Две лекции

В. В. Лебедев

Приближенные вычисления играют центральную роль в теоретических исследованиях.

I. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЗОНАНСОВ

В различных физических контекстах встречаются задачи, содержащие один или несколько малых параметров. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда в задаче имеется один малый параметр, который мы обозначаем ϵ. Особенно интересен случай, когда решение задачи при $\epsilon = 0$ известно. Тогда решение исходной задачи можно строить в виде разложения по малому параметру ϵ, такое разложение называется теорией возмущений. Например, в рамках теории возмущений можно обычно рассматривать взаимодействие излучения с веществом.

Если мы решаем обычные (алгебраические или трансцендентные) уравнения, содержащие малый параметр ϵ, то конечный результат мало отличается от невозмущенного (то есть получающегося при $\epsilon = 0$) решения x_0. Как правило, отклонение точного решения от решения невозмущенного уравнения (то есть уравнения, в котором ϵ положен равным нулю) получается в виде ряда по ϵ. Для построения этого ряда можно использовать итерационный процесс. С этой целью в члены, пропорциональные ϵ, подставляется значение x_0, после чего находится поправка x_1 к x_0. Далее уточненное значение $x_0 + x_1$ подставляется в члены, пропорциональные ϵ, и находится поправка x_2. Продолжая эту процедуру, мы находим разложение по ϵ точного решения уравнения $x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$.

- Найти первые две поправки по ϵ к невозмущенному решению $x_0 = 1$ уравнения $x^2 - 1 = \epsilon x$. Сравните результат с точным решением.

Если возмущение происходит в точке вырождения (когда несколько решений невозмущенного уравнения совпадают), то разложение решения может происходить по нецелым степеням ϵ. Например, решения уравнения $(x-1)^2 = \epsilon$ имеют вид $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\epsilon}$. Однако даже в этих вырожденных случаях решение возмущенного уравнения при малых ϵ близко к решению невозмущенного.

- Найти первые две поправки по ϵ к невозмущенному решению $x_0 = 1$ уравнения $(x-1)^3 = \epsilon x$.

Подобная теория возмущений может быть развита и для динамических систем, описываемых эволюционными дифференциальными уравнениями. Однако в ряде случаев, связанных с разного рода резонансами, область применимости прямой теории возмущений оказывается ограниченной по времени, то есть точность разложения решения по ϵ падает с ростом времени t. Чтобы повысить эту точность, следует несколько модифицировать теорию возмущений. Этой модификации и посвящена настоящая лекция.

В качестве стартового примера рассмотрим задачу Коши для гармонического осциллятора с возмущенной частотой:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \nu^2 x. \tag{1}$$

Будем рассматривать начальные условия $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. Тогда уравнение (1) имеет очевидное решение

$$x(t) = a \cos\left(\nu t \sqrt{1+\epsilon}\right), \tag{2}$$

которое надо сравнивать с решением невозмущенного уравнения (при $\epsilon = 0$) $x_0 = a\cos(\nu t)$. Мы видим, что при $\nu t \epsilon \sim 1$ отклонение решения $x(t)$ от невозмущенного решения $x_0(t) = a\cos(\nu t)$ станет существенным: $x(t) - x_0(t) \sim x_0(t)$.

Будем теперь решать эту задачу по теории возмущений. В правой части уравнения (1) стоит малый множитель ϵ, поэтому оно может быть использовано для формулировки итерационной процедуры: сначала мы подставляем в правую часть уравнения невозмущенное решение $x_0(t)$, находим первую по ϵ поправку $x_1(t)$, подставляем ее в правую часть уравнения (1), находим вторую по ϵ поправку $x_2(t)$, и так далее. Уже на первом шаге итерационной процедуры становится ясной причина аномального поведения $x - x_0$ по времени. Действительно, при подстановке x_0 в правую часть уравнения (1) возникает резонанс (поскольку x_0 меняется с частотой ν), и потому поправка x_1 содержит, помимо осциллирующего множителя, еще и линейный по времени. (Это так называемое секулярное или смешанное поведение.) Из-за наличия этого множителя и падает со временем точность теории возмущений. Найдем явно поправку x_1.

Для этого сначала используем решение неоднородной задачи Коши $\ddot{x} + \nu^2 x = \phi(t)$ с начальными условиями $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$:

$$x(t) = a\cos(\nu t) + \frac{1}{\nu}\int_0^t d\tau\, \sin[\nu(t-\tau)]\phi(\tau). \tag{3}$$

Подставляя сюда $\phi = -\epsilon\nu^2 x$, находим уравнение

$$x(t) - a\cos(\nu t) = -\epsilon\nu \sin(\nu t)\int_0^t d\tau\, x(\tau)\cos(\nu\tau)$$
$$+\epsilon\nu\cos(\nu t)\int_0^t d\tau\, x(\tau)\sin(\nu\tau), \tag{4}$$

эквивалентное исходному (1). Теперь мы можем найти x_1, просто подставив x_0 в правую часть (4). Беря возникающие при этом интегралы, находим

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} a\epsilon t\nu \sin(\nu t). \tag{5}$$

Таким образом, мы убеждаемся, что прямая теория возмущений работает только на временах $t \ll \nu^{-1}\epsilon^{-1}$.

- Получить следующую по ϵ итерацию решения уравнения (1), работающую на временах $t \lesssim \nu^{-1}\epsilon^{-2}$, и сравнить ее с точным решением.

С другой стороны, как видно из точного решения (2), при любом t решение уравнения (1) можно записать в виде $x(t) = A\cos(\nu t + \phi)$, где A и ϕ – некоторые зависящие от времени параметры. Подставляя выражение $x(t) = A\cos(\nu t + \phi)$ в исходное уравнение (1), и приравнивая коэффициенты при синусе и косинусе, находим систему уравнений

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\epsilon\nu^2 A, \tag{6}$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = 0, \tag{7}$$

эквивалентную исходному уравнению (1).

Система уравнений (6,7) имеет решение $A = \text{const}$, $\dot{\phi} = \text{const}$. В главном по ϵ порядке уравнение (6) дает $\dot{\phi} = \epsilon\nu/2$, то есть решение имеет вид $x = a\cos(\nu t + \epsilon\nu t/2)$. Сравнивая этот ответ с выражением (2), мы заключаем, что найденное приближенное решение отклоняется от точного решения только на временах порядка $\nu^{-1}\epsilon^{-2}$, что существенно улучшает точность по сравнению с прямой теорией возмущений. Более того, решение полного уравнения на производную от фазы $2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2 = \epsilon\nu^2$ эквивалентно точному решению.

Спрашивается, что же позволило столь радикально повысить точность теории возмущений? Для этого вернемся к уравнению (1) и заметим, что $A\cos(\nu t + \phi)$ с постоянными (не зависящими от времени) A и ϕ являются общим решением невозмущенного уравнения. При включении возмущения (члена с ϵ) решение сохраняет свой вид, но параметры A и ϕ становятся функциями времени, они испытывают медленную систематическую эволюцию на больших временах, то есть $\dot{A}/A$ и $\dot{\phi}$ являются малыми величинами в сравнении с частотой ν. Уравнения для A и ϕ не содержат никаких осциллирующих множителей, и потому их решение не чувствительно к резонансу и дает более точное приближение, чем прямая теория возмущений. Это наблюдение может быть обобщено. Для решения уравнения, в котором имеется резонансное возмущение, надо взять сначала решение невозмущенного уравнения, а затем сделать входящие в него параметры медленными функциями времени, динамика которых определяется возмущением. Такая стратегия позволит в рамках разложения по ϵ получить гораздо бо́льшую точность, чем прямая теория возмущений.

Продемонстрируем на нескольких примерах, как работает эта логика. Рассмотрим нелинейную задачу:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon x^3. \tag{8}$$

Найдем ее приблизительное решение, скажем, с теми же начальными условиями $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$. Как и раньше, решение невозмущенного решения имеет вид $x_0 = a\cos(\nu t)$. Попытка решения уравнения (8) итерациями сразу показывает наличие секулярной проблемы, поскольку в разложении x_0^3 по тригонометрическим функциям присутствуют члены с частотой ν, что приводит к резонансу. Поэтому, как и раньше, прямая теории возмущений работает на конечном временном интервале, в данном случае при $t \lesssim a^{-2}\nu^{-1}\epsilon^{-1}$.

- Найти первую по ϵ поправку x_1 к x_0 для уравнения (8).

- Будут ли существенно отличаться решения возмущенного и невозмущенного уравнения $\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon x^2$ при $t \sim \nu^{-1}\epsilon^{-1}a^{-1}$?

Как и раньше, для формулировки улучшенной теории возмущений мы используем выражение $x = A\cos(\nu t + \phi)$, которое диктуется невозмущенным уравнением. Подставляя это выражение в правую часть уравнения (8) и приравнивая к нулю коэффициенты при $\cos(\nu t + \phi)$ и $\sin(\nu t + \phi)$, мы находим

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\frac{3}{4}\epsilon A^3, \tag{9}$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = 0, \tag{10}$$

вместо (6,7). Обратим внимание на то, что система (9,10) уже не эквивалентна уравнению (8), поскольку при подстановке $x = A\cos(\nu t + \phi)$ в правую часть уравнения (8) помимо члена, пропорционального $\cos(\nu t + \phi)$, возникает член, пропорциональный $\cos(3\nu t + 3\phi)$, который порождает дополнительную поправку к x. Однако в силу нерезонансного характера $\cos(3\nu t + 3\phi)$ порождаемая им поправка к x оказывается малой (при малом ϵ) на всех временах. Поэтому мы пренебрегаем этой поправкой.

В ведущем порядке по ϵ мы находим из системы (9,10)

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{3}{8\nu} A^2 \epsilon.$$

Решением этой системы является $A = a$ и

$$x(t) \approx a\cos\left[\left(\nu + \frac{3}{8\nu} a^2 \epsilon\right) t\right]. \tag{11}$$

Таким образом, решение имеет такой же вид, как и невозмущенное решение, но со сдвинутой по сравнению с невозмущенным значением ν частотой

$$\nu + \frac{3}{8\nu} a^2 \epsilon,$$

причем сдвиг частоты зависит от амплитуды колебания a. Это явление называется нелинейным сдвигом частоты.

Рассмотрим теперь пример неавтономной системы, а именно уравнение

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \cos(\Omega t) x, \tag{12}$$

которое описывает параметрический резонанс. При решении этого уравнения итерациями в правой части возникает резонансный член (с частотой ν), если $\Omega = 2\nu$. Проанализируем этот случай, предполагая малость ϵ, то есть $\epsilon \ll \nu^2$.

Как и раньше, используем представление $x = A\cos(\nu t + \phi)$. Подставляя это выражение в правую часть уравнения (12), сохраняя только резонансные члены и приравнивая коэффициенты при $\cos(\nu t + \phi)$ и $\sin(\nu t + \phi)$, находим

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\frac{1}{2}\epsilon A \cos(2\phi), \tag{13}$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi} A = \frac{1}{2}\epsilon A \sin(2\phi). \tag{14}$$

Решение этой системы имеет иной характер, чем ранее. Вне зависимости от начальных условий на больших временах угол ϕ выходит на константу, близкую к $\pi/4$. Пренебрегая членами с $\dot{\phi}$ и $\ddot{\phi}$ в уравнении (14), находим $4\nu\dot{A} = \epsilon A$, то есть амплитуда A экспоненциально растет со временем:

$$A \propto \exp\left(\frac{\epsilon t}{4\nu}\right).$$

Что же касается отличия угла ϕ от $\pi/4$, то его можно найти из уравнения (13), которое дает

$$\cos(2\phi) = -\frac{\epsilon}{8\nu^2},$$

что по предположению много меньше единицы.

- Найти приближенное решение уравнения (12), считая, что $\Omega = 2\nu - \gamma$, где $\gamma \lesssim \epsilon/\nu$ – небольшая расстройка.

II. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Многие дифференциальные уравнения могут быть сведены к вариационным задачам. Можно даже сказать, что, наоборот, большинство дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике, происходят из вариационных задач.

A. Геометрическая оптика

В геометрической оптике ход луча света определяется минимумом оптической длины

$$A = \int dl\ n. \tag{15}$$

Например, отсюда вытекает закон преломления Снелла

$$\sin\alpha = n \sin\beta. \tag{16}$$

Его можно получить, если учесть, что луч состоит из двух прямых отрезков, разделяемых границей между средами, и минимизировать оптическую длину (15) по координате точки на границе.

Введем переменную ζ, параметризующую траекторию света (луч), тогда $dl = |d\boldsymbol{r}/d\zeta| d\zeta$. Если коэффициент преломления n является функцией координат, то вариация (15) дает

$$\delta A = \int d\zeta\ \delta\boldsymbol{r} \left[-\frac{d}{d\zeta}(n\boldsymbol{s}) + |d\boldsymbol{r}/d\zeta| \nabla n \right], \tag{17}$$

где $\boldsymbol{s}$ – единичный вектор, касательный к траектории. Соответствующее уравнение записывается в виде

$$\frac{d}{dl}(n\boldsymbol{s}) = \nabla n. \tag{18}$$

Предположим, что n зависит только от расстояния r до начала координат (или до некоторой оси). Тогда возможно круговое движение света. Сравнив между собой оптические длины для окружностей различного радиуса, мы приходим к выводу, что такое движение возможно, если произведение $n(r)r$ имеет минимум при некотором $r = r_0$, это величина и определяет радиус окружности, по которой двигается свет.

- Доказать, что при движении света по окружности $r = r_0$ выполняется уравнение (18).

Как показывает приведенный пример, траектория луча будет в общем случае искривленной. Предположим, что нас интересует траектория луча, стартующего из точки $(0,0)$ и приходящего в точку $(0, x_0)$, если показатель преломления n зависит от y, скажем, $n = n_0 - \alpha y$. Оценим, насколько этот луч отклоняется от оси X. Для этого исследуем пробную функцию $y = x(x_0 - x)/(2b)$, тогда

$$A = \int dx\ \sqrt{1 + (x_0 - 2x)^2/b^2}\ [n_0 - \alpha x(x_0 - x)/(2b)].$$

Считая отклонение слабым, находим

$$A \approx n_0 x_0 + \frac{2n_0 x_0^3}{3b^2} - \frac{\alpha x_0^3}{12b}.$$

Минимизируя это выражение по радиусу кривизны b, находим $b = 16n_0/\alpha$.

- Провести тот же анализ для случая $n = n_0 - \beta xy$.

B. Механика

В механике на траектории частицы достигает минимума так называемое действие

$$I = \int dt\ \left[\frac{m}{2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 - U(\boldsymbol{r}) \right]. \tag{19}$$

Вариация этого действия

$$\delta I = -\int dt\ \delta \boldsymbol{r} \left(m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} + \nabla U \right), \tag{20}$$

порождает обычное уравнение движения частицы (второй закон Ньютона). Минимальность действия связана с положительностью кинетической энергии.

Рассмотрим пример одномерного движения частицы в потенциале

$$U = \frac{m}{2}\left(\nu^2 x^2 + \frac{\epsilon}{2}x^4\right). \tag{21}$$

Возьмем в качестве пробной функции $x = a\cos(\omega t)$. Подставляя это выражение в действие (19), находим

$$I = \frac{m}{4}\tau\left(\omega^2 a^2 - \nu^2 a^2 - \frac{3}{8}\epsilon a^4\right), \tag{22}$$

где τ – время наблюдения, которое предполагается большим: $\omega\tau \gg 1$. Минимизируя по a, находим нелинейный сдвиг частоты

$$\omega^2 = \nu^2 + \frac{3}{4}\epsilon a^2, \tag{23}$$
$$\omega - \nu \approx \frac{3}{8\nu}\epsilon a^2.$$

- Найти поправку к найденному решению, используя пробную функцию $x = a\cos(\omega t) + b\cos(3\omega t + \phi)$ и минимизируя по a, b, ϕ.

C. Задачи управления

Рассмотрим в качестве примера вязкое движение тела в жидкости, которое описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}, \tag{24}$$

где $\boldsymbol{v}$ – скорость жидкости, а $\boldsymbol{u}$ – дополнительная скорость, связанная с внешним воздействием на тело. Предположим, что мы хотим решить задачу управления, связанную с необходимостью доставки тела из точки A в точку B с наименьшими затратами

$$C = \int_0^\tau dt\ u^2, \tag{25}$$

где τ – время доставки. Подставляя выражение (24) в "цену" (25), находим

$$C = \int_0^\tau dt\ \left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\right)^2. \tag{26}$$

Минимизация выражения (26) по $\boldsymbol{r}$ дает уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\right) = 0. \tag{27}$$

Проанализируем простейший пример, когда тело надо сместить на расстояние x_0 вдоль оси X при наличии встречной скорости v_0: $v_x = -v_0$. Предположим, что тело двигается равномерно и за время τ сдвигается на x_0, тогда $x = x_0 t/\tau$. Подставляя это выражение в "цену" (26), находим

$$C = \frac{x_0^2}{\tau} + 2x_0 v_0 + v_0^2\tau. \tag{28}$$

Минимизируя выражение (28) по τ, находим $\tau = x_0/v_0$, то есть $u = 2v_0$.

Несложно показать, что для рассмотренного случая использованная пробная функция $x = x_0 t/\tau$ является решением уравнения (27), то есть дает точное решение задачи. В более сложных случаях это уже не так. Тем не менее, пробную функцию $x = x_0 t/\tau$ (с последующей минимизацией по τ) можно использовать для оценки "цены" (26) и формулировки оптимального по τ управления $\boldsymbol{u}$.

- Найти оптимальную по τ функцию $x = x_0 t/\tau$ для встречной скорости $v_x = -\alpha t x$, если тело надо сместить на расстояние x_0 вдоль оси X, тело начинает двигаться в момент $t = 0$.

D. Слабая кристаллизация

Как известно, в термодинамическом равновесии система характеризуется минимальным значением энергии, в качестве которой (в зависимости от условий) надо брать тот или иной термодинамический потенциал. Обычно это свободная энергия, которая достигает минимума при фиксированном объеме образца V и температуре T, фиксированной за счет теплообмена со стенками. Минимизация может производиться по различным параметрам, например, величине намагниченности. Свободная энергия, в которой явно имеется зависимость от таких параметров, называется функционалом Ландау.

Переходу из жидкого состояния в кристаллическое соответствует возникновение модуляции плотности φ, которое означает, что плотность периодически зависит от координат. Изучим кристаллизацию в рамках теории слабой кристаллизации, которая строится минимизацией функционала Ландау по φ. В этом случае φ представляет собой сумму гармоник

$$\varphi = 2\mathrm{Re}\sum_j c_j \exp(i\boldsymbol{q}_j\boldsymbol{r}) = \sum_j 2|c_j|\cos(\phi_j + \boldsymbol{q}_j\boldsymbol{r}). \tag{29}$$

Все волновые вектора $\boldsymbol{q}_j$ имеют одинаковую величину (но не направление!), которая и определяет период кристаллической решетки.

В силу симметрии в фазах, где φ отлична от нуля, все абсолютные величины амплитуд гармоник равны: $|c_j| = c$. Минимизируется функционал Ландау

$$F = \int dV\ \left(\frac{a}{2}\varphi^2 - \frac{\mu}{6}\varphi^3 + \frac{\lambda}{24}\varphi^4\right). \tag{30}$$

При больших положительных a минимум всегда соответствует $\varphi = 0$, это изотропгая (жидкая) фаза, обозначаем I.

Вычисляем

$$\int dV\ \frac{a}{2}\varphi^2 = VaNc^2. \tag{31}$$

Если среди $\boldsymbol{q}_j$ нет замкнутых четверок, то

$$\int dV\ \frac{\lambda}{24}\varphi^4 = V\frac{\lambda}{2}(N^2 - N/2)c^4. \tag{32}$$

Если среди $\boldsymbol{q}_j$ нет замкнутых троек, то минимизируя сумму (31) и (32) по c и N, находим $N = 1$ и

$$a < 0, \quad \varphi = 2c\cos(\phi + qz), \tag{33}$$

$$c = \sqrt{2|a|/\lambda}, \quad F = -Va^2/\lambda. \tag{34}$$

Соответствует смектику А SA. Всегда реализуется при больших отрицательных a.

Пусть среди $\boldsymbol{q}_j$ имеется одна замкнутая тройка, тогда $N = 3$. Соответствует гексатической колончатой фазе D_h. Вычисляя функционал Ландау, находим

$$\frac{F}{V\lambda} = 3\frac{a}{\lambda}c^2 - 2\frac{\mu}{\lambda}c^3 + \frac{15}{4}c^4. \tag{35}$$

Минимизируя (35) по c, находим

$$c = \frac{1}{5}\left(\frac{\mu}{\lambda} + \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda^2} - 10\frac{a}{\lambda}}\right), \tag{36}$$

этот корень существует, если $\mu^2 > 10a\lambda$.

Пусть $\boldsymbol{q}_j$ являются ребрами тетраэдра, тогда $N = 6$. Соответствует объемо-центрированной кубической фазе BCC. Вычисляя функционал Ландау, находим

$$\frac{F}{V\lambda} = 6\frac{a}{\lambda}c^2 - 8\frac{\mu}{\lambda}c^3 + \frac{33}{2}c^4. \tag{37}$$

Минимизируя (35) по c, находим

$$c = \frac{1}{11}\left(2\frac{\mu}{\lambda} + \sqrt{4\frac{\mu^2}{\lambda^2} - 22\frac{a}{\lambda}}\right), \tag{38}$$

этот корень существует, если $\mu^2 > 11a\lambda/2$.

Сравнивая между собой свободные энергии найденных фаз, находим, что при увеличении a (от отрицательных значений к положительным) реализуется последовательность фаз $SA - D_h - BCC - I$. Линии перехода между этими фазами являются параболами на диаграмме $a - \mu$. Эти фазы стабильны, то есть на них достигается абсолютный минимум свободной энергии в соответствующих секторах фазовой диаграммы. В то же время существует также большой набор метастабильных состояний, которые соответствуют локальным минимумам функционала Ландау.

- Найти значение c и величину функционала Ландау для простой кубической фазы ($N = 3$), когда $\boldsymbol{q}_j$ направлены вдоль ребер куба.

До сих пор мы считали, что коэффициент λ является константой, не зависящей от углов между векторами $\boldsymbol{q}_j$. Именно для этого случая найдена последовательность фаз $SA - D_h - BCC - I$. В то же время для нетривиальной угловой зависимости λ вполне возможна и другая последовательность фаз. Например, на ней может реализовываться фаза, соответствующая пяти волновым векторам $\boldsymbol{q}$, лежащим в одной плоскости и направленным под углами $2\pi m/5$ (m – целое число) по отношению к оси X. Обратим внимание, что такая структура не является периодической.

- Почему эта структура не является периодической?

- Как должен зависеть параметр λ от углов между $\boldsymbol{q}_j$, чтобы на фазовой диаграмме реализовывалась бы упомянутая структура?

Такого сорта непериодические структуры называются квазикристаллическими. Имеется огромное разнообразие квазикристаллических структур, некоторые из которых реализуются в природе. Например, экспериментально наблюдается структура, в которой $\boldsymbol{q}_j$ составляют ребра правильного икосаэдра.

- Чему равно число N для икосаэдрической структуры?

- Имеются ли замкнутые четверки волновых векторов для икосаэдрической структуры?