepsilon t}{4\omega}\begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

получаем линейный со временем рост отклонения решения от невозмущенного. Это явление назывется параметрическим резонансом. При $\varepsilon t/\omega \sim 1$ первый порядок теории возмущений даже при $\varepsilon \ll \omega^2$ уже не работает, и для построения решения нужны более тонкие методы (метод усреднения).