

# Приближенные методы аналитических вычислений

2023

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Размерные оценки в физике. Приближенное решение уравнений с «малым параметром»</b>	<b>4</b>
1.1	Лекция (М.В. Фейгельман)	4
1.2	Семинар по теме «Трансцендентные уравнения»	10
<b>2</b>	<b>Приближенное вычисление определенных интегралов. Интегралы с «малым параметром»</b>	<b>19</b>
2.1	Лекция (М.В. Фейгельман)	19
2.2	Семинар по теме «Интегралы с малым параметром»	22
<b>3</b>	<b>Вычисления интегралов и рядов методом перевала</b>	<b>29</b>
3.1	Лекция (Я.В. Фоминов)	29
3.2	Семинар по теме «Метод перевала»	34
<b>4</b>	<b>Определенные интегралы, зависящие от параметра</b>	<b>42</b>
4.1	Лекция (И.С. Бурмистров)	42
4.2	Семинар по теме «Интегралы, берущиеся точно»	50
<b>5</b>	<b>Оценка интегралов от быстро меняющихся и быстро осциллирующих функций</b>	<b>61</b>
5.1	Лекция (И.С. Бурмистров)	61
5.2	Лекция (Ю.Г. Махлин)	66
5.3	Семинар по теме «Метод стационарной фазы»	74
<b>6</b>	<b>Теория возмущений для линейных дифференциальных уравнений</b>	<b>86</b>
6.1	Лекция (И.В. Колоколов)	86
6.2	Семинар по теме «Дифференциальные уравнения»	89
<b>7</b>	<b>Теория возмущений при наличии резонансов</b>	<b>97</b>
7.1	Лекция (В.В. Лебедев)	97

7.2	Семинар по теме «Возмущения в дифференциальных уравнениях» . . . . .	101
<b>8</b>	<b>Интегрирование в криволинейных координатах</b>	<b>109</b>
8.1	Лекция, часть 1 (И.В. Колоколов) . . . . .	109
8.2	Лекция, часть 2 (С.С. Вергелес) . . . . .	111
8.3	Семинар по теме «Кратные и криволинейные интегралы» . . . . .	114
<b>9</b>	<b>Основные принципы работы в программе Mathematica</b>	<b>126</b>
9.1	Задание к семинару по Wolfram Mathematica . . . . .	126
<b>10</b>	<b>Приближенное решение вариационных задач</b>	<b>129</b>
10.1	Лекция (В.В. Лебедев) . . . . .	129
10.2	Семинар по теме «Вариационные задачи» . . . . .	134
<b>11</b>	<b>Теория возмущений в линейной алгебре для собственных чисел и собственных векторов конечномерных матриц; снятие вырождения возмущением</b>	<b>143</b>
11.1	Лекция (Я.В. Фоминов) . . . . .	143
11.2	Семинар по теме «Теория возмущений» . . . . .	149
<b>12</b>	<b>Преобразования Фурье</b>	<b>158</b>
12.1	Лекция (М.А. Скворцов) . . . . .	158
12.2	Семинар по теме «Преобразования Фурье» . . . . .	164

# Глава 1

## Размерные оценки в физике. Приближенное решение уравнений с «малым параметром»

### 1.1 Лекция (М.В. Фейгельман)

#### Размерные оценки

(источник: [1], стр. 9-12)

#### Теорема Пифагора: доказательство по размерности

Рассмотрим прямоугольный треугольник  $A$  с острым углом  $\alpha$  (пусть для определенности это будет наименьший угол треугольника) и гипотенузой  $a$ . Его площадь равна, по размерности,  $S_A = a^2 f(\alpha)$ , где  $f(\alpha)$  — какая-то функция (неважно, какая именно). Опустим перпендикуляр из вершины прямого угла на гипотенузу, получим что исходный треугольник состоит из двух треугольников  $B$  и  $C$  с гипотенузами  $b$  и  $c$  соответственно (это также катеты исходного треугольника  $A$ ). Тогда  $S_B = b^2 f(\alpha)$  и  $S_C = c^2 f(\alpha)$ . Но  $S_A = S_B + S_C$ , т.к. площадь исходного треугольника  $A$  полностью и точно покрывается треугольниками  $B$  и  $C$ . Получаем равенство  $a^2 f(\alpha) = b^2 f(\alpha) + c^2 f(\alpha)$ , сокращаем на  $f(\alpha)$  и получаем ожидаемое:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

#### Движение шара в вязкой среде

Рассмотрим движение шара радиуса  $R$  со скоростью  $u$  относительно жидкости с вязкостью  $\eta$  и плотностью  $\rho$ . Уравнение Навье-Стокса для скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  движения вязкой несжимаемой жидкости имеет вид (для стационарного случая, когда  $\partial \mathbf{v} / \partial t = 0$ ):

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \eta\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p, \quad (1.1)$$

где  $p = p(\mathbf{r})$  — давление жидкости. Чтобы можно было рассматривать задачу как стационарную, следует перейти в систему координат, где шар неподвижен (т.е. скорость жидкости равна  $u$  на большом расстоянии от шара).

Задача в том, чтобы найти силу  $F$  сопротивления движению шара со стороны жидкости. Кинематическая вязкость жидкости  $\nu = \eta/\rho$  имеет размерность  $\text{см}^2/\text{с}$ . Из величин  $R$ ,  $u$  и  $\nu$  можно составить безразмерную комбинацию  $\text{Re} = uR/\nu$ , называемую числом Рейнольдса. Рассмотрим задачу качественно, при малых и больших числах Рейнольдса.

При  $\text{Re} \ll 1$  нелинейный член уравнения Навье-Стокса [левая часть в (1.1)] мал по сравнению с «вязким» членом, по крайней мере на расстояниях порядка радиуса шара:  $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \ll \nu\nabla^2\mathbf{v}$  при  $r \sim R$ . Поэтому опустим нелинейный член в (1.1) и получим тогда

$$\eta\nabla^2\mathbf{v} - \nabla p = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla\mathbf{v} = 0, \quad (1.3)$$

где мы включили также уравнение непрерывности. Система уравнений (1.2)-(1.3) не содержит плотности жидкости  $\rho$ , поэтому сила трения  $F$  тоже не может ее содержать. Из оставшихся величин можно составить лишь одну комбинацию размерности силы:

$$F_1 = A\eta Ru, \quad (1.4)$$

где  $A$  — численный коэффициент. Аккуратное решение задачи с учетом граничного условия, состоящего в обращении скорости в ноль на поверхности шара, приводит к ответу  $A = 6\pi$  (см., например, книгу [4], параграф 20). При произвольном числе  $\text{Re}$  выражение для силы можно записать в виде

$$F = 6\pi\eta Ru\Phi(\text{Re}), \quad (1.5)$$

где  $\Phi(x)$  — некоторая функция, причем  $\Phi(0) = 1$ .

При  $\text{Re} \gg 1$  следует, напротив, пренебречь «вязким» членом в уравнении Навье-Стокса. В самом деле, отношение этого члена к нелинейному члену имеет порядок  $\nu/ux \ll 1$  на расстояниях  $x \sim R$  от поверхности шара (лишь в тонком слое толщины порядка  $R/\text{Re}$  вязкость становится существенна). Тогда соображения размерности определяют единственно возможное выражение для силы трения:

$$F_2 = BR^2\rho u^2. \quad (1.6)$$

Сравнивая (1.5) и (1.6), убеждаемся, что при больших  $x$  функция  $\Phi(x) \rightarrow (B/6\pi)x$ . Определение коэффициента  $B$  является более сложной задачей. Оказывается, что  $B$  численно мало, так что переход от «медленного» движения, описываемого формулой (1.4), к «быстрому», формула (1.6), происходит лишь при  $\text{Re} \sim 100$ , а не при  $\text{Re} \sim 1$ , как можно было бы подумать. Большие численные множители нечасто возникают в подобных оценках, но иногда это случается, указывая на ограниченность применимости оценок «по порядку величины».

Электрометр для изучения дискретности заряда

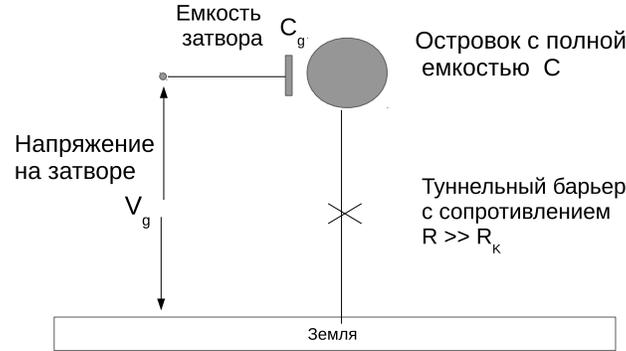


Рис. 1.1: Электрометр, использующий явление «кулоновской блокады».

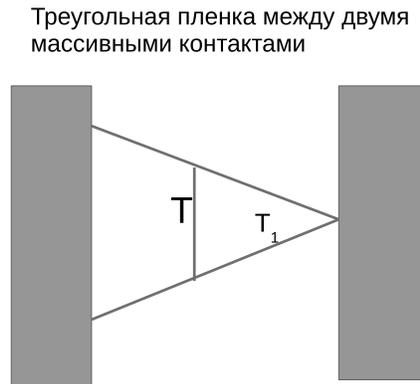
### Нелинейность уравнений Максвелла в пустоте

Оценим величину электрического поля  $\mathcal{E}_c$ , при котором можно ожидать нелинейности уравнений электромагнитного поля, связанной с рождением электрон-позитронных пар из вакуума. Она оценивается умножением силы  $e\mathcal{E}_c$  на длину  $r_e$  порядка «размера электрона», составленную из постоянной Планка, массы электрона и скорости света:  $r_e = \hbar/mc$ . Произведение  $e\mathcal{E}_c r_e$  имеет размерность энергии, и его надо сравнивать с энергией  $2mc^2$  необходимой для рождения двух частиц массы  $m$ . Получим  $\mathcal{E}_c \sim m^2 c^3 / e\hbar \sim 2 \cdot 10^{16}$  В/см. Сравним с типичным электрическим полем в атоме  $\mathcal{E}_a = Ry/ea_0 = 3 \cdot 10^9$  В/см и убедимся, что эти поля отличаются на 7 порядков.

### Квант сопротивления

Размерность квадрата заряда  $[e^2] = [\text{energy} \cdot \text{length}]$ , а размерность сопротивления  $[\text{Ohm}] = [V/I] = [(\text{erg}/e)/(e/\text{sec})] = [\text{erg} \cdot \text{sec}/e^2] = [(\text{velocity})^{-1}]$ . Мы знаем, что  $e^2/\hbar c = 1/137$  — безразмерная величина — постоянная тонкой структуры. Таким образом,  $e^2/\hbar$  имеет размерность скорости, а обратная величина  $\hbar/e^2$  — сопротивление. Выражая это сопротивление в привычных единицах, получим  $R_K = \hbar/e^2 = 2\pi\hbar/e^2 \approx 26$  кОм.

Квант сопротивления  $R_K$  играет очень важную роль в проводимости наноструктур. Простейший пример: квантование числа электронов на маленьком островке металла, см. рис. 1.1. Вопрос ставится так: с какой точностью задан заряд на островке? Когда мы можем утверждать, что он задан с точностью



Треугольники T и T<sub>1</sub> подобны. Казалось бы, их сопротивления между основанием и вершиной должны быть равны. Но это невозможно, т.к. один есть часть другого. В чем состоит разгадка парадокса ?

Рис. 1.2: Парадокс о сопротивлении треугольников.

до заряда одного электрона?

Оказывается, что квантование заряда возможно, если сопротивление контакта между островком и внешним миром много больше  $R_K$ . В самом деле, при изменении заряда на островке электрометра на заряд электрона  $e$ , электростатическая энергия меняется на величину порядка  $E_C = e^2/2C$ . Это изменение энергии существенно, если эта энергия определена с точностью много лучше чем  $E_C$ . С другой стороны, время изменения заряда на конденсаторе емкости  $C$ , соединенном с внешней цепью сопротивлением  $R$ , имеет порядок  $\tau = RC$ , а соответствующая квантовая неопределенность энергии  $\delta E \sim h/\tau$ . Для того, чтобы  $\delta E$  было мало по сравнению с  $E_C$ , и необходимо условие  $R \gg R_K$ .

## Нелинейный осциллятор

Уравнение движения

$$m d^2 x / dt^2 = -\kappa(x - x_0) + \beta(x - x_0)^2 = -\frac{dU(x)}{dx}, \quad (1.7)$$

где потенциальная энергия приведена с точностью до кубического члена разложения вблизи его минимума  $x = x_0$ . Как узнать, существенна ли роль нелинейных членов?

**Пример.** Полярная молекула  $\text{H}^+\text{Cl}^-$ . Минимум потенциала  $U(x)$  расположен при  $x = x_0 = 1.5 \cdot 10^{-8}$  см, его глубина  $U_0 = 4$  эВ. Частота колебаний молекулы известна и равна  $f_0 = 9 \cdot 10^{13}$  Гц, что соответствует круговой частоте  $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 6 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1}$ . Знание величины  $\omega_0$  позволяет определить

константу  $\kappa$ . В самом деле, массы ядер известны ( $m_{\text{H}} = 1.67 \cdot 10^{-24}$  г,  $m_{\text{Cl}} = 35m_{\text{H}}$ ), тем самым легко определить приведенную массу осциллятора  $m$ , после чего при помощи выражения для частоты осциллятора  $\omega_0^2 = \kappa/m$  и находится  $\kappa$ .

Теперь оценим степень нелинейности этого одномерного осциллятора. Начнем с «нулевых» колебаний из-за квантовой неопределенности «координата-импульс». С одной стороны, энергия основного состояния осциллятора равна  $\hbar\omega_0/2$ , а с другой стороны, она должна быть примерно равна величине  $\kappa x_Q^2$  где  $x_Q$  — типичная амплитуда нулевых колебаний. Отсюда получим  $x_Q = \sqrt{\hbar\omega_0/\kappa}$ . Отношение квадратичного члена в уравнении (1.7) к линейному члену при  $x \sim x_Q$  и определит степень нелинейности нашего осциллятора при самых низких температурах:

$$\alpha_{\text{nonlin}}^Q = \frac{\beta x_Q}{\kappa} = \frac{\beta \hbar^{1/2}}{\kappa(\kappa m)^{1/4}}. \quad (1.8)$$

Остается еще вопрос: откуда взять величину  $\beta$ ? Тут мы используем метод оценки «по порядку величины», заметив, что потенциал  $U(x)$  указанного вида характеризуется только одним масштабом энергии  $U_0$  и одним масштабом длины  $x_0$ , поэтому  $U_0 \sim \kappa x_0^2 \sim \beta x_0^3$ . Таким образом,  $\beta \sim \kappa/x_0$ .

**Упражнение 1.** Получить численную оценку для величины  $\alpha_{\text{nonlin}}^Q$  для рассмотренной молекулы, явным образом проведя все изложенные выше рассуждения. Затем выяснить, как меняется полученный результат в последовательности молекул  $\text{H}^+\text{Cl}^-$ ,  $\text{H}^+\text{Br}^-$ ,  $\text{H}^+\text{I}^-$ , предполагая, что потенциал взаимодействия ионов в молекуле один и тот же во всех этих случаях.

Перейдем теперь к рассмотрению тепловых колебаний той же молекулы и приравняем энергию колебаний  $\kappa x_T^2$  тепловой энергии  $k_B T$ . Получим  $x_T = \sqrt{k_B T/\kappa}$ . Температуры, при которых  $x_T \gg x_Q$  — достаточно высокие, чтобы можно было пренебречь квантовыми нулевыми колебаниями по сравнению с тепловыми. При учете члена  $x_T^2$  в уравнении движения, положение равновесия уже не будет соответствовать  $x = x_0$ , оно сдвинется. Сдвиг  $\Delta x$  определим из соотношения  $\kappa \Delta x = \beta x_T^2$ , так что его величина пропорциональна температуре.

**Упражнение 2: Тепловое расширение молекул.** Для газа тех же молекул  $\text{H}^+\text{Cl}^-$  оценить (в %) изменение среднего расстояния между ионами при нагревании от комнатной температуры до 700 градусов Цельсия.

## Движение с трением в потенциале «стиральной доски».

Частица находится в периодическом потенциале

$$U(x) = -\cos(x) + \beta \cos(2x) + \gamma \cos(3x). \quad (1.9)$$

Уравнение движения имеет вид

$$\eta dx/dt = -dU/dx. \quad (1.10)$$

Коэффициент трения  $\eta$  можно положить равным 1, переопределив масштаб времени, что мы далее и сделаем. Затем включается еще однородная сила  $F$ , добавляющаяся к правой части уравнения (1.10), что означает добавку  $-Fx$  к потенциалу (1.9). С превышением величины  $F$  некоторого критического значения  $F_c$ , минимумы потенциала пропадают (анализируя функцию на экстремумы, легко проверить, что при  $\beta = \gamma = 0$  будет  $F_c = 1$ ). Это означает, что частица начинает двигаться с некоторой средней скоростью  $v(F)$ , которая обращается в нуль при  $F$ , стремящемся к  $F_c$ . Как найти эту зависимость  $v(F)$  вблизи  $F_c$ ? Первый и очевидный способ — проинтегрировать уравнение движения при наличии силы  $F$ :

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dy}{F - dU/dy} \quad (1.11)$$

[здесь в качестве начального условия мы считаем, что  $x(0) = x_0$ ]. Однако выполнить это интегрирование в явном виде для потенциала (1.9) довольно сложно. Поэтому мы поступим следующим образом: сначала рассмотрим частный случай потенциала (1.9), а именно положим  $\beta = \gamma = 0$ . Тогда интеграл (1.11) легко вычисляется (с помощью универсальной тригонометрической подстановки):

$$t - t_0 = \frac{2}{\sqrt{F^2 - 1}} \operatorname{arctg} \frac{F \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{F^2 - 1}} \quad (1.12)$$

(константу интегрирования из правой части мы перебросили в левую, отсюда возникла сдвигка  $t_0$ ). Упомянутое выше критическое значение  $F_c = 1$  проявляется в этом ответе очевидным образом.

Левая сторона в формуле (1.12) — монотонно растущая функция, а правая, на первый взгляд — периодическая. Но на самом деле, если присмотреться, станет ясно, что раз в «период» арктангенс в правой части «перепрыгивает» на другую ветвь (т.е. испытывает скачок на  $\pi$ ). Поэтому правая часть — тоже монотонная функция. Период, соответствующий переходу между соседними эквивалентными положениями на «стиральной доске», таким образом, ведет себя в зависимости от наклона как  $\tau \propto 1/\sqrt{F^2 - 1}$ .

При малом  $f = F - 1$  период движения по стиральной доске  $\tau$  обращается в бесконечность как  $f^{-1/2}$ . Соответственно, средняя скорость движения  $\overline{dx/dt}$  обращается в нуль на пороге по закону

$$v(F) \propto \frac{1}{\tau} \propto \sqrt{f}. \quad (1.13)$$

Этот результат на самом деле гораздо более общий, чем конкретное вычисление интеграла (1.11) с потенциалом  $U(x) = -\cos(x)$ . Для более общего вида потенциала меняется, как правило, лишь критическое значение  $F_c$ . Сейчас мы увидим, откуда берется зависимость типа (1.13) и сколь она универсальна.

Рассмотрим знаменатель  $D(y)$  подынтегрального выражения (1.11) для случая  $f \ll 1$  и  $U(x) = -\cos(x)$ . Минимум знаменателя достигается при  $y = \pi/2$  и вблизи минимума можно написать  $y = \pi/2 + \delta y$  и  $D(y) = f + \delta y^2/2$ . Поэтому главный вклад в интеграл (1.11) приходит именно от области  $|\delta y| \sim \sqrt{f}$  и этот

вклад имеет порядок величины  $1/\sqrt{f}$ . Вклады от других областей интегрирования в (1.11) оказываются порядка единицы, и потому играют относительно малую роль. Более точно, вычисляя интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta y}{f + \delta y^2/2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{f}} \quad (1.14)$$

и сравнивая с (1.12), мы обнаруживаем что вся сингулярная при  $f \rightarrow 0$  зависимость периода  $\tau$  может быть правильно определена при помощи такого приближенного вычисления. Это позволяет применить такой же приближенный метод к вычислению критического поведения  $v(F)$  в более общем случае, когда явным образом вычислить интеграл (1.12) не удается.

**Упражнение 3: Слабо надкритическое движение.** Найти вид зависимости  $v(F)$  при  $F$  очень близком к  $F_c$ , для двух случаев:

- $\beta > 0, \gamma = 0$ ;
- $\beta = 0, \gamma > 0$ .

Исследовать для каждого из этих случаев зависимость  $v(F)$  при произвольном  $\beta$  или  $\gamma$ .

## 1.2 Семинар по теме «Трансцендентные уравнения»

### Вступление

В приложениях очень часто приходится иметь дело с трансцендентными уравнениями, зависящими от одного или нескольких параметров. Как правило, они не имеют аналитического решения, а только численное; однако наличие в таких задачах малого или большого параметра на практике помогает найти приближённый вид ответа.

### Метод итераций

Один из способов решения трансцендентных уравнений вида  $x = f(x)$  есть метод простых итераций. Сам метод заключается в следующем:

- Выберем начальное приближение  $x_0$
- Построим последовательность  $\{x_k\}$  согласно  $x_{k+1} = f(x_k)$
- Если при этом  $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \tilde{x}$ , то  $\tilde{x}$  является решением нужного уравнения.

Этот метод очень часто применяется для нахождения численных решений; однако, в случае наличия в задаче большого или малого параметра, он может помочь найти и приближенный аналитический вид этого решения. В таком случае, как правило, достаточно заменить последний критерий на условие  $|x_{k+1} - x_k| \ll x_k$ ; при выполнении этого условия,  $x_k$  может являться хорошим аналитическим приближением к ответу. Обычно для того, чтобы увидеть, что либо условие на каком-то шаге выполнилось, либо последовательность приближений расходится, достаточно проделать несколько итераций.

### Задача 1 (намагниченность ферромагнетика в теории среднего поля)

Решим уравнение

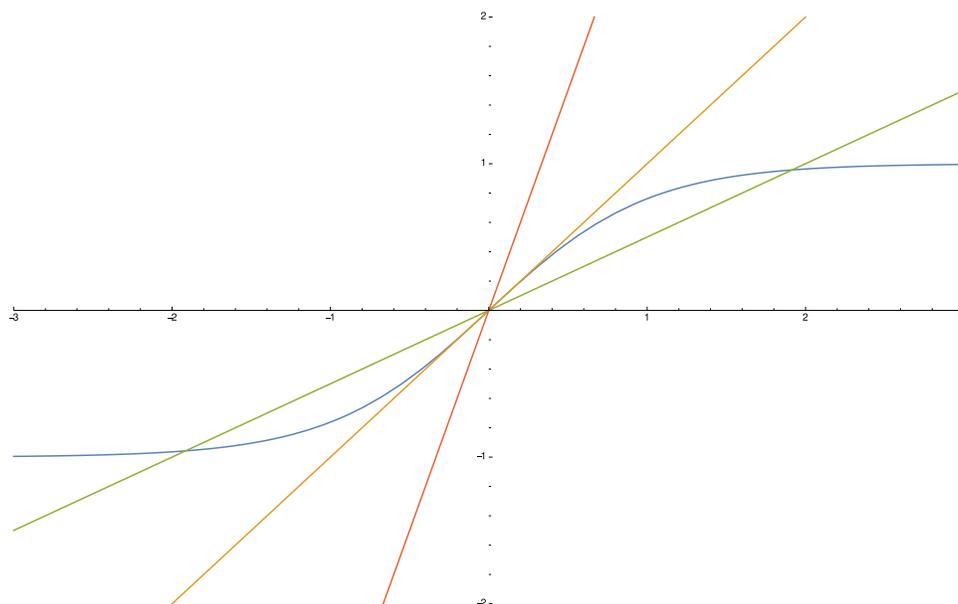
$$m = \tanh(m/T)$$

Оно всегда имеет тривиальное решение  $m = 0$ ; однако, существует критическая точка  $T = T_c$ , вблизи которой появляется нетривиальное решение  $m(T)$ . Найти асимптотическое поведение этого решения вблизи критической точки (при  $|T - T_c| \ll T_c$ ), а также вблизи нуля (при  $T \ll T_c$ ).

#### Решение

Решать задачу будем графически. Для удобства сделаем перемасштабирование - введем  $\tilde{m} = m/T$ ; уравнение переписется как  $T\tilde{m} = \tanh \tilde{m}$ . Нарисуем на графике левую и правую часть уравнения.

Рис. 1.3:  $T\tilde{m} = \tanh(\tilde{m})$ ,  $T = 3; 1; 0.5$



Функция  $\tanh x$  ведет себя вблизи нуля линейно:  $\tanh x \sim x$ . Из-за симметрии уравнения относительно замены  $m \mapsto -m$ , всегда будут иметься как положительные, так и отрицательные решения, поэтому следить мы будем только за положительными. Из этого и из картинку можно сделать следующие выводы:

- при  $T = 1$ , прямая касается графика  $\tanh \tilde{m}$ . Это и есть искомая критическая точка  $T_c = 1$ .
- при  $T > 1$ , прямая идет более круто и точек пересечения нет; единственное решение уравнения - тривиальное.
- при  $T < 1$ , прямая идет полого, и имеются точки пересечения обоих графиков, отличные от  $m = 0$ ; это и есть наши нетривиальные решения.
- при  $T \rightarrow 0$ , прямая идет практически горизонтально. Ордината точки пересечения стремится к 1, поэтому решение уравнения  $m(T \rightarrow 0) \rightarrow 1$ .

Перейдем обратно от переменной  $\tilde{m}$  к переменной  $m$  и найдем асимптотику аналитически.

**Окрестность критической точки**  $1 - T \ll 1$  Вблизи критической точки,  $m(T) \ll 1$ ; это позволяет нам разложить  $\tanh(m/T)$  по малости своего аргумента, и переписать уравнение приближенно как:

$$m \approx \frac{m}{T} - \frac{1}{3} \left(\frac{m}{T}\right)^3 \Rightarrow m(T) \approx \sqrt{3(1 - T)}$$

В последнем равенстве мы выбросили  $T^2 \approx 1$ , поскольку мы интересуемся ведущим порядком разложения по  $1 - T$ . Кроме того, видно, что наше предположение  $m(T) \ll 1$  действительно выполняется.

**Окрестность нуля**  $T \ll 1$  Тут видно, что  $m(T) \approx 1$  (то есть  $1 - m(T) \ll 1$ ). В таком случае удобно применить метод итераций:

- Нулевое приближение:  $m_0 = 1$

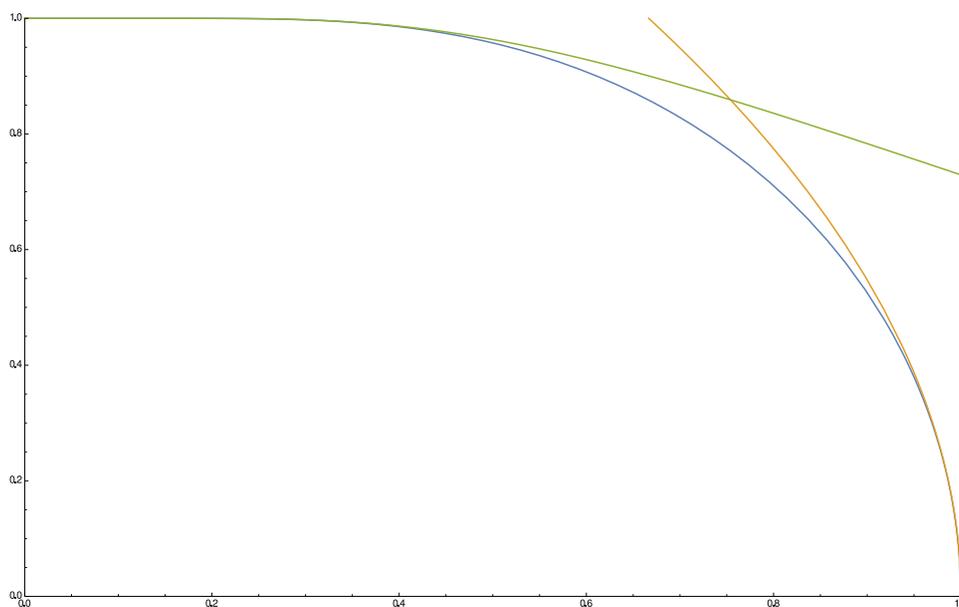
- Первая итерация:

$$m_1 = \tanh \frac{1}{T} = \frac{1 - e^{-2/T}}{1 + e^{-2/T}} \approx 1 - 2e^{-2/T}$$

- Проверим выполнения критерия:  $|m_1 - m_0| = 2e^{-2/T} \ll m_0 = 1$

Таким образом, метод итераций дал нам малую поправку, которая и представляет собой ведущую асимптотику.

Рис. 1.4: Точное решение и найденные асимптотики



## Задача 2 (уровни энергии прямоугольной квантовой ямы)

Решим уравнение

$$\tan Ax = \frac{1}{x}$$

при  $A \gg 1$ . Его решения нумеруются целым числом  $n$ ; найти асимптотическое поведение решений при  $n \ll A$  и  $n \gg A$ .

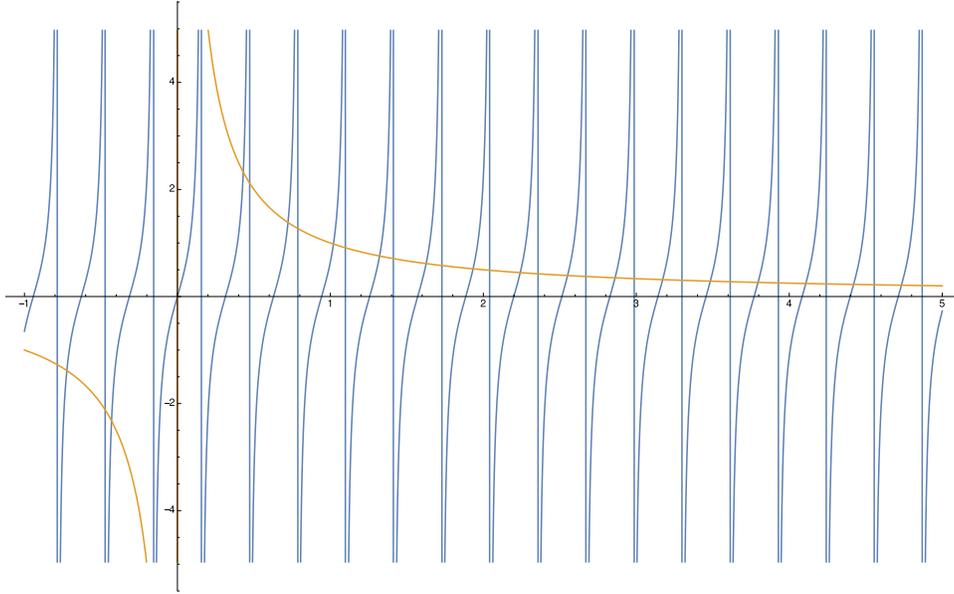
### Решение

Будем решать уравнение опять графически. Нарисуем левую и правую часть уравнения.

Видно, что имеется целая серия точек пересечения, которые являются решением нашего уравнения. Из картинки также можно сделать вывод о том, вблизи каких точек расположены корни в обоих случаях и в окрестности каких точек стоит искать решение.

**Случай  $n \ll A$**  При  $n \ll A$ , период тангенса мал и все решения лежат вблизи нуля:  $x_n \ll 1$ . Это значит, что в качестве начального приближения можно заменить правую часть на  $+\infty$ :

$$\tan Ax = +\infty \Rightarrow x_n^{(0)} \approx \frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

Рис. 1.5:  $\tan Ax = \frac{1}{x}$ ,  $A = 10$ 

Найдём поправки, используя модификацию метода итераций: метод последовательных приближений. Введём поправку согласно  $x_n^{(1)} = \frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n + \epsilon_n \right)$  и  $|\epsilon_n| \ll 1$ ; подстановка в уравнение даёт:

$$\tan \left( \frac{\pi}{2} + \pi n + \epsilon_n \right) = \frac{A}{\frac{\pi}{2} + \pi n + \epsilon_n}$$

Разложимся до наинизшего порядка. Левая часть равна  $-\frac{1}{\tan \epsilon_n} \approx -\frac{1}{\epsilon_n}$ ; в правой же части в ведущем приближении поправку можно просто выбросить.

$$\epsilon_n \approx -\frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

(видно, что  $|\epsilon_n| \ll 1$ , и наше предположение было верным). Таким образом, в этом случае приближенно ответ записывается как:

$$x_n \approx \frac{1}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right) - \frac{1}{A^2} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$$

**Случай  $n \gg A$**  В этом случае  $x_n \gg 1$  и в качестве нулевого приближения можно заменить правую часть на ноль:

$$\tan Ax = 0 \Rightarrow x_n^{(0)} \approx \frac{\pi n}{A}$$

Опять воспользуемся методом последовательных приближений - сделаем подстановку  $x_n^{(1)} = \frac{1}{A}(\pi n + \epsilon_n)$  и  $|\epsilon_n| \ll 1$ :

$$\tan(\epsilon_n + \pi n) = \frac{A}{\epsilon_n + \pi n}$$

Проводя разложение левой части  $\tan(\pi n + \epsilon_n) \approx \epsilon_n$  и выбрасывая  $\epsilon_n$  в правой части, мы получаем:

$$\epsilon_n \approx \frac{A}{\pi n}$$

(предположение  $\epsilon_n \ll 1$  тем самым выполнено). Поэтому ответ записывается как:

$$x_n \approx \frac{\pi n}{A} + \frac{1}{\pi n}$$

### Задача 3 (логарифмическая точность)

При  $\alpha \gg 1$  решим уравнение

$$x = e^{-\alpha x}$$

#### Решение

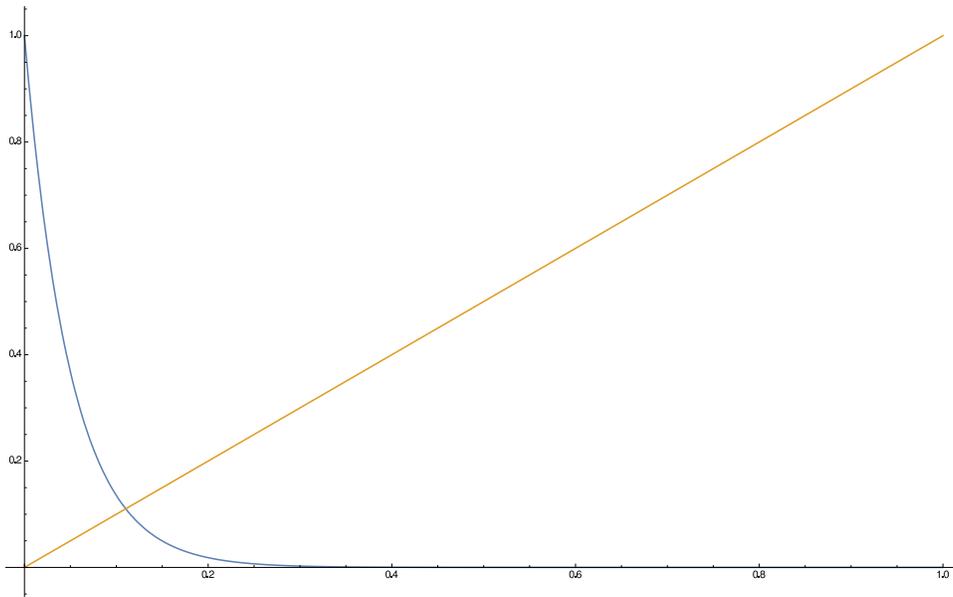
Графический анализ показывает, что решение  $x \ll 1$ .

Кроме того, видно, что  $\alpha x$  не может быть малым числом: в противном случае  $e^{-\alpha x} \approx 1 \Rightarrow x \approx 1$ , что противоречит этому анализу. Для решения мы воспользуемся методом итераций, но применим его не к исходному уравнению, а к переписанному в виде  $x = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{x}$ .

- В качестве начального приближения давайте возьмём произвольное число  $x_0 \sim 1$ . В дальнейшем мы увидим, что от него зависеть ничего не будет.
- Первое приближение даёт  $x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{x_0}$ . Поскольку  $x_1 \ll x_0$ , то  $|x_0 - x_1| \approx x_0$  и это приближение не является хорошим.
- Второе приближение даёт  $x_2 = \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \ln \ln \frac{1}{x_0}$ . В силу  $\alpha \gg 1$ , второе слагаемое мало и его можно выбросить (и тем самым выпадает зависимость от начального приближения). В таком случае  $x_2 \gg x_1$  и приближение опять-таки не является хорошим.
- Третье приближение даёт  $x_3 = \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{\ln \ln \alpha}{\alpha}$ . В этом случае поправка действительно оказывается малой:  $|x_3 - x_2| = \frac{\ln \ln \alpha}{\alpha} \ll x_2 = \frac{\ln \alpha}{\alpha}$ ; это наконец и означает, что мы нашли хорошее приближение, а также ведущую поправку к нему.

Таким образом, ответ приближенно записывается как  $x \approx \frac{\ln \alpha}{\alpha}$ .

Из-за того, что логарифм - медленно растущая функция, первое приближение работает в данном интервале не очень хорошо. Более точным будет учесть следующую поправку.

Рис. 1.6:  $x = e^{-\alpha x}$ ,  $\alpha = 20$ 

### Задачи для домашнего решения

#### Упражнение 1

При  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$  приближенно решите уравнение

$$x = 1 + \exp(-\alpha x).$$

#### Упражнение 2

При  $\alpha \gg 1$  и  $\alpha \ll 1$  приближенно решите уравнение

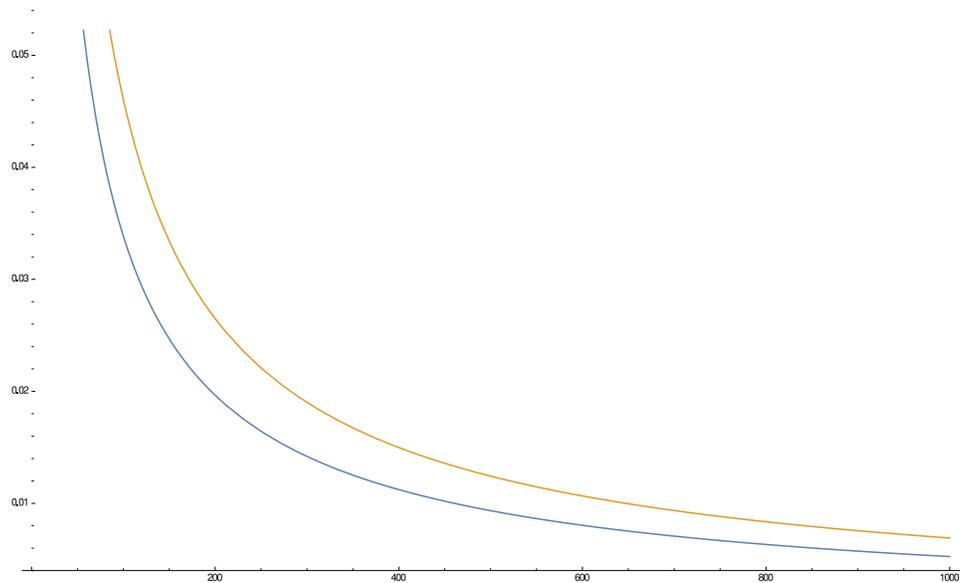
$$\ln x = e^{-\alpha x}.$$

#### Упражнение 3

На семинаре была определена функция Ламберта  $x(\lambda)$ , которая при  $\lambda \geq 0$  задается как решение уравнения

$$xe^x = \lambda.$$

При  $-\frac{1}{e} < \lambda < 0$  это уравнение имеет два решения:  $x_1(\lambda) > -1$  и  $x_2(\lambda) < -1$  (для непрерывности обычно именно  $x_1(\lambda)$  называют функцией Ламберта на  $-\frac{1}{e} \leq \lambda < 0$ ). При  $\lambda = -\frac{1}{e}$ , как легко увидеть,

Рис. 1.7: Численное решение  $x = e^{-\alpha x}$  и его асимптотика

$x_1 = x_2 = -1$ , а при  $\lambda < -\frac{1}{e}$  действительных решений нет. Приблизительно найдите  $x_1(\lambda)$ ,  $x_2(\lambda)$  при  $\lambda < 0$ ,  $|\lambda| \ll 1$ .

#### Упражнение 4

Найдите  $x_1(\lambda)$ ,  $x_2(\lambda)$  из упражнения 3 при  $\lambda > -\frac{1}{e}$ ,  $|\lambda + \frac{1}{e}| \ll 1$ .

#### Задача 1

Приблизительно решите уравнение

$$\tanh \alpha x = \arctan x$$

при  $0 < \alpha - 1 \ll 1$  и при  $\alpha \gg 1$ .

#### Задача 2

При  $\alpha \ll 1$  положительные решения неравенства

$$\left| \cos x + \alpha \frac{\sin x}{x} \right| > 1$$

разбиваются на серию зон, нумеруемых целыми числами  $k = 0, 1, \dots$ . Определить ширину  $k$ -ой зоны при  $k \gg 1$ .

## Глава 2

# Приближенное вычисление определенных интегралов. Интегралы с «малым параметром»

### 2.1 Лекция (М.В. Фейгельман)

#### Оценки интегралов путем разложения в ряд

Рассмотрим интеграл  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ . При  $x \ll 1$  его можно находить путем разложения подынтегрального выражения в ряд по степеням  $x$ :

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4/2 - \dots) = x - x^3/3 + x^5/10 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

Этот ряд сходится при всех  $x$ , но практически полезен при малых  $x$ , когда можно ограничиться первыми его членами.

При  $x \gg 1$  можно использовать совсем другой приём: представим интеграл (1) в виде разности  $\int_0^x = \int_0^{\infty} - \int_x^{\infty}$  и оценим второй член последовательно вычисляя его при помощи интегрирования по частям:

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{x^2}^{\infty} \frac{du}{2\sqrt{u}} e^{-u} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}} \Big|_{x^2}^{\infty} + \int_{x^2}^{\infty} \frac{e^{-u} du}{4u^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - e^{-x^2} \left[ \frac{1}{2x} - \frac{1}{4x^3} + \dots \right] \quad (2.1)$$

и  $n$ -ый член ряда в квадратных скобках в (2.1) имеет вид

$$a_n(x) = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^{n+1}x^{2n+1}}$$

Ряд

$$S_N(x) = \sum_0^N a_n(x)$$

называется асимптотическим рядом. При  $N \rightarrow \infty$  он расходится при любом  $x$ , т.к. факториал растет быстрее любой степени. Однако при  $x \gg 1$  ряд этот, тем не менее, имеет смысл: с его помощью можно найти асимптотику искомого интеграла, ограничив суммирование ряда на том члене  $N(x)$ , за которым последующие  $a_n(x)$  начинают расти. Хорошее приближение к искомому интегралу  $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$  обеспечивается вычислением конечной суммы  $S_{N(x)}(x) = \sum_0^{N(x)} a_n(x)$ .

Отдельно, для справки, приведем здесь простейшее вычисление интеграла  $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ , использованного выше:

$$\left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2-u^2} dt du = 2\pi \int_0^\infty r dr e^{-r^2} = \pi \int_0^\infty dx e^{-x} = \pi$$

## Выделение существенной части области интегрирования

Часто бывает полезно выяснить, какая область значений аргумента интегрирования дает основной вклад в интеграл, и в этой области сделать упрощающее приближение для подинтегрального выражения.

1. Интеграл  $I(a) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$  где  $f(0) > 0$  и конечно, а функция  $f(x)$  меняется заметным образом при  $x \sim 1$ .

(а) Тогда при  $a \ll 1$  можно вынести  $f(x)$  из под знака интеграла, тогда  $I(a) = 2f(0) \ln \frac{1}{a}$ .

(б) При  $a \gg 1$  пренебрегаем  $x^2$  в знаменателе и получаем  $I(a) \approx \frac{1}{a} \int_{-1}^1 f(x)dx$ .

2. Рассмотрим интеграл  $I(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2}}{\sqrt{x^2-t^2}} dt$  при малых и больших  $x$ .

(а) Пусть  $x \ll 1$ . Тогда можно заменить  $e^{t^2}$  на единицу и интеграл тривиально вычисляется:  
 $I(x \ll 1) = \frac{\pi}{2}$

(б) При  $x \gg 1$  главный вклад в  $I(x)$  приходит от окрестности точки  $t = x$ , поэтому введем переменную  $\xi = x - t$  и перепишем интеграл в виде

$$I(x) = \int_0^x e^{x^2-2x\xi+\xi^2} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x - \xi^2}} \quad (2.2)$$

В интеграле (2.2) существенна область  $2\xi x \sim 1$ , т.е.  $\xi \sim 1/x$ , поэтому членом  $\xi^2$  можно пренебречь и в показателе экспоненты, и в знаменателе. В результате получим

$$I(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-2x\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{2\xi x}} = \frac{e^{x^2}}{2x} \int_0^\infty e^{-z} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{\sqrt{\pi} e^{x^2}}{2x}$$

3. Рассмотрим интеграл  $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin^2(\beta x) dx$ , здесь конечно  $\alpha > 0$ . Исследуем поведение  $I(\alpha, \beta)$  при различных соотношениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . На самом деле, существенный параметр здесь только один, это отношение  $\beta/\sqrt{\alpha}$ , т.к. искомый интеграл можно переписать в виде

$$I(\alpha, \beta) = \alpha^{-1/2} \int_0^\infty e^{-z^2} \sin^2\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z\right) dz \quad (2.3)$$

Как видно из записи (2.3), существенна область интегрирования  $z \sim 1$ . Теперь рассмотрим предельные случаи:

- (a)  $\beta \gg \sqrt{\alpha}$ : аргумент синуса быстро осциллирует при  $z \sim 1$ , поэтому заменим квадрат синуса на его среднее значение  $1/2$  и получим  $I(\alpha, \beta) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha}}$ .
- (b)  $\beta \ll \sqrt{\alpha}$ : здесь можно заменить  $\sin^2\left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} z\right) \rightarrow \beta^2 z^2/\alpha$  и вычислить более простой интеграл

$$I(\alpha, \beta) \approx \frac{\beta^2}{\alpha^{3/2}} \int_0^\infty e^{-z^2} z^2 dz = \frac{\sqrt{\pi} \beta^2}{4\alpha^{3/2}}$$

Впрочем, исходный интеграл  $I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \sin^2(\beta x) dx$  можно вычислить и точно. Для этого необходимо переписать его, расширив область интегрирования от  $-\infty$  до  $+\infty$  и поделив на 2, затем представить синус как комбинацию экспонент с мнимыми аргументами, и провести сдвиги переменных под знаком интеграла, чтобы свести интеграл к стандартному Гауссову виду. В результате получим

$$I(\alpha, \beta) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(1 - e^{-\beta^2/\alpha}\right)$$

Как видно, в рассмотренных выше предельных случаях получаем те же ответы, что были ранее получены приближенными способами.

4. Исследуем интеграл  $I(\beta) = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x+1} dx$  при малых и больших значениях параметра  $\beta$ .

- (a) При  $\beta \gg 1$  все просто: интеграл сходится при  $x \sim 1/\beta \ll 1$ , поэтому можно пренебречь  $x$  в знаменателе и получится  $I(\beta) \approx 1/\beta$ .
- (b) При  $\beta \ll 1$  существенная область интегрирования широкая,  $x \sim 1/\beta \gg 1$ , поэтому в главном приближении можно пренебречь единицей в знаменателе, но заменить нижний предел на 1. Получим, что  $I(\beta) \approx \ln \frac{1}{\beta}$ . Представляет интерес вычисление поправки к этому простейшему приближению. Для этого поступим таким образом: введем новую функцию  $g(\beta) = I(\beta) - \ln \frac{1}{\beta}$  и выведем уравнение на  $g(\beta)$ , продифференцировав исходный интеграл для  $I(\beta)$  по  $\beta$ :

$$-\frac{dI(\beta)}{d\beta} = \int_0^\infty \frac{x+1-1}{x+1} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{\beta} - I(\beta)$$

поэтому для  $g(\beta)$  получаем уравнение

$$\frac{dg}{d\beta} - g = \ln \frac{1}{\beta}$$

которое можно решать методом “вариации постоянной”:

$$g(\beta) = e^\beta \left[ \int_0^\beta e^{-x} \ln \frac{1}{x} dx + C_1 \right] \quad (2.4)$$

Первый член (2.4) обращается в нуль при  $\beta \rightarrow 0$ , так что нам надо определить постоянную  $C_1$ . Выражение (2.4) справедливо при любом  $\beta$ , так что можно рассмотреть его предел  $\beta \rightarrow \infty$  и заключить, что

$$C_1 = \int_0^\infty e^{-x} \ln(x) dx = -C \approx -0.577$$

т.к. иначе бы мы получили, что  $g(\beta)$  экспоненциально расходится при  $\beta \rightarrow \infty$ . Число  $C \approx 0.577\dots$  называют постоянной Эйлера (иногда также называют и число  $\gamma = e^C$ ).

Теперь, вспомнив, что мы интересуемся областью  $\beta \ll 1$ , получаем окончательно для  $I(\beta)$ :

$$I(\beta) = \ln \frac{1}{\beta} - C + O(\beta)$$

## Приближенное вычисление рядов

Ряд  $S_1(q) = \sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$  - это простейшая геометрическая прогрессия. Чуть более сложный ряд  $S_2(q) = \sum_{n=0}^\infty nq^n$  легко вычислить, продифференцировав  $S_1(q)$  почленно:

$$S_2(q) = \frac{dS_1(q)}{dq} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Вычисление ряда  $S_3(q) = \sum_{n=0}^\infty \ln(n)q^n$  можно провести при  $1-q = \epsilon \ll 1$ , заметив, что в этом случае основной вклад в сумму ряда происходит от членов с номерами  $n \sim 1/\epsilon \gg 1$ , поэтому вычисление дискретного ряда можно заменить интегрированием:

$$S_3(q) \approx \int_0^\infty \ln(x)q^x dx \approx \int_0^\infty e^{-\epsilon x} \ln(x) dx \approx \frac{1}{\epsilon} \ln \frac{1}{\epsilon}$$

## 2.2 Семинар по теме «Интегралы с малым параметром»

### Задача 1

Найдём асимптотики интеграла при  $x \gg 1$  и  $x \ll 1$ :

$$I(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

**Решение**

Подынтегральная функция аналитична в нуле, поэтому при  $x \ll 1$  можно просто разложить  $\cos t$  в ряд Тейлора; имеем:

$$I(x) \approx \int_0^x \frac{t^2/2}{t} dt = \frac{1}{4}x^2$$

При  $x \gg 1$ , для интеграла важна вся область интегрирования; это связано с тем, что при  $x \rightarrow \infty$  этот интеграл расходится. Для выделения ведущей асимптотики можно воспользоваться трюком. Во-первых, поведение функции в нуле аналитично, поэтому интеграл можно представить в виде:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{1 - \cos t}{t} dt + \int_1^x \frac{1 - \cos t}{t} dt$$

Поскольку на области интегрирования  $\cos x$  успевает осциллировать много раз, во втором слагаемом мы можем его выбросить (известно, что  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$  сходится и равен  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому при выбрасывании косинуса мы потеряем некую константу  $\sim 1$ ). Во-вторых, поскольку подынтегральная функция аналитична в нуле, то первое слагаемое тоже даст число  $\sim 1$ . Таким образом формально можно записать:

$$I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} + O(1) \approx \ln x$$

На фоне большого слагаемого  $\ln x \gg 1$  (при  $x \gg 1$ ), выброшенные константы порядка единицы являются малой добавкой. Это называется взятием интеграла с логарифмической точностью. Точное вычисление асимптотики дает ответ  $\ln x + C + o(1)$ , где  $C \approx 0.577$  - постоянная Эйлера-Маскерони.

**Задача 2**

Найдём асимптотики интеграла при  $a \gg b$  и  $a \ll b$ :

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\exp(-x/a)}{\sqrt{x(x+b)}} dx$$

**Решение**

Обезразмерим интеграл, введя переменную  $t = \frac{x}{a}$ :

$$I(a, b) \equiv I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t\left(t + \frac{b}{a}\right)}} dt$$

**Случай  $b \gg a$**  Из-за экспоненты, подынтегральное выражение быстро затухает на масштабах  $t \sim 1$  вблизи нуля. Поэтому в существенной области интегрирования  $t \ll \frac{b}{a}$  и в знаменателе можно выбросить  $t$  на фоне большого члена  $\frac{b}{a}$ . Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \sqrt{\frac{a}{b}} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi a}{b}}$$

Заменой  $t = z^2$  мы свели интеграл к известному интегралу Пуассона.

**Случай  $b \ll a$**  Тут экспонента тоже затухает очень быстро на масштабах  $\sim 1$ . Однако, если выбросить  $\frac{b}{a}$  в знаменателе, мы получим расходящийся интеграл - около нуля экспонента ведет себя примерно как 1, и подынтегральная функция имеет асимптотику  $\sim \int_0^\infty \frac{1}{t} dt$ , то есть расходится логарифмически. Поэтому тут существенная область интегрирования теперь - вблизи нуля. Интеграл можно переписать как:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt + \int_1^\infty \dots$$

Второе слагаемое - сходящийся интеграл, который из-за экспоненты - число порядка 1 (формально можно оценить как  $I_2 < \int_1^\infty e^{-t} dt = \frac{1}{e} \sim 1$ ); на фоне большого первого слагаемого его можно выбросить. Далее, поскольку, как было уже сказано, существенная область интегрирования лежит около нуля, экспоненту можно положить равной 1. Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(t + \frac{b}{a})}} dt$$

Этот интеграл уже можно просто взять. Введем замену  $t = z^2$ :

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^1 \frac{2z dz}{\sqrt{z^2(z^2 + \frac{b}{a})}} = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2 + \frac{b}{a}}}$$

Теперь введем замену  $z = \sqrt{\frac{b}{a}} \sinh u$ ; тогда  $z^2 + \frac{b}{a} = \frac{b}{a} (\sinh^2 u + 1) = \frac{b}{a} \cosh^2 u$ :

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \int_0^{\operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{a}{b}}} \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cosh u du}{\sqrt{\frac{b}{a}} \cosh u} = 2 \operatorname{arcsinh} \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Для гиперболического арксинуса есть известное выражение через элементарные функции  $\operatorname{arcsinh} x = \ln(a + \sqrt{a^2 + 1})$ . Значит:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx 2 \ln\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{a}{b} + 1}\right) \approx \ln \frac{a}{b} \gg 1$$

(тут мы выбросили малые константные члены на фоне большой основной логарифмической асимптотики).

### Задача 3

Найдём асимптотики интеграла при  $a \ll b$  и  $a \gg b$ :

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{x}{a}\right)}{x(x^2 + b^2)} dx$$

### Решение

Обезразмерим интеграл, введя переменную  $t = \frac{x}{a}$ :

$$I(a, b) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{at(a^2t^2 + b^2)} a dt = \frac{1}{a^2} \int_0^\infty \frac{\sin t}{t\left(t^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)} dt \equiv \frac{1}{a^2} I\left(\frac{b}{a}\right)$$

**Случай  $a \gg b$**  Если выбросить  $\frac{b^2}{a^2} \ll 1$  по сравнению с  $t$  в знаменателе, то мы получим расходящийся интеграл (в нуле как  $\sim \int_0^\infty \frac{dt}{t^2}$ ). Из этого можно заключить, что основная область, где интеграл набирается - вблизи нуля. Поэтому  $\sin t$  можно разложить; имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{a}{b} \arctan\left(\frac{b}{a}t\right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi a}{2b} \Rightarrow I(a, b) = \frac{\pi}{2ab}$$

**Случай  $a \ll b$**  Поскольку интеграл от функции  $\frac{\sin t}{t}$  набирается на масштабах  $\sim 1$  (из-за осциллирующего синуса), то в знаменателе можно выбросить  $t^2$  на фоне  $\frac{b^2}{a^2} \gg 1$ . Имеем:

$$I\left(\frac{b}{a}\right) \approx \int_0^\infty \frac{\sin x}{x \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow I(a, b) \approx \frac{\pi}{2b^2}$$

### Оценка рядов

В некоторых случаях можно с хорошей точностью оценить ряд при помощи формулы:

$$\sum_{n=a}^b f(n) \approx \int_a^b dn f(n) + \frac{1}{2} (f(a) + f(b))$$

Эта формула работает в случае

$$\frac{|f(n) - f(n-1)|}{|f(n)|} \ll 1$$

и имеет простой смысл приближённого интегрирования методом трапеций. Условие применимости формулы - не что иное, как требование малости относительной ошибки метода трапеций при подсчёте площади под графиком  $f(n)$ . Иначе это требование можно записать как  $f'(n) \ll f(n)$  для любого  $a \geq n \leq b$ . Таким образом, эта формула даёт способ оценки ряда с медленно меняющимися членами. В противоположном случае быстроменяющихся членов ряда обычно можно выделить существенные члены и их просуммировать. Этому посвящено упражнение №4.

**Задачи для домашнего решения****Упражнение 1**

Пусть  $a, b > 0$ . Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax} \frac{\sin^2 bx}{x^2} dx$$

при а)  $a \gg b$  и б)  $a \ll b$  (здесь и далее можно ограничиться главным порядком малости и все параметры считать положительными).

**Упражнение 2**

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \frac{1}{(x-1)^2 + b^2} dx$$

при а)  $a \ll 1$ ,  $b \sim 1$  и б)  $a = b \gg 1$ .

**Упражнение 3**

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^2 + a^2} (1 - \tanh bx) dx$$

При  $b \ll 1$  и  $a \ll 1$ .

**Упражнение 4**

Приближенно вычислите сумму

$$S(a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} n^a e^{-bn}$$

при а)  $a \sim 1$  и  $b \ll 1$ , б)  $b \gg \frac{a}{b} \gg 1$ .

**Задача 1**

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{1}{xa^2 + (1-x^2)^2} dx$$

при а)  $1 \gg a$ , б)  $1 \ll a$ .

**Задача 2**

Найдите асимптотическое выражение для следующего интеграла:

$$I(n, a, b) = \int_0^a \frac{x^n}{e^{x/b} - 1} dx$$

при а)  $b \gg a$  и б)  $n \gg 1$ ,  $nb \ll a$ .

# Глава 3

## Вычисления интегралов и рядов методом перевала

### 3.1 Лекция (Я.В. Фоминов)

#### Основная идея метода перевала

Рассмотрим важный класс интегралов вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} dt, \quad (3.1)$$

где  $f(t)$  имеет *резкий* (условие резкости обсудим чуть позже) максимум при  $t = t_0$ .

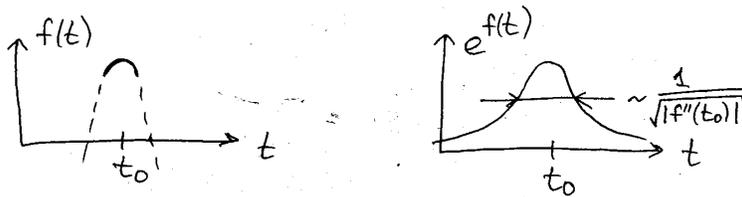


Рис. 3.1

Вблизи  $t_0$  (см. рис. 3.1):

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t - t_0)^2, \quad f''(t_0) < 0. \quad (3.2)$$

Подставив это разложение в экспоненту, получаем гауссов интеграл, который элементарно вычисляется:

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}} e^{f(t_0)} \quad (3.3)$$

Это главная формула метода перевала.

Откуда взялось название «метод перевала»? Дело в том, что выше рассмотрен лишь частный случай более общего метода, который работает также в случае функций комплексного переменного. Пусть  $f(x) = -x^2$ . Обобщим её, заменив  $x$  на комплексную переменную  $z$ . Тогда при движении вдоль вещественной оси наша функция имеет максимум, а при движении вдоль мнимой оси — минимум ( $z = iy$ ,  $f(z) = y^2$ ). Поэтому получается конфигурация типа перевала, см. рис. 3.2. При этом наше интегрирование по  $x$  происходит в направлении наискорейшего спуска с перевала. Примерно так идея метода перевала возникает в комплексном случае. Мы же дальше будем говорить только про вещественный случай.

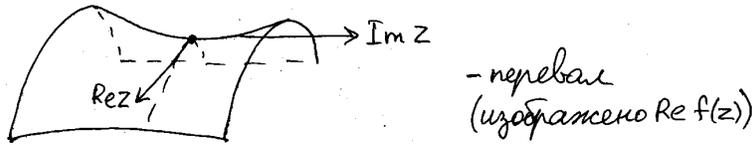


Рис. 3.2

Посмотрим, чем мы пренебрегли в ряде Тейлора (3.2):

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \frac{f^{(4)}(t_0)}{4!}(t-t_0)^4 + \dots$$

Если подставить это в экспоненту и разложить по кубическому члену, в результате интегрирования получим ноль из-за нечётности относительно  $t_0$ . Поэтому наиболее существенное отброшенное нами слагаемое — это четвёртый порядок в ряде Тейлора. Без него наш интеграл (3.3) набрался на  $\Delta t \sim 1/\sqrt{|f''(t_0)|}$ , где  $\Delta t = t - t_0$ . Пренебрежение четвёртым порядком в ряде Тейлора было законным, если на таких  $\Delta t$  он мал:

$$f^{(4)}(t_0)\Delta t^4 \ll 1 \quad \implies \quad \frac{f^{(4)}(t_0)}{(f''(t_0))^2} \ll 1. \quad (3.4)$$

Это и есть условие применимости метода перевала, оно же условие резкости максимума функции  $f(t)$ .

## Однопараметрические функции

Бывают так называемые однопараметрические функции, у которых существенная область изменения  $F(x)$  характеризуется одним параметром  $\lambda$ . Тогда

$$F'(\lambda) \sim \frac{F(\lambda)}{\lambda}, \quad F''(\lambda) \sim \frac{F(\lambda)}{\lambda^2} \quad \text{и т.д.}$$

На первый взгляд может показаться, что это что-то особенное, но на самом деле это довольно частая ситуация. Важно, чтобы функция менялась от некоторого значения до нуля на характерном масштабе порядка  $\lambda$  (см. рис. 3.3). Если же она меняется до константы, то эту константу можно вычестить, переопределив функцию.

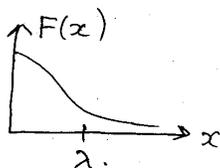


Рис. 3.3

Рассмотрим примеры:

1.  $F(x) = e^{-x^2/\lambda^2}$ . Тогда

$$F'(x) = -\frac{2x}{\lambda^2} e^{-x^2/\lambda^2}, \quad F'(\lambda) \sim \frac{F(\lambda)}{\lambda}.$$

2.  $F(x) = x^n$ . Её масштаб даётся самой переменной  $x$ :

$$F'(x) = nx^{n-1} \sim \frac{nF(x)}{x}.$$

Для однопараметрической функции условие применимости метода перевала записывается совсем просто. Поскольку  $f''(t_0) \sim f(t_0)/t_0^2$ ,  $f^{(4)}(t_0) \sim f(t_0)/t_0^4$ , условие (3.4) принимает вид

$$f(t_0) \gg 1.$$

**Как ещё могут выглядеть интегралы, для которых работает метод перевала**

1.  $I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\ln g(t)} dt$ . Нужно, чтобы функция  $\ln g(t)$  имела резкий максимум.

2.  $I = \int_0^\infty e^{f(t)} dt$ , если  $|f''(t_0)| \gg 1/t_0^2$ . Тогда при  $t = 0$  экспонента сильно затухла, и можно распространить интегрирование до  $-\infty$ . См. рис. 3.4(a).
3.  $I = \int_{-\infty}^\infty g(t)e^{f(t)} dt$ , если  $g(t)$  медленно меняется вблизи  $t_0$  (см. рис. 3.4(b)). Тогда под интегралом можно заменить  $g(t) \mapsto g(t_0)$ .
4.  $I(x) = \int e^{x\tilde{f}(t)} dt$  при  $x \rightarrow \infty$ . Большое  $x$  делает резким любой максимум. Действительно, определим  $f(t) = x\tilde{f}(t)$ . Тогда

$$\frac{f^{(4)}(t_0)}{(f''(t_0))^2} = \frac{1}{x} \frac{\tilde{f}^{(4)}(t_0)}{(\tilde{f}''(t_0))^2} \ll 1 \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

В результате

$$I(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x|f''(t_0)|}} e^{x\tilde{f}(t_0)}.$$

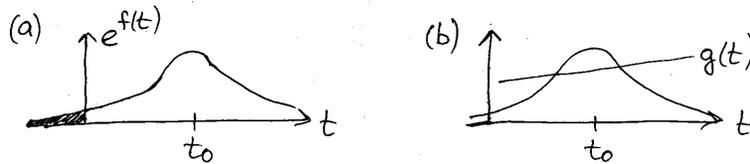


Рис. 3.4

## Гамма-функция и формула Стирлинга

В качестве примера применения метода перевала рассмотрим гамма-функцию

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt. \quad (3.5)$$

Будем рассматривать  $x \geq 0$ . Занеся экспоненту под дифференциал и интегрируя по частям, получаем рекуррентное соотношение

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (3.6)$$

При целых аргументах гамма-функция превращается в факториал. Действительно,  $\Gamma(1) = 1$ , а далее с помощью рекуррентного соотношения (3.6) при целых  $n$  получаем

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (3.7)$$

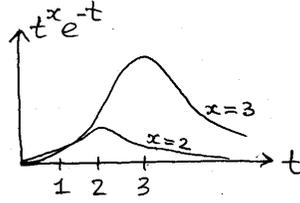


Рис. 3.5

Теперь рассмотрим гамма-функцию при произвольных  $x \gg 1$  с помощью метода перевала. В обозначениях формулы (3.1) получаем

$$f(t) = x \ln t - t. \quad (3.8)$$

У этой функции имеется максимум при  $t_0 = x$ , см. рис. 3.5. При этом

$$f(t_0) = x \ln x - x, \quad f''(t_0) = -\frac{1}{x}, \quad f^{(4)}(t_0) \sim \frac{1}{x^3}. \quad (3.9)$$

Можно считать, что

$$f''(t_0) \sim \frac{f(t_0)}{t_0^2}, \quad f^{(4)}(t_0) \sim \frac{f(t_0)}{t_0^4}, \quad (3.10)$$

т.к.  $\ln x$  — очень медленная функция порядка единицы. Таким образом, функция  $f(t)$  — однопараметрическая, и условие применимости метода перевала (3.4) даёт  $x \gg 1$ . Формула метода перевала (3.3) при этом даёт соотношение, известное как формула Стирлинга:

$$\Gamma(x+1) \approx \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x. \quad (3.11)$$

При целых значениях аргумента эта формула даёт приближение для факториала.

Существует элегантный способ получить поправку к формуле Стирлинга. Для этого запишем точный результат в виде

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x [1 + \varphi(x+1)] \quad (3.12)$$

— здесь мы просто закодировали отличие формулы Стирлинга от точного результата в функцию  $\varphi$ . Рекуррентное соотношение (3.6) приводит к точному соотношению

$$\frac{1 + \varphi(x+1)}{1 + \varphi(x)} = e^{1 + (x - \frac{1}{2}) \ln(1 - \frac{1}{x})}. \quad (3.13)$$

При  $x \gg 1$ , раскладывая правую часть по Тейлору, получаем примерно  $1 - 1/(12x^2)$ . При этом левая часть  $\approx 1 + \varphi(x+1) - \varphi(x)$ . В результате

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) \approx \varphi'(x) \approx -\frac{1}{12x^2} \implies \varphi(x) \approx \frac{1}{12x}. \quad (3.14)$$

В результате получаем формулу Стирлинга с поправкой:

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \left(\frac{x}{e}\right)^x \left[1 + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]. \quad (3.15)$$

Интересно, что формула с первой поправкой хорошо работает даже при небольших  $x$ : при  $x = 1$  получается 0,9990 вместо 1; при  $x = 2$  получается 1,9990 вместо 2.

## Суммирование рядов

Метод перевала может пригодиться при вычислении сумм рядов через посредство формулы Эйлера-Маклорена:

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]. \quad (3.16)$$

Здесь  $B_{2k}$  — числа Бернулли. Их можно определить рекуррентно:

$$B_0 = 1, \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n C_{n+1}^{k+1} B_{n-k}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.17)$$

Свойства: все числа Бернулли с нечётными номерами, кроме  $B_1$ , равны нулю, а знаки чисел Бернулли с чётными номерами чередуются. Если отбросить сумму с числами Бернулли, то оставшаяся часть формулы (3.16) имеет просто смысл приближённой формулы интегрирования методом трапеций. В сумму же входят производные — если они малы, то поправочный ряд мал. В то же время, интеграл при некоторых  $f(x)$  может быть вычислен методом перевала.

## 3.2 Семинар по теме «Метод перевала»

### Задача 1

Найти асимптотику интеграла

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$$

при  $n \gg 1$ .

**Решение**

Функция  $\sin x$  имеет максимум в точке  $\pi/2$ , то есть на границе промежутка интегрирования. При этом, по мере удаления от  $\pi/2$  подынтегральная функция убывает очень быстро. Действительно, например, в точке  $\pi/6$  ее значение равно  $2^{-n} \ll 1$ . Поэтому  $\pi/2$  — это острый максимум, а значит, приближенное вычисление можно выполнить методом перевала. Для этой цели необходимо привести выражение к стандартной для перевала форме. Чтобы сделать это, мы переписываем

$$\sin t = e^{\ln \sin t} \quad \rightarrow \quad I(n) = \int_0^{\pi/2} e^{n \ln \sin t} dt$$

Разложим теперь выражение в экспоненте вблизи  $\pi/2$  по формуле Тейлора вплоть до второго порядка. Пропустив это, получаем

$$I(n) \simeq \int_0^{\pi/2} e^{n \ln(1-(t-\pi/2)^2/2+\dots)} dt \simeq \int_0^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt$$

Видно, что мы практически получили Гауссов интеграл. Однако, здесь имеется два тонкости.

1. Характерным масштаб затухания подынтегральной функции по мере удаления от  $\pi/2$  определяется из условия  $n\Delta t^2 \sim 1$ , то есть  $\Delta t \sim n^{-1/2} \ll 1$ . Это означает, что *нижний* предел интегрирования можно заменить на  $-\infty$ , ведь он находится на расстоянии  $\sim 1 \gg n^{-1/2}$  от перевальной точки, и к существенным искажениям ответа такая замена не приведет.
2. С *верхним* пределом ситуация обстоит иначе. Дело в том, что он попадает в точности на максимум подынтегральной функции. Это приводит к тому, что от полного Гауссова интеграла нужно взять только половину, ведь вторая половина расположена в области  $t > \pi/2$ , по которой интегрирование не производится.

В результате получаем

$$I(n) \simeq \int_{-\infty}^{\pi/2} e^{-n(t-\pi/2)^2/2+\dots} dt = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

**Задача 2**

Найти поведение интеграла при  $a \gg 1$

$$I(a, x) = \int_0^x \exp(a \sin t) dt$$

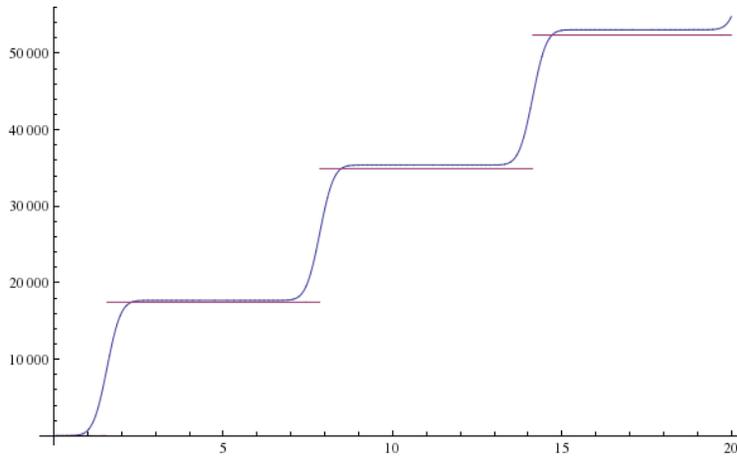
## Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением  $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами:  $f''(t) = -a \sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$ ; поэтому локальные максимумы - лишь точки  $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2\right) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения  $x$ , в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому  $x$  будет достигать  $t_{2n}$ , функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой “лесенку”; ширина переходов между ступеньками по порядку равна  $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$ .

Рис. 3.6:  $I(a, x)$  и асимптотика



Важно однако отметить, что реальное значение интеграла такой функции по периоду отличается от аппроксимации, полученной методом перевала. При больших  $x$ , когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Этой погрешностью можно пренебречь при  $x \lesssim a$ , поскольку погрешность от каждой перевальной точки - порядка  $\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a \cdot O\left(\frac{1}{a}\right)$ .

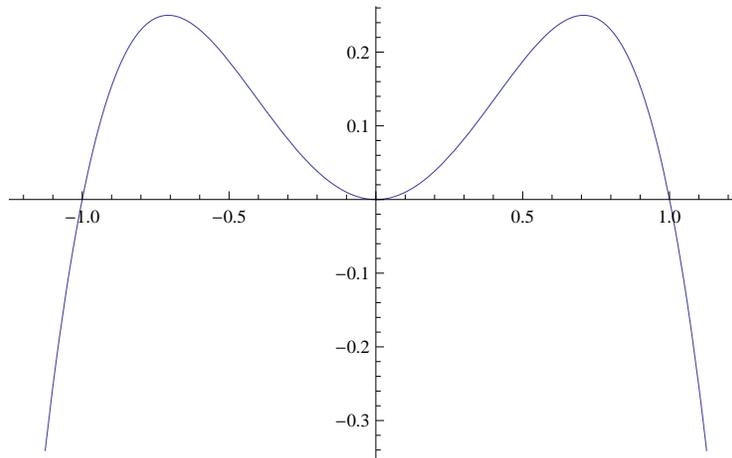
## Задача 3 (несколько перевалов)

Найти асимптотическое поведение интеграла при  $A \gg 1$

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4 - x^2)) dx$$

**Решение**

Рис. 3.7:  $y = x^2 - x^4$



Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

$$f(x_{1,2}) = -A \left( \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 - \left( \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right) \frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_1)^2\right) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x - x_2)^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}} e^{A/4}$$

**Задача 4 (перевал  $x^4$ )**

Найти асимптотическое поведение интеграла при  $A \gg 1$ :

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right) dx$$

**Решение**

Поскольку функция  $\cosh x$  вблизи нуля раскладывается как  $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots$ , то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок  $x^4$ . Поэтому, следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(1 + \frac{x^4}{24}\right)\right) dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой  $t = \frac{A}{24}x^4$ , сводящей его к гамма-функции:

$$I(A) \approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \int_0^{\infty} t^{-3/4} e^{-t} dt = \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) e^{-A}$$

Здесь  $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$  — просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы ( $\pi$ ,  $e$ ,  $C$ ,  $\dots$ ); однако это и не требуется.

**Приложение: метод перевала как пример асимптотического разложения**

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda f(x)}$$

при  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Пусть функция  $f(x)$  имеет на всей области интегрирования ровно одну перевальную точку  $x_0$ . Кроме того, пусть вблизи  $x_0$  функция  $f(x)$  аналитична (т.е. представляется в виде суммы бесконечного ряда Тейлора - например, функция  $\sqrt{x}$  таким свойством при  $x_0 = 0$  не обладает) и  $f''(x_0) \neq 0$ . Выполним замену переменной:

$$f(x) - f(x_0) = s^2$$

**Утверждение**

Из аналитичности  $f(x)$  и  $f''(x_0) \neq 0$  следует, что  $x(s)$  - тоже аналитична.

**Доказательство**

Из аналитичности функции  $f(x)$  получаем:

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = s^2$$

Первая производная отсутствует в силу того, что  $x_0$  - перевальная точка. Выражая  $s$  и выбирая правильный знак (такой, чтобы исходный интеграл был положительным), получаем:

$$s = (x - x_0) \sqrt{a_2 + a_3(x - x_0) + \dots} = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n (x - x_0)^n \quad (3.18)$$

Полученный ряд можно обратить и получить ряд для функции  $x(s)$ . Действительно, подставляя разложение

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k$$

в (3.18), получаем:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \left( \sum_{k=1}^{\infty} c_k s^k \right)^n$$

Отсюда, путём последовательного приравнивания степеней  $s$  в левой и правой частях, можно определить коэффициенты  $c_k$ . Для  $c_1$  и  $c_2$  получаются следующие соотношения:

$$1 = a'_1 c_1$$

$$0 = a'_1 c_2 + a'_2 c_1^2$$

**Утверждение** можно считать доказанным (разумеется, на физическом уровне строгости).

Исходный интеграл переписывается в виде:

$$e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \int dt e^{-t^2} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{c'_k}{\lambda^{k/2}} \sim \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c'_{2k}}{\lambda^k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

Здесь следует пояснить несколько моментов. Во-первых, случилось переобозначение коэффициентов  $c_k$ :

$$\frac{dx}{ds} = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k s^k = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k s^{k-1}$$

Что более важно, в последнем переходе фигурирует значок  $\sim$ . Его следует понимать так:

$$e^{-\lambda f(x_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda s^2} \frac{dx(s)}{ds} ds = \frac{e^{-\lambda f(x_0)}}{\sqrt{\lambda}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_{2k}'}{\lambda^k} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$$

Здесь мы имеем дело с асимптотическим рядом. В силу того, что  $\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)$  при больших  $k$  растёт факториально, формальная сумма по  $k$  до  $\infty$  расходится. Однако, правая часть остаётся конечной в силу наличия остаточного члена, у которого тоже есть факториально растущий с  $N$  коэффициент. Формально это  $O\left(\frac{1}{\lambda^N}\right)$  получается, если написать  $x(s) - x_0 = \sum_{k=1}^{N-1} c_k s^k + \frac{1}{N!} x^{(N)}(s_1) s^N$  (формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (здесь  $s_1 \in [0; s]$ )), продифференцировать по  $s$  и подставить в интеграл.

Итак, мы выяснили, что метод перевала является одним из примеров асимптотического разложения и указали явный способ получения поправок к методу перевала.

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при  $\lambda \rightarrow +\infty$ :

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{\lambda}{\cosh^2 x}\right) dx.$$

### Упражнение 2

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при  $\lambda \rightarrow +\infty$ :

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(x-1)^2(x-2)^2} dx.$$

### Упражнение 3

Методом перевала приближенно вычислите интеграл при  $\lambda \rightarrow +\infty$ :

$$I(\lambda) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\lambda dx.$$

### Упражнение 4

Используя идеи, аналогичные методу перевала, в пределе  $\lambda \rightarrow +\infty$  вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_0^1 \exp(\lambda(\sin x - x)).$$

*Обратите внимание:* в перевальной точке вторая производная функции в показателе экспоненты равна 0.

**Задача 1**

В пределе  $\lambda \rightarrow +\infty$  вычислите интеграл

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cosh^\lambda x dx.$$

**Задача 2**

Рассмотрите интеграл с тремя параметрами:

$$I(\lambda, \epsilon, s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-\epsilon x} \exp(-\lambda(1 - \cos x)) dx.$$

Вычислите его в пределе  $\epsilon \ll 1$ ,  $\lambda \gg 1$ , считая, что  $s$  - произвольное число порядка 1.

## Глава 4

# Определенные интегралы, зависящие от параметра

### 4.1 Лекция (И.С. Бурмистров)

На этом занятии рассматриваются различные примеры вычисления интегралов с помощью метода дифференцирования и интегрирования по параметру, от которого зависит подынтегральное выражение. Также рассматривается вычисление расходящихся несобственных интегралов с помощью различных способов регуляризации (размерная регуляризация, регуляризация Паули-Вилларса).

Метод вычисления и оценки интегралов, зависящих от параметра, основан на следующих соотношениях:

$$I(\lambda) = \int_a^b f(x, \lambda) dx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{dI(\lambda)}{d\lambda} = \int_a^b \frac{\partial f(x, \lambda)}{\partial \lambda} dx \\ \int_\alpha^\beta I(\lambda) d\lambda = \int_a^b \left( \int_\alpha^\beta f(x, \lambda) d\lambda \right) dx \end{cases} \quad (4.1)$$

### Гамма-функция и факториал

Рассмотрим следующий интеграл

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t} dt, \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

определённый для всех натуральных  $p$ . Заметим, что  $\Gamma(1) = 1$ . Определим функцию

$$f(p, \lambda) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-\lambda t} dt. \quad (4.3)$$

Дифференцируя обе стороны равенства (4.3) по параметру  $\lambda$ , находим, что

$$\frac{\partial f(p, \lambda)}{\partial \lambda} = -f(p+1, \lambda). \quad (4.4)$$

С другой стороны, замена переменной интегрирования с  $t \rightarrow t/\lambda$ , приводит к следующей связи между  $f(p, \lambda)$  и  $\Gamma(p)$ :

$$f(p, \lambda) = \lambda^{-p} \Gamma(p). \quad (4.5)$$

Подставляя выражение (4.5) в уравнение (4.4), находим

$$\Gamma(p+1) = p \Gamma(p) \quad (4.6)$$

отсюда

$$\Gamma(p+1) = p! \Gamma(1) \equiv p! \quad (4.7)$$

Заметим, что в определении  $\Gamma(p)$  через интеграл (4.2), значения  $p$ , вообще говоря, не обязаны быть натуральными числами. Функция  $\Gamma(p)$  называется гамма-функцией.

## Гауссов интеграл и гамма-функция от полуцелого аргумента

Рассмотрим интеграл

$$f(p, \lambda) = \int_0^{\infty} t^{2p} e^{-\lambda t^2} dt. \quad (4.8)$$

Дифференцируя обе части выражения (4.8) по  $\lambda$ , находим

$$\frac{df(p, \lambda)}{d\lambda} = -f(p+1, \lambda). \quad (4.9)$$

С другой стороны, с помощью замены переменной  $t \rightarrow t/\sqrt{\lambda}$ , получаем, что

$$f(p, \lambda) = \lambda^{-p-1/2} f(p, 1). \quad (4.10)$$

Подставляя выражение (4.10) в уравнение (4.9), находим рекуррентное соотношение

$$f(p+1, 1) = \left(p + \frac{1}{2}\right) f(p, 1). \quad (4.11)$$

Отсюда,

$$f(p, 1) = f(0, 1) \prod_{k=0}^{p-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) = f(0, 1) \frac{\Gamma(p + 1/2)}{\Gamma(1/2)} \quad (4.12)$$

Таким образом, гауссов интеграл (4.8) выражается через гамму-функцию от полуцелого аргумента. Заметим, что

$$f(0, 1) = \Gamma(1/2) / 2 = \sqrt{\pi}/2, \quad (4.13)$$

откуда

$$f(p, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^{-p-1/2} \Gamma(p + 1/2). \quad (4.14)$$

Напомним, что ответ (4.13) может быть получен следующим способом

$$[f(0, 1)]^2 = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+y^2} dx dy = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\phi = \frac{\pi}{4}$$

## Интегральное представление логарифма

Рассмотрим функцию

$$L(\lambda) = \int_0^{\infty} [e^{-t} - e^{-\lambda t}] \frac{dt}{t} \quad (4.15)$$

Продифференцируем обе части равенства (4.15) по  $\lambda$ :

$$\frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (4.16)$$

Учитывая, что  $L(1) = 0$ , и интегрируя выражение (4.16) по  $\lambda$ , находим

$$L(\lambda) = \ln \lambda \quad (4.17)$$

- В чём состоит ошибка в следующей цепочке равенств?

$$L(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{dt}{t} = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} - \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t} = 0$$

## Интеграл от экспоненциальной и тригонометрической функции

Рассмотрим интеграл

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sin t \, dt \quad (4.18)$$

Дифференцируя обе части выражения (4.18) по  $\lambda$ , находим

$$f''(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^2 \sin t \, dt \quad (4.19)$$

С другой стороны, интегрируя два раза по частям, получаем

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^2 \sin t \, dt = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} [2 - 4\lambda t + \lambda^2 t^2] \sin t \, dt = -2f(\lambda) - 4\lambda f'(\lambda) - \lambda^2 f''(\lambda) \quad (4.20)$$

Сравнивая выражения (4.19) и (4.20), находим, что  $f(\lambda)$  должна удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$(1 + \lambda^2)f'' + 4\lambda f' + 2f = 0, \quad (4.21)$$

которое элементарно решается

$$[(1 + \lambda^2)f(\lambda)]'' = 0 \quad \implies f(\lambda) = \frac{C_1\lambda + C_2}{1 + \lambda^2}. \quad (4.22)$$

Здесь  $C_1$  и  $C_2$  две произвольные константы интегрирования. Их значения можно найти, вычисляя асимптотику функции  $f(\lambda)$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ :

$$f(\lambda) = \lambda^{-1} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin(t/\lambda) \, dt \approx \lambda^{-2} \int_0^{\infty} e^{-t} t \, dt = \frac{\Gamma(2)}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4.23)$$

Отсюда видно, что  $C_1 = 0$  и  $C_2 = 1$ . Таким образом,

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \sin t \, dt = \frac{1}{1 + \lambda^2} \quad (4.24)$$

Заметим, что ответ (4.24) может быть получен другим способом:

$$f(\lambda) = \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t + it} \, dt = \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - i} = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

Проинтегрируем выражение (4.24) по  $\lambda$  от  $a$  до  $\infty$ :

$$\int_0^{\infty} \left( \int_a^{\infty} e^{-\lambda t} d\lambda \right) \sin t dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt = \int_a^{\infty} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan a \quad (4.25)$$

Отсюда в пределе  $a \rightarrow 0$  получаем ответ для известного интеграла:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \quad (4.26)$$

## Еще один интеграл от экспоненциальной и тригонометрической функции

Рассмотрим интеграл

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+\delta)t^2} \operatorname{erfi}(t) e^{i\lambda t} dt, \quad (4.27)$$

где  $\delta > 0$  и функция  $\operatorname{erfi}(t)$  связана с функцией ошибок и определена как:

$$\operatorname{erfi}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{t^2} dt. \quad (4.28)$$

Перепишем интеграл в уравнении (4.27) следующим образом:

$$f(\lambda) = 2i \int_0^{\infty} e^{-(1+\delta)t^2} \operatorname{erfi}(t) \sin(\lambda t) dt = \frac{2i}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-(1+\delta)t^2/\lambda^2} \operatorname{erfi}(t/\lambda) \sin(t) dt, \quad (4.29)$$

Отсюда, дифференцируя по параметру, находим

$$(\lambda f)' = -2(1 + \delta) f'' + \frac{4i}{\sqrt{\pi}} g', \quad g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t^2} \cos(\lambda t) dt \quad (4.30)$$

Далее получаем, что

$$\lambda f(\lambda) + 2f'(\lambda) = \frac{4i}{\sqrt{\pi}} g(\lambda) \quad (4.31)$$

Можно показать что  $g(\lambda) = \sqrt{\pi/(4\delta)} \exp(-\lambda^2/(4\delta))$ . Отсюда, используя, что  $f(0) = 0$ , находим

$$f(\lambda) = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sqrt{1+\delta}} \operatorname{erf} \left( \frac{\lambda}{2\sqrt{\delta(1+\delta)}} \right) e^{-\lambda^2/[4(1+\delta)]}, \quad (4.32)$$

где функция ошибок

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (4.33)$$

## Интеграл от функции Бесселя

Рассмотрим интеграл

$$f(h) = \int_0^{\infty} dx \min\{x, h\} [J_2(x) - J_0(x)], \quad (4.34)$$

где  $J_\nu(x)$  — функция Бесселя, определяемая, например, рядом

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)}. \quad (4.35)$$

Продифференцируем функцию  $f(h)$  два раза по  $h$ :

$$f'(h) = \int_0^h dx [J_2(x) - J_0(x)], \quad f''(h) = J_2(h) - J_0(h). \quad (4.36)$$

Будем искать решение дифференциального уравнения в виде ряда:

$$f(h) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h^{2k}. \quad (4.37)$$

Тогда, получим следующее соотношение на коэффициенты  $c_k$ :

$$c_{k+1} = -\frac{2}{2^{2(k+1)} \Gamma^2(k+2)}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (4.38)$$

Отсюда,

$$f(h) = c + 2J_0(h). \quad (4.39)$$

Так как, при  $h = 0$ ,  $f(h) = 0$ , получаем, что  $c = -2$ . Таким образом,

$$f(h) = 2J_0(h) - 2. \quad (4.40)$$

## Логарифмически расходящийся интеграл. Размерная регуляризация

Рассмотрим интеграл

$$f(h) = \int_0^{\infty} \frac{p}{p^2 + h^2} dp \quad (4.41)$$

Делая замену переменных  $p \rightarrow \sqrt{x}$ , находим, что регуляризованный с помощью обрезки интеграл (4.41) равен

$$f(h, L) = \int_0^L \frac{p}{p^2 + h^2} dp = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{L^2}{h^2} \right), \quad (4.42)$$

т.е.  $f(h)$  логарифмически расходится на верхнем пределе. Заметим, что в пределе  $L \rightarrow \infty$  получаем, что

$$f(h, L) = \ln L - \ln h + \bar{o}(1). \quad (4.43)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$f(h, \epsilon) = \int_0^\infty \frac{p^{1-\epsilon}}{p^2 + h^2} dp, \quad (4.44)$$

При всех  $\epsilon > 0$  этот несобственный интеграл сходится. Найдем его поведение при  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Во-первых, заметим, что  $f(h, \epsilon) = h^{-\epsilon} f(1, \epsilon)$ . С другой стороны, дифференцируя обе части выражения (4.44) по  $h$ , находим

$$\frac{\partial f(h, \epsilon)}{\partial h} = -2h \int_0^\infty \frac{p^{1-\epsilon}}{(p^2 + h^2)^2} dp, \quad \implies \quad \epsilon f(1, \epsilon) = -2 \int_0^\infty \frac{p^{1-\epsilon}}{(p^2 + 1)^2} dp, \quad (4.45)$$

Интеграл в правой части выражения (4.45) сходится при  $\epsilon = 0$ , поэтому в пределе  $\epsilon \rightarrow 0^+$  находим

$$\epsilon f(1, \epsilon) \approx 2 \int_0^\infty \frac{p}{(p^2 + 1)^2} dp = 1 \quad (4.46)$$

Отсюда получаем, что

$$f(1, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \quad (4.47)$$

и, наконец,

$$f(h, \epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \ln h + \bar{o}(1) \quad (4.48)$$

Заметим, что интеграл (4.44) может быть вычислен точно:

$$f(h, \epsilon) = h^{-\epsilon} \int_0^\infty \int_0^\infty p^{1-\epsilon} e^{-tp^2-t} dp dt = \frac{1}{2} h^{-\epsilon} \int_0^\infty e^{-t} t^{\epsilon/2-1} dt \int_0^\infty u^{-\epsilon/2} e^{-u} du = \frac{1}{2} h^{-\epsilon} \Gamma(\epsilon/2) \Gamma(1 - \epsilon/2) = \frac{h^{-\epsilon}}{\epsilon} \Gamma(1 + \epsilon/2) \Gamma(1 - \epsilon/2)$$

Регуляризация (4.44) называется размерной, т. к.  $f(h)$  может быть записано в виде двумерного интеграла:

$$f(h) = \frac{1}{S_2} \int_0^\infty \frac{S_2 p dp}{p^2 + h^2} = \frac{1}{S_2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp_x dp_y}{p_x^2 + p_y^2 + h^2} \equiv \frac{1}{S_2} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{\mathbf{p}^2 + h^2}$$

Здесь  $S_2 = 2\pi$  — площадь двумерной единичной сферы, т.е. окружности единичного радиуса. По аналогии

$$f(h, \epsilon) = \frac{1}{S_D} \int \frac{d^D \mathbf{p}}{p^2 + h^2},$$

где размерность  $D = 2 - \epsilon$ .

## Логарифмически расходящийся интеграл. Регуляризация Паули-Вилларса

Рассмотрим интеграл

$$f(h, L, M) = \sum_{f=0}^K e_f \int_0^L \frac{p}{p^2 + h^2 + M_f^2} dp, \quad (4.49)$$

где  $e_0 = 1$ ,  $M_0 = 0$ , и для  $1 \leq f \leq K$  выполняются соотношения  $L \gg M_f \gg 1$ . Выбор величин  $e_f$  с  $1 \leq f \leq K$  и значение  $K$  будет сделано ниже. Интегрируя по  $p$ , находим

$$f(h, L, M) = \frac{1}{2} \sum_{f=0}^K e_f \ln \frac{L^2 + h^2 + M_f^2}{h^2 + M_f^2} \approx \ln L \sum_{f=0}^K e_f - \ln h - \sum_{f=1}^K e_f \ln M_f + \bar{o}(1) \quad (4.50)$$

Как видно для того, чтобы убрать зависимость от  $L$  в правой части выражения (4.50) достаточно выбрать  $K = 1$  и  $e_1 = -1$ ,  $M_1 = M$ , тогда

$$\lim_{L \rightarrow \infty} f(h, L, M) = \ln M - \ln h + \bar{o}(1) \quad (4.51)$$

Регуляризация Паули-Вилларса наиболее удобна, когда необходимо выделить логарифмически расходящийся член в интеграле, который расходится сильнее чем логарифмически. Например, рассмотрим интеграл

$$g(h) = \int_0^{\infty} \frac{p^3}{p^2 + h^2} dp, \quad (4.52)$$

$$g(h, L, M) = \sum_{f=0}^K e_f \int_0^L \frac{p^3}{p^2 + h^2 + M_f^2} dp, \quad (4.53)$$

Интегрируя по  $p$ , находим

$$g(h, L, M) = \frac{1}{2} \sum_{f=0}^K e_f \left( L^2 - (h^2 + M_f^2) \ln \frac{L^2 + h^2 + M_f^2}{h^2 + M_f^2} \right) \approx \frac{1}{2} (L^2 - 2h^2 \ln L) \sum_{f=0}^K e_f - \ln L \sum_{f=0}^K e_f M_f^2 + h^2 \ln h + h^2 \sum_{f=1}^K e_f \ln M_f + \sum_{f=1}^K e_f M_f^2 \ln M_f + \frac{1}{2} h^2 \sum_{f=1}^K e_f + \bar{o}(1) \quad (4.54)$$

Для того, чтобы сократить все расходимости кроме логарифмической достаточно выбрать  $K = 3$ , и наложить следующие условия:

$$\sum_{f=1}^3 e_f = -1, \quad \sum_{f=1}^3 e_f M_f^2 = 0, \quad \sum_{f=1}^3 e_f M_f^2 \ln M_f = 0 \quad (4.55)$$

Решая уравнения (4.55), найдём, что

$$e_1 = -\frac{M_2^2 M_3^2 \ln \frac{M_3}{M_2}}{M_1^2 M_2^2 \ln \frac{M_2}{M_1} + M_2^2 M_3^2 \ln \frac{M_3}{M_2} + M_3^2 M_1^2 \ln \frac{M_1}{M_3}} \quad (4.56)$$

и аналогично для  $e_2$  и  $e_3$ . Заметим, что если выбрать, массы  $M_j = c_j M$ , тогда  $e_j$  не будут зависеть от  $M$ . Если потребовать, что  $\sum_{f=1}^K e_f \ln M_f = -\ln M$ , то найдем

$$g(h, L, M) = -h^2 \ln M - h^2/2 + \bar{o}(1) \quad (4.57)$$

- Найти явный вид коэффициентов  $c_j$ .

## 4.2 Семинар по теме «Интегралы, берущиеся точно»

### Бета-функция Эйлера

Порой приходится иметь дело с интегралами вида:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt$$

или интегралами, которые сводятся к интегралам такого вида подстановкой. Это — так называемый бета-интеграл Эйлера или просто бета-функция. Этот интеграл удобно выражается через  $\Gamma(z)$  - гамма-функцию Эйлера, значения и свойства которой уже хорошо известны из предыдущих семинаров; это позволяет просто получать значения этого интеграла при различных значениях параметров:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Добавим еще одно полезное свойство гамма-функции (приводим без доказательства):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

**Задача 1 (интегральные представления и подстановки)**

Вычислим интеграл Френеля:

$$I = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx$$

**Решение**

Перейдем к переменной интегрирования  $t = x^2$ . Получим:

$$I = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

Следующий шаг нетривиален. Для взятия этого интеграла удобно воспользоваться “интегральным представлением функции  $1/\sqrt{t}$ ”. Такие интегральные представления - часто используемый приём, позволяющий брать определённые интегралы; в данном случае в роли этого интегрального представления будет интеграл Гаусса:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-tx^2} dx \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} dx e^{-tx^2} \cos t$$

Теперь возьмем интеграл по  $t$ , обозначив подынтегральную функцию как  $J(x^2)$ . Тогда:

$$J(a) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos t dt = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-at+it} dt = \operatorname{Re} \frac{1}{a-i} = \frac{a}{a^2+1}$$

Тем самым, получаем следующий интеграл:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Приведём два способа взятия этого интеграла.

**“Правильный” способ** Получившийся интеграл является интегралом от дробно-рациональной функцией и его можно взять стандартным методом разбиения на элементарные дроби. Он довольно громоздкий, поэтому приведём тут метод, позволяющий вычислить интеграл проще. Сделав замену  $x = \frac{1}{t}$ , заметим следующее:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^0 \left( -\frac{dt}{t^2} \right) \frac{1/t^2}{1+1/t^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^4} dt$$

Беря полусумму двух представлений для интеграла  $I$ , получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Теперь можно перейти к стандартной переменной для интегрирования симметрических многочленов  $t = x - \frac{1}{x}$ ; при этом  $dt = (1 + \frac{1}{x^2}) dx$ , получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**“Главный” способ** Очень полезно научиться сводить такие интегралы к  $B$ -функции, о которой было рассказано выше. Перейдем в этом интеграле к переменной  $t = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow x = (\frac{1-t}{t})^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4} (\frac{1-t}{t})^{-3/4} (-\frac{dt}{t^2})$ . Имеем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} \cdot t \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 t^{-3/4} (1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Используя приведенные выше свойства бета- и гамма-функций, получаем:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

**Замечание** Заметим, что этот же ответ можно было получить гораздо проще, используя трюк с комплексными переменными и комплексным интегралом Гаусса. Нужно лишь обратить внимание на тонкость, связанную с тем, что  $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$ , и необходимо выбрать правильный знак:

$$I = \int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sqrt{\frac{\pi}{-i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{Re} e^{i\pi/4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

## Задача 2 (дифференцирование и интегрирование по параметру)

Возьмём интеграл:

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$$

**Решение**

Заметим, что без логарифма интеграл легко считается. Если мы продифференцируем интеграл по  $\alpha$ , то логарифм заменится на дробь, а интегралы с дробями считать легче:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} dx$$

Пусть  $\alpha \neq \beta$ , тогда верно разложение:

$$\frac{1}{(\beta^2 + x^2)(\alpha^2 + x^2)} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \right)$$

и каждый полученный интеграл легко считается:

$$\frac{\partial I(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 2\alpha \int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{\beta^2 + x^2} - \frac{1}{\alpha^2 + x^2} \right) dx = \frac{2\alpha}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{(\alpha + \beta)\beta}$$

На самом деле, при  $\alpha = \beta$ , эта формула тоже верна:

$$\int_0^{\infty} \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + x^2)^2} \cdot dx = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + x^2} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^2}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение по  $\alpha$ :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta) + C(\beta)$$

Тут “постоянная”  $C(\beta)$  - произвольная функция, которая не зависит от  $\alpha$ . Чтобы найти её подставим в исходный интеграл  $\alpha = 0$ :

$$I(0, \beta) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = \beta t \\ dx = \beta dt \end{array} \right| = 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln t + \ln \beta}{\beta(1 + t^2)} dt = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt$$

Последний интеграл равен нулю, это просто показать сделав замену  $t = e^z$ :

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1 + t^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{1 + e^{2z}} e^z dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{e^{-z} + e^z} dz = 0$$

Итого  $I(0, \beta) = \frac{\pi \ln \beta}{\beta} \Rightarrow C(\beta) \equiv 0$ . Стоит заметить, что в решении мы неявно пользовались тем, что  $\alpha, \beta > 0$ ; но поскольку исходный интеграл очевидным образом не чувствителен к изменению их знака, то ответ в общем виде записывается как:

$$I(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|)$$

### Задача 3 (составление дифференциальных уравнений)

Вычислим интегралы Лапласа:

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$$

$$I_2(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(\omega x)}{x^2 + a^2} dx$$

#### Решение

Обезразмерим интеграл, перейдя к переменной интегрирования  $x = at$  и введя “безразмерный” параметр  $\alpha = \omega a$ ; для определенности далее будем считать, что  $\alpha > 0$ . Получим:

$$I_1(a, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{a} = \frac{1}{a} J(\alpha)$$

Возьмем производную  $J(\alpha)$  по  $\alpha$ :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + 1} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \alpha x}{x^2 + 1} dx$$

Получившийся интеграл сходится, однако производная от него уже расходится. В таком случае используем такой трюк:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(\alpha) = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \sin \alpha x}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[ 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \right] \frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\pi + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x}$$

Тут мы воспользовались табличным значением интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$ . Теперь можно вычислять вторую производную, так как получающийся интеграл сходится:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} J(\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x^2 + 1} \cdot \frac{dx}{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{x^2 + a^2} \cdot dx = J(\alpha)$$

Мы получили замкнутое дифференциальное уравнение на функцию  $J(\alpha)$ . Это уравнение линейно и его коэффициенты постоянны, поэтому оно решается с помощью подстановки  $J(\alpha) = e^{\lambda \alpha}$ . Такая подстановка приводит к алгебраическому уравнению на  $\lambda$ :  $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$  и, следовательно, общее решение уравнения записывается как:

$$J(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}$$

Константа  $C_1$  должна быть положена равной нулю. Это связано с тем, что исходный интеграл, очевидно, ограничен:  $|J(\alpha)| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx \right| = \pi$ . Константу  $C_2$  можно найти из значения интеграла при  $\alpha = 0 \Rightarrow J(0) = \pi$ . Значит, наш интеграл записывается как:

$$J(\alpha) = \pi e^{-\alpha}$$

Ответ был получен в предположении  $\alpha > 0$ . Поскольку исходный интеграл зависит лишь от модулей параметров  $a$  и  $\omega$ , то ответ в общем виде записывается как:

$$I_1(a, \omega) = \frac{\pi}{|a|} e^{-|a\omega|}$$

Кроме того, заметим, что:

$$I_2(a, \omega) = -\frac{\partial}{\partial \omega} I_1(a, \omega) = \pi e^{-|\alpha\omega|} \text{sign} \omega$$

#### Задача 4 (экспоненциальная регуляризация)

Используя экспоненциальную регуляризацию, найти “сумму” ряда из натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

**Указание** Суть экспоненциальной регуляризации сводится к домножению на  $e^{-\varepsilon n}$  и рассмотрению поведения функции при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### Решение

Нам необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}$$

Этот ряд можно представить как производную по  $\varepsilon$  от геометрической прогрессии:

$$S(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} = -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \frac{e^{-\varepsilon}}{1 - e^{-\varepsilon}} = \frac{e^{\varepsilon}}{(e^{\varepsilon} - 1)^2}.$$

А теперь разложимся по  $\varepsilon$ , чтобы взять предел  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
S(\varepsilon) &= \left( \frac{1}{1 + \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{6}\varepsilon^3 - 1 + o(\varepsilon^3)} \right)^2 \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{6} + o(\varepsilon^2) \right)^{-2} \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \left( 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{3\varepsilon^2}{4} + o(\varepsilon^2) \right) \left( 1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2) \right) = \frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{12} + o(1)
\end{aligned}$$

**Замечание** Дзета-функция Римана при  $\operatorname{Re} z > 1$  определяется как сумма ряда  $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ . Используя экспоненциальную регуляризацию, мы, на самом деле, получили значение  $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ . Эту функцию можно доопределить (единственным образом) и для  $\operatorname{Re} z < 1$  так, чтобы полученная функция получилась аналитической (то есть имела все производные вплоть до бесконечного порядка везде, кроме некоторого набора особых точек); и значение в  $z = -1$  получено именно в смысле аналитического продолжения. Этот результат означает, что (в определенном смысле) сумма всех натуральных чисел равна  $-\frac{1}{12}$ .

### \*Приложение: 1D эффект Казимира

Эта задача призвана прояснить физический смысл процедуры регуляризации.

Рассмотрим металлические пластины, находящиеся на расстоянии  $a \gg r$  друг от друга в вакууме (здесь  $r$  - радиус пластин). Согласно представлениям квантовой электродинамики, вакуум - набор квантов электромагнитного поля (фотонов), находящихся в состоянии наименьшей энергии. Однако, из-за «квантовости» фотонов их минимальная энергия не 0, а определяется формулой  $E_k = \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \frac{1}{2}\hbar ck$ ,  $k$ -волновое число. К сожалению, в полной мере обсудить её происхождение на уровне 1 курса невозможно (её можно понимать как следствие соотношения неопределённости Гейзенберга на координату и импульс). Из-за наличия такого «моря» фотонов по разные стороны от пластин возникает сила взаимодействия между пластинами (как разность давлений справа и слева). Необходимо найти её.

### Решение

Вычислим энергию данной системы, а затем и силу взаимодействия по формуле:  $F = -\partial E/\partial a$ . Как было отмечено выше, энергия фотона есть  $E_k = \frac{1}{2}\hbar\omega_k = \frac{1}{2}\hbar ck$ .

Полная энергия (в пространстве между двумя пластинами, т.е. в цилиндре радиуса  $r$  и длины  $a$ ) равна:

$$E = \sum_{k,\alpha} \frac{1}{2} \hbar \omega_{k,\alpha} = \frac{\hbar c}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{a}$$

Здесь  $\alpha$  - индекс, нумерующий поляризации фотонов (их всего 2, отсюда и дополнительная двойка). Волновое число  $k$  стало дискретным из-за того, что в металле электрическое поле равно нулю - на самих пластинах поле зануляется.

Полученная сумма расходится. Что это может означать? Определённо, что-то пошло не так. Стандартная интерпретация этого явления такова: имеющаяся у нас теория применима только для малых энергий, а что происходит на больших, мы не понимаем. На самом деле физическая величина должна быть конечной. Это значит, что «правильная» энергия должна вычисляться по формуле:

$$E = \frac{\hbar c}{2} 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\pi}{a} f(n)$$

Здесь  $f(n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а на не очень больших  $n$   $f(n) \approx 1$ . Казалось бы, в таком виде ничего посчитать нельзя - нам важно знать явный вид  $f(n)$ . Однако, можно рассмотреть разницу энергий в данном объёме чистого вакуума и вакуума с пластинами. Найдём энергию вакуума в данном объёме. Чистый вакуум эквивалентен бесконечно удалённым пластинам, и в выражении для энергии сумма заменится на интеграл:

$$\sum_k f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{\pi a}{a \pi} = \frac{a}{\pi} \sum_k f(k) \Delta k = \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} dk f(k) = a \int \frac{dk}{2\pi} f(k)$$

В последнем переходе использовано свойство изотропии  $f$  (зависимость только от энергии, но не от направления импульса). Для энергии вакуума получаем:

$$E_{vac} = \frac{\hbar c}{2} 2a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} f(k) k = \frac{\hbar c}{2} 2 \int_0^{\infty} \frac{n\pi}{a} f(n) dn$$

Здесь  $k = \frac{\pi n}{a}$ . Теперь вычислим разность энергий:

$$\Delta E = \frac{\hbar c \pi}{a} \left( \sum_{n=0}^{\infty} n f(n) - \int_0^{\infty} dn n f(n) \right)$$

Вспомним формулу Эйлера-Пуассона (была на лекции Я.В.Фоминова про метод перевала):

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) = \int_0^{\infty} n f(n) dn - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (n f(n))^{(2k-1)} \Big|_{n=0}$$

Здесь  $B_{2k}$  - числа Бернулли. В частности,  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ . Из физических предположений разумно потребовать, чтобы  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) \approx 0$ , и так же для остальных производных (т.е. для малых энергий наша теория работает хорошо). Тогда получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n f(n) - \int_0^{\infty} dn n f(n) = -\frac{1}{12}$$

Таким образом, от функции  $f$  ответ не зависит. За это и ведётся борьба при регуляризации - за «обрезание незнания» при больших импульсах. Другими словами, мы хотим выразить ответ только через характеристики системы при малых энергиях. Заметим, что та же  $-1/12$  была получена в задаче 4 из экспоненциальной регуляризации (там была явно задана  $f(n) = e^{-\varepsilon n}$ ).

Итак, была получена формула для  $\Delta E$ :

$$\Delta E = -\frac{1}{12} \frac{\pi \hbar c}{a}$$

Дифференцируя, находим ответ:

$$F = -\frac{\hbar \pi c}{12a^2}$$

Знак минус соответствует притяжению пластин. Как бы неожиданно это ни звучало, эффект Казимира необходимо учитывать в современной технике.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Astrid Lambrecht 2002 Phys. World **15** (9) 29

**Задачи для домашнего решения:****Упражнение 1**

Вычислите точно интеграл

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

*Подсказка: можно воспользоваться трюком, который мы применили при вычислении Гауссова интеграла, т.е. заменить*

$$\frac{1}{x} = \int_0^{\infty} e^{-tx} dt$$

*Удобно также применить запись*

$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}).$$

Полагаясь на этот результат, вычислите интеграл

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda x}{x^2} dx.$$

**Упражнение 2**

Вычислите интеграл, сведя его к  $B$ -функции

$$I(n, m) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cos^m x dx.$$

**Упражнение 3**

Вычислите интеграл, сведя его к  $B$ -функции

$$I(n, m, k) = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{(x^m + 1)^k} dx.$$

Когда он сходится?

**Упражнение 4**

Вычислите точно интегралы

$$I_1(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin(\lambda x)}{x^2 + 1} dx,$$

$$I_2(\lambda) = \int_0^{\infty} \frac{x \sin(\lambda x)}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

### Задача 1

Вычислите сведением к  $\Gamma$ -функции и к  $B$ -функции

$$I(m) = \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^m} dx$$

при  $0 < m < 1$ .

*Подсказка: используйте обобщение соотношения из подсказки к задаче 1:*

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} t^{m-1} e^{-tx} dt$$

### Задача 2

Распределение Ферми определяется как

$$n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\epsilon/T} + 1},$$

где  $T > 0$  - температура.

Вычислите интеграл, зависящий от двух параметров

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon (n_F(\epsilon - V) - n_F(\epsilon))$$

Такой интеграл возникает при вычислении электрического тока через туннельный контакт.

Почему не работает следующее рассуждение?

Разобьем интеграл на два:

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon - V) - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon)$$

и сделаем сдвиг в первом интеграле  $\epsilon' = \epsilon - V$ . Тогда

$$I(V, T) = \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon' n_F(\epsilon') - \int_{-\infty}^{\infty} d\epsilon n_F(\epsilon) = 0$$

*Замечание: если немного подумать, ответ на задачу можно получить совсем без вычислений.*

## Глава 5

# Оценка интегралов от быстро меняющихся и быстро осциллирующих функций

### 5.1 Лекция (И.С. Бурмистров)

На этом занятии рассматривается вычисление интегралов от быстро меняющихся и быстро осциллирующих функций. Обсуждаются случаи собственных и несобственных интегралов. Рассматривается асимптотика функции интегральной экспоненты. Как пример, очень быстро меняющейся функции рассматривается дельта-функция Дирака.

Рассмотрим интеграл

$$I(a) = \int_a^{\infty} e^{-x} f(x) dx, \quad (5.1)$$

где функция  $f(x)$  монотонно убывает при  $x \rightarrow \infty$ . Из-за наличия экспоненциального множителя подынтегральная функция быстро убывает. Поэтому при  $a \gg 1$  для интеграла (5.1) может быть найдена общая асимптотическая формула. Проинтегрируем в (5.1) по частям:

$$I(a) = \int_a^{\infty} e^{-x} f(x) dx = e^{-a} f(a) + \int_a^{\infty} e^{-x} f'(x) dx \quad (5.2)$$

Интегрируя по частям еще раз, находим для  $a \gg 1$ :

$$I(a) = e^{-a} [f(a) + f'(a) + \dots] \quad (5.3)$$

**Интегральная экспонента**

Рассмотрим интеграл, который называется интегральной экспонентой:

$$E_m(z) = \int_1^{\infty} e^{-zx} \frac{dx}{x^m} = z^{m-1} \int_z^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^m} \quad (5.4)$$

Здесь  $m$  натуральное число. Пользуясь общей формулой (5.3), получаем для  $z \gg 1$

$$E_m(z) \approx \frac{e^{-z}}{z} \left( 1 - \frac{m}{z} + \dots \right). \quad (5.5)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (5.6)$$

Если функция  $f(x)$  меняется на отрезке  $[a, b]$  медленно по сравнению с функцией  $g(x)$ , т.е.  $|f'(x)/f(x)| \ll |g'(x)/g(x)|$ , то интеграл (5.6) можно оценить следующим образом

$$I \approx f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)dx \quad (5.7)$$

**Дельта-функция Дирака**

Рассмотрим интеграл

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} e^{-x^2} dx. \quad (5.8)$$

Найдем его значение при  $a \ll 1$ . Если считать, что медленная функция  $f(x) = \exp(-x^2)$ , а быстрая функция  $g(x) = a/(a^2 + x^2)$ , то так как  $|f'(x)/f(x)| = 2x$  и  $|g'(x)/g(x)| = 2x/(a^2 + x^2)$ , при  $|x| \lesssim 1$  функция  $f(x)$  медленная по сравнению с  $g(x)$ . При  $|x| > 1$  функция  $f(x)$  быстро убывает, поэтому можно думать,

что эта область вносит в интеграл (5.8) малый вклад и для его оценки можно воспользоваться формулой (5.7):

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-a^2 x^2} dx \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi. \quad (5.9)$$

Этот же ответ можно получить более аккуратно. Сделаем ряд точных преобразований:

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-a^2 x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} dt e^{-t} \left( \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2 - tx^2} dx \right) = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+a^2}} dt \\ &= \sqrt{\pi} e^{a^2} \int_{a^2}^{\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2\sqrt{\pi} e^{a^2} \int_a^{\infty} e^{-x^2} dx = 2\sqrt{\pi} e^{a^2} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^a e^{-x^2} dx \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

При  $a \ll 1$  интеграл

$$\int_0^a e^{-x^2} dx \approx \int_0^a dx = a \quad (5.11)$$

Поэтому из (5.10), находим при  $a \ll 1$

$$I(a) = \pi \left( 1 - \frac{2a}{\sqrt{\pi}} \right). \quad (5.12)$$

Таким образом, если определить функцию

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad (5.13)$$

то мы доказали следующее равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) e^{-x^2} dx = 1 \quad (5.14)$$

Аналогично можно показать, что для функции  $f(x)$ , убывающей на бесконечности, выполняется равенство

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x) dx = f(0) \quad (5.15)$$

Предел функции  $\delta_a(x)$  при  $a \rightarrow 0$  называется дельта-функцией Дирака.

Дельта-функция Дирака  $\delta(x)$  определяется как функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

$$\begin{aligned} 1) \quad \delta(x) &= 0 \text{ при } x \neq 0, \\ 2) \quad \delta(x=0) &= +\infty, \\ 3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx &= 1. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Из определения (5.16) следуют свойства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad \delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0) \quad (5.17)$$

Здесь функция  $g(x)$  обращается в нуль при  $x = x_0$ ,  $g(x_0) = 0$ .

Рассмотрим интеграл на конечном отрезке  $[a, b]$ :

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx. \quad (5.18)$$

Для определенности будем считать, что  $f(x)$  при  $x \in [a, b]$ . Для выяснения поведения этого интеграла при  $\omega \gg 1$  можно воспользоваться интегрированием по частям:

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx = \frac{1}{\omega} [f(a) \cos(\omega a) - f(b) \cos(\omega b)] + \frac{1}{\omega} \int_a^b f'(x) \cos(\omega x) dx \quad (5.19)$$

При  $\omega \gg 1$ , можно отбросить второй член в правой части выражения (5.19), и найти

$$I(\omega) = \int_a^b f(x) \sin(\omega x) dx = \frac{1}{\omega} [f(a) \cos(\omega a) - f(b) \cos(\omega b)] + \bar{o} \left( \frac{1}{\omega} \right) \quad (5.20)$$

В случае, когда  $f(a) = f(b) = 0$  необходимо учесть следующий член в  $1/\omega$  разложении с помощью интегрирования по частям интеграла в правой части в выражении (5.19). Тогда получаем:

$$I(\omega) = \frac{1}{\omega^2} [f'(b) \sin(\omega b) - f'(a) \sin(\omega a)] + \bar{o} \left( \frac{1}{\omega^2} \right) \quad (5.21)$$

Пусть теперь интервалы интегрирования бесконечные. Тогда для сходимости интеграла (5.18) нужно, чтобы функция  $f(x)$  вместе со всеми своими производными обращалась в нуль при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда видно, что разложение по степеням  $1/\omega$  будет давать нуль во всех порядках. Рассмотрим интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx. \quad (5.22)$$

Поведение интеграла при  $\omega \gg 1$  определяется поведением функции  $f(x)$  в комплексной плоскости.

### Интеграл Лапласа

Рассмотрим интеграл

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2} dx. \quad (5.23)$$

Перепишем интеграл (5.23) в следующем виде:

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} dt e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega x) e^{-tx^2} dx. \quad (5.24)$$

Интеграл по  $x$  может быть вычислен точно. Тогда находим

$$I(\omega) = \sqrt{\pi} \int_0^{\infty} e^{-t-\omega^2/4t} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{\pi\omega} \int_0^{\infty} e^{-\omega g(x)} \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad (5.25)$$

где функция  $g(x) = x + 1/4x$ . При  $\omega \gg 1$  интеграл можно вычислить методом перевала. Функция  $g(x)$  имеет максимум:  $g'(x) = 0$  при  $x = 1/2$ . Поэтому

$$I(\omega) \approx \sqrt{2\pi\omega} e^{-\omega} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\omega(x-1/2)^2} dx = \pi e^{-\omega} \quad (5.26)$$

Заметим, что приближенное выражение (5.26) совпадает с точным ответом. Обратим внимание, что  $I(\omega)$  при  $\omega \gg 1$  ведет себя экспоненциально.

Для оценки интегралов (5.18) и (5.22) было существенно, что функция  $f(x)$  непрерывна и конечна на интервале интегрирования.

**Ещё один интеграл**

Рассмотрим интеграл

$$I(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin(\omega x) \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (5.27)$$

Интегрируя по частям, находим:

$$I(\omega) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x} x [\sin(\omega x) - \omega \cos(\omega x)] \frac{dx}{\sqrt{x}}. \quad (5.28)$$

С другой стороны, дифференцирование по параметру дает

$$I'(\omega) = 2\omega \int_0^{\infty} e^{-x} \sqrt{x} \cos(\omega x) dx. \quad (5.29)$$

Сравнивая выражения (5.28) и (5.29), при  $\omega \gg 1$ , находим

$$I(\omega) \approx -2\omega I'(\omega) \quad \Longrightarrow \quad I(\omega) = \frac{C}{\sqrt{\omega}}. \quad (5.30)$$

Обратим внимание, что интеграл (5.27) при  $\omega \gg 1$  убывает медленнее, чем в примерах выше. Вычисление постоянной  $C$  требует точного вычисления интеграла (5.27).

- Найти точное выражение для интеграла (5.27). Вычислить постоянную  $C$ .

**5.2 Лекция (Ю.Г. Махлин)****Быстроменяющиеся функции**

Часто при вычислении интегралов встречается ситуация, когда основная часть интеграла набирается на малой части отрезка интегрирования. Так бывает, когда подынтегральное выражение имеет резкий максимум. Мы рассмотрим такие ситуации и обсудим, как можно оценить интеграл. Рассмотрим примеры таких интегралов:

$$A = \int_0^1 e^{-x/\lambda} \cos x dx \quad (5.31)$$

и

$$B = \int_{-1}^1 e^{-x^2/\lambda^2} \cos x \, dx \quad (5.32)$$

при  $\lambda \ll 1$ . Оба они набираются в узкой окрестности точки 0, которая в первом случае является концом, а во втором промежуточной точкой отрезка интегрирования. Особенностью подынтегральной функции является резкий максимум в нуле.

Для вычисления важны значения функции только в окрестности точки 0 шириной порядка  $\lambda$ . Точнее, интеграл по области  $|x| \gg \lambda$  пренебрежимо мал, поведение функции там несущественно и может быть, например, слегка изменено без заметного изменения значения интеграла. Поэтому с хорошей точностью можно убрать косинус из-под знака интеграла (заменить его на значение в нуле). Более того, по той же причине мы можем заменить предел интегрирования на бесконечный:

$$A \approx \int_0^1 e^{-x/\lambda} dx \approx \int_0^\infty e^{-x/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.33)$$

и

$$B \approx \int_{-1}^1 e^{-x^2/\lambda^2} dx \approx \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/\lambda^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda}. \quad (5.34)$$

В этих интегралах несущественно поведение подынтегральной функции вдали от точки максимума (при  $|x| \gg \lambda$ ). Подобная идея может применяться для функций любого поведения вблизи максимума, не обязательно экспоненциального. Например, можно заменить в (5.32) экспоненту на  $1/(1+(x/\lambda)^2)$  или любую  $f(x/\lambda)$  с максимумом, причём острота максимума и точность приближения растут с уменьшением  $\lambda$ .

Пример. Рассмотрим функцию

$$E_m(u) = \int_1^\infty \frac{e^{-ux}}{x^n} dx, \quad (5.35)$$

связанную с интегральной показательной функцией, при больших значениях аргумента  $u \gg 1$ . Из-за быстрого спада экспоненты интеграл определяется областью  $x-1 \sim 1/u$ , в которой значение второго сомножителя практически не изменяется, т.е. можно заменить  $x^n$  на его значение в 1. Таким образом,

$$E_m(u) \approx \int_1^\infty e^{-ux} = \frac{e^{-u}}{u}. \quad (5.36)$$

Следующие члены этого асимптотического ряда можно получить, уточняя значения  $x^{-n}$  вблизи 1, т.е. раскладывая её в ряд Тейлора.

Обобщая, можно рассмотреть интеграл  $\int_a^b f(x)g(x)dx$  от произведения функций, одна из которых (например,  $g$ ) имеет резко выраженный максимум в точке  $x_m$  в области интегрирования, так что

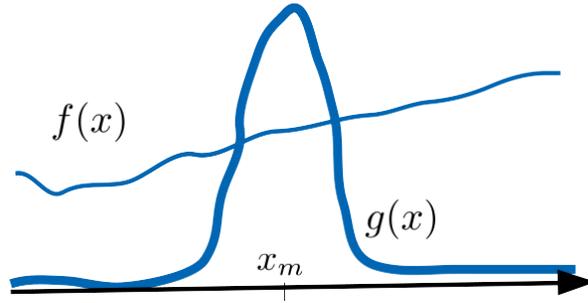


Рис. 5.1

$\int_a^b g(x)dx$  при этом набирается в узкой окрестности точки  $x_m$ . Если другая функция,  $f(x)$ , мало меняется в этой окрестности, ср. рис. ?? (это можно выразить условием  $f'(x)/f(x) \ll g'(x)/g(x)$ ), то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \approx f(x_m) \int_a^b g(x)dx. \quad (5.37)$$

При представленной на рисунке форме  $g(x)$  не так существенно, как ведёт себя функция  $f(x)$ , вне пика  $g(x)$ , где набирается интеграл.

Отметим, что часто встречающимся примером подынтегрального выражения с резко выраженным максимумом является  $F(x) = f(x)e^{gS(x)}$  с очень большим  $g$ . С ростом  $g$  максимум  $S(x)$  превращается во всё более и более резкий максимум  $F(x)$ , а поведение вблизи максимума при  $g \rightarrow \infty$  определяется младшим членом разложения  $S(x)$  в ряд Тейлора. Для максимума на конце интервала интегрирования это обычно линейный член,  $S(x) = S(a) + S'(a)(x - a)$ , как в (5.31), а в середине интервала — квадратичный,  $S(x) \approx S(x_m) - \frac{1}{2}|S''(x_m)|(x - x_m)^2$ , как в (5.32). При  $g \rightarrow \infty$  последующие члены ряда Тейлора становятся важны в области, где экспонента уже сильно подавлена. На этом основан метод перевала.

Пример. При  $n \gg 1$  в интеграле

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \quad (5.38)$$

подынтегральная функция имеет резкий максимум в точке 0, и тем более резкий, чем больше  $n$ . Поэтому

$$J_n \approx \int_0^\infty \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)^n dt \approx \int_0^\infty (e^{-t^2/2})^n dt = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}. \quad (5.39)$$

Обратите внимание, что хотя максимум находится на конце отрезка, производная там зануляется, и требуется разложение не до первого, а до второго члена ряда Тейлора. Однако гауссов интеграл в результате берётся не по прямой, а по полупрямой.

*Замечание.* Интеграл  $J_n$  заменой  $x = \cos t$  сводится к бета-функции Эйлера, и точное вычисление

даёт  $J_{2l+1} = (2l)!!/(2l+1)!!$ , а значит,  $\pi = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \left( \frac{(2l)!!}{(2l-1)!!} \right)^2$  (формула Валлиса). Её можно проверить и пользуясь формулой Стирлинга.

Пример. В интеграле

$$\int_0^{\infty} e^{-bx^2} \sin(ax^2) dx \quad (5.40)$$

будем считать, что  $a, b > 0$  и рассмотрим разные пределы.<sup>1</sup> При  $b \gg a$  интеграл определяется резким пиком экспоненты при  $x \sim 1/\sqrt{b}$ . В этой области аргумент синуса мал, и синус можно заменить на  $ax^2$ , что даёт  $a\sqrt{\pi/16b^3}$ . В противоположном пределе  $b \ll a$  очень быстро, на масштабе  $\sim 1/\sqrt{a}$ , сходится интеграл от синуса, и в этой области можно заменить экспоненту на 1, что даёт интеграл Френеля со значением  $\sqrt{\pi/8a}$ .

## Дельта-функция

Важным примером является случай функции с предельно резким пиком. Рассмотрим функцию, имеющую резкий пик в нуле и очень быстро убывающую при удалении от нуля. В такой ситуации мы ожидаем, что интеграл от этой функции (по отрезку, содержащему ноль) набирается в узкой области вблизи нуля. Конечно, важно, что значит «быстро убывает» и «очень узкой». В качестве образца рассмотрим функцию

$$\delta_a(x) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \delta_1\left(\frac{x}{a}\right), \quad \text{где } \delta_1(x) = \frac{\pi}{1+x^2}, \quad (5.41)$$

при малом  $a > 0$ . Если мы рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x) dx, \quad (5.42)$$

то для функции  $f(x)$ , медленно меняющейся — т.е. почти постоянной — на масштабе  $a$  (т.е.  $a|f'(x)| \ll |f(x)|$ ), интеграл «садится» на окрестность точки 0 шириной порядка  $a$ . В соответствии с рецептом, обсуждавшимся выше, заменим в этой окрестности функцию  $f$  её значением в нуле, и получим приближенное значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) f(x) dx \approx f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta_a(x) dx = f(0) \quad (5.43)$$

<sup>1</sup>На самом деле существенный параметр здесь только один,  $b/a$ , как легко видеть, «обезразмеривая» интеграл, например, заменой переменной  $y = \sqrt{a}x$  что даёт  $(1/\sqrt{a}) \int_0^{\infty} e^{(b/a)y^2} \sin y^2 dy$ . Отметим также, что этот интеграл очень похож на обсуждавшийся на второй лекции.

(коэффициент в определении  $\delta_a(x)$  подобран так, что интеграл от неё равен 1). Очевидно, что точность приближения тем выше, чем меньше  $a$ . Мы предполагали, что функция  $f(x)$  «достаточно хорошая», так что интеграл по далёким от  $a$ -окрестности нуля областям пренебрежимо мал.

Функцию, обладающую свойством (5.43) для любой <sup>2</sup> функции  $f$ , называют дельта-функцией. Её можно рассматривать как предел

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x). \quad (5.44)$$

Можно сказать, что с хорошей точностью функцию  $d(x)$ , имеющую узкий пик в какой-то точке  $m$ , можно заменить на  $d(m)\delta(x - x_m)$ , но конечно, только пока мы её интегрируем с медленными функциями  $f(x)$ .

Функция  $\delta(x)$  обладает такими свойствами, по существу, определяющими её:

$$\delta(x) = 0 \text{ при } x \neq 0, \quad (5.45)$$

$$\delta(0) = +\infty, \quad (5.46)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (5.47)$$

Такой функции, конечно, не существует, и точный смысл предела (5.44) требует уточнений; эту функцию следует рассматривать не саму по себе, а как часть интегралов типа (5.42) (так называемую «обобщённую функцию»). Тем не менее вполне можно, и полезно, представлять её и как просто функцию (при конечном, но очень малом  $a$ ), понимая ограниченность такого представления. Легко показать (проверьте это на основе (5.45)–(5.47)), что дельта функция обладает такими свойствами:

$$\int_c^d \delta(x) f(x) dx = \begin{cases} f(0), & \text{если } 0 \in [c; d], \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x), \quad (5.49)$$

$$\delta(g(x)) = \sum_{x_i} \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (5.50)$$

где  $x_i$  — нули функции  $g$ .

**Задача.** Чему равна производная дельта-функции? Требуется понять, как вычислять  $\int \delta'(x) f(x) dx$ .

Отметим, что мы построили дельта-функцию как предел функции ширины  $a$  при  $a \rightarrow 0$ , взяв функцию  $\delta_1(x)$  и пересчитывая её ( $x \mapsto x/a$ ) на все меньшую и меньшую ширину в соответствии с (5.41), т.е. с сохранением интеграла. Ясно, что при этом начинать этот процесс можно было бы с любой функции  $\delta_1(x)$  конечной ширины с единичным интегралом. Например, можно взять  $\delta_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ .

<sup>2</sup>Мы не обсуждаем здесь технические детали определения и требования к пространству функций  $f$ .

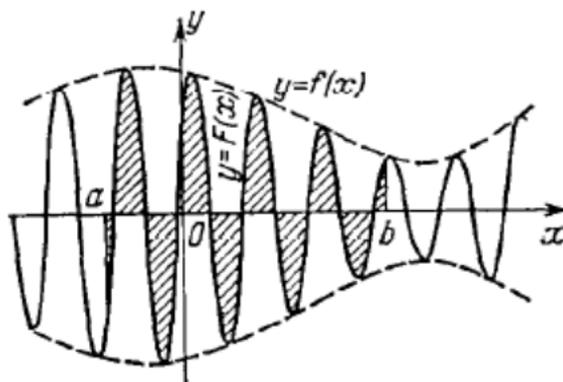


Рис. 5.2: См. Зельдович, Мышкис

## Интегралы от быстроосциллирующих функций

Быстрые осцилляции тоже подавляют интеграл, как и быстрое затухание, хотя и по другой причине — за счёт компенсации вкладов в интеграл от отрезков, где подынтегральная функция имеет разный знак. Обсудим способы оценки таких интегралов.

Часто быстрые осцилляции связаны с входящим в подынтегральное выражение синусом или косинусом с большой частотой осцилляций. Рассмотрим интеграл (связанный с преобразованием Фурье от функции  $f$ )

$$I(k) = \int_a^b f(x) \sin(kx) dx \quad (5.51)$$

в пределе больших  $k \rightarrow \infty$  (более точно, период осцилляций  $2\pi/k$  предполагаем малым по сравнению с характерным масштабом  $\lambda = (f'(x)/f(x))^{-1}$  изменений  $f$ , т.е.  $k\lambda \gg 1$  — относительное изменение  $f(x)$  на периоде пренебрежимо мало). Из рисунка видно, что вы этом пределе соседние области с разным знаком осциллирующей части, косинуса, взаимно уничтожают свои вклады в интеграл — точнее, почти уничтожают. Нашей задачей является оценка остающегося вклада в пределе быстрых осцилляций.

Будем считать, что функция  $f(x)$  достаточно гладкая (требуемая степень гладкости будет видна из последующих преобразований, и разная для разных шагов) и со сходящимся интегралом. Для того, чтобы убедиться в его малости, а также чтобы оценить его (малое) значение, произведём интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} I(k) &= \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = \\ &= \frac{f(a) \cos(ka) - f(b) \cos(kb)}{k} + \frac{1}{k} \int_a^b f'(x) \cos(kx) dx. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Отсюда уже видно, что  $I(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Аналогично, в последнем слагаемом интеграл от быстроосциллирующей функции стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , а значит само слагаемое ведёт себя как  $o(1/k)$ , и опуская его, получим главный член в оценке интеграла при больших  $k$  — дробь в (5.52). Если требуется вычислить следующую поправку по  $1/k$ , (например, если первое слагаемое в (5.52) равно нулю из-за зануления  $f(x)$  на концах интервала интегрирования), можно произвести интегрирование по частям ещё раз:

$$I(k) = \frac{f(a) \cos(ka) - f(b) \cos(kb)}{k} + \frac{f'(b) \sin(kb) - f'(a) \sin(ka)}{k^2} - \frac{1}{k^2} \int_a^b f''(x) \sin(kx) dx. \quad (5.53)$$

Последнее слагаемое ведёт себя как  $o(1/k^2)$ . Повторяя этот приём любое число раз (для многократно дифференцируемой функции), будем получать всё новые и новые члены разложения значения интеграла в ряд по  $1/k\lambda$ .

### Разрывные функции

В рассуждении выше мы предполагали, что функция непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Если в точке  $c$  внутри отрезка она испытывает скачок  $\Delta f(c) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(c + \epsilon) - f(c - \epsilon)$ , но непрерывна по обе стороны скачка, то интеграл  $I(k)$  удобно разбить на сумму интегралов по  $[a; c]$  и  $[c; b]$  и для каждой половины написать формулу (5.52). При этом уже после первого интегрирования по частям даже при  $f(a) = f(b) = 0$  вклады двух половин не сокращаются:

$$I(k) = \frac{\Delta f(c)}{k} \cos(kc) + o(1/k) \quad (5.54)$$

при  $k \rightarrow \infty$ , что и определяет вклад скачка в поведение  $I(k)$  при больших  $k$ .

Если разрывна не сама функция, а какая-то из ее производных, то этот разрыв (при обращении в ноль всех производных на концах отрезка) и определяет высокочастотную степенную асимптотику интеграла.

Задача. Вычислите асимптотику интеграла  $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(kx) e^{-a|x|} dx$  при больших  $k$ .

### Экспоненциальное затухание

Распространённой является ситуация с интегралом типа (5.51) по бесконечному интервалу  $(-\infty, \infty)$  с гладкой функцией  $f(x)$ , затухающей на  $\pm\infty$  вместе со всеми производными. Тогда рассуждения выше приводят к выводу, что при  $k \rightarrow \infty$  значение интеграла  $I(k)$  стремится к нулю быстрее любой степени частоты  $k$ . Это подсказывает, что в таком случае закон затухания содержит экспоненту. Аккуратное рассмотрение такого затухания несложно в рамках теории функций комплексного переменного. Мы

здесь для иллюстрации рассмотрим только пример такого интеграла, когда его можно оценить другими методами.

Пример (интеграл Лапласа). Рассмотрим интеграл

$$L(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{1+x^2} dx. \quad (5.55)$$

Его можно вычислить разными методами, мы рассмотрим один из них.

Хочется дважды продифференцировать  $L(k)$  по  $k$ , т.к. при этом получится выражение, близкое к самому  $L(k)$ , т.е. связь функции  $L(k)$  с её второй производной — из такого дифференциального уравнения функцию можно найти. Однако, буквальное дифференцирование под знаком интеграла даёт расходящийся на бесконечности интеграл для  $L''(k)$ .

Чтобы обойти эту проблему, можно, например, поступить так: домножим начальное выражение под интегралом на очень медленно убывающую на бесконечности функцию, например, на  $e^{-\epsilon|x|}$  с малым  $\epsilon$ . Это не скажется на значении интеграла в конечной области. Тогда можно спокойно дважды дифференцировать по  $k$ , а затем устремить  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, при  $k > 0$  искомая функция  $L(k)$  является решением дифференциального уравнения  $L''(k) = L(k)$ . Общее решение такого уравнения имеет вид

$$L(k) = C_1 e^k + C_2 e^{-k}$$

с произвольными постоянными  $C_1$  и  $C_2$ . Ясно, что при больших  $k$  наш интеграл  $L(k)$  расти не должен, а значит,  $C_1 = 0$ . Величину  $C_2$  получаем, например, из значения интеграла при  $k = 0$ :

$$L(k) = \pi e^{-|k|}.$$

Обратите внимание, что величина интеграла действительно стремится к нулю быстрее любой степени  $k$  при  $k \rightarrow \infty$ , как мы и ожидали.

### Медленное затухание

Пример. Заметим, что при аномальном поведении функции  $f$ , например, вблизи концов отрезка, вышеприведённые оценки следует поправить, и затухание с ростом  $k$  может иметь разный характер. Например, рассмотрим при большом  $k \gg 1$  интеграл

$$J(k) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin(kx)}{\sqrt{x}} dx. \quad (5.56)$$

Соответствующая функция  $f(x)$  стремится к бесконечности в нуле, и оценкой типа формулы (5.52) невозможно воспользоваться. Можно попытаться это исправить, чуть сдвинув нижний предел в точку

$a > 0$ , но если взять в качестве нижнего предела малое  $a$  и устремить его к нулю, то оба слагаемых в правой части (5.52) расходятся, при этом расходимости компенсируют друг друга. Дело в том, что характерный масштаб функции  $f$  сам зависит от близости к нулю: вблизи нуля  $f(x) \approx 1/\sqrt{x}$ , т.е.  $(f'/f)^{-1} \sim x$ . А значит, даже при очень больших  $k$  есть область вблизи нуля, где  $f$  меняется быстрее осциллирующего синуса.

Попробуем тем не менее оценить интеграл: в этой существенной для интеграла области  $x \sim 1/k$  (при больших  $x$  наши обычные рассуждения с интегрированием по частям помогают, и интеграл мал) мы можем заменить экспоненту на 1, что даёт

$$J(k) \approx \int_0^\infty \frac{\sin(kx)}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty \frac{\sin y}{\sqrt{y}} dy, \quad (5.57)$$

где мы сделали замену переменной  $y = kx$ .

Таким образом,  $J(k)$  убывает при больших  $k$  даже медленнее, чем  $1/k$ . Остающийся в (5.57) интеграл сводится к интегралу Френеля и может быть вычислен точно, но для нас сейчас важно, что он является числом и не зависит от  $k$ .

## 5.3 Семинар по теме «Метод стационарной фазы»

### Метод стационарной фазы

Часто в приложениях встречаются определённые осциллирующие интегралы типа:

$$\int_a^b \cos f(x) dx$$

с быстроменяющейся функцией  $f(x)$ . К таким интегралам часто применим так называемый метод стационарной фазы, который очень похож на методом перевала и тесно с ним связан.

**Логика** Рассмотрим окрестность небольшого размера некой точки  $x_0$ . В окрестности этой точки можно ввести “локальную частоту осцилляций” согласно  $\omega \simeq f'(x_0)$  и написать разложение:

$$\int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_2} \cos(f(x)) dx \approx \int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_2} \cos(f(x_0) + \omega(x - x_0)) dx = \frac{\sin(f(x_0) + \omega\delta_2) - \sin(f(x_0) + \omega\delta_1)}{\omega} \sim \frac{O(1)}{\omega}$$

Из этого простого соображения видно, что локально интеграл тем больше, чем меньше “локальная” частота  $\omega$  (или чем больше “локальный” же период  $T_{loc} = \frac{2\pi}{|\omega|}$ ); это позволяет нам заключить, что интеграл набирается в малой окрестности так называемых точек стационарной фазы - точек, где  $\omega = f'(x_0) = 0$ .

**Метод** Это соображение позволяет нам написать метод асимптотической оценки такого рода интегралов. А именно, вклад от каждой такой стационарной точки оценивается используя разложение в ряд Тейлора:

$$\int_a^b \cos \left( f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \right) dx$$

где пределы интегрирования уже можно распространить на всю числовую ось, поскольку в силу сильных осцилляций вклад от “хвостов” оказывается мал. Такой интеграл мы уже умеем считать, т.к. он выражается через интегралы Френеля, вычисленные в *Семинаре 4*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

**Критерии применимости** Выше мы писали, что метод применим для “быстроменяющихся” функций  $f(x)$ . Можно написать явный критерий, что означают эти слова. Интеграл от разложенной функции набирается в малой окрестности стационарной точки шириной  $|x - x_0| \sim \frac{1}{\sqrt{|f''(x_0)|}}$  (там, где фаза  $f(x)$  изменяется на число порядка 1). Тогда пренебрежение следующими членами разложения в ряд Тейлора верно при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} |f^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3| \ll |f''(x_0)(x - x_0)^2| \\ |f^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4| \ll |f''(x_0)(x - x_0)^2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f^{(3)}(x_0)| \ll |f''(x_0)|^{3/2} \\ |f^{(4)}(x_0)| \ll |f''(x_0)|^2 \end{cases}$$

### Задача 1 (функция Эйри)

В качестве примера разберем поведение функции Эйри (Airy) при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{t^3}{3} + xt \right) dt$$

#### Решение

Найдем стационарные точки фазы:

$$f'(t) = t^2 + x = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm |x|^{1/2}$$

Только одна стационарная точка  $t_1 = \sqrt{-x}$  попадает в отрезок интегрирования, и необходимо рассматривать вклад только от ее окрестности. Для поведения фазы в окрестности этой точки можно записать:

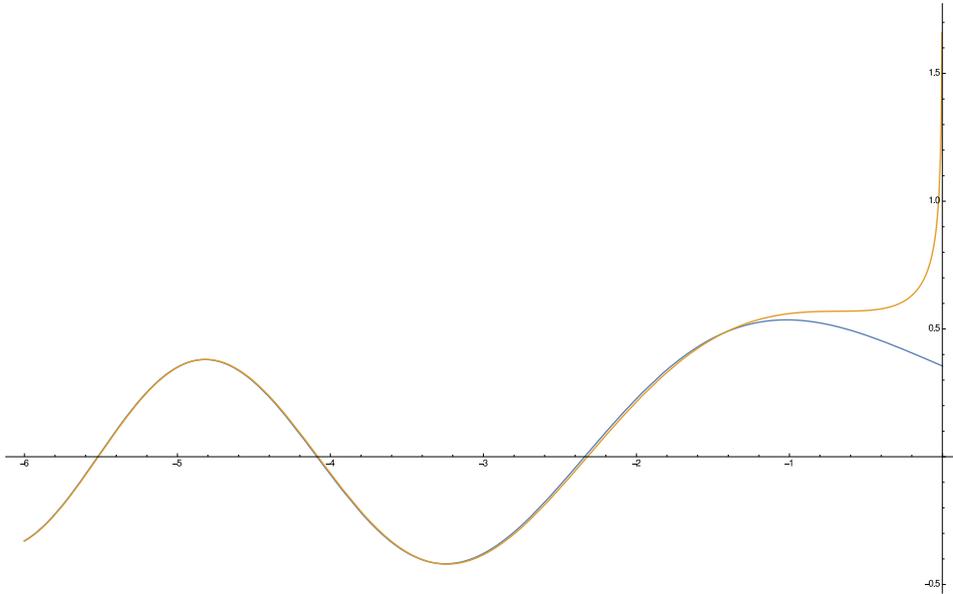
$$f''(t) = 2t \Rightarrow f''(t_1) = 2|x|^{1/2}$$

$$f(t) \approx -\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2}(t - |x|^{1/2})^2$$

Поэтому вклад в интеграл от окрестности стационарной точки записывается как:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2}(t - |x|^{1/2})^2\right) \cdot dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \cos(|x|^{1/2}(t - |x|^{1/2})^2) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \sin(|x|^{1/2}(t - |x|^{1/2})^2) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) \right) \sqrt{\frac{\pi}{2|x|^{1/2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Рис. 5.3: Функция Эйри  $\text{Ai}(x)$  при  $x < 0$  и её асимптотика



## Задача 2 (функция Бесселя)

Разберем поведение функции Бесселя при  $x \rightarrow \infty$ :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin t) dt$$

**Решение**

Стационарные точки фазы даются условием:

$$f'(t) = x \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

В отрезок интегрирования попадает одна стационарная точка  $t_0$ ; поведение функции определяется вкладом в интеграл лишь от окрестности этой точки. Имеем:

$$f''(t) = -x \sin t \Rightarrow f''(t_0) = -x$$

$$f(t) \approx x - \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

поэтому для оценки асимптотики функции Бесселя получаем:

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left( x - \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \cos x \cdot \cos \left( \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) + \sin x \cdot \sin \left( \frac{1}{2}x \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2 \right) \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} (\cos x + \sin x) \sqrt{\frac{2\pi}{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

**Асимптотические разложения**

Практически во всех задачах мы сталкивались с асимптотическими разложениями в том или ином виде; и каждый раз мы находили первые несколько членов этого самого разложения. Поясним теперь, что из себя представляют эти самые разложения. Пусть имеется функция  $f(x)$  и последовательность функций  $\varphi_k(x)$ . Мы будем говорить, что функции  $\varphi_k(x)$  представляют собой асимптотическое разложение функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$  (может быть и бесконечно удалённой), и писать

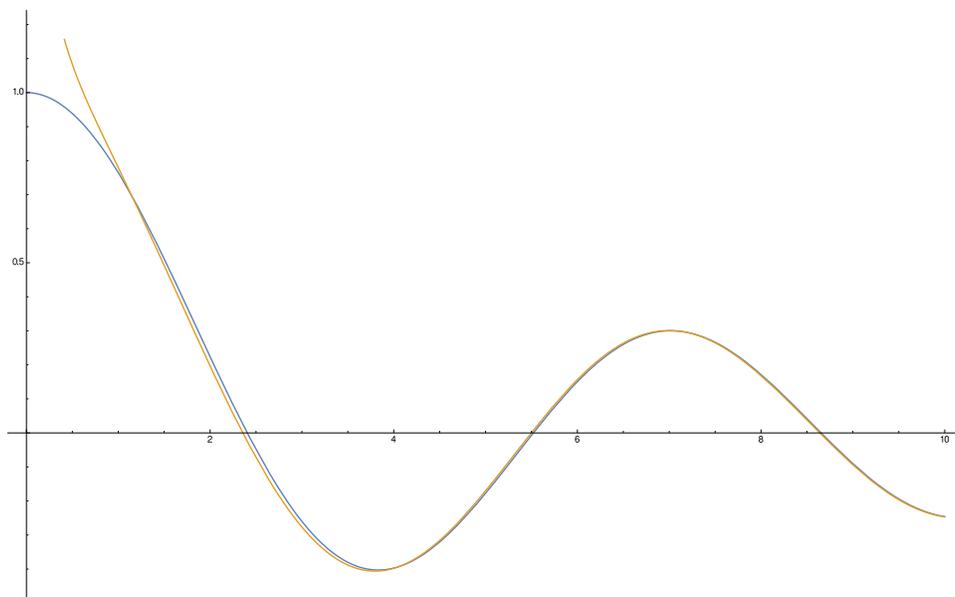
$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x), \quad x \rightarrow x_0$$

если, во-первых, каждый следующий член этого ряда меньше предыдущего:

$$\varphi_k(x) \gg \varphi_{k+1}(x) \Leftrightarrow \varphi_{k+1}(x) = \bar{o}(\varphi_k(x)), \quad x \rightarrow x_0$$

а во-вторых, функцию можно приблизить суммированием конечного члена этого ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(x) + \mathcal{O}(\varphi_{N+1}(x)), \quad x \rightarrow x_0$$

Рис. 5.4: Функция Бесселя  $J_0(x)$  и её асимптотика

**Замечание** Тут уместо сделать несколько замечаний. Во-первых, разложения в ряд Тейлора представляют собой пример асимптотических разложений с функциями  $\varphi_k(x) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ . А во-вторых, как правило в приложениях, асимптотические ряды формально непригодны для подсчёта значений функции в любой конкретной точке по той причине, что они часто **расходятся**. Это, тем не менее, не мешает их активно использовать для асимптотического анализа и приближенных оценок, как мы поступали с задачами ранее. В частности, так называемый метод диаграмм Фейнмана представляет собой пример асимптотических разложений.

### Задача 3 (функция Макдональда)

Найти асимптотическое разложение для интеграла при  $a \rightarrow \infty$

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx$$

#### Решение

Асимптотический ряд можно просто получить, раскладывая корень по малости  $\frac{x}{\alpha}$ . Имеем:

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} C_{-1/2}^k \left(\frac{x}{\alpha}\right)^k dx$$

Тут  $C_\alpha^k$  при нецелых  $\alpha$  - обобщенный биномиальный коэффициент, определяемый как:

$$C_\alpha^k = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

В случае  $\alpha = -\frac{1}{2}$  это можно переписать:

$$C_{-1/2}^k = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{k!} = \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k-1)!!}{k!}$$

Дальше можно поменять местами сумму и интеграл; каждый из полученных интегралов представляет собой просто интеграл Эйлера; получаем:

$$\begin{aligned} I(a) &\sim \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^k} C_{-1/2}^k \int_0^{\infty} e^{-x} x^{k-\frac{1}{2}} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} C_{-1/2}^k \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \cdot \frac{(-1)^k}{2^k} \cdot \frac{(2k-1)!!}{k!} \cdot \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{k+1/2}} \cdot \frac{(-1)^k ((2k-1)!!)^2 \sqrt{\pi}}{2^{2k} k!} \end{aligned}$$

тут мы воспользовались тем, что  $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(k-\frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \sqrt{\pi}$ . Для первых нескольких членов разложения имеем:

$$I(a) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(1 - \frac{1}{4\alpha} + \frac{9}{32\alpha^2} + O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\right)$$

Уместно заметить, что полученный асимптотический ряд расходится для любого значения  $\alpha$ .

Кроме того, отметим для справки, что точный ответ выражается через модифицированную функцию Бесселя - так называемую функцию Макдональда  $I(a) = e^{\alpha/2} K_0(\alpha/2)$ .

#### Задача 4 (интегральный синус)

Найдём полное асимптотическое разложение интегрального синуса при  $x \rightarrow \infty$ :

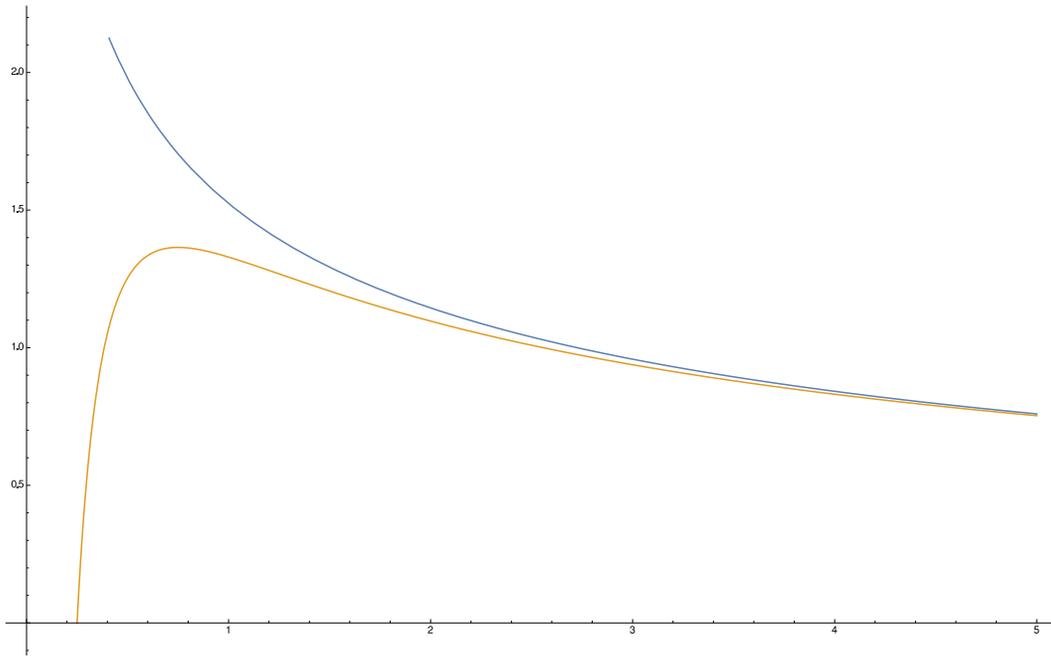
$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

#### Решение

Перепишем выражение следующим образом, используя интеграл Дирихле:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

Рис. 5.5: Точное значение интеграла и первые два члена асимптотического разложения



Можно получить асимптотический ряд, просто интегрируя по частям:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^3} dt$$

В общем виде мы получаем следующую сумму:

$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k+1}} - \sin x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{x^{2k}}$$

Первые несколько членов ряда дают:

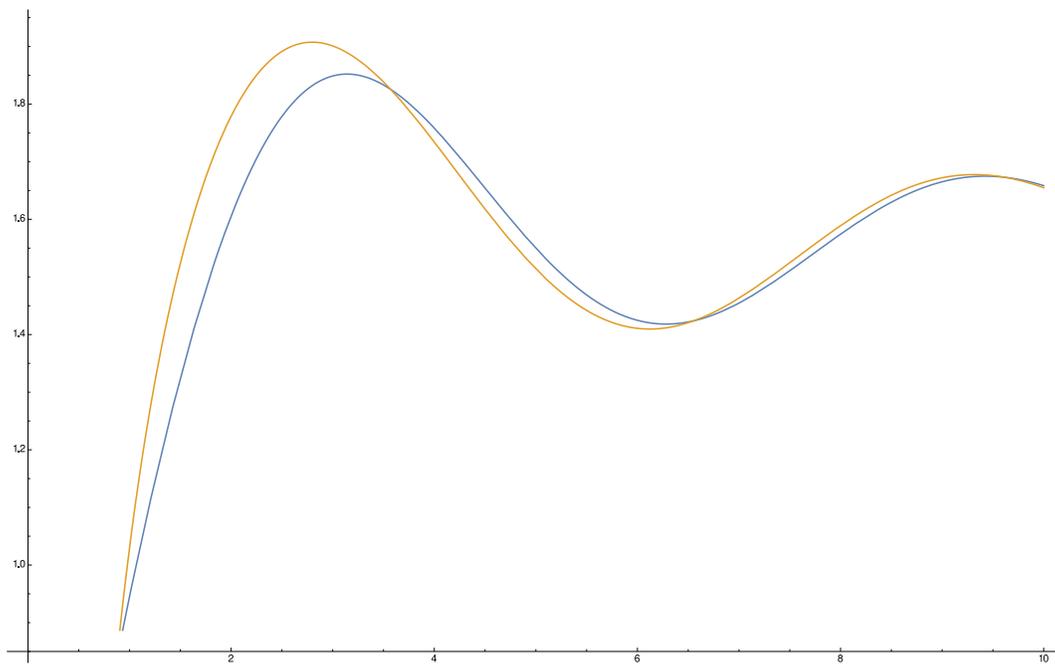
$$\text{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2 \frac{\cos x}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, полученные ряды также расходятся.

## Задача 5

Покажем, что функция

$$\delta_\omega(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin^2(\omega x)}{\omega x^2}$$

Рис. 5.6: Интегральный синус  $\text{Si}(x)$  и первое приближение

при  $\omega \rightarrow \infty$  представляет собой  $\delta$ -функцию Дирака.

### Решение

Область, в которой функция существенно отлична от нуля, имеет ширину  $|x| \sim \frac{1}{\omega}$ , и при  $\omega \rightarrow \infty$  она сужается:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_{\omega}(x \neq 0) = 0$$

поэтому при рассмотрении интеграла вида  $I = \int \delta_{\omega}(x) f(x) dx$  при  $\omega \rightarrow \infty$  поведение определяется окрестностью нуля (область интегрирования должна содержать ноль, а функция  $f(x)$  не должна иметь сингулярностей в нуле). Получаем:

$$I \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\omega}(x) f(0) dx = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega x}{\omega x^2} dx = f(0)$$

Это и доказывает нужное утверждение:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{\omega}(x) f(x) dx = f(0) \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_{\omega}(x) = \delta(x)$$

## Приближение интегралов асимптотическими рядами

В этом семинаре нам неоднократно встречались представления интегралов асимптотическими рядами. При этом асимптотические ряды нередко расходятся. Имеет смысл выявить, в каком смысле стоит понимать такие приближения.

Для этого рассмотрим простейший пример, в котором асимптотический ряд возникает. Интеграл имеет вид

$$I(\lambda) = \int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-\lambda x}}{1+x}$$

и мы попробуем вычислить его для некоторого  $\lambda \gg 1$ . Ожидаемо, ответ можно представить как некоторый ряд по  $1/\lambda$ , потому что в пределе  $\lambda \rightarrow +\infty$  интеграл должен зануляться.

В главном порядке ответ получается просто. Функция  $e^{-\lambda x}$  затухает почти до нуля на масштабе  $\sim 1/\lambda$ , а функция  $\frac{1}{1+x}$  убывает на масштабе  $\sim 1$ . Это значит, что при вычислении можно пренебречь в знаменателе  $\frac{1}{1+x} x$  в сравнении с 1. Тогда

$$I(\lambda) \simeq \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda}.$$

Попробуем теперь уточнить этот ответ. Для этого учтем, что, на самом деле, для малых  $x$   $\frac{1}{1+x} \simeq 1 - x + \dots$ . Тогда для  $I(\lambda)$  получим

$$I(\lambda) \simeq \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} - \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} x.$$

Используя определение  $\Gamma$ -функции, приходим к

$$\int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} x = \frac{1}{\lambda^2} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

То есть

$$I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}.$$

Это приближение заметно точнее. Получим теперь точный ответ в виде ряда. Для этого поступим аналогично тому, что мы делали ранее:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-\lambda x}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} n!$$

Видно, что  $n$ -й член ряда  $I_n = \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} n!$  содержит факториал. Факториал растет быстрее, чем степенная функция, поэтому начиная с некоторого  $n$ , каким бы большим  $\lambda$  не был, члены ряда по модулю начнут возрастать (и возрастать очень быстро). Такая проблема происходит из-за того, что  $\frac{1}{1+x}$  можно разложить в бесконечный ряд только при  $|x| < 1$ .

Итак, с одной стороны мы знаем, что первые несколько членов ряда достаточно хорошо приближают интеграл  $I(\lambda)$  при большом  $\lambda$  (в этом, например, можно убедиться, посчитав интеграл численно на компьютере).

А с другой стороны, разложение  $I(\lambda)$  в бесконечный ряд по  $\frac{1}{\lambda}$ , строго говоря, не определено и

$$I(\lambda) \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} n!.$$

Вместо того, чтобы суммировать ряд целиком, просуммируем его до некоторого номера  $N - 1$ , который выберем из соображения того, чтобы

$$\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} n!$$

лучше всего приближало  $I(\lambda)$ .

Посмотрим на ошибку

$$\Delta I_N = \left| I(\lambda) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} n! \right|$$

и оценим ее. Для этого вернемся на шаг назад и напишем

$$\Delta I_N = \left| \int_0^{+\infty} dx \frac{e^{-\lambda x}}{1+x} - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} x^n \right| = \left| \int_0^{+\infty} dx e^{-\lambda x} \left( \frac{1}{1+x} - \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n \right) \right|$$

По формуле для геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n x^n = \frac{1 - (-x)^N}{1+x},$$

тогда

$$\Delta I_N = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^N}{1+x} e^{-\lambda x} < \int_0^{+\infty} dx x^N e^{-\lambda x} = \frac{N!}{\lambda^{N+1}} = |I_N|,$$

где  $I_n = \frac{(-1)^n}{\lambda^{n+1}} n!$  —  $n$ -й член ряда.

Итак, если мы просуммируем ряд вплоть до его наименьшего члена, отбросив все, что идет дальше, мы получим наилучшее приближение интеграла рядом. Давайте оценим ошибку при достаточно большом  $\lambda$ . По формуле Стirlingа  $N! = \sqrt{2\pi N}(N/e)^N$

$$\Delta I_N = \frac{N!}{\lambda^{N+1}} = \# \frac{1}{\lambda} \sqrt{N} \left(\frac{N}{e\lambda}\right)^N.$$

Здесь  $\#$  – число порядка 1, за которым мы следить не будем.  $\sqrt{N}$  – медленная функция на фоне  $\left(\frac{N}{e\lambda}\right)^N$ , поэтому, чтобы найти минимум, достаточно ограничиться минимизацией  $\left(\frac{N}{e\lambda}\right)^N$ , а корень просто взять в положении минимума.

$$\left(\frac{N}{e\lambda}\right)^N = e^{N \ln N - N \ln \lambda - N}.$$

Уравнение на положение минимума по  $N$ , которое мы обозначим  $N_0$

$$(N \ln N - N \ln \lambda - N)'(N_0) = \ln N_0 - \ln \lambda = 0,$$

что дает  $N_0 = \lambda$ .

Если закончить суммирование по  $n$  на  $\lambda - 1$ , то получим ошибку

$$\Delta I_{N_0} = \# \frac{1}{\lambda} \sqrt{N_0} e^{N_0 \ln N_0 - N_0 \ln \lambda - N_0} = \# \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Видно, что для достаточно большого  $\lambda$  асимптотическим рядом можно приблизить функцию  $I(\lambda)$  с очень высокой – экспоненциальной – точностью.

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Вычислите значение функции Эйри в  $x = 0$ :

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \cos\left(\frac{t^3}{3} + tx\right)$$

### Упражнение 2

Приближенно вычислите интеграл при  $x \rightarrow +\infty$

$$I(x) = \int_0^\infty \cos(x(t^2 - t^4)) dt$$

**Упражнение 3**

Получите разложение интегрального косинуса

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

в асимптотический ряд при  $x \rightarrow +\infty$ .

**Упражнение 4**

Получите разложение неполной гамма-функции

$$\Gamma(x, s) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

в асимптотический ряд при  $x \rightarrow +\infty$  и  $s \sim 1$ .

**Задача 1**

Вычислите асимптотику функции Бесселя  $n$ -ого порядка при  $x \gg n$ :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt.$$

Вычислите асимптотику при  $x \ll n$ . На основе двух асимптотик постройте график функции Бесселя (нужно сшить асимптотики при  $x \sim n$ ).

**Задача 2**

Приближенно вычислите интеграл

$$I(x) = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 t \cos(x \cos t) dt$$

при  $x \rightarrow +\infty$ .

# Глава 6

## Теория возмущений для линейных дифференциальных уравнений

### 6.1 Лекция (И.В. Колоколов)

Начнем с простейшего уравнения первого порядка:

$$\dot{x} = \lambda x. \quad (6.1)$$

Точка здесь обозначает производную по времени  $t$ . Для небольших  $t$  решение может быть получено простыми итерациями:

$$x(t) = x(0) + x^{(1)}, \quad x^{(1)} = x(0)\lambda t + x^{(2)}, \quad x^{(2)} = x(0)(\lambda t)^2 + x^{(3)} \dots \quad (6.2)$$

С другой стороны, для малых временных интервалов  $\epsilon$  уравнение (6.1) означает следующее:

$$x(t + \epsilon) = (1 + \epsilon\lambda)x(t). \quad (6.3)$$

Очевидным следствием этого равенства, вместе со вторым замечательным пределом, является соотношение:

$$x(t) = (1 + \epsilon\lambda)^{t/\epsilon} x(0) = e^{\lambda t} x(0). \quad (6.4)$$

Сравнивая с (6.2), мы получаем известное разложение числа  $e$ .

Очевидным является обобщение (6.4) для диагональных матриц: пусть  $\mathbf{x}$  -  $N$  - компонентный вектор:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix},$$

Уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{\Lambda}\mathbf{x},$$

где

$$\hat{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) \quad (6.5)$$

(то есть, диагональная матрица с элементами на диагонали  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ ) имеет очевидное решение:

$$\mathbf{x}(t) = (1 + \epsilon\hat{\Lambda})^{t/\epsilon}\mathbf{x}(0) = e^{\hat{\Lambda}t}\mathbf{x}(0)$$

$$e^{\hat{\Lambda}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_N t} \end{pmatrix}$$

Для любого преобразования подобия  $\hat{Q}$  матрицы  $\hat{M}$  и произвольной гладкой функции  $F(\hat{M})$ , имеет место матричное равенство:

$$F(\hat{M}) = \hat{Q}F(\hat{\Lambda})\hat{Q}^{-1},$$

Оно доказывается прямым разложением в ряд. Предположим далее, что матрица  $\hat{M}$  – диагонализуема, преобразование подобия  $\hat{Q}$  ее диагонализует и  $\hat{\Lambda}$  – диагональна, то есть, имеет вид (6.5). Тогда решением системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\dot{\mathbf{x}} = \hat{M}\mathbf{x},$$

является равенство:

$$\mathbf{x}(t) = \exp(\hat{M}t)\mathbf{x}(0) = \hat{Q}F(\hat{\Lambda}t)\hat{Q}^{-1}\mathbf{x}(0).$$

Если же система уравнений неавтономна и имеются возмущения  $\hat{V}(t)$ , явно зависящие от времени:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \hat{M} + \hat{V}(t) \right) \mathbf{x},$$

тогда обобщением равенства (6.3) является следующее:

$$\mathbf{x}(t) = T \exp \left[ \int_0^t d\tau \left( \hat{M} + \hat{V}(\tau) \right) \right] \mathbf{x}(0),$$

где знак  $T \exp$  обозначает упорядоченную экспоненту, определяемую в общем случае так:

$$T \exp \left[ \int_0^t d\tau \hat{G}(\tau) \right] = \left( 1 + \epsilon\hat{G}(t) \right) \left( 1 + \epsilon\hat{G}(t - \epsilon) \right) \left( 1 + \epsilon\hat{G}(t - 2\epsilon) \right) \dots \quad (6.6)$$

Стоит отметить, что такого рода операторы  $\hat{G}(\tau)$  возникают во множестве других задач и могут действовать и в функциональном пространстве (быть операторами дифференцирования, умножения на функцию и т.д.)

Упорядоченные экспоненты в общем случае не выражаются явно как функционалы от матричнозначных функций типа  $\hat{V}(\tau)$ . Однако если такое возмущение мало, то осмыслена попытка разложения в ряд по  $\hat{V}(\tau)$ . В произведении в (6.6) в первом порядке по  $\hat{V}(\tau)$  каждый сомножитель может быть разложен один раз, сумма по таким «инфинитезимальным» разложениям является интегральной суммой и результат первого порядка может быть представлен в виде::

$$\mathbf{x}(t) \approx e^{\hat{M}t} \mathbf{x}(0) + \int_0^t d\tau e^{\hat{M}(t-\tau)} \hat{V}(\tau) e^{\hat{M}\tau} \mathbf{x}(0). \quad (6.7)$$

В качестве примера рассмотрим уравнение движения осциллятора с переменной во времени частотой:

$$\ddot{x} + \omega^2 x + f(t)x = 0.$$

Его можно переписать как систему линейных уравнений первого порядка, приводимую к матричному виду:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - f(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

Пусть сначала  $f(t) = 0$ . Тогда диагонализующее преобразование, которое находится элементарно, комплексно и имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \hat{Q} \begin{pmatrix} a(t) \\ a^*(t) \end{pmatrix}, \quad \hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \quad \hat{Q}^{-1} = \frac{i}{2\omega} \begin{pmatrix} -i\omega & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix},$$

Уравнение движения в новых «круговых» переменных  $a, a^*$  имеют простой вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = \hat{\sigma} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}.$$

и также просто решаются:

$$a(t) = e^{i\omega t} a(0), \quad a^*(t) = e^{-i\omega t} a^*(0).$$

Вернёмся к возмущённому уравнению (6.8). В «круговых» переменных  $a, a^*$  оно принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = [\hat{\sigma} + \hat{V}(t)] \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix}, \quad \hat{V}(t) = \frac{i}{2\omega} f(t) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение эволюционной задачи с точностью до первого порядка по  $f(t)$ , согласно (6.7), представляется в виде:

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ a^*(t) \end{pmatrix} = [\hat{U}_0(t) + \delta\hat{U}(t)] \begin{pmatrix} a(0) \\ a^*(0) \end{pmatrix},$$

$$\hat{U}_0(t) = \begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}, \quad \delta\hat{U}(t) \approx \frac{i}{2\omega} \int_0^t d\tau f(\tau) \begin{pmatrix} e^{i\omega\tau} & e^{i\omega(t-2\tau)} \\ -e^{-i\omega(t-2\tau)} & -e^{-i\omega\tau} \end{pmatrix}.$$

Возмущение решения может расти со временем и становиться немалым даже при малой амплитуде возмущения уравнения. Например, для гармонической  $f(t)$  с частотой, равной удвоенной частоте осциллятора при  $\omega t \gg 1$

$$f(t) = \varepsilon \cos(2\omega t), \quad \delta\hat{U}(t) \approx \frac{i\varepsilon t}{4\omega} \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ -e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}.$$

получаем линейный со временем рост отклонения решения от невозмущенного. Это явление называется параметрическим резонансом. При  $\varepsilon t/\omega \sim 1$  первый порядок теории возмущений даже при  $\varepsilon \ll \omega^2$  уже не работает, и для построения решения нужны более тонкие методы (метод усреднения).

## 6.2 Семинар по теме «Дифференциальные уравнения»

### Задача 1 (разложение в ряд)

Часто решение линейного дифференциального уравнения можно найти в виде разложения в ряд по степеням  $x$ . Проиллюстрируем это на примере. Найдём решение дифференциального уравнения Бесселя

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) + y(x) = 0$$

в виде разложения  $y(x) = \sum_k a_k x^k$ . Функцией Бесселя называется такое решение, которое в нуле регулярно и  $J_0(0) = 1$ .

### Решение

Подставляя  $y(x)$  в нужном виде в уравнение, мы получаем:

$$\sum_k k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_k a_k k x^{k-2} + \sum_k a_k x^k = 0$$

$$\sum_k (k^2 a_k + a_{k-2}) x^{k-2} = 0$$

Приравнявая коэффициенты при различных степенях  $x$  нулю, мы получаем рекуррентное соотношение  $a_k = -\frac{1}{k^2} a_{k-2}$ . Поскольку коэффициенты выражаются друг через друга через один, то для того, чтобы полностью задать решение, необходимо задать ровно два коэффициента. Поскольку мы требуем

регулярности функции в нуле, то она не может содержать отрицательные степени  $k$ . Таким образом, следуют следующие условия на коэффициенты:

$$a_0 = 1; \quad a_{-k} = 0, \quad \forall k > 0$$

Из этого мы заключаем, что все нечётные члены равны нулю  $a_{2k-1} \equiv 0$ ; а чётные равны:

$$a_{2k} = \frac{-1}{(2k)^2} \cdot \frac{-1}{(2(k-1))^2} \cdot \dots \cdot \frac{-1}{2^2} \cdot (-1) = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}$$

$$y(x) \equiv J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

Здесь необходим комментарий. Уравнение Бесселя имеет второй порядок по производной. Это, точно также, как и для гармонического осциллятора, означает, что имеется два линейно независимых решения. С другой стороны, используя разложение в ряд мы однозначно (с точностью до домножения на произвольную постоянную) нашли только одно решение. Встает вопрос: куда делось еще одно решение? Ответ состоит в том, что другое решение (которое обычно обозначают  $Y_0(x)$  и называют функцией Неймана) не раскладывается в ряд в окрестности  $x = 0$ . Более точно, при малых  $x$   $Y_0(x) \simeq \frac{2}{\pi} \ln x$ . Мы же, в свое время, при нахождении решения требовали его регулярности.

## Задача 2 (математический маятник)

Рассмотрим классическое дифференциальное уравнение движения математического маятника ( $\omega^2 = \frac{g}{l}$ ):

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi$$

Если из положения равновесия маятнику придать необходимую начальную скорость, конечное положение маятника может оказаться точно перевернутым. Найдём такое решение.

### Решение

Для такого уравнения можно записать некую сохраняющуюся величину  $E[\varphi(t)]$  (так называемый “первым интегралом”; он может зависеть как от  $\varphi$  в некий момент времени, так и от производных). Сохранение этой величины означает, что для любого  $\varphi(t)$  - решения уравнения, будет выполнено  $\frac{d}{dt} E[\varphi(t)] \equiv 0$ . В данном случае, выражение для первого интеграла можно написать из физических соображений — известно, что для консервативных систем имеется закон сохранения энергии; в нашем случае его можно записать как:

$$E[\varphi(t)] = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi$$

Действительно:

$$\frac{d}{dt}E[\varphi(t)] = \ddot{\varphi}\dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi \dot{\varphi} = \dot{\varphi}(\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi) \equiv 0$$

Заметим, что если имеют место колебания амплитуды  $\phi_0$ , то  $E = -\omega^2 \cos \varphi_0$ .

При помощи первых интегралов можно понижать степень уравнения. Действительно, если величина  $E$  сохраняется, то мы можем просто записать уравнение уже первого порядка, которое является уравнением с разделяющимися переменными. Кроме того, подставим значение энергии через амплитуду колебаний  $\phi_0$ .

$$E = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \omega^2 \cos \varphi$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}} = \omega dt$$

Вернемся к поиску решения  $\varphi(t)$ . Если теперь проинтегрировать полученное тождество и разрешить его, выразив  $\varphi(t)$ , мы полностью решим задачу в общем виде. Однако, в общем случае интеграл в левой части не выражается через элементарные функции; для таких интегралов введен целый класс специальных функций, называемые эллиптическими интегралами. В случае малых  $\varphi_0$  его можно взять приближённо, заменив  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ; полученный ответ будет ни чем иным как гармоническим решением  $\sin(\omega t + \varphi_0)$ .

С другой стороны, есть ещё один специальный случай, когда это уравнение можно решить точно — случай  $\varphi_0 = \pi$ . При этом мы получаем:

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2(1 + \cos \varphi)}} = t - t_0 \Leftrightarrow \int \frac{d\varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} = \omega(t - t_0)$$

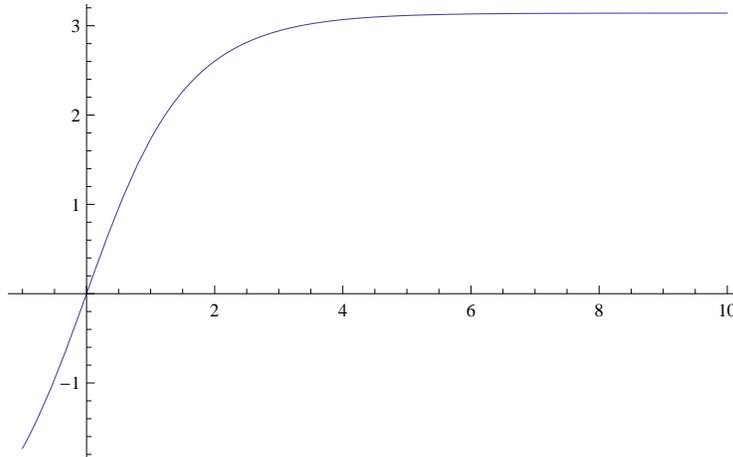
Интеграл берётся:

$$\int \frac{d\varphi}{2 \cos \frac{\varphi}{2}} = \int \frac{d(\sin \frac{\varphi}{2})}{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \left| \begin{array}{l} \sin \frac{\varphi}{2} = \tanh z \\ d(\sin \frac{\varphi}{2}) = \frac{dz}{\cosh^2 z} \end{array} \right| = \int dz = z = \operatorname{arctanh} \sin \frac{\varphi}{2}$$

Тем самым, выражая  $\varphi(t)$ :

$$\varphi(t) = 2 \operatorname{arcsin} \tanh \omega(t - t_0)$$

Заметим, что для того, чтобы маятнику “добраться” до точки  $\varphi = \pi$ , ему требуется бесконечное время (он лишь асимптотически приближается к этому значению). В обратную сторону это означает, что из вертикального положения маятник будет падать вечно; что, конечно, соответствует тому факту, что  $\varphi = \pi$  — тоже положение равновесия системы.

Рис. 6.1: Решение  $\varphi(t)$ 

### Задача 3

Воспользуемся аппаратом матричных экспонент для того, чтобы решить следующую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

с начальным условием

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

### Решение

В соответствии с материалом лекции, решение задачи выражается через матричную экспоненту следующим образом

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}$$

Для того, чтобы вычислить матричную экспоненту, необходимо диагонализировать матрицу  $A$ . Первый шаг в этой процедуре — нахождение собственных значений при помощи секулярного уравнения

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ -3 & 4 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2$$

Следующий шаг — нахождение собственных векторов. Для этого необходимо решить систему линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} -1 - \lambda_{1/2} & 2 \\ -3 & 4 - \lambda_{1/2} \end{pmatrix} h_{1/2} = 0 \quad \rightarrow \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Тогда матрица перехода к диагональному базису записывается как

$$S = (h_1 \ h_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Для матричной экспоненты получаем

$$e^{At} = S e^{A_\lambda} S^{-1}, \quad A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Вычисляя матрицу, обратную к матрице перехода, приходим к следующему выражению

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} & -2e^t + 2e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{2t} & -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

Стало быть, решение задачи с данным начальным условием  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$  дается следующим выражением

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3e^t - 2e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{2t} \end{pmatrix}$$

### Приложение: матричная экспонента от Жордановой клетки

Стоит иметь в виду, что *не любую* матрицу можно диагонализировать. При этом, согласно теореме Жордана, совершенно *любую* матрицу можно привести к Жордановому виду — блок-диагональной форме, в которой каждый блок представляет собой сумму  $\lambda E + M$ , где  $\lambda$  - некоторое число,  $E$  - единичная матрица, а  $M$  - матрица вида

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & & & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Комбинация  $\lambda E + M$  называется Жордановой клеткой. Возникает уместный вопрос: как вычислять матричную экспоненту для такой Жордановой клетки?

Не углубляясь в детали, рассмотрим пример взятия матричной экспоненты от Жордановой матрицы размера  $2 \times 2$ . Таким образом, мы изучаем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Разобьем ее

$$A = \lambda E + M, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что

$$M^2 = 0,$$

а тогда равны нулю и все степени  $M$ , кроме нулевой и первой. Это соображение позволяет нам очень легко вычислить произвольную степень  $n$  матрицы  $A$ , используя бином Ньютона

$$A^n = \lambda^n E + n\lambda^{n-1}M$$

Видим, что

$$e^{tA} = e^{\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda^{n-1} \frac{t^n}{n!} M = e^{\lambda t} + M \frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{t^n}{n!} = e^{\lambda t} + M \frac{\partial}{\partial \lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda t} (E + tM)$$

Иными словами,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

В заключение отметим, что для Жордановых клеток размера, больше чем  $2 \times 2$ , помимо линейных по  $t$  элементов, могут появиться элементы с высшими степенями  $t$ .

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Движение маятника в нелинейном пределе описывается следующим уравнением:

$$\frac{d\phi}{dt} = \pm \omega \sqrt{2(\cos \phi - \cos \phi_0)},$$

где  $\phi_0$  - его максимальное отклонение от положения равновесия в процессе движения. Пусть в начальный момент он практически перевернут, то есть  $\phi(0) = \phi_0 = \pi - \delta\phi$ ,  $\dot{\phi}(0) = 0$ , где  $\delta\phi \ll 1$ . Оцените время падения маятника до положения  $\phi = 0$ .

### Упражнение 2

Используя матричную экспоненту, решите систему дифференциальных уравнений

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Упражнение 3**

Используя представление через ряд, найдите матричную экспоненту от матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Упражнение 4**

Найдите общее решение уравнения движения маятника с вязким трением:

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega^2x(t) = 0.$$

Качественно проанализируйте различные режимы движения в зависимости от соотношения между  $\gamma$  и  $\omega$ .

**Задача 1**

В сверхпроводнике электроны ведут себя принципиально отлично от электронов в обычном металле. В определенном смысле, они движутся парами (такие пары называются куперовскими). Для макроскопическом описания такого поведения вводят функцию  $\psi$ , которая в каждой точке пропорциональна  $\sqrt{n}$ , где  $n$  - плотность куперовских пар, а в толще сверхпроводника равна 1.

Уравнение, которое описывает поведение функции  $\psi$  называется уравнением Гинзбурга-Ландау. В простейшем случае, оно имеет вид

$$-\xi^2 \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi + \psi^3 = 0,$$

где  $\xi$  - некоторая величина размерности расстояния.

Применим его, чтобы описать контакт сверхпроводника с обычным металлом. Пусть полупространство  $x > 0$  занимает сверхпроводник, а полупространство  $x < 0$  - нормальный металл. Для простоты будем считать, что куперовские пары совсем не проникают в металл, то есть  $\psi(0) = 0$ . Учитывая, что  $\psi(+\infty) = 1$ , найдите  $\psi(x)$ .

**Задача 2**

Введем набор из трех эрмитовых матриц размера 2 на 2, которые называются матрицами Паули:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно определить скалярное произведение произвольного вектора  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)^T$  на вектор из матриц Паули  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$  стандартным образом:  $(\vec{a} \cdot \vec{\sigma}) = \sum_{i=x,y,z} a_i \sigma_i$ .

Вычислите следующую матричную экспоненту

$$e^{i\tau(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})},$$

где  $\vec{n}$  - единичный вектор с произвольным направлением, а  $\tau$  - произвольное действительное число.

*Примечание: выражение такого типа естественным образом возникает в квантовой механике при описании движения магнитного момента электрона в магнитном поле. В этом случае вектор  $\vec{n}$  задает направление поля  $\vec{B}$ , а  $\tau \sim Bt$ , где  $t$  - время.*

# Глава 7

## Теория возмущений при наличии резонансов

### 7.1 Лекция (В.В. Лебедев)

В различных физических контекстах встречаются задачи, содержащие один или несколько малых параметров. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда в задаче имеется один малый параметр, который мы обозначаем  $\epsilon$ . Особенно интересен случай, когда решение задачи при  $\epsilon = 0$  известно. Тогда решение исходной задачи можно строить в виде разложения по малому параметру  $\epsilon$ , такое разложение называется теорией возмущений. Например, в рамках теории возмущений можно обычно рассматривать взаимодействие излучения с веществом.

Если мы решаем обычные (алгебраические или трансцендентные) уравнения, содержащие малый параметр  $\epsilon$ , то конечный результат мало отличается от невозмущенного (то есть получающегося при  $\epsilon = 0$ ) решения  $x_0$ . Как правило, отклонение точного решения от решения невозмущенного уравнения (то есть уравнения, в котором  $\epsilon$  положен равным нулю) получается в виде ряда по  $\epsilon$ . Для построения этого ряда можно использовать итерационный процесс. С этой целью в члены, пропорциональные  $\epsilon$ , подставляется значение  $x_0$ , после чего находится поправка  $x_1$  к  $x_0$ . Далее уточненное значение  $x_0 + x_1$  подставляется в члены, пропорциональные  $\epsilon$ , и находится поправка  $x_2$ . Продолжая эту процедуру, мы находим разложение по  $\epsilon$  точного решения уравнения  $x = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ .

- Найти первые две поправки по  $\epsilon$  к невозмущенному решению  $x_0 = 1$  уравнения  $x^2 - 1 = \epsilon x$ . Сравните результат с точным решением.

Если возмущение происходит в точке вырождения (когда несколько решений невозмущенного уравнения совпадают), то разложение решения может происходить по нецелым степеням  $\epsilon$ . Например, решения уравнения  $(x - 1)^2 = \epsilon$  имеют вид  $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\epsilon}$ . Однако даже в этих вырожденных случаях решение возмущенного уравнения при малых  $\epsilon$  близко к решению невозмущенного.

- Найти первые две поправки по  $\epsilon$  к невозмущенному решению  $x_0 = 1$  уравнения  $(x - 1)^3 = \epsilon x$ .

Подобная теория возмущений может быть развита и для динамических систем, описываемых эволюционными дифференциальными уравнениями. Однако в ряде случаев, связанных с разного рода резонансами, область применимости прямой теории возмущений оказывается ограниченной по времени, то есть точность разложения решения по  $\epsilon$  падает с ростом времени  $t$ . Чтобы повысить эту точность, следует несколько модифицировать теорию возмущений. Этой модификации и посвящена настоящая лекция.

В качестве стартового примера рассмотрим задачу Коши для гармонического осциллятора с возмущенной частотой:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \nu^2 x. \quad (7.1)$$

Будем рассматривать начальные условия  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Тогда уравнение (7.1) имеет очевидное решение

$$x(t) = a \cos(\nu t \sqrt{1 + \epsilon}), \quad (7.2)$$

которое надо сравнивать с решением невозмущенного уравнения (при  $\epsilon = 0$ )  $x_0 = a \cos(\nu t)$ . Мы видим, что при  $\nu t \epsilon \sim 1$  отклонение решения  $x(t)$  от невозмущенного решения  $x_0(t) = a \cos(\nu t)$  станет существенным:  $x(t) - x_0(t) \sim x_0(t)$ .

Будем теперь решать эту задачу по теории возмущений. В правой части уравнения (7.1) стоит малый множитель  $\epsilon$ , поэтому оно может быть использовано для формулировки итерационной процедуры: сначала мы подставляем в правую часть уравнения невозмущенное решение  $x_0(t)$ , находим первую по  $\epsilon$  поправку  $x_1(t)$ , подставляем ее в правую часть уравнения (7.1), находим вторую по  $\epsilon$  поправку  $x_2(t)$ , и так далее. Уже на первом шаге итерационной процедуры становится ясной причина аномального поведения  $x - x_0$  по времени. Действительно, при подстановке  $x_0$  в правую часть уравнения (7.1) возникает резонанс (поскольку  $x_0$  меняется с частотой  $\nu$ ), и потому поправка  $x_1$  содержит, помимо осциллирующего множителя, еще и линейный по времени. (Это так называемое секулярное или смешанное поведение.) Из-за наличия этого множителя и падает со временем точность теории возмущений. Найдем явно поправку  $x_1$ .

Для этого сначала используем решение неоднородной задачи Коши  $\ddot{x} + \nu^2 x = \phi(t)$  с начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ :

$$x(t) = a \cos(\nu t) + \frac{1}{\nu} \int_0^t d\tau \sin[\nu(t - \tau)] \phi(\tau).$$

Подставляя сюда  $\phi = -\epsilon \nu^2 x$ , находим уравнение

$$x(t) - a \cos(\nu t) = -\epsilon \nu \sin(\nu t) \int_0^t d\tau x(\tau) \cos(\nu \tau) + \epsilon \nu \cos(\nu t) \int_0^t d\tau x(\tau) \sin(\nu \tau) \quad (7.3)$$

эквивалентное исходному (7.1). Теперь мы можем найти  $x_1$ , просто подставив  $x_0$  в правую часть 7.3. Беря возникающие при этом интегралы, находим

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}a\epsilon t\nu \sin(\nu t). \quad (7.4)$$

Таким образом, мы убеждаемся, что прямая теория возмущений работает только на временах  $t \ll \nu^{-1}\epsilon^{-1}$ .

С другой стороны, как видно из точного решения (7.2), при любом  $t$  решение уравнения (7.1) можно записать в виде  $x(t) = A \cos(\nu t + \phi)$ , где  $A$  и  $\phi$  – некоторые зависящие от времени параметры. Подставляя выражение  $x(t) = A \cos(\nu t + \phi)$  в исходное уравнение (7.1), и приравнявая коэффициенты при синусе и косинусе, находим систему уравнений

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\epsilon\nu^2 A, \quad (7.5)$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = 0, \quad (7.6)$$

эквивалентную исходному уравнению (7.1). Система уравнений (7.5), (7.6) имеет решение  $A = \text{const}$ ,  $\dot{\phi} = \text{const}$ . В главном по  $\epsilon$  порядке уравнение (7.5) дает  $\dot{\phi} = \epsilon\nu/2$ , то есть решение имеет вид  $x = a \cos(\nu t + \epsilon\nu t/2)$ . Сравнивая этот ответ с выражением (7.2), мы заключаем, что найденное приближенное решение отклоняется от точного решения только на временах порядка  $\nu^{-1}\epsilon^{-2}$ , что существенно улучшает точность по сравнению с прямой теорией возмущений. Более того, решение полного уравнения на производную от фазы  $2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2 = \epsilon\nu^2$  эквивалентно точному решению.

Спрашивается, что же позволило столь радикально повысить точность теории возмущений? Для этого вернемся к уравнению (7.1) и заметим, что  $A \cos(\nu t + \phi)$  с постоянными (не зависящими от времени)  $A$  и  $\phi$  являются общим решением невозмущенного уравнения. При включении возмущения (члена с  $\epsilon$ ) решение сохраняет свой вид, но параметры  $A$  и  $\phi$  становятся функциями времени, они испытывают медленную систематическую эволюцию на больших временах, то есть  $\dot{A}/A$  и  $\dot{\phi}$  являются малыми величинами в сравнении с частотой  $\nu$ . Уравнения для  $A$  и  $\phi$  не содержат никаких осциллирующих множителей, и потому их решение не чувствительно к резонансу и дает более точное приближение, чем прямая теория возмущений. Это наблюдение может быть обобщено. Для решения уравнения, в котором имеется резонансное возмущение, надо взять сначала решение невозмущенного уравнения, а затем сделать входящие в него параметры медленными функциями времени, динамика которых определяется возмущением. Такая стратегия позволит в рамках разложения по  $\epsilon$  получить гораздо большую точность, чем прямая теория возмущений.

Продемонстрируем на нескольких примерах, как работает эта логика. Рассмотрим нелинейную задачу:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon x^3. \quad (7.7)$$

Найдем ее приближительное решение, скажем, с теми же начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Как и раньше, решение невозмущенного решения имеет вид  $x_0 = a \cos(\nu t)$ . Попытка решения уравнения (7.7) итерациями сразу показывает наличие секулярной проблемы, поскольку в разложении  $x_0^3$  по

тригонометрическим функциям присутствуют члены с частотой  $\nu$ , что приводит к резонансу. Поэтому, как и раньше, прямая теории возмущений работает на конечном временном интервале, в данном случае при  $t \lesssim a^{-2}\nu^{-1}\epsilon^{-1}$ .

- Будут ли существенно отличаться решения возмущенного и невозмущенного уравнения  $\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon x^2$  при  $t \sim \nu^{-1}\epsilon^{-1}a^{-1}$ ?

Как и раньше, для формулировки улучшенной теории возмущений мы используем выражение  $x = A \cos(\nu t + \phi)$ , которое диктуется невозмущенным уравнением. Подставляя это выражение в правую часть уравнения (7.7) и приравнивая к нулю коэффициенты при  $\cos(\nu t + \phi)$  и  $\sin(\nu t + \phi)$ , мы находим

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\frac{3}{4}\epsilon A^3, \quad (7.8)$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = 0, \quad (7.9)$$

вместо (7.5),(7.6). Обратим внимание на то, что система (7.8), (7.9) уже не эквивалентна уравнению (7.7), поскольку при подстановке  $x = A \cos(\nu t + \phi)$  в правую часть уравнения (7.7) помимо члена, пропорционального  $\cos(\nu t + \phi)$ , возникает член, пропорциональный  $\cos(3\nu t + 3\phi)$ , который порождает дополнительную поправку к  $x$ . Однако в силу нерезонансного характера  $\cos(3\nu t + 3\phi)$  порождаемая им поправка к  $x$  оказывается малой (при малом  $\epsilon$ ) на всех временах. Поэтому мы пренебрегаем этой поправкой. В ведущем порядке по  $\epsilon$  мы находим из системы (7.8),(7.9)

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{\phi} = \frac{3}{8\nu}A^2\epsilon.$$

Решением этой системы является  $A = a$  и

$$x(t) \approx a \cos \left[ \left( \nu + \frac{3}{8\nu}a^2\epsilon \right) t \right]. \quad (7.10)$$

Таким образом, решение имеет такой же вид, как и невозмущенное решение, но со сдвинутой по сравнению с невозмущенным значением  $\nu$  частотой

$$\nu + \frac{3}{8\nu}a^2\epsilon,$$

причем сдвиг частоты зависит от амплитуды колебания  $a$ . Это явление называется нелинейным сдвигом частоты.

Рассмотрим теперь пример неавтономной системы, а именно уравнение

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \cos(\Omega t)x, \quad (7.11)$$

которое описывает параметрический резонанс. При решении этого уравнения итерациями в правой части возникает резонансный член (с частотой  $\nu$ ), если  $\Omega = 2\nu$ . Проанализируем этот случай, предполагая малость  $\epsilon$ , то есть  $\epsilon \ll \nu^2$ .

Как и раньше, используем представление  $x = A \cos(\nu t + \phi)$ . Подставляя это выражение в правую часть уравнения (7.11), сохраняя только резонансные члены и приравнявая коэффициенты при  $\cos(\nu t + \phi)$  и  $\sin(\nu t + \phi)$ , находим

$$\ddot{A} - (2\nu\dot{\phi} + \dot{\phi}^2)A = -\frac{1}{2}\epsilon A \cos(2\phi), \quad (7.12)$$

$$2(\nu + \dot{\phi})\dot{A} + \ddot{\phi}A = \frac{1}{2}\epsilon A \sin(2\phi). \quad (7.13)$$

Решение этой системы имеет иной характер, чем ранее. Вне зависимости от начальных условий на больших временах угол  $\phi$  выходит на константу, близкую к  $\pi/4$ . Пренебрегая членами с  $\dot{\phi}$  и  $\ddot{\phi}$  в уравнении (7.13), находим  $4\nu\dot{A} = \epsilon A$ , то есть амплитуда  $A$  экспоненциально растет со временем:

$$A \propto \exp\left(\frac{\epsilon t}{4\nu}\right).$$

Что же касается отличия угла  $\phi$  от  $\pi/4$ , то его можно найти из уравнения (7.12), которое дает

$$\cos(2\phi) = -\frac{\epsilon}{8\nu^2},$$

что по предположению много меньше единицы.

## 7.2 Семинар по теме «Возмущения в дифференциальных уравнениях»

### Исследование гармонического осциллятора с возбуждающей силой

Найдём общее решение дифференциального уравнения гармонического осциллятора с произвольной возмущающей силой:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \phi(t)$$

Для этого воспользуемся методом вариации постоянных. Используя решение однородного уравнения (с  $\phi(t) \equiv 0$ ), запишем подстановку в виде:

$$x(t) = C_1(t) \cos \omega t + C_2(t) \sin \omega t$$

Очевидно, что поставленная так задача избыточна (имеются целых 2 произвольных функции). Для того, чтобы задача имела однозначное решение, наложим дополнительные ограничения. А именно, потребуем, чтобы при дальнейших дифференцированиях члены с первыми производными констант пропадали:

$$\dot{x} = \dot{C}_1 \cos \omega t - \omega C_1 \sin \omega t + \dot{C}_2 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

Поэтому требуем:

$$\dot{C}_1 \cos \omega t + \dot{C}_2 \sin \omega t \equiv 0 \Rightarrow \dot{x} = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

Дифференцируем:

$$\ddot{x} = -\omega \dot{C}_1 \sin \omega t - \omega^2 C_1 \cos \omega t + \omega \dot{C}_2 \cos \omega t - \omega^2 C_2 \sin \omega t$$

Подставляем в уравнение; получаем, вместе с дополнительным условием, затребованном выше:

$$\begin{cases} \dot{C}_1 \cos \omega t + \dot{C}_2 \sin \omega t & = 0 \\ \dot{C}_1 (-\omega \sin \omega t) + \dot{C}_2 (\omega \cos \omega t) & = \phi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = -\frac{1}{\omega} \phi(t) \sin \omega t \\ \dot{C}_2 = \frac{1}{\omega} \phi(t) \cos \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \phi(\tau) \sin \omega \tau d\tau + \tilde{C}_1 \\ C_2 = \frac{1}{\omega} \int_0^t \phi(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \tilde{C}_2 \end{cases}$$

Значит, решение исходного неоднородного уравнения записывается как:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) \phi(\tau) d\tau$$

Интересно, что такой вид ответа — общий. Решение всякого неоднородного линейного уравнения можно записать в виде:

$$x(t) = x_0(t) + \int_{t_0}^t G(t, \tau) \phi(\tau) d\tau$$

(где  $x_0(t)$  — решение однородного уравнения; а постоянную  $t_0$  можно выбрать произвольной); причём если уравнение однородно по времени (не зависит явно от времени), то  $G(t, \tau) \equiv G(t - \tau)$ . Функция  $G(t, \tau)$  называется функцией Грина этого уравнения.

## Задача 1 (теория возмущений)

При помощи изложенного выше метода можно исследовать задачи с возмущением. Исследуем задачу:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x & = -\epsilon \omega^2 x \\ x(0) & = a \\ \dot{x}(0) & = 0 \end{cases}$$

**Решение**

Точное её решение записывается как:

$$x(t) = a \cos(\sqrt{1 + \epsilon} \omega t) \approx a \cos \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \epsilon - \frac{1}{8} \epsilon^2 \right) \omega t \right) \approx a \cos \omega t - \frac{1}{2} \epsilon \omega t a \sin \omega t - \frac{1}{8} \epsilon^2 a (\omega t \sin \omega t - \omega^2 t^2 \cos \omega t)$$

Эта асимптотика работает на временах  $\epsilon \omega t \ll 1$ . На примере этой простой задачи продемонстрируем, как разложение по  $\epsilon$  можно получить по-другому, используя метод итераций. Если мы подставим решение в виде  $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon^2 x_2(t) + \dots$  и соберём члены с одинаковыми степенями  $\epsilon$ , то мы получим систему уравнений:

$$\ddot{x}_k + \omega^2 x_k = -\omega^2 x_{k-1}$$

Система уравнений в таком виде позволяет построить итерационный процесс, находя поправки высших порядков по  $\epsilon$ . Используя метод, изложенный выше, можно записать:

$$x_k(t) = -\omega \int_0^t \sin \omega(t - \tau) x_{k-1}(\tau) d\tau$$

Начальное приближение записывается как  $x_0(t) = a \cos \omega t$ . Таким образом, первая поправка находится как:

$$x_1(t) = -\omega \int_0^t \sin \omega(t - \tau) a \cos \omega \tau d\tau = -\frac{1}{2} a \omega t \sin \omega t$$

Мы видим, что эта поправка совпадает с точным разложением. Вторая поправка:

$$x_2(t) = -\omega \int_0^t \sin \omega(t - \tau) \left( -\frac{1}{2} a \omega \tau \sin \omega \tau \right) d\tau = \frac{1}{8} a \omega^2 t^2 \cos \omega t - \frac{1}{8} a \omega t \sin \omega t$$

Исходя из этого, с точностью до  $\epsilon^2$  мы получаем ответ (конечно, совпадающий с разложением точного ответа, полученного выше):

$$x(t) \approx a \cos \omega t - \epsilon \cdot \frac{1}{2} a \omega t \sin \omega t + \epsilon^2 \cdot \frac{1}{8} a \omega t (\omega t \cos \omega t - \sin \omega t)$$

Повторимся, что эта асимптотика работает на сравнительно малых временах, при условии  $\omega t \ll \epsilon^{-1}$ . Способ получения асимптотик, работающих на больших временах, включает в себя выделение “быстрых” и “медленных” степеней свободы; этот способ был изложен в лекции, а также частично будет изложен ниже.

**Задача 2 (ангармонический осциллятор)**

Рассмотрим приближенное решение уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x &= -\epsilon x^3 \\ x(0) &= a \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$$

**Решение**

Метод, изложенный в задаче 1, можно применить и тут. Раскладывая по малости  $\epsilon$  решение в виде  $x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t)$ , мы получаем следующую систему уравнений, дающую нам первый шаг итерационного процесса:

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \\ \ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = -x_0^3 \end{cases}$$

Первое уравнение опять имеет такое же невозмущенное решение  $x_0(t) = a \cos \omega t$ ; решение второго уравнения записывается с помощью функции Грина:

$$x_1(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t - \tau) \cdot a^3 \cos^3 \omega \tau \cdot d\tau = -\frac{a^3}{\omega} \int_0^t [\sin \omega t \cos \omega \tau - \sin \omega \tau \cos \omega t] \cos^3 \omega \tau \cdot d\tau$$

Интегрируя, и используя формулы понижения степени, мы приходим к результату:

$$x_1(t) = -\frac{a^3}{\omega^2} \left( \frac{3}{8} \omega t \sin \omega t + \frac{1}{32} \cos \omega t - \frac{1}{32} \cos 3\omega t \right)$$

Мы получили интересный физический результат: в нелинейном осциляторе появилось колебание с третьей гармоникой (то есть с частотой  $3\omega$  вместо  $\omega$ ).

**Задача 3 (параметрический резонанс)**

Рассмотрим теперь уравнение:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = -\epsilon x \cos \Omega t \\ x(0) = a \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

в условиях близости к параметрическому резонансу  $\Omega = 2\omega - \gamma$  ( $\gamma \lesssim \frac{\epsilon}{2\omega}$ ,  $\epsilon \ll \omega^2$ )

**Решение**

Будем искать решение в виде:

$$x(t) = A(t) \cos(\omega t + \phi(t))$$

Формальная подстановка даёт:

$$\dot{x} = \dot{A} \cos(\omega t + \phi) - A(\omega + \dot{\phi}) \sin(\omega t + \phi)$$

$$\ddot{x} = \ddot{A} \cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}(\omega + \dot{\phi}) \sin(\omega t + \phi) - (\omega + \dot{\phi})^2 A \cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi} \sin(\omega t + \phi)$$

Получаем:

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}(\omega + \dot{\phi}) \sin(\omega t + \phi) - \\ & - \left(2\omega\dot{\phi} + \dot{\phi}^2\right) A \cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi} \sin(\omega t + \phi) = -\epsilon A \cos(\omega t + \phi) \cos \Omega t \end{aligned}$$

Правую часть можно представить в виде  $\frac{1}{2}(\cos(\omega t + \phi + \Omega t) + \cos(\Omega t - \omega t - \phi))$ . При  $\Omega \sim 2\omega$ , первый член будет близок к  $\cos 3\omega t$ . В этом смысле он отвечает за третью гармонику и нас не интересует; выбросим его. Получаем:

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos(\omega t + \phi) - 2\dot{A}(\omega + \dot{\phi}) \sin(\omega t + \phi) - \\ & - (2\omega\dot{\phi} + \dot{\phi}^2) A \cos(\omega t + \phi) - A\ddot{\phi} \sin(\omega t + \phi) = -\frac{\epsilon A}{2} \cos(\omega t + \gamma t - \phi) \end{aligned}$$

Из структуры уравнения видно, что если взять  $\phi = \frac{\gamma t}{2} + \varphi$ , все тригонометрические функции будут одного и того же вида (осциллировать с одинаковой частотой). Поэтому, обозначив  $\omega' = \omega + \frac{\gamma}{2}$ :

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos(\omega' t + \varphi) - 2\dot{A}(\omega' + \dot{\varphi}) \sin(\omega' t + \varphi) - \\ & - \left(2\omega \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A \cos(\omega' t + \varphi) - A\ddot{\varphi} \sin(\omega' t + \varphi) = -\frac{\epsilon A}{2} \cos(\omega' t - \varphi) \end{aligned}$$

Собирая члены при “быстрых” осциллирующих функциях  $\cos \omega' t$  и  $\sin \omega' t$ , мы получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} & \ddot{A} \cos \varphi - 2\dot{A}(\omega' + \dot{\varphi}) \sin \varphi - \left(2\omega \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A \cos \varphi - A\ddot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{\epsilon A}{2} \cos \varphi \\ & -\ddot{A} \sin \varphi - 2\dot{A}(\omega' + \dot{\varphi}) \cos \varphi + \left(2\omega \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \dot{\varphi}\right)^2\right) A \sin \varphi - A\ddot{\varphi} \cos \varphi = -\frac{\epsilon A}{2} \sin \varphi \end{aligned}$$

Мы ожидаем, что  $A$  и  $\varphi$  - медленные переменные; это означает, что всякое дифференцирование этих переменных должно давать дополнительную малость. В ведущем приближении это позволяет выбросить члены  $\ddot{A}$ ,  $\ddot{\varphi}$ ,  $\dot{\varphi}^2$  и  $\dot{A} \cdot \dot{\varphi}$  (те, в которых производных две). Кроме того, имеется просто малость  $\gamma \ll \omega$ . Это позволяет нам сильно упростить систему:

$$\begin{cases} -2\dot{A}\omega' \sin \varphi - \omega(\gamma + 2\dot{\varphi})A \cos \varphi & = -\frac{\epsilon A}{2} \cos \varphi \\ -2\dot{A}\omega' \cos \varphi + \omega(\gamma + 2\dot{\varphi})A \sin \varphi & = -\frac{\epsilon A}{2} \sin \varphi \end{cases}$$

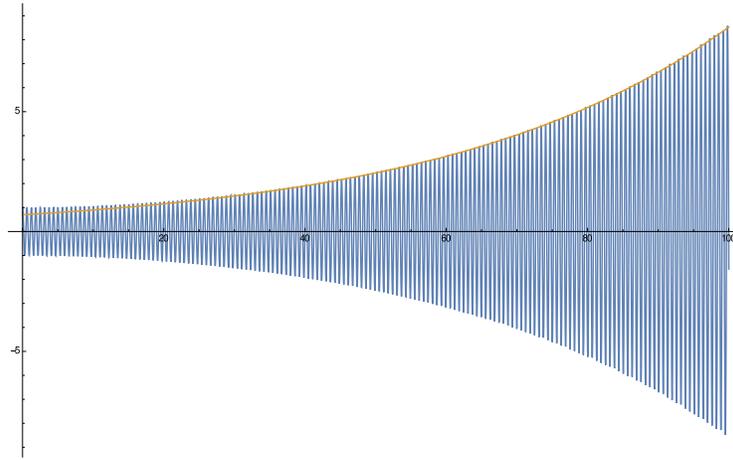
Заметим, что решение  $\varphi = \text{const}$  удовлетворяет этому уравнению, если  $\tan^2 \varphi = \frac{\epsilon - 2\omega\gamma}{\epsilon + 2\omega\gamma}$ . При этом оставшееся уравнение на  $A$  записывается как:

$$\dot{A} = A \frac{\sqrt{\epsilon^2 - (2\omega\gamma)^2}}{4\omega} \Rightarrow A(t) \simeq C \exp\left(\frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon^2 - (2\omega\gamma)^2}{\omega^2}} t\right)$$

Во-первых видно, что резонанс пропадает при достаточно сильном несовпадении частот  $\Omega$  и  $2\omega$  (а именно, условие записывается как  $\gamma < \frac{\epsilon}{2\omega}$ ). При большем отклонении частоты мы не получим резонанс (то есть экспоненциальный рост), а получим биения ограниченной амплитуды.

Чтобы получить этот ответ, мы сделали предположения, а именно - мы предполагали “медленность” функций  $A(t)$  и  $\varphi(t)$ ; из этих предположений мы получили приближенное решение, которое эти предположения подтверждает. Таким образом, наше приближенное решение нашей системы непротиворечиво.

Рис. 7.1: Численное решение уравнения с параметрическим резонансом при условиях  $\omega = 10$ ,  $\epsilon = 1$ ,  $\gamma = 0$ ; жёлтая линия - экспоненциальная огибающая  $\sim \exp\left(\frac{\epsilon t}{4\omega}\right)$



## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1 (теория возмущений в ОТО)

Пусть луч света движется в плоскости с полярными координатами  $r, \phi$ , а Солнце находится в центре этой системы координат.  $r_g$  - радиус Шварцшильда. Тогда траектория луча света описывается следующим уравнением (уравнением  $u = \frac{1}{r}$ , производные берутся по углу  $\phi$ ):

$$u'' + u = r_g \left( (u')^2 + u^2 \right) \quad (7.14)$$

Пусть прицельный параметр луча равен  $a \gg r_g$ . Взяв в качестве начального приближения прямолинейную траекторию  $r = \frac{1}{u} = \frac{a}{\cos(\phi)}$ , получите угол отклонения  $\alpha$  луча света.

**Упражнение 2**

Рассмотрите уравнение

$$\ddot{x} + \kappa \dot{x}^2 + \omega^2 x = 0$$

с начальным условием:  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  при  $\kappa a \ll 1$ . Найдите главную поправку к невозмущенному решению ( $\kappa = 0$ ), работающую при малых временах. При каком  $t$  такое приближенное решение перестает работать?

**Упражнение 3**

Рассмотрите уравнение

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon x^4$$

с начальным условием  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = \omega a$  при  $\epsilon a^3 \ll \omega^2$ . Найдите главную поправку к невозмущенному решению ( $\epsilon = 0$ ), работающую при малых временах. При каком  $t$  такое приближенное решение перестает работать?

**Упражнение 4**

Найдите функцию Грина уравнения

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = \phi(t).$$

Для этого рассмотрите задачу

$$\begin{aligned} \phi(t) &\rightarrow 0, & t &\rightarrow -\infty, \\ x(-\infty) &= 0, & \dot{x}(-\infty) &= 0 \end{aligned}$$

и решите ее методом вариации постоянной.

**Задача 1**

Используя найденную функцию Грина найдите приближенно решение уравнения из упражнения 3 для

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_0 \frac{\tau}{\tau^2 + t^2}, \\ x(-\infty) &= 0, & \dot{x}(-\infty) &= 0 \end{aligned}$$

при  $\tau \ll \gamma^{-1} \ll t$ .

В таком случае решение можно представить в виде

$$x(t) = C \left( 1 + a_1 \frac{\tau}{t} + a_2 \frac{\tau}{t} \frac{1}{\gamma t} + \dots \right)$$

Определите  $C$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ .

**Задача 2**

Частица массы  $m$  движется в потенциале  $U(x) = -U_0 \cos(x/a)$ . Помимо этого на частицу действуют сила вязкого трения  $-\gamma m \dot{x}$  и постоянная сила  $F$ . Пока сила  $F > U_0/a$ , у частицы имеется режим движения с постоянной средней скоростью. Если силу постепенно уменьшать, то из-за инерции этот режим может сохраниться вплоть до некоторого критического значения  $F_c$ . Найдите значение  $F_c$  в случае малого трения и определите критерий применимости ответа.

## Глава 8

# Интегрирование в криволинейных координатах

### 8.1 Лекция, часть 1 (И.В. Колоколов)

Начнем с интегрирования. Рассматриваем сначала хорошо знакомое евклидовское  $n$ -мерное пространство. В этом пространстве имеется декартова прямоугольная система координат, каждой точке ставится в соответствие набор её координат  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Для такого пространства и координатной системы считаем известным утверждение: объём  $\mathcal{V}_a$  параллелепипеда (не обязательно прямоугольного!), натянутого на вектора  $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \dots, \mathbf{a}^{(n)}$  равен детерминанту матрицы, построенной из компонент этих векторов:

$$\mathcal{V}_a = \det \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \dots \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & \dots, a_n^{(2)} \\ \vdots & & & \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

Согласие этого равенства со школьным представлением об объеме проверяется просто и явно, начиная с двух измерений и используя простую индукцию.

Введем в нашем пространстве какие-нибудь криволинейные координаты  $y_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ :

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (8.2)$$

Предположим, что мы интегрируем некую функцию по некоей области в нашем пространстве. Область интегрирования разобьем на малые участки, такие, что их уже можно считать параллелепипедами (не обязательно прямоугольными!). Разбиение устроим таким образом, что вдоль каждого ребра каждого параллелепипеда изменяется только одна координата из набора  $y_\alpha$  на приращение  $dy_\alpha$ . Иными словами, мы новую криволинейную координатную сетку разобьем на мелкие участки, каждый из которых

представляет собой косую координатную клетку. Образующие вектора параллелепипеда вблизи какой-нибудь выбранной точки можно представить так:

$$\mathbf{a}^{(1)} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \right) dy_1, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \frac{\partial x_2}{\partial y_2}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial y_2} \right) dy_2, \dots \quad (8.3)$$

Согласно (8.1), объем такой элементарной клетки можно записать в виде:

$$dV = \|\mathcal{J}_{i\beta}\| dy_1 dy_2 \dots dy_n \equiv \mathcal{J} dy_1 dy_2 \dots dy_n, \quad \mathcal{J}_{i\beta} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta}. \quad (8.4)$$

Индексы  $i$  и  $\beta$ , пробегая значения  $1, \dots, n$ , образуют матрицу  $\|\mathcal{J}_{i\beta}\|$  локального преобразования координат (матрицу Якоби), детерминант  $\mathcal{J}$  которой (якобиан) и возникает в выражении для элемента объема.

Важно, однако, что эта матрица возникает в другом фундаментальном объекте - метрическом тензоре. В декартовых координатах расстояние  $ds^2$  между близкими точками, различающимися вектором  $dx_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  (элемент длины) равно скалярному квадрату этого вектора:

$$ds^2 = dx_i dx_i \equiv \sum_{i=1}^n dx_i dx_i. \quad (8.5)$$

Здесь мы ввели правило Эйнштейна: по повторяющимся индексам, если не оговорено противное, подразумевается суммирование. В нашем случае (первое равенство в (8.5)) это индексы у смещения  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Далее это правило предполагается действующим. В произвольной системе координат (8.2) элемент длины принимает вид:

$$ds^2 = dx_i dx_i = \mathcal{J}_{i\beta} \mathcal{J}_{i\gamma} dy_\beta dy_\gamma = g_{\beta\gamma} dy_\beta dy_\gamma. \quad (8.6)$$

Матрица  $\hat{g} = \|g_{\beta\gamma}\|$  размерности  $n \times n$  называется метрическим тензором. Её выражение через матрицу Якоби  $\hat{\mathcal{J}} = \|\mathcal{J}_{i\beta}\|$ :  $\hat{g} = \hat{\mathcal{J}} \hat{\mathcal{J}}^T$ , где значок  $T$  обозначает транспонирование, приводит к соотношению между определителями и элементами объема:

$$g \equiv \det \hat{g} = \mathcal{J}^2, \quad dx_1 \dots dx_n = \sqrt{g} dy_1 \dots dy_n. \quad (8.7)$$

Последнее выражение

$$\sqrt{g} dy_1 \dots dy_n. \quad (8.8)$$

может быть использовано и тогда, когда на всем многообразии невозможно ввести декартову систему координат («кривое пространство»). Действительно, локально это можно сделать всегда как диагонализацию симметричной матрицы - метрического тензора. Но, скажем, вторые производные этого тензора уничтожить какой-либо заменой координат не получится. Однако для интегрирования этого и не нужно - мы имеем дело с суммой элементарных объемов, в которых геометрия евклидова именно с той точностью, которая и нужна для интегрирования.

## Ортогональные криволинейные системы координат

В ортогональных криволинейных координатах метрический тензор имеет диагональную форму:

$$g_{\alpha\alpha} = (h_\alpha)^2, \quad g_{\alpha\beta} = 0 \text{ если } \alpha \neq \beta, \quad (8.9)$$

где  $h_\alpha > 0$  называются коэффициентами Ламе. Элемент длины

$$ds^2 = \sum_{\alpha} (h_\alpha dy_\alpha)^2. \quad (8.10)$$

В трёх-мерном пространстве самыми известными примерами ортогональных криволинейных координат являются сферическая и цилиндрическая системы координат.

### Примеры.

1. Сферические координаты в трехмерном пространстве:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta, \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \\ dx_1 dx_2 dx_3 &= \sqrt{g} dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi. \end{aligned} \quad (8.11)$$

2. Параболоид вращения:  $x_3 = (x_1^2 + x_2^2)/R$ , он двумерный, поэтому точку на нем задаем координатами  $r, \phi$ :  $x_1 = r \cos \phi, x_2 = r \sin \phi$ , так что выражая  $x_3 = r^2/R$ , получим ( $R$ - константа размерности длины):

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_3^2 + r^2 d\phi^2 + dr^2 = dr^2 \left( 1 + 4 \frac{r^2}{R^2} \right) + r^2 d\phi^2, \\ dS &= \sqrt{g} dr d\phi = r \sqrt{1 + 4 \frac{r^2}{R^2}} dr d\phi. \end{aligned} \quad (8.12)$$

## 8.2 Лекция, часть 2 (С.С. Вергелес)

### Дифференцирование в ортогональных криволинейных координатах

Выясним, как записываются операции дифференцирования (градиент, дивергенция и ротор вектора, лапласиан скалярного поля) в ортогональных криволинейных системах координат.

Для того, чтобы определить векторное поле в таких системах координат, ведём единичные векторные поля  $\mathbf{e}^{(\alpha)}$ , которые в каждой точке сонаправлены касательным  $\mathbf{a}^{(\alpha)}$  (8.3) к криволинейной координатной сетке, но имеют единичную длину:

$$\mathbf{e}^{(\alpha)} = \frac{\mathbf{a}^{(\alpha)}}{|\mathbf{a}^{(\alpha)}|}. \quad (8.13)$$

Утверждение о том, что наши криволинейные координаты являются ортогональными, равносильно утверждению, что вектора  $\mathbf{e}^{(\alpha)}$  в каждой точке пространства образуют ортонормированный базис. Компоненты некоторого векторного поля  $\mathbf{v}$  в этом базисе

$$v_\alpha = (\mathbf{e}^{(\alpha)} \cdot \mathbf{v}). \quad (8.14)$$

Поскольку базис  $\mathbf{e}^{(\alpha)}$  ортонормирован, то квадрат вектора

$$\mathbf{v}^2 = \sum_{\alpha} (v_\alpha)^2. \quad (8.15)$$

**Дивергенция.** Определим, как записывается дивергенция векторного поля в ортогональных криволинейных координатах. Напомним, что в декартовых координатах дивергенция векторного поля  $\mathbf{v}$  есть

$$\operatorname{div} \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (8.16)$$

Мы будем пользоваться теоремой Остроградского-Гаусса, согласно которой интеграл от дивергенции от векторного поля по некоторому объёму  $\mathcal{V}$  равен интегралу от потока этого векторного поля через поверхность объёма  $\partial\mathcal{V}$ . В декартовой системе координат эта теорема записывается в виде

$$\int_{\mathcal{V}} d^3x \operatorname{div} \mathbf{v} = \int_{\partial\mathcal{V}} d^2x (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}), \quad (8.17)$$

где нормаль  $\mathbf{n}$  к поверхности  $\partial\mathcal{V}$  направлена из объёма  $\mathcal{V}$ . Утверждение (8.17) легко проверить, если в качестве объёма взять прямоугольный параллелепипед с рёбрами, параллельными координатным осям декартовой системы отсчёта.

Теперь выясним, как выглядит равенство (8.17) в ортогональной криволинейной системе координат. Мы выберем объём специальной формы, представляющий собой слегка деформированный куб. Рёбра этого ‘куба’ лежат на координатных линиях (на них изменяется только одна из координат  $y_\alpha$ , тогда как все остальные остаются неизменными); грани ‘куба’ лежат на поверхностях  $y_\alpha = \text{const}$ . Размер ‘куба’ мал, длина его рёбер соответствует изменению криволинейных координат со значения  $y_\alpha$  до значения  $y_\alpha + dy_\alpha$ . Это означает, что площади граней ‘куба’, ортогональных направлению  $\alpha$ , равны

$$\prod_{\beta \neq \alpha} h_\beta(y_\alpha) dy_\beta \quad \text{и} \quad \prod_{\beta \neq \alpha} h_\beta(y_\alpha + dy_\alpha) dy_\beta \quad (8.18)$$

Поток вектора  $\mathbf{v}$  (правая часть (8.17)) через эту пару граней определяется только  $v_\alpha$ -компонентой и оказывается равным

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \left( v_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} h_\beta dy_\beta \right) dy_\alpha. \quad (8.19)$$

Объединим теперь вклады от всех трёх пар противоположных граней, а левую часть (8.17) вычислим согласно (8.8):

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \left( \frac{\sqrt{g}}{h_{\alpha}} v_{\alpha} \right), \quad g = h_1 h_2 h_3. \quad (8.20)$$

Для сферических координат эта общая формула расписывается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta v_{\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} v_{\phi}. \quad (8.21)$$

**Градиент и лапласиан.** Выражение (8.10) для элемента длины означает, что при изменении координаты  $y_{\alpha}$  на  $dy_{\alpha}$  в условиях фиксации значений всех остальных координат мы смещаемся в пространстве на вектор  $h_{\alpha} dy_{\alpha} \mathbf{e}^{(\alpha)}$ . Направления смещений при изменении разных координат ортогональны друг другу. Пусть теперь поле  $\mathbf{v}$  является потенциальным,

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \phi, \quad \Leftrightarrow \quad v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \quad (8.22)$$

Тогда в ортонормированном базисе, связанном с криволинейными координатами, это же равенство записывается в виде

$$v_{\alpha} = \frac{1}{h_{\alpha}} \frac{\partial \phi}{\partial y_{\alpha}}. \quad (8.23)$$

Теперь, комбинируя выражения для градиента (8.23) и для дивергенции (8.20), мы можем получить выражение для лапласиана

$$\Delta \varphi = \sum_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi \quad (8.24)$$

в криволинейных координатах:

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial y_{\alpha}} \left( \frac{\sqrt{g}}{(h_{\alpha})^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y_{\alpha}} \right). \quad (8.25)$$

Для случая сферических координат имеем

$$\Delta \phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta} \varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_{\phi}^2 \varphi. \quad (8.26)$$

**Ротор.** Для вычисления компонент ротора  $\operatorname{rot} \mathbf{v}$  векторного поля  $\mathbf{v}$  в криволинейных ортогональных координатах будем пользоваться теоремой Стокса. Пусть  $S$  — некоторая поверхность в трёх-мерном пространстве, ограниченная в нём, и имеющая край  $\partial S$ . Теорема Стокса гласит, что

$$\int_{\partial S} (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}) = \int_S d^2 x (\mathbf{n} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v}). \quad (8.27)$$

Здесь  $d\mathbf{x}$  — вектор смещения вдоль края поверхности,  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности; если принять, что нормаль направлена ‘на нас’, то интегрирование вдоль края поверхности должно производиться ‘против часовой стрелки’. Теорему Стокса (8.27) легко доказать, если в качестве поверхности выбрать, например, квадрат на плоскости  $x_1 = \text{const}$ , стороны которого параллельны координатным осям  $Ox_2$  и  $Ox_3$ .

Перейдём к рассмотрению теоремы Стокса в ортогональных криволинейных координатах. В качестве поверхности  $S$  возьмём грань уже описанного ‘куба’, которая лежит на поверхности  $y_1 = \text{const}$ ; нормаль  $\mathbf{n} = \mathbf{e}^{(1)}$ . Площадь поверхности равна  $h_2 dx_2 \cdot h_3 dx_3$ , поэтому правая часть (8.27) есть  $h_2 h_3 (\text{rot } \mathbf{v})_1 \cdot dx_2 dx_3$ . Левая часть (8.27) есть сумма двух вкладов от пар противоположных сторон грани:

$$\frac{\partial}{\partial y_2}(v_3 h_3 dx_3) dx_2 - \frac{\partial}{\partial y_3}(v_2 h_2 dx_2) dx_3 \quad (8.28)$$

В итоге получаем, что

$$(\text{rot } \mathbf{v})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left( \frac{\partial}{\partial y_2}(h_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial y_3}(h_2 v_2) \right). \quad (8.29)$$

Остальные компоненты ротора получаются циклическими перестановками индексов.

Для сферических координат равенство (8.29) принимает вид

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{v})_r &= \frac{1}{r \sin \theta} (\partial_\theta (\sin \theta v_\phi) - \partial_\phi v_\theta), \\ (\text{rot } \mathbf{v})_\theta &= \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi v_r - \frac{1}{r} \partial_r (r v_\phi), \\ (\text{rot } \mathbf{v})_\phi &= \frac{1}{r} (\partial_r (r v_\theta) - \partial_\theta v_r). \end{aligned} \quad (8.30)$$

### 8.3 Семинар по теме «Кратные и криволинейные интегралы»

#### Задача 1

Найдём энергию гравитационного взаимодействия шара массы  $M$  радиуса  $r$  и точечной частицы массы  $m$ , которая находится на расстоянии  $R > r$  от него.

#### Решение

Результат известен из курса общей физики; эта энергия совпадает с энергией взаимодействия двух точечных частиц:  $E = G \frac{Mm}{R}$  ( $G$  — гравитационная постоянная). Получим этот результат непосредственным вычислением. Из закона притяжения следует, что энергия выражается в виде следующего

интеграла по шару:

$$E = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho m}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} d^3 \mathbf{r}$$

где вектор  $\mathbf{R}$  направлен на точечную массу,  $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$  — плотность, а область интегрирования  $\Omega$  представляет собой шар. Введем систему координат — поместим шар в начало координат; ось  $Oz$  направим на частицу, так что её координаты  $\mathbf{R} = (0; 0; R)$ . Запишем этот интеграл в сферических координатах:  $d^3 r = \rho^2 d\rho \sin \theta d\theta d\varphi$ , причём вектор  $\mathbf{r} = (\rho \sin \theta \cos \varphi; \rho \sin \theta \sin \varphi; \rho \cos \theta)$ . Получаем:

$$E = G \frac{3Mm}{4\pi r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \frac{1}{\sqrt{(R - \rho \cos \theta)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta}}$$

Интеграл по  $\varphi$  даёт просто  $2\pi$ . Раскрывая скобки, видим, что в знаменателе стоит  $R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos \theta$ . Делая замену в получившемся интеграле  $z = -\cos \theta \Rightarrow dz = \sin \theta d\theta$ , мы приходим к следующему интегралу:

$$\begin{aligned} E &= G \frac{3Mm}{2r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho \cdot z}} = \\ &= G \frac{3Mm}{2r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{R\rho} \sqrt{R^2 + \rho^2 + 2R\rho z} \Big|_{z=-1}^1 = \\ &= G \frac{3Mm}{2r^3} \int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{R\rho} (R + \rho - |R - \rho|) \underset{R > r \geq \rho}{=} G \frac{3Mm}{r^3 R} \int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{GmM}{R} \end{aligned}$$

## Задача 2

Найдём момент инерции тора большого радиуса  $R$  и малого радиуса  $r$  относительно оси, перпендикулярной «плоскости тора».

### Решение

Введём координаты на торе:

$$\begin{cases} x &= (R + \rho \cos \theta) \cos \varphi \\ y &= (R + \rho \cos \theta) \sin \varphi \\ z &= \rho \sin \theta \end{cases}$$

При этом  $\varphi \in [0; 2\pi]$ ,  $\theta \in [0; 2\pi]$ ,  $\rho \in [0; r]$ . Найдём якобиан перехода к таким координатам:

$$J = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \\ -(R + \rho \cos \theta) \sin \varphi & (R + \rho \cos \theta) \cos \varphi & 0 \\ -\rho \sin \theta \cos \varphi & -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \cos \theta \end{vmatrix} =$$

$$= (R + \rho \cos \theta) \rho (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) = \rho(R + \rho \cos \theta)$$

Посчитаем объём тора  $\Omega$ :

$$V = \iiint_{\Omega} d^3\bar{r} = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta (R + \rho \cos \theta) = \pi r^2 \times 2\pi R$$

поэтому плотность тора равна  $\frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}$ . Момент инерции тора определяется как:

$$I_z = \frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) d^3\mathbf{r} = \frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R} \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta (R + \rho \cos \theta)^3 =$$

$$= \frac{M}{\pi r^2 \times R} \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (R^3 + 3R^2 \rho \cos \theta + 3R\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^3 \cos^3 \theta)$$

Нечётные степени косинуса будучи усреднены по периоду дают ноль. Кроме того, известно, что  $\langle \sin^2 \theta \rangle = \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}$ ; поэтому интеграл по  $\theta$  легко берётся и остаётся:

$$I_z = \frac{2M}{r^2} \int_0^r \rho d\rho (R^2 + \frac{3}{2}\rho^2) = M \left( R^2 + \frac{3}{4}r^2 \right)$$

### Задача 3

Найдём площадь  $\sigma_n$  единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве.

#### Решение

Рассмотрим  $n$ -мерный Гауссов интеграл:

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2} d^n \mathbf{x}$$

С одной стороны, если рассмотреть его в  $n$ -мерных декартовых координатах, мы получим:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2} = \pi^{n/2}$$

С другой стороны, мы можем его же рассмотреть в  $n$ -мерных сферических координатах. Поскольку подинтегральная функция зависит лишь от расстояния до центра, то мы можем сразу взять интеграл по всем углам; несложно заметить, что полученный интеграл даст нам как раз площадь единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве (например, в трехмерном пространстве  $d^3\mathbf{x} = 4\pi x^2 dx$ , и  $4\pi$  - как раз площадь единичной сферы в трёхмерье). Таким образом, мы можем записать:

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} \sigma_n x^{n-1} dx = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{\sigma_n}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \sigma_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \begin{cases} 2\pi^k, & n = 2k \\ \frac{2^k \pi^{k-1}}{(2k-3)!!}, & n = 2k-1 \end{cases} = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 2\pi, & n = 2 \\ 4\pi, & n = 3 \\ 2\pi^2, & n = 4 \end{cases}$$

Мы видим, что известные нам результаты (для  $n = 1, 2, 3$ ) воспроизводятся.

**Комментарий про размерную регуляризацию** Аналитичность полученного результата как функции параметра  $n$  позволяет рассматривать такие, на первый взгляд абсурдные вещи, как “площадь сферы в пространстве размерности  $n = 4 - \epsilon$ ”, при нецелых  $\epsilon$ . На этом основан один из способов регуляризации расходящихся интегралов - так называемая “размерная регуляризация”, о которой рассказывалось ранее. Допустим, нас интересует интеграл в пространстве размерности  $n = 4$ , и он расходится. Тогда можно формально доопределить  $n$ -мерный интеграл на нецелые  $n$ , как замену  $d^n\mathbf{x}$  на  $\sigma_n x^{n-1} dx$ ; и при этом может оказаться, что интеграл сходится при любых  $n < 4$ . Это позволяет формально рассмотреть интеграл в пространстве размерности  $n = 4 - \epsilon$  (где интеграл сходится), а затем устремить  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## Контурные интегралы

Часто в разных физических задачах встречается необходимость интегрировать те или иные функции вдоль кривых. Среди примеров и работа силы при перемещении тела вдоль той или иной траектории, и вычисление массы какой-нибудь проволоки, и циркуляция электрического или магнитного поля в уравнениях Максвелла. Отдельная история про интегралы вдоль различных контуров встречается в теории функций комплексного переменного: там это основной рабочий объект.

Выделяют два основных типа контурных интегралов: первого и второго рода.

**Контурные интегралы первого рода** - это интегралы от скалярных функций по кривым. Самый простой пример - вычисление их длин. Пусть, например, кривая задана функцией  $f(x)$ , и мы хотим посчитать ее длину при изменении  $x$  от  $a$  до  $b$ . Разобьем кривую на  $N$  маленьких кусочков с длинами

$\Delta l_i$ , где  $i$  лежит от 1 до  $N$ . Тогда выражение для полной длины  $L$  дается очевидным равенством

$$L = \sum_{i=1}^N \Delta l_i$$

Представим  $\Delta l_i$  по теореме Пифагора как

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta f_i)^2}$$

где  $\Delta f_i = f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i)$ . Вынесем  $\Delta x_i$  из под знака корня и получим  $\Delta l_i = \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta x_i}\right)^2}$ . Таким образом, выражение для длины кривой в пределе бесконечно мелкого разбиения имеет вид

$$L = \int_a^b dx \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}.$$

Если же мы хотим посчитать какую-нибудь более интересную величину, например, массу кривой, то ответ будет выглядеть иначе. Пусть плотность массы  $\rho$ , определяемая как коэффициент пропорциональности между массой каждого отдельного кусочка и его длиной

$$\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta l_i},$$

каким-то образом меняется от кусочка к кусочку, то есть задается функцией  $\rho(x)$ . Тогда полная масса кривой имеет вид

$$M = \int_a^b dx \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

Однако, иногда кривая не задается какой-то однозначной функцией (например, если она имеет самопересечение). В таком случае, ее нужно параметризовать тем или иным способом. Пусть она задана как некоторая векторная функция  $\vec{r}(t)$ , где  $t \in (t_A, t_B)$ . Начальную и конечную точки обозначим как  $\vec{r}_A = \vec{r}(t_A)$  и  $\vec{r}_B = \vec{r}(t_B)$ . Длину кривой в этом случае можно вычислить как

$$L = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} |d\vec{r}| = \int_{t_A}^{t_B} dt |d\vec{r}/dt|$$

а, например, ее массу как

$$M = \int_{t_A}^{t_B} dt \rho(\vec{r}(t)) |d\vec{r}/dt|$$

**Контурные интегралы второго рода** в свое время - это интегралы от векторных функций по кривым. Они задаются подобно интегралам первого рода, однако вместо модуля "скорости"  $d\vec{r}/dt$  в них фигурирует скалярное произведение внешнего поля (которое мы интегрируем) на вектор "скорости". Например, для работы силы  $\vec{F}(\vec{r})$  по кривой  $\vec{r}(t)$  имеем

$$A = \int_{t_A}^{t_B} dt \left( \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot d\vec{r}/dt \right)$$

#### Задача 4

Пусть кольцо из проволоки радиуса  $R$  лежит в плоскости  $xy$ . Представим его кривой  $\vec{r} = \vec{r}(\phi)$ , где компоненты вектора заданы как  $x = R \cos \phi$ ,  $y = R \sin \phi$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ . Допустим, что это кольцо неравномерно электрически заряжено: линейная плотность заряда задается выражением

$$\rho(\phi) = \rho_0 \cos \phi,$$

где  $\rho_0$  - постоянная, имеющая размерность [заряд/метры]. Необходимо найти потенциал, создаваемых этим колечком в произвольной точке  $\vec{r}_0$  плоскости  $xy$ , заданной как

$$x_0 = r_0 \cos \theta, \quad y_0 = r_0 \sin \theta$$

при условии  $r_0 \gg R$ .

#### Решение

Давайте запишем выражение, для потенциала, известное из электростатики, как

$$\Phi(x_0, y_0) = \int \frac{\rho}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|} |d\vec{r}|.$$

Плотность заряда устроена таким образом, что на одной половине колечка она положительна, а на другой половине - отрицательна, причем суммарный заряд равен 0. Такая конфигурация зарядов называется диполем.

Здесь интегрирование ведется по кривой  $\vec{r} = \vec{r}(\phi)$ , задающей кольцо. Вводя параметризацию углом, описанную в условии, мы переписываем интеграл как

$$\Phi(x_0, y_0) = \int_{-\pi}^{\pi} d\phi |d\vec{r}/d\phi| \frac{\rho_0 \cos \phi}{|\vec{r}_0 - \vec{r}|}$$

Непосредственное вычисление дает  $|d\vec{r}/d\phi| = R$ , а

$$|\vec{r}_0 - \vec{r}| = \sqrt{(R \cos \phi - r_0 \cos \theta)^2 + (R \sin \phi - r_0 \sin \theta)^2} = \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0(\cos \phi \cos \theta + \sin \phi \sin \theta)} =$$

$$= \sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\phi - \theta)}.$$

Тогда интеграл можно переписать как

$$\Phi(x_0, y_0) = R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{\cos \phi}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos(\phi - \theta)}}.$$

Сделаем сдвиг переменной  $\phi - \theta = \xi$ . Тогда получим

$$\Phi(x_0, y_0) = R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos(\xi + \theta)}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \xi}}.$$

Пределы интегрирования не изменились, потому что мы интегрируем периодическую функцию по всему ее периоду. Раскладывая косинус:

$$\Phi(x_0, y_0) = R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos \xi \cos \theta - \sin \xi \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \xi}}.$$

Обратим внимание, что  $\theta$  - это просто постоянная, которая определяет то, в какой точке мы смотрим потенциал. Одна из частей интеграла

$$-R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\sin \xi \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \xi}}$$

в точности равна 0. Так происходит потому, что функция под знаком интеграла нечетная, а пределы интегрирования - симметричны. В итоге остается

$$\Phi(x_0, y_0) = \cos \theta R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \frac{\cos \xi}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \xi}}.$$

Точный ответ на интеграл в элементарных функциях не выражается, поэтому попробуем проанализировать его приближенно. Здесь то нам и понадобится условие  $r_0 \gg R$ . Заметим, что слагаемое  $2Rr_0 \cos \xi$  под корнем мало в сравнении с  $R^2 + r_0^2$  по параметру  $R/r_0 \ll 1$ . Поэтому, по нему можно раскладывать:

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2 - 2Rr_0 \cos \xi}} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Rr_0 \cos \xi}{R^2 + r_0^2}}} \simeq \frac{1}{\sqrt{R^2 + r_0^2}} + \frac{Rr_0 \cos \xi}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} + \dots$$

Заменим в пределе  $r_0 \gg R$  корень  $\sqrt{R^2 + r_0^2} \simeq r_0$ . Тогда для потенциала получим

$$\Phi(x_0, y_0) = \cos \theta R\rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos \xi \left( \frac{1}{r_0} + \frac{R}{r_0^2} \cos \xi + \dots \right).$$

Первое слагаемое в скобке дает 0, потому что  $\int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos \xi = 0$ . Это отвечает тому, что полный заряд колечка равен 0. Второе слагаемое имеет вид

$$\cos \theta R \rho_0 \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \cos^2 \xi \frac{R}{r_0^2} = \frac{\pi R^2 \rho_0}{r_0^2} \cos \theta.$$

Это конечное приближенное выражение для потенциала кольца. Обратим внимание, что потенциал в этом случае явно зависит от направления, в котором находится “точка наблюдения”. Кроме того, потенциал спадает с расстоянием как  $1/r_0^2$ , в то время как потенциал точечного заряда ведет себя как  $1/r_0$ . Эта особенность связана с тем, что полный заряд колечка равен 0. Давайте перепишем полученный ответ в векторной форме. Для этого введем вектор дипольного момента  $\vec{d}$ , который определим следующим образом

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \pi R^2 \rho_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда полный ответ для потенциала в пределе больших расстояний можно записать как

$$\Phi(\vec{r}_0) = \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r}_0)}{r_0^3}$$

Это принятая запись для потенциала диполя. Отметим, что полученное выражение работает во всем пространстве, а не только в плоскости  $xy$ .

## Задача 5

Пусть  $C$  - замкнутая кривая, соответствующая обходу единичной окружности против часовой стрелки. Найдём значение интеграла второго рода

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

### Решение

**Неправильный способ** Функция под интегралом является полным дифференциалом. Действительно:

$$d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

поэтому, казалось бы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, достаточно взять разницу первообразной на концах контура  $C$ . Поскольку контур замкнут, то эта разность тождественно равна нулю. Однако такой способ рассуждений ошибочен, что связано с неаналитичностью “первообразной” в точках  $x = 0$  (и, соответственно, неаналитичностью подынтегральной функции в начале координат). Этот интеграл играет важнейшую роль в теории вычетов (теория функций комплексного переменного).

**Правильный способ** Поступим по определению. Запараметризуем контур  $C$  как  $C = \{\mathbf{r}(\varphi), \varphi \in [0; 2\pi]\}$  и  $\mathbf{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . В таком случае интеграл запишется как:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \cos \varphi d\varphi + \sin \varphi \sin \varphi d\varphi}{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$$

## Гауссов интеграл в многомерном случае

Рассмотрим более общий случай многомерного Гауссова интеграла

$$I = \int dx_1 \dots dx_n e^{-x^T A x} \quad (8.31)$$

Интегрирование здесь ведется в бесконечных пределах по всем осям, а

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Матрица  $A$  – квадратная и при этом симметричная. Чтобы такой интеграл сходилась матрица должна быть положительно определенной (иначе есть направление вдоль которого подынтегральная функция либо не меняется (в лучшем случае), либо вообще растет экспоненциально. По теореме из линейной алгебры для любой симметричной матрицы (в комплексном – для случае эрмитовой) есть ортогональное преобразование координат, диагонализующее её. Т.е.

$$A_\lambda = S^{-1} A S = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad S^{-1} = S^T \quad (8.32)$$

Раз  $A$  положительно определенная, то  $\lambda_i > 0$ . Заметим, что

$$x^T A x = x^T S S^{-1} A S S^{-1} x = (S^{-1} x)^T S^{-1} A S (S^{-1} x) = (S^{-1} x)^T A_\lambda (S^{-1} x)$$

Назовем  $y = S^{-1} x$ . Это определяет ортогональную замену координат,  $J = |\det(S)| = 1$ . Тогда

$$I = \int dy_1 \dots dy_n e^{-y^T A_\lambda y} \quad (8.33)$$

Ввиду диагональности  $A_\lambda$ ,

$$I = \int dy_1 e^{-\lambda_1 y_1^2} \dots \int dy_n e^{-\lambda_n y_n^2} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\lambda_1 \dots \lambda_n}} \quad (8.34)$$

Известно, что  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  (действительно, детерминант не зависит от замены базиса, а в диагональном виде он вычисляется легко). В итоге, окончательно получаем

$$I = \sqrt{\frac{\pi^n}{\det A}} \quad (8.35)$$

Такой подход к Гауссову интегралу без труда позволяет обобщить метода перевала на случай функций с несколькими переменными. Пусть  $f(x_1 \dots x_n)$  имеет один максимум в точке  $x_0$ . Требуется вычислить

$$I = \int dx_1 dx_2 \dots dx_n e^{Nf(x)} \quad (8.36)$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Считаем, что точка  $x_0$  лежит достаточно глубоко в области интегрирования так, что пределы можно распространить до бесконечности. Идея, как и раньше, состоит в том, чтобы разложить функцию  $f$  в окрестности максимума в ряд Тейлора и вычислить Гауссов интеграл. Законность процедуры обеспечивается условием  $N \rightarrow \infty$ . Вычисляем:

$$f(x) = f(x_0) - (x - x_0)^T A (x - x_0) \quad (8.37)$$

где

$$A = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix} \quad (8.38)$$

Матрица  $A$  - симметричная (независимость смешанных производных от порядка дифференцирования) и положительно определенная ( $x_0$  - максимум функции  $f$ ). Тогда

$$I \approx \sqrt{\frac{\pi^n}{N^n \det A}} e^{Nf(x_0)} \quad (8.39)$$

Чем больше  $N$ , тем лучше работает формула. Если перевальных точек несколько, то по ним надо просуммировать.

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Вычислите якобиан перехода к сферическим координатам

$$x = r \cos \phi \sin \theta, \quad y = r \sin \phi \sin \theta, \quad z = r \cos \theta.$$

Вычислите якобиан перехода к тороидальным координатам

$$x = (R + \rho \sin \theta) \cos \phi, \quad y = (R + \rho \sin \theta) \sin \phi, \quad z = \rho \cos \theta.$$

Здесь  $R$  - фиксированный параметр. Такие координаты не являются однозначными, однако все равно бывают полезны (см. задачу 1).

### Упражнение 2

Вычислите интеграл по шару, зависящий от “волнового вектора”  $\vec{k}$ :

$$I(\vec{k}) = \int_{|\vec{r}| < r_0} d^3r e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

*Примечание: такой интеграл является примером преобразования Фурье в 3D:*

$$I(\vec{k}) = \mathcal{F}_{\vec{k}}\{\theta(r_0 - |\vec{r}|)\}, \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

*О преобразовании Фурье мы поговорим на одном из следующих семинаров.*

Более того этот интеграл встречается в простейшей задаче квантовомеханического рассеяния.

### Упражнение 3

Вычислите длину спирали:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

где  $t \in [0, 2\pi]$ . Вычислите массу этой спирали, если ее плотность  $\rho(t) = \cos^2 t$ .

Вычислите по ней криволинейный интеграл второго рода от функции

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -yz/(x^2 + y^2) \\ xz/(x^2 + y^2) \\ z(1 + x^2 - y^2) \end{pmatrix}.$$

### Задача 1

а) Вычислите момент инерции тора с однородной объемной массовой плотностью  $\rho$  относительно оси его симметрии  $z$ . Тор задается следующими уравнениями:

$$x = (R + \rho \sin \theta) \cos \phi, \quad y = (R + \rho \sin \theta) \sin \phi, \quad z = \rho \cos \theta,$$

где  $\rho < r_0 < R$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi]$ .

Эта задача решена в материалах семинара, но Вам было бы поучительно с ней разобраться самим.

б) Вычислите момент инерции тора относительно осей  $x$  и  $y$ .

*Подсказка: удобно воспользоваться тождеством  $I_x + I_y + I_z = 2I_0$ .*

**Задача 2**

Вычислите потенциал, создаваемый неоднородно заряженной сферой радиуса  $r_0$  с поверхностной плотностью заряда (заданной в сферических координатах)

$$\sigma(\vec{r})|_{|\vec{r}|=r_0} = \sigma_0 \cos \theta$$

в точке  $\vec{R}$  с координатами

$$\begin{cases} \mathcal{X} = R \sin \psi, \\ \mathcal{Y} = 0, \\ \mathcal{Z} = R \cos \psi, \end{cases}$$

где  $R > r_0$ , а  $\psi$  - заданный угол.

В данном случае потенциал можно посчитать по формуле:

$$\phi(\vec{R}) = k \int_{|\vec{r}|=r_0} \frac{\sigma(\vec{r}) dS}{|\vec{R} - \vec{r}|}.$$

Здесь  $dS$  - бесконечно малый элемент площади сферы:

$$dS = r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Обратите внимание:  $r_0^2 \sin \theta$  - это якобиан перехода к сферическим координатам вычисленный при  $r = r_0$ . Задачу можно в пару строчек решить\*\* без явного вычисления интеграла. Единственное, что надо будет сделать - посчитать несложную производную.

**Задача 3**

Вычислите интеграл по квадрату  $x \in [0, 2\pi]$ ,  $y \in [0, 2\pi]$ :

$$I = \int \frac{dx dy}{2\pi} \frac{1 - \cos(x+y)}{2 - \cos x - \cos y}$$

*Подсказка: для решения может быть удобно перейти к повернутой системе координат*

$$u = \frac{x+y}{2}, \quad v = x-y.$$

## Глава 9

# Основные принципы работы в программе Mathematica

### 9.1 Задание к семинару по Wolfram Mathematica

#### Упражнение 1: разминка

Вспомните упражнение 4 семинара 2, где мы заменяли сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^a e^{-bn} \quad (9.1)$$

на интеграл. Вычислите сумму и интеграл точно для значений  $a = 1.1$ ,  $b = 0.1$ , и проверьте, насколько оправдана такая замена. Сумма и интеграл должны быть написаны значками суммы и интеграла, а не функциями Sum and Integrate.

#### Упражнение 2: поиск нужных корней

В задаче 2 семинара 1 мы искали длины промежутков, на которых выполняется

$$\left| \cos x + \alpha \frac{\sin x}{x} \right| > 1. \quad (9.2)$$

Найдите их численно для некоторого малого  $\alpha$ .

### Упражнение 3: метод перевала

Напишите функцию, которая принимает один аргумент, функцию  $f(x)$ , и возвращает вычисленный методом перевала интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{f(x)} dx. \quad (9.3)$$

Проверить условия применимости метода перевала не надо; можно считать, что все вторые производные в перевальных точках отличны от нуля; можно считать, что перевальных точек конечное количество.

### Упражнение 4: асимптотические разложения

В упражнениях 3 и 4 семинара 5 были найдены асимптотические ряды для интегрального косинуса и неполной гамма-функции соответственно. Просуммируйте асимптотический ряд для одной из функций до минимального члена и постройте результат на одном графике с функцией.

Найдите разницу между рядом исходной функцией и рядом, просуммированным до минимального члена, для некоторого большого  $x$ . Найдите эту разницу для только первого (нескольких первых) членов разложения; для ряда, просуммированного дальше, чем до минимального члена. Сделайте выводы и сообщите их преподавателю.

### Задача 1: Задача трёх тел

Классическая задача небесной механики состоит в определении траекторий движения трёх тел, притягивающихся по закону Ньютона. Таки это проблема: в общем случае задача не имеет аналитических решений. Однако картинки обычно получаются интересные, поэтому мы будем решать её численно. Посмотрите на статью в Википедии. Справа показывают мультик, от вас ожидается то же (не считая указания центра масс).

Для упрощения решения все массы будем считать равными 1. Гравитационная постоянная, конечно, тоже равна 1. Найдите численное решение системы дифференциальных уравнений для трёх тел, которые изначально покоились, находясь в точках  $(0,0)$ ,  $(0,1)$  и  $(2,0)$ .

Hints: Три точки, очевидно, всегда находятся в одной плоскости. Гравитационное притяжение их из этой плоскости не выводит. Поэтому все радиус-вектора можно считать двумерными.

Основная функция определяется словами “численное решение диффузов”. Она прекрасно работает с системами уравнений. Обратите внимание на то, что в правой части уравнений шесть раз повторяется относительно громоздкая конструкция из разности векторов, делённой на модуль разности в степени; если вы создадите функцию двух векторов, возвращающую эту конструкцию, количество кода значительно уменьшится. Построить график параметрически заданных функций можно с помощью ParametricPlot. Показ мультиков в математике мы разбирали на семинаре.

## Задача 2: Параметрический резонанс

В семинаре про преобразование Фурье была разобрана задача (2) про маятник (или грузик на пружинке, или осциллятор), который возмущается периодической внешней силой

$$f(t) = \begin{cases} -f_0, & -T/2 < t < 0, \\ f_0, & 0 < t < T/2. \end{cases} \quad (9.4)$$

Мы обнаружили, что если частота маятника совпадает с одним из значений  $2\pi n/T$ , то наблюдается параметрический резонанс и неограниченный рост амплитуды колебаний, линейный по времени. Конечно, при достаточно большой амплитуде предположение, положенное в основу решения,  $\sin \phi \approx \phi$ , неверно.

Решите точное уравнение численно и посмотрите, когда заканчивается рост амплитуды и что происходит дальше.

# Глава 10

## Приближенное решение вариационных задач

### 10.1 Лекция (В.В. Лебедев)

Многие дифференциальные уравнения могут быть сведены к вариационным задачам. Можно даже сказать, что, наоборот, большинство дифференциальных уравнений, встречающихся в математической физике, происходят из вариационных задач.

#### Геометрическая оптика

В геометрической оптике ход луча света определяется минимумом оптической длины

$$A = \int dl n. \quad (10.1)$$

Например, отсюда вытекает закон преломления Снелла

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (10.2)$$

Его можно получить, если учесть, что луч состоит из двух прямых отрезков, разделяемых границей между средами, и минимизировать оптическую длину (10.1) по координате точки на границе.

Введем переменную  $\zeta$ , параметризующую траекторию света (луч), тогда  $dl = |d\mathbf{r}/d\zeta|d\zeta$ . Если коэффициент преломления  $n$  является функцией координат, то вариация (10.1) дает

$$\delta A = \int d\zeta \delta \mathbf{r} \left[ -\frac{d}{d\zeta}(n\mathbf{s}) + |d\mathbf{r}/d\zeta| \nabla n \right], \quad (10.3)$$

где  $\mathbf{s}$  – единичный вектор, касательный к траектории. Соответствующее уравнение записывается в виде

$$\frac{d}{dl}(n\mathbf{s}) = \nabla n. \quad (10.4)$$

Предположим, что  $n$  зависит только от расстояния  $r$  до начала координат (или до некоторой оси). Тогда возможно круговое движение света. Сравнив между собой оптические длины для окружностей различного радиуса, мы приходим к выводу, что такое движение возможно, если произведение  $n(r)r$  имеет минимум при некотором  $r = r_0$ , это величина и определяет радиус окружности, по которой движется свет.

- Доказать, что при движении света по окружности  $r = r_0$  выполняется уравнение (10.4).

Как показывает приведенный пример, траектория луча будет в общем случае искривленной. Предположим, что нас интересует траектория луча, стартующего из точки  $(0, 0)$  и проходящего в точку  $(0, x_0)$ , если показатель преломления  $n$  зависит от  $y$ , скажем,  $n = n_0 - \alpha y$ . Оценим, насколько этот луч отклоняется от оси  $X$ . Для этого исследуем пробную функцию  $y = x(x_0 - x)/(2b)$ , тогда

$$A = \int dx \sqrt{1 + (x_0 - 2x)^2/b^2} [n_0 - \alpha x(x_0 - x)/(2b)].$$

Считая отклонение слабым, находим

$$A \approx n_0 x_0 + \frac{2n_0 x_0^3}{3b^2} - \frac{\alpha x_0^3}{12b}.$$

Минимизируя это выражение по радиусу кривизны  $b$ , находим  $b = 16n_0/\alpha$ .

## Механика

В механике на траектории частицы достигает минимума так называемое действие

$$I = \int dt \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - U(\mathbf{r}) \right]. \quad (10.5)$$

Вариация этого действия

$$\delta I = - \int dt \delta \mathbf{r} \left( m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \nabla U \right), \quad (10.6)$$

порождает обычное уравнение движения частицы (второй закон Ньютона). Минимальность действия связана с положительностью кинетической энергии.

Рассмотрим пример одномерного движения частицы в потенциале

$$U = \frac{m}{2} \left( \nu^2 x^2 + \frac{\epsilon}{2} x^4 \right). \quad (10.7)$$

Возьмем в качестве пробной функции  $x = a \cos(\omega t)$ . Подставляя это выражение в действие (10.5), находим

$$I = \frac{m}{4}\tau \left( \omega^2 a^2 - \nu^2 a^2 - \frac{3}{8}\epsilon a^4 \right), \quad (10.8)$$

где  $\tau$  – время наблюдения, которое предполагается большим:  $\omega\tau \gg 1$ . Минимизируя по  $a$ , находим нелинейный сдвиг частоты

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \nu^2 + \frac{3}{4}\epsilon a^2, \\ \omega - \nu &\approx \frac{3}{8\nu}\epsilon a^2. \end{aligned} \quad (10.9)$$

- Найти поправку к найденному решению, используя пробную функцию  $x = a \cos(\omega t) + b \cos(3\omega t + \phi)$  и минимизируя по  $a, b, \phi$ .

## Задачи управления

Рассмотрим в качестве примера вязкое движение тела в жидкости, которое описывается уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \quad (10.10)$$

где  $\mathbf{v}$  – скорость жидкости, а  $\mathbf{u}$  – дополнительная скорость, связанная с внешним воздействием на тело. Предположим, что мы хотим решить задачу управления, связанную с необходимостью доставки тела из точки  $A$  в точку  $B$  с наименьшими затратами

$$C = \int_0^\tau dt u^2, \quad (10.11)$$

где  $\tau$  – время доставки. Подставляя выражение (10.10) в “цену” (10.11), находим

$$C = \int_0^\tau dt \left( \frac{d}{dt}\mathbf{r} - \mathbf{v} \right)^2. \quad (10.12)$$

Минимизация выражения (10.12) по  $\mathbf{r}$  дает уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt}\mathbf{r} - \mathbf{v} \right) = 0. \quad (10.13)$$

Проанализируем простейший пример, когда тело надо сместить на расстояние  $x_0$  вдоль оси  $X$  при наличии встречной скорости  $v_0$ :  $v_x = -v_0$ . Предположим, что тело движется равномерно и за время  $\tau$  сдвигается на  $x_0$ , тогда  $x = x_0 t / \tau$ . Подставляя это выражение в “цену” (10.12), находим

$$C = \frac{x_0^2}{\tau} + 2x_0 v_0 + v_0^2 \tau. \quad (10.14)$$

Минимизируя выражение (10.14) по  $\tau$ , находим  $\tau = x_0/v_0$ , то есть  $u = 2v_0$ . Несложно показать, что для рассмотренного случая использованная пробная функция  $x = x_0t/\tau$  является решением уравнения (10.13), то есть дает точное решение задачи. В более сложных случаях это уже не так. Тем не менее, пробную функцию  $x = x_0t/\tau$  (с последующей минимизацией по  $\tau$ ) можно использовать для оценки “цены” (10.12) и формулировки оптимального по  $\tau$  управления  $\mathbf{u}$ .

- Найти оптимальную по  $\tau$  функцию  $x = x_0t/\tau$  для встречной скорости  $v_x = -\alpha t x$ , если тело надо сместить на расстояние  $x_0$  вдоль оси  $X$ , тело начинает двигаться в момент  $t = 0$ .

## Слабая кристаллизация

Как известно, в термодинамическом равновесии система характеризуется минимальным значением энергии, в качестве которой (в зависимости от условий) надо брать тот или иной термодинамический потенциал. Обычно это свободная энергия, которая достигает минимума при фиксированном объеме образца  $V$  и температуре  $T$ , фиксированной за счет теплообмена со стенками. Минимизация может производиться по различным параметрам, например, величине намагниченности. Свободная энергия, в которой явно имеется зависимость от таких параметров, называется функционалом Ландау.

Переходу из жидкого состояния в кристаллическое соответствует возникновение модуляции плотности  $\varphi$ , которое означает, что плотность периодически зависит от координат. Изучим кристаллизацию в рамках теории слабой кристаллизации, которая строится минимизацией функционала Ландау по  $\varphi$ . В этом случае  $\varphi$  представляет собой сумму гармоник

$$\varphi = 2\text{Re} \sum_j c_j \exp(i\mathbf{q}_j \mathbf{r}) = \sum_j 2|c_j| \cos(\phi_j + \mathbf{q}_j \mathbf{r}). \quad (10.15)$$

Все волновые вектора  $\mathbf{q}_j$  имеют одинаковую величину (но не направление!), которая и определяет период кристаллической решетки.

В силу симметрии в фазах, где  $\varphi$  отлична от нуля, все абсолютные величины амплитуд гармоник равны:  $|c_j| = c$ . Минимизируется функционал Ландау

$$F = \int dV \left( \frac{a}{2} \varphi^2 - \frac{\mu}{6} \varphi^3 + \frac{\lambda}{24} \varphi^4 \right). \quad (10.16)$$

При больших положительных  $a$  минимум всегда соответствует  $\varphi = 0$ , это изотропная (жидкая) фаза, обозначаем  $I$ . Вычисляем

$$\int dV \frac{a}{2} \varphi^2 = V a N c^2. \quad (10.17)$$

Если среди  $\mathbf{q}_j$  нет замкнутых четверок, то

$$\int dV \frac{\lambda}{24} \varphi^4 = V \frac{\lambda}{2} (N^2 - N/2) c^4. \quad (10.18)$$

Если среди  $\mathbf{q}_j$  нет замкнутых троек, то минимизируя сумму (10.17) и (10.18) по  $c$  и  $N$ , находим  $N = 1$  и

$$a < 0, \quad \varphi = 2c \cos(\phi + qz), \quad (10.19)$$

$$c = \sqrt{2|a|/\lambda}, \quad F = -Va^2/\lambda. \quad (10.20)$$

Соответствует смектику А SA. Всегда реализуется при больших отрицательных  $a$ .

Пусть среди  $\mathbf{q}_j$  имеется одна замкнутая тройка, тогда  $N = 3$ . Соответствует гексатической колончатой фазе  $D_h$ . Вычисляя функционал Ландау, находим

$$\frac{F}{V\lambda} = 3\frac{a}{\lambda}c^2 - 2\frac{\mu}{\lambda}c^3 + \frac{15}{4}c^4. \quad (10.21)$$

Минимизируя (10.21) по  $c$ , находим

$$c = \frac{1}{5} \left( \frac{\mu}{\lambda} + \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda^2} - 10\frac{a}{\lambda}} \right), \quad (10.22)$$

этот корень существует, если  $\mu^2 > 10a\lambda$ .

Пусть  $\mathbf{q}_j$  являются ребрами тетраэдра, тогда  $N = 6$ . Соответствует объемно-центрированной кубической фазе BCC. Вычисляя функционал Ландау, находим

$$\frac{F}{V\lambda} = 6\frac{a}{\lambda}c^2 - 8\frac{\mu}{\lambda}c^3 + \frac{33}{2}c^4. \quad (10.23)$$

Минимизируя (10.21) по  $c$ , находим

$$c = \frac{1}{11} \left( 2\frac{\mu}{\lambda} + \sqrt{4\frac{\mu^2}{\lambda^2} - 22\frac{a}{\lambda}} \right), \quad (10.24)$$

этот корень существует, если  $\mu^2 > 11a\lambda/2$ .

Сравнивая между собой свободные энергии найденных фаз, находим, что при увеличении  $a$  (от отрицательных значений к положительным) реализуется последовательность фаз SA –  $D_h$  – BCC – I. Линии перехода между этими фазами являются параболой на диаграмме  $a - \mu$ . Эти фазы стабильны, то есть на них достигается абсолютный минимум свободной энергии в соответствующих секторах фазовой диаграммы. В то же время существует также большой набор метастабильных состояний, которые соответствуют локальным минимумам функционала Ландау.

- Найти значение  $c$  и величину функционала Ландау для простой кубической фазы ( $N = 3$ ), когда  $\mathbf{q}_j$  направлены вдоль ребер куба.

До сих пор мы считали, что коэффициент  $\lambda$  является константой, не зависящей от углов между векторами  $\mathbf{q}_j$ . Именно для этого случая найдена последовательность фаз  $SA - D_h - BCC - I$ . В то же время для нетривиальной угловой зависимости  $\lambda$  вполне возможна и другая последовательность фаз. Например, на ней может реализовываться фаза, соответствующая пяти волновым векторам  $\mathbf{q}$ , лежащим в одной плоскости и направленным под углами  $2\pi m/5$  ( $m$  – целое число) по отношению к оси  $X$ . Обратим внимание, что такая структура не является периодической.

- Почему эта структура не является периодической?
- Как должен зависеть параметр  $\lambda$  от углов между  $\mathbf{q}_j$ , чтобы на фазовой диаграмме реализовывалась бы упомянутая структура?

Такого сорта непериодические структуры называются квазикристаллическими. Имеется огромное разнообразие квазикристаллических структур, некоторые из которых реализуются в природе. Например, экспериментально наблюдается структура, в которой  $\mathbf{q}_j$  составляют ребра правильного икосаэдра.

- Чему равно число  $N$  для икосаэдрической структуры?
- Имеются ли замкнутые четверки волновых векторов для икосаэдрической структуры?

## 10.2 Семинар по теме «Вариационные задачи»

### Общая теория

Вариационные задачи, возникающие чаще всего в приложениях, сводятся к минимизации функционала (в механике он называется “действием”):

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

с некой функцией  $L(x, \dot{x}, t)$ , называемой в механике “функцией Лагранжа” или “лагранжианом”. – некая функция трех переменных (ее мы назовём “лагранжианом”). Этот функционал ставит в соответствие функции  $x(t)$  некое число. Вариационная задача заключается в нахождении такой функции  $x(t)$ , чтобы действие на ней было минимальным (или максимальным). Для обычных функций  $f(x)$  условие экстремума можно записать следующим образом. Точка  $x = x_{min}$  является экстремумом, если разложение до линейного порядка по  $\delta x = x - x_{min}$  около этой точки зануляется:

$$f(x) - f(x_{min}) = f'(x_{min})\delta x + \underline{O}(\delta x^2) = 0 \Rightarrow f'(x_{min}) = 0$$

Это можно обобщить и на случай функционала. Пусть  $x_{min}(t)$  - функция, на которой достигается экстремум функционала  $S[x(t)]$ . Тогда необходимо слабо возмутить эту функцию, рассмотрев значение функционала на функции  $x(t) = x_{min}(t) + \delta x(t)$  и найти линейную по  $\delta x$  часть приращения функционала:

$$\begin{aligned} \delta S &= S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)] \equiv \\ &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \left( L(x_{min}(t) + \delta x(t), \dot{x}_{min}(t) + \dot{\delta x}(t), t) - L(x_{min}(t), \dot{x}_{min}(t), t) \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\delta x}(t) \right) dt + \underline{O}(\delta x^2) \end{aligned}$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать по частям. Для того, чтобы не рассматривать внеинтегральный член, добавим к нашей вариационной задаче так называемое условие закреплённых концов, а именно: функционал минимизируется на таких функциях  $x(t)$ , что  $x(t_1) \equiv x_1$  и  $x(t_2) \equiv x_2$  (значения на краях фиксированы). Это значит, что вариация удовлетворяет  $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ , поэтому внеинтегрального члена не будет:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt$$

Требование  $f'(x_{min}) = 0$  в нашем случае заменяется на требование равенства нулю так называемой вариационной производной:

$$\frac{\delta S}{\delta x} \stackrel{def}{=} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Это - обыкновенное дифференциальное уравнение; и функция, на которой действие достигает экстремального значения, обязана ему удовлетворять. Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

## Примеры вариационных задач

### Геометрическая оптика

Первый пример, в которых возникают вариационные задачи - это принцип Ферма в геометрической оптике, гласящий, что свет распространяется по такой траектории, на которой время его движения минимально. Запишем это на языке вариационной задачи. Пусть показатель преломления как-то меняется в пространстве  $n(\mathbf{r})$ ; в этом случае, скорость света в среде записывается как  $v(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$ . Пусть луч света описывает некую траекторию  $\{\mathbf{r}(t), t \in (t_1, t_2)\}$  (при этом параметр  $t$  попросту параметризует

эту траекторию; не стоит его путать со временем). Время распространения на этой траектории тогда записывается в виде криволинейного интеграла:

$$T[\mathbf{r}(t)] = \oint_{\mathbf{r}(t)} \frac{dr}{v(\mathbf{r})} \equiv \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} n(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

В трехмерном пространстве “лагранжиан” этого функционала записывается как (опуская несущественный фактор  $1/c$ ):

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv n(\mathbf{r}) |\dot{\mathbf{r}}| = n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

В случае многих координат необходимо писать систему уравнений Эйлера-Лагранжа на каждую из координат, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{cases}$$

### Классическая механика

Уравнения классической механики также можно переформулировать на вариационном языке. В общем случае оказывается, что лагранжиан записывается как  $L = T - \Pi$ , где  $T$  - кинетическая энергия, а  $\Pi$  - потенциальная. В частности, для классической частицы массы  $m$ , движущейся в одномерье в потенциале  $U(x)$ , лагранжиан имеет вид

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

и соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид просто второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

### Задача 1

Пусть теперь свет распространяется в среде с переменным показателем преломления, с зависимостью:

$$n(x, y) = n_0 - \beta xy$$

причем параметр  $\beta$  мал. Исследуем траекторию, по которой луч будет двигаться из точки  $(0; 0)$  в точку  $(L; 0)$ .

**Решение**

Пусть свет распространяется по траектории  $y(x)$ . Обезразмерим задачу, перейдя к  $\tilde{x} = \frac{x}{L}$  и  $\tilde{y}(\tilde{x}) = \frac{y(x)}{L}$ . В таком случае, обезразмеренна задача записывается как:

$$S[y(x)] = \int_0^L n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = n_0 L \int_0^1 \left(1 - \frac{\beta L^2}{n_0} \tilde{x} \tilde{y}\right) \sqrt{1 + \tilde{y}'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0$$

Таким образом, в задаче имеется единственный важный безразмерный параметр  $\kappa = \frac{\beta L^2}{n_0}$ ; малость  $\beta$  на самом деле означает  $\kappa \ll 1$ . Из малости  $\kappa$ , в частности, следует малость  $y(x)$  и  $y'(x)$  (тут и далее знак “ $\sim$ ” будет опускаться), что позволит нам разложить корень:

$$S[y(x)] = n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa x y) \sqrt{1 + y'^2} dx \approx n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa x y + \frac{1}{2} y'^2) dx$$

Тут мы также выбросили “перекрёстный” член  $\kappa x y \cdot y'^2$ , поскольку он имеет ту же малость, что и следующий порядок разложения корня  $y'^4$ ; оставлять его было бы превышением точности.

**Пробная функция** Найдём приближённую траекторию, минимизируя “действие” в классе пробных функций  $y_\alpha(x) = \alpha x(1 - x)$ . Такие решения представляют собой параболы; они, конечно, отличаются от настоящего решения этой задачи. Однако, вариационный принцип позволяет нам найти параболу, которая больше всего “похожа” на точное решение. В нашем случае, “действие”, в которое мы подставим такое решение, становится функцией параметра  $\alpha$ . По этому параметру можно его минимизировать, и найти оптимальное значение  $\alpha$ . Получаем:

$$S[y_\alpha(x)] \approx n_0 x_0 \int_0^1 \left[1 - \kappa x y_\alpha(x) + \frac{1}{2} y_\alpha'^2\right] dx = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\alpha \kappa}{12} + \frac{\alpha^2}{6}\right)$$

Минимум по  $\alpha$  достигается при  $\alpha = \frac{1}{4}\kappa$ ; действие на нём равно  $S = n_0 x_0 (1 - \frac{1}{96}\kappa^2)$ . Сама траектория записывается как  $y(x) = \frac{\beta L^3}{4n_0^2} x(L - x)$ . Наибольшее отклонение по оси  $y$  достигается в точке  $x = \frac{1}{2}L$  и равно  $y_{max} = \frac{1}{16}\kappa L = \frac{\beta L^3}{16n_0}$ .

**Аналитическое приближенное решение** В последнем приближении для действия, уравнение Эйлера-Лагранжа и его решение с учётом граничных условий записываются просто как:

$$y'' + \kappa x = 0 \Rightarrow y(x) = \alpha x(1 - x)(1 + \beta x)$$

$$y'' = 2\alpha(\beta - 1) - 6\alpha\beta x \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{\kappa}{6} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6}\kappa x(1 - x^2)$$

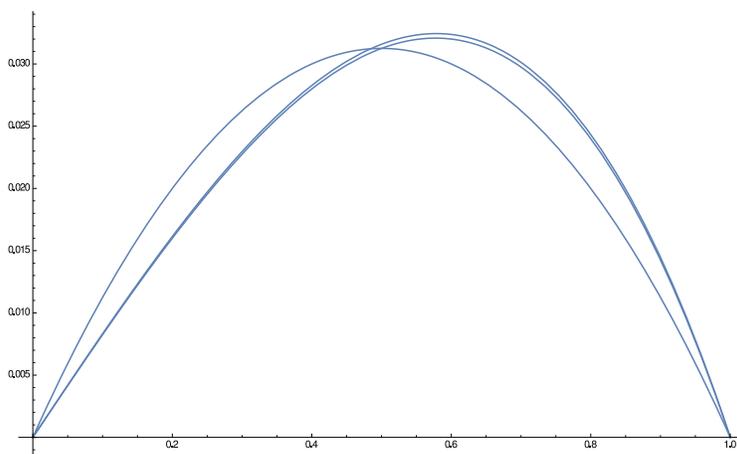
“Действие” на этом решении равно  $S = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\kappa^2}{90}\right)$  (оно меньше найденного в прошлом пункте; это приближение лучше). Максимальное отклонение достигается при  $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$  и равно  $y_{max} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\kappa L \approx \frac{1}{15.6}\kappa L$  (можно сравнить с  $1/16$ , полученной в прошлом пункте).

**Численный анализ** Наконец, можно решать численно уравнения Эйлера-Лагранжа, которые в данном случае записываются как:

$$y'' + \kappa x(y'^2 + 1) - \kappa y(xy'' + y'^3 + y') = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Для сравнения, приведём все три сделанных приближения на одном рисунке. Оказывается, что приближенное аналитическое решение даёт правильную ведущую асимптотику по  $\kappa$ , включая численный префактор.

Рис. 10.1: Точное решение и два приближённых для  $\kappa = 0.5$



## Задача 2 (статика и теория упругости)

Пусть имеется цепочка из  $N$  точечных масс  $\tilde{m}$ , соединённых пружинками жёсткостью  $\tilde{k}$ ; пружинки в нерастяннутом состоянии имеют длину  $a$ . Первый шарик закрепляют в точке  $(0; 0)$ , а последний - в точке  $(L; 0)$  (ось  $y$  направлена вертикально вверх). Под действием силы тяжести, цепочка провисает. Исследуем это провисание в пределе  $N \rightarrow \infty$ .

Чтобы задача имела конечный предел  $N \rightarrow \infty$ , параметры задачи тоже нужно менять в зависимости от  $N$ . Эта задача является моделью упругого тела (пружины) массы  $M$  и жёсткостью  $k$ , которая провисает

под собственным весом. Если это так, то жёсткости каждой из маленьких пружинок выражаются как  $\tilde{k} = k \frac{L}{a} = kN$ , а массы равны  $\tilde{m} = M \frac{a}{L} = \frac{M}{N}$ .

### Решение

Пусть координаты каждого из шариков  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$ . Потенциальная энергия складывается из двух вкладов: во-первых, это потенциальная энергия в поле тяжести, а во-вторых, энергия растяжения пружинок:

$$U_1 = \sum_{n=1}^N \tilde{m} g y_n$$

$$U_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} \tilde{k} \left[ \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} - a \right]^2$$

Проведём теперь переход к пределу  $N \rightarrow \infty$ . Для этого введём вместо  $x_n$  и  $y_n$  непрерывные функции  $x(l = na) \equiv x_n$  и  $y(l = na) \equiv y_n$  и  $l \in [0, L]$ . Во-вторых, заменим суммы на интегралы по правилу  $\sum_{n=1}^N \mapsto \int_0^L \frac{dl}{a}$ . Наконец, конечные разности, стоящие под корнем, выразим через производные. Получим следующий функционал энергии:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^L dl \left[ \frac{1}{2} k L \left( \sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{L} M g y \right]$$

Во-первых, мы избавились от всех бесконечно малых и бесконечно больших величин, оставшиеся величины имеют конечный предел при  $N \rightarrow \infty$ . Это явный признак того, что мы правильно выбрали зависимость параметров исходной задачи от  $N$  для воспроизведения непрерывного предела. Во-вторых, физический смысл  $x(l)$  и  $y(l)$  можно понять следующим образом. Пусть в какой-то момент гравитацию “выключили”; при этом пружинка будет располагаться в горизонтальном положении; и  $x(l) = l$  и  $y(l) = 0$ . После “включения” гравитации, пружина провиснет, при этом точка, которая изначально имела координаты  $(l, 0)$  переместится в точку  $(x(l), y(l))$ . Наконец, обезразмерим задачу, введя следующие параметры:  $\tilde{x} = \frac{x}{L}$ ,  $\tilde{y} = \frac{y}{L}$ ,  $\tilde{l} = \frac{l}{L}$ ,  $\varkappa = \frac{Mg}{kL}$ ,  $\tilde{U} = \frac{U}{kL^2}$ . Получим:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^1 dl \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \varkappa y(l) \right], \quad x(0) = y(0) = y(1) = 0, x(1) = 1$$

Тут и далее, как всегда, все знаки “ $\sim$ ” будут опускаться. Поскольку мы предполагаем провис маленьким (иначе теория упругости, вообще говоря, не работает) - это значит, что параметр  $\varkappa \ll 1$ .

**Размерный анализ** Получим из соображений размерности характерную высоту провисания пружинки. Пусть пружинка провисла на величину  $h$ . Тогда в интеграле можно сделать следующие оценки:  $x' \sim 1$ ,  $y \sim -h$ ,  $y' \sim -h$  (напомним, что в безразмерной задаче  $L = 1$ ; иначе оценка выглядела бы как  $y' \sim -\frac{h}{L}$ ). Таким образом, потенциальная энергия имеет вид:

$$U \sim h^4 - \kappa h$$

Имеется противоборство двух вкладов: член  $\sim \kappa h$ , связанный с силой тяжести, стремится к наибольшему провисанию, в то время как член  $\sim h^4$ , связанный с упругой энергией, стремится “выровнять” пружинку и минимизировать провисание. Равновесие наступает, когда эти вклады примерно одинаковы, что дает нам размерную оценку на масштаб величины провисания:

$$h^4 \sim \kappa h \Rightarrow h \sim \kappa^{1/3}$$

Потенциальная энергия при этом имеет масштаб:

$$U \sim h^4 \sim \kappa^{4/3}$$

(напомним, что мы работаем в безразмерных единицах; в исходной задаче  $h \sim L\kappa^{1/3}$ ).

**Пробная функция** В качестве пробной функции мы будем рассматривать параболы. Однако заметим, что параметризация  $x(l)$  и  $y(l)$  уже фиксирована; поэтому сделаем дополнительное приближение, а именно, мы пренебрежем смещением элементов пружины по горизонтали. Это приближение соответствует подстановке следующих пробных функций:

$$\begin{cases} x(l) &= l \\ y(l) &= -\alpha l(1-l) \end{cases}$$

(знак перед  $\alpha > 0$  выбран так, чтобы явно отразить тот факт, что пружинка будет провисать вниз). Подставляя её в приближенный функционал:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^1 dl \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \kappa y(l) \right] \approx \int_0^1 dl \left[ \frac{1}{8} y'^4 + \kappa y \right] = \frac{\alpha^4}{40} - \frac{\alpha \kappa}{6}$$

Минимум достигается при  $\alpha = \left(\frac{5}{3}\kappa\right)^{1/3}$ ; при этом энергия равна  $U = -\frac{1}{8} \left(\frac{5}{3}\right)^{1/3} \kappa^{4/3} \approx -0.148 \cdot kL^2 \left(\frac{Mg}{kL}\right)^{4/3}$ ; максимальное провисание равно  $h = -y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{3}\kappa\right)^{1/3} \approx 0.296\kappa^{1/3}$ .

**Аналитическое приближенное решение** Сделаем то же приближение  $x(l) = l$ ; но при этом не будем ничего предполагать про  $y(l)$ , кроме её малости. В таком случае энергия запишется как:

$$U[x(l), y(l)] \approx \int_0^1 dl \left[ \frac{1}{8} y'^4 + \kappa y \right]$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для этой задачи и его решение записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{1}{2} y'^3 \right) = \kappa \Rightarrow y'(l) = \sqrt[3]{2\kappa(l - l_0)} \Rightarrow y(l) = (2\kappa)^{1/3} \cdot \frac{3}{4} (l - l_0)^{4/3} + y_0 = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} ((2l - 1)^{4/3} - 1)$$

Можно сравнить это решение с предыдущим. Энергия равна  $U = -\frac{9}{56} \kappa^{4/3} \approx -0.161 \kappa^{4/3}$  (то есть это приближение лучше предыдущего); максимальное провисание равно  $h = -y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} = 0.375 \kappa^{1/3}$ .

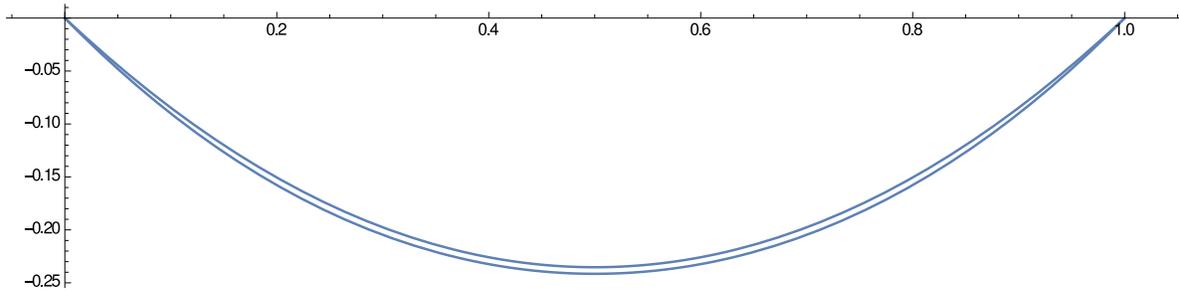
**Численное решение** Точные уравнения Эйлера-Лагранжа записываются как:

$$x' y' y'' + x'^2 x'' \sqrt{x'^2 + y'^2} + x'' y'^2 \left( \sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \right) = 0$$

$$x'^2 \left( \kappa \sqrt{x'^2 + y'^2} - 2y'' \left( \sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \right) \right) + y'^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} (\kappa - 2y'') - 2x' x'' y' = 0$$

Это уравнение можно решать численно, сравнивая с аналитическими приближениями.

Рис. 10.2: Приближение к решению и точное решение при  $\kappa = 0.5$



## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Используя кубическую пробную функцию, получить наилучшее приближенное решение для движения луча в среде с  $n(x, y) = n_0 - \beta xy$  между двумя точками  $x = 0, y = 0$  и  $x = L, y = 0$ . Считать, что  $\beta L^2 \ll n_0$ .

**Упражнение 2**

Рассмотрите задачу про провисание пружины в случае, когда в нерастянутом состоянии длина пружины  $L_0$  много меньше расстояния между точками закрепления  $L$ . Параметр  $\kappa = Mg/kL$  считать малым:  $\kappa \ll 1$ .

**Упражнение 3**

Показатель преломления в атмосфере меняется с высотой как  $n(z) = n_0(1 - \alpha z)$ . Исследуйте, под каким углом будет видно точечный источник находящийся на расстоянии  $d$  от наблюдателя, таком что  $\alpha d \ll 1$

**Задача 1**

Между двумя кольцами радиуса  $R$ , разведенными на расстояние  $d$ , натянута мыльная пленка. Энергия пленки пропорциональна ее площади. Определите точно профиль пленки и найдите ее прогиб при  $d \ll R$ .

# Глава 11

## Теория возмущений в линейной алгебре для собственных чисел и собственных векторов конечномерных матриц; снятие вырождения возмущением

### 11.1 Лекция (Я.В. Фоминов)

#### Нормальные матрицы

Мы будем рассматривать так называемые нормальные матрицы. Это матрицы, обладающие свойством  $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 0$ . Здесь символ  $\dagger$  означает эрмитово сопряжение (т.е. транспонирование и комплексное сопряжение,  $\dagger = T^*$ ), а квадратные скобки обозначают коммутатор,  $[\hat{a}, \hat{b}] \equiv \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ .

Спектральная теорема утверждает, что матрица  $\hat{A}$  является нормальной тогда и только тогда, когда она может быть диагонализирована некоторой унитарной матрицей:  $\hat{A} = \hat{U}\hat{\Lambda}\hat{U}^\dagger$ , где  $\hat{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  и  $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$  (последнее и означает, что матрица  $\hat{U}$  — унитарная). При этом оказывается, что  $\lambda_i$  — собственные значения матрицы  $\hat{A}$ , а столбцы матрицы  $\hat{U}$  — нормированные собственные векторы матрицы  $\hat{A}$  (расставленные в том же порядке, что и  $\lambda_i$  в  $\hat{\Lambda}$ ).

Среди нормальных матриц можно выделить специальные подклассы:

- Эрмитовы матрицы:  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$ , собственные значения  $\lambda_i$  вещественны. Этот случай особенно важен для физических приложений (например, в квантовой механике).
- Антиэрмитовы матрицы:  $\hat{A}^\dagger = -\hat{A}$ , собственные значения  $\lambda_i$  чисто мнимые.

- Унитарные матрицы:  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}^{-1}$ , собственные значения  $\lambda_i$  лежат на единичной окружности в комплексной плоскости.

Также можно выделить вещественные варианты тех же классов: симметричные матрицы ( $\hat{A}^T = \hat{A}$ ), антисимметричные матрицы ( $\hat{A}^T = -\hat{A}$ ), ортогональные матрицы ( $\hat{A}^T = \hat{A}^{-1}$ ). Бывают также нормальные матрицы общего вида.

Важное для нас свойство: собственные векторы нормальной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, образуют ортогональный базис (можно нормировать и получить ортонормированный базис). То есть если  $\hat{A}\vec{x}_n = A_n\vec{x}_n$  и  $\hat{A}\vec{x}_k = A_k\vec{x}_k$ , то скалярное произведение  $\vec{x}_n^\dagger\vec{x}_k = 0$  при  $n \neq k$ . Мы будем также использовать обозначения  $|x_k\rangle \equiv \vec{x}_k$ ,  $\langle x_n| \equiv \vec{x}_n^\dagger$ ,  $\langle x_n|x_k\rangle \equiv \vec{x}_n^\dagger\vec{x}_k$  (для нас сейчас это просто обозначения, потом дополнительный смысл им придаст квантовая механика).

## Теория возмущений

Пусть имеется нормальная матрица  $\hat{H}_0$ , про которую известны её собственные значения и (ортонормированные) собственные векторы:

$$\hat{H}_0|\psi_n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)}|\psi_n^{(0)}\rangle, \quad \langle\psi_n^{(0)}|\psi_m^{(0)}\rangle = \delta_{nm}.$$

(Мы здесь используем обозначения, аналогичные тем, что будут потом использоваться в квантовой механике.)

Нас интересуют собственные значения  $E_n$  и собственные векторы  $|\psi_n\rangle$  возмущённой матрицы  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{\mathcal{V}}$ :

$$\hat{H}|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle. \quad (11.1)$$

Можно искать ответы в виде разложений по степеням возмущения:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots, \quad (11.2)$$

$$|\psi_n\rangle = |\psi_n^{(0)}\rangle + |\psi_n^{(1)}\rangle + |\psi_n^{(2)}\rangle + \dots \quad (11.3)$$

(Иногда возмущение пишут в виде  $\hat{\mathcal{V}} = \epsilon\hat{\mathcal{V}}_0$  с малым параметром  $\epsilon$ ; тогда разложение идет по степеням  $\epsilon$ .)

На самом деле, вместо прямолинейной записи (11.3) удобнее искать собственные векторы в виде

$$|\psi_n\rangle = \sum_m c_m |\psi_m^{(0)}\rangle, \quad \text{где } c_m = c_m^{(0)} + c_m^{(1)} + c_m^{(2)} + \dots, \quad (11.4)$$

— мы будем делать именно так.

Подставляем все в уравнение (11.1):

$$(\hat{H}_0 + \hat{\mathcal{V}}) \sum_m c_m |\psi_m^{(0)}\rangle = E_n \sum_m c_m |\psi_m^{(0)}\rangle. \quad (11.5)$$

Учитывая действие невозмущенной матрицы, получаем

$$\sum_m c_m (E_m^{(0)} + \hat{\mathcal{V}}) |\psi_m^{(0)}\rangle = \sum_m c_m E_n |\psi_m^{(0)}\rangle. \quad (11.6)$$

Берем проекцию на  $\langle \psi_k^{(0)} |$ , получаем

$$(E_n - E_k^{(0)}) c_k = \sum_m V_{km} c_m, \quad (11.7)$$

где матричные элементы  $V_{km}$  определены следующим образом:

$$V_{km} \equiv \langle \psi_k^{(0)} | \hat{\mathcal{V}} | \psi_m^{(0)} \rangle. \quad (11.8)$$

Смысл этих матричных элементов необходимо пояснить. Подобно тому как пространственный вектор имеет разные компоненты в разных базисах, матрицу тоже можно рассматривать в разных базисах. Если мы взяли матрицу  $\hat{A}$ , состоящую из элементов  $A_{ij}$ , то можно сказать, что это элементы матрицы в базисе, заданном векторами  $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, \dots)^T$ ,  $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, \dots)^T$  и т.д. Это означает, что  $A_{ij} = \vec{a}_i^\dagger \hat{A} \vec{a}_j$ . Но мы можем выбрать другой базис, задаваемый некоторыми векторами  $\vec{b}_i$ , тогда по отношению к нему матрица будет иметь матричные элементы  $A'_{ij} = \vec{b}_i^\dagger \hat{A} \vec{b}_j$ . В этом смысле  $V_{km}$  — матричные элементы матрицы  $\hat{\mathcal{V}}$ , вычисленные в базисе векторов  $|\psi_k^{(0)}\rangle$ .

Далее мы будем рассматривать уравнение (11.7) в разных порядках по возмущению. Детали рассмотрения зависят от того, является ли невозмущённое собственное значение  $E_n^{(0)}$  невырожденным (т.е. ему соответствует только один собственный вектор) или вырожденным (т.е. ему соответствуют несколько линейно независимых собственных векторов). Рассмотрим эти ситуации по-отдельности.

## Невырожденное собственное значение

Пусть нас интересует собственное значение и собственный вектор с номером  $n$ . Тогда из записи (11.4) очевидно, что  $c_k^{(0)} = \delta_{kn}$ . В нулевом порядке уравнение (11.7) (мы должны сохранить лишь нулевой порядок по  $V$  в обеих сторонах уравнения) даёт тривиальное равенство

$$(E_n^{(0)} - E_k^{(0)}) \delta_{nk} = 0. \quad (11.9)$$

## Первый порядок теории возмущений

Первый порядок:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}, \quad (11.10)$$

$$c_k = \delta_{kn} + c_k^{(1)}, \quad (11.11)$$

и уравнение (??) в первом порядке даёт

$$E_n^{(1)}\delta_{kn} + (E_n^{(0)} - E_k^{(0)})c_k^{(1)} = \sum_m V_{km}\delta_{mn} = V_{kn}. \quad (11.12)$$

Отсюда при  $k = n$  получаем

$$E_n^{(1)} = V_{nn}, \quad (11.13)$$

таким образом мы нашли поправку первого порядка к собственному значению. При  $k \neq n$  получаем поправку первого порядка к коэффициентам, определяющим собственный вектор:

$$k \neq n: \quad c_k^{(1)} = \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}. \quad (11.14)$$

При этом коэффициент  $c_n^{(1)}$  остаётся неопределённым. Он должен быть найден из условия нормировки. Записав

$$|\psi_n\rangle = (1 + c_n^{(1)})|\psi_n^{(0)}\rangle + \sum'_m \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|\psi_m^{(0)}\rangle \quad (11.15)$$

(штрих у знака суммы означает, что суммирование ведётся по всем значениям кроме  $n$ ) и учитывая ортонормированность системы невозмущённых собственных векторов, с точностью до первого порядка получаем

$$\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1 + 2 \operatorname{Re} c_n^{(1)}. \quad (11.16)$$

Отсюда ясно, что мы можем взять

$$c_n^{(1)} = 0. \quad (11.17)$$

Поэтому в результате поправка первого порядка к собственному вектору дается выражением

$$|\psi_n^{(1)}\rangle = \sum'_m \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}|\psi_m^{(0)}\rangle. \quad (11.18)$$

Из формулы 11.18 следует условие применимости теории возмущений. Поскольку поправка к собственному вектору должна быть мала, все коэффициенты в сумме должны быть много меньше единицы:

$$|V_{mn}| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|. \quad (11.19)$$

## Второй порядок теории возмущений

Теперь

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)}, \quad (11.20)$$

$$c_k = \delta_{kn} + c_k^{(1)} + c_k^{(2)}, \quad (11.21)$$

и уравнение (11.7) во втором порядке даёт:

$$E_n^{(2)}\delta_{kn} + E_n^{(1)}c_k^{(1)} + (E_n^{(0)} - E_k^{(0)})c_k^{(2)} = \sum_m V_{km}c_m^{(1)}. \quad (11.22)$$

При  $k = n$  получаем поправку второго порядка к собственному значению:

$$E_n^{(2)} = \sum'_m \frac{V_{nm}V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}. \quad (11.23)$$

В наиболее физически важном случае эрмитовых матриц будет  $V_{mn} = V_{nm}^*$ , поэтому в правой части в числителе дроби будет  $|V_{nm}|^2$ . Это, в частности, означает, что в этом случае поправка второго порядка к наименьшему собственному значению всегда отрицательна (т.к. все знаменатели в сумме отрицательны). При  $k \neq n$  из уравнения (11.22) находим

$$c_k^{(2)} = \sum'_m \frac{V_{km}V_{mn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} - \frac{V_{kn}V_{nn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})^2}. \quad (11.24)$$

Аналогично тому что было в первом порядке, коэффициент  $c_n^{(2)}$  остаётся неопределённым и должен быть найден из условия нормировки. Записывая

$$|\psi_n\rangle = (1 + c_n^{(2)})|\psi_n^{(0)}\rangle + \sum'_m c_m^{(1)}|\psi_m^{(0)}\rangle + \sum'_m c_m^{(2)}|\psi_m^{(0)}\rangle, \quad (11.25)$$

с точностью до второго порядка получаем

$$\langle\psi_n|\psi_n\rangle = 1 + 2 \operatorname{Re} c_n^{(2)} + \sum'_m |c_m^{(1)}|^2. \quad (11.26)$$

Отсюда ясно, что для выполнения условия нормировки мы можем взять

$$c_n^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum'_m |c_m^{(1)}|^2 = -\frac{1}{2} \sum'_m \frac{|V_{mn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2}. \quad (11.27)$$

## Вырожденное собственное значение

Пусть теперь интересующее нас невозмущённое собственное значение  $E_n^{(0)}$  вырождено с кратностью  $s$ . Это означает, что существует  $s$  линейно независимых собственных векторов  $|\psi_n^{(0)}\rangle, |\psi_{n'}^{(0)}\rangle, |\psi_{n''}^{(0)}\rangle, \dots$ , соответствующих одному и тому собственному значению  $E_n^{(0)}$  невозмущённой матрицы.

Выбор собственных векторов «внутри» вырожденного собственного значения неоднозначен, можно

взять любые их линейные комбинации и при этом по-прежнему будут получаться вектора, отвечающие тому же  $E_n^{(0)}$ . Но есть так называемые «правильные» векторы нулевого приближения — это такие комбинации  $c_n^{(0)}|\psi_n^{(0)}\rangle + c_{n'}^{(0)}|\psi_{n'}^{(0)}\rangle + \dots$ , которые *слабо* меняются под действием возмущения. Иными словами, поправки к таким комбинациям за счёт возмущения должны быть малы в меру малости возмущения. Это нетривиальное требование, для произвольных комбинаций такого не будет.

Можно пояснить эту ситуации на физическом примере. Пусть у нас есть совершенно изотропный ферромагнетик с некоторой намагниченностью  $\mathbf{M}$ . Мы хотим приложить слабое магнитное поле. Ясно, что величина намагниченности тоже изменится слабо. Но давайте подумаем про намагниченность в полном векторном смысле. Изначально она может быть направлена куда угодно. Когда же мы приложим поле по оси  $z$ , намагниченность сначала повернётся и станет направлена по оси  $z$  (теперь ей не всё равно, куда смотреть), а затем немного изменится по модулю. То есть изменение вектора  $\mathbf{M}$  вообще говоря не мало! Есть поправка нулевого порядка, связанная с перенаправлением  $\mathbf{M}$  по  $z$ . А если мы, имея в виду дальнейшее включение поля по  $z$ , заранее направим  $\mathbf{M}$  именно туда, тогда поправка к вектору будет мала. Таким образом, намагниченность, направленная по  $z$  — это правильная намагниченность нулевого приближения. С собственными векторами ситуация аналогична. Коэффициенты  $c_n^{(0)}$ ,  $c_{n'}^{(0)}$ , ... никакой малости не содержат — просто, зная какое возмущение затем будет приложено, мы должны заранее повернуть собственные векторы в нужную сторону.

Технически это делается довольно просто. Запишем уравнение (11.7) при  $k = n, n', \dots$  в первом порядке теории возмущений. Поскольку все эти индексы соответствуют одному вырожденному уровню, разность энергий в левой части не содержит нулевого порядка, и мы оставляем там первый порядок  $E^{(1)}$ . В то же время, в правой стороне первый порядок уже обеспечен за счёт  $V_{km}$ , поэтому  $c_k$  с обеих сторон нужно брать в нулевом порядке:

$$c_n = c_n^{(0)}, \quad c_{n'} = c_{n'}^{(0)}, \quad \dots \quad (11.28)$$

$$c_m = 0 \quad \text{при } m \neq n, n', \dots \quad (11.29)$$

В результате уравнение 11.7 даёт  $s$  уравнений

$$E^{(1)}c_n^{(0)} = \sum_{n'} V_{nn'}c_{n'}^{(0)} \quad (11.30)$$

для всех  $n$  внутри вырожденного собственного значения. Перепишем это в виде

$$\sum_{n'} (V_{nn'} - E^{(1)}\delta_{nn'})c_{n'}^{(0)} = 0, \quad (11.31)$$

откуда ясно, что для существования нетривиального решения для коэффициентов  $c_n^{(0)}$  необходимо

$$\det[V_{nn'} - E^{(1)}\delta_{nn'}] = 0. \quad (11.32)$$

Это уравнение называется секулярным. Оно полиномиальное,  $s$ -ой степени по  $E^{(1)}$ , поэтому имеет  $s$  корней (для эрмитовых матриц все корни вещественны). Сумма его корней равна сумме диагональных элементов  $V_{nn} + V_{n'n'} + \dots$ . Это можно доказать следующим образом. Обозначим корни  $\lambda_i$ , тогда

$$\begin{aligned} \det[V_{nn'} - E^{(1)}\delta_{nn'}] &= (\lambda_1 - E^{(1)}) (\lambda_2 - E^{(1)}) \dots (\lambda_s - E^{(1)}) = \\ &= (-E^{(1)})^s + (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s) (-E^{(1)})^{s-1} + \dots \end{aligned} \quad (11.33)$$

С другой стороны, при вычислении детерминанта напрямую получится длинная сумма, но степени  $(E^{(1)})^s$  и  $(E^{(1)})^{s-1}$  возникнут только из одного слагаемого этой суммы, содержащего произведение диагональных элементов матрицы, т.е. из слагаемого  $(V_{11} - E^{(1)})(V_{22} - E^{(1)}) \dots (V_{ss} - E^{(1)})$ . Поэтому

$$\det[V_{nn'} - E^{(1)}\delta_{nn'}] = (-E^{(1)})^s + (V_{11} + V_{22} + \dots + V_{ss}) (-E^{(1)})^{s-1} + \dots \quad (11.34)$$

Сравнение записей (11.33) и (11.34) доказывает сделанное выше утверждение.

Итак, рассматривая вопрос о коэффициентах, задающих правильные собственные векторы нулевого приближения, мы получили секулярное уравнение (11.32), из которого находятся поправки первого порядка к вырожденному уровню. В результате, вообще говоря, имеет место так называемое снятие вырождения, которое может быть полным (если все корни уравнения различны) либо частичным (вырожденное собственное значение расщепляется, но по крайней мере некоторые расщеплённые собственные значения остаются вырожденными с меньшей кратностью).

Сами же коэффициенты  $c_n^{(0)}$ , задающие правильные собственные векторы нулевого приближения, нужно находить из уравнения 11.31, подставляя туда по очереди найденные значения поправок  $E^{(1)}$ .

## 11.2 Семинар по теме «Теория возмущений»

### Обозначения

Линейные операторы (то есть матрицы) мы будем обозначать как  $\hat{H}$ :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Вектора линейного пространства, на которые эти операторы действуют, мы будем обозначать как  $|a\rangle$ :

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Эрмитово сопряжённые вектора (операция эрмитового сопряжения - это транспонирование и комплексное сопряжение) мы будем обозначать как  $\langle b| = (|b\rangle)^\dagger$ :

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \langle b| = (5 \ 1 \ 3)$$

Таким образом, например, действие оператора на вектор обозначается как:

$$\hat{H}|a\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$$

и скалярное произведение обозначается как:

$$\langle b|a\rangle = (5 \ 1 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 7$$

Эти обозначения пришли из квантовой механики, в которой чаще всего и применяется алгебраическая теория возмущений.

## Общие сведения

Говорят, что вектор  $|a\rangle$  - собственный вектор для оператора  $\hat{H}$ , соответствующий собственному числу  $\lambda$ , если:

$$\hat{H}|a\rangle = \lambda|a\rangle$$

Матрица  $\hat{H}$  называется эрмитовой, если  $\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ . В частности, если матрица вещественна, то эрмитовость для неё означает симметричность. Известно, что для любого эрмитового оператора можно выбрать базис пространства, состоящий из его собственных векторов. Это эквивалентно утверждению о том, что существует базис  $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$ , такой, что матрица  $\hat{H}$ , записанная в этом базисе диагональна:

$$H_{nm} \equiv \langle n|\hat{H}|m\rangle = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

Этот базис можно выбрать ортонормированным, так что:

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

## Теория возмущений

### Постановка задачи

Пусть имеется линейный оператор  $\hat{H}_0$ , для которого известен ортонормированный базис  $\{|n^{(0)}\rangle\}_{n=1}^N$  из его собственных векторов:

$$\hat{H}_0 |n^{(0)}\rangle = E_n^{(0)} |n^{(0)}\rangle$$

Теория возмущений решает задачу о (приближенном) нахождении собственных векторов и собственных значений матрицы  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}$ , где параметр  $\epsilon \ll 1$ , в виде разложения по малости параметра  $\epsilon$ :

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$$

при этом

$$E_n = E_n^{(0)} + \epsilon E_n^{(1)} + \epsilon^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$|n\rangle = |n^{(0)}\rangle + \epsilon |n^{(1)}\rangle + \epsilon^2 |n^{(2)}\rangle + \dots$$

### Невырожденный случай

Если собственное число  $E_n^{(0)}$  оказывается невырожденным (это означает, что ему соответствует ровно один собственный вектор  $|n^{(0)}\rangle$ ), то в первом порядке теории возмущений поправка к нему дается выражением:

$$E_n^{(1)} = V_{nn} \equiv \langle n^{(0)} | \hat{V} | n^{(0)} \rangle$$

а во втором порядке теории возмущений - выражением:

$$E_n^{(2)} = \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn} V_{nk}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} = \sum_{k \neq n} \frac{|V_{nk}|^2}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}$$

Поправки к собственному вектору в первом порядке теории возмущений даются выражением:

$$|n^{(1)}\rangle = \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}} |k^{(0)}\rangle$$

Видно, что если имеется случай, когда  $V_{kn} \neq 0$ , но  $E_k^{(0)} = E_n^{(0)}$ , то имеется проблема, связанная с делением на ноль. Это соответствует вырождению собственного числа (то есть одному собственному числу соответствуют два собственных вектора), и такие случаи нужно рассматривать отдельно.

### Вырожденный случай

Пусть собственное число  $E_n^{(0)}$  является  $s$ -кратно вырожденным (что означает, что среди набора  $\{|n^{(0)}\}_{n=1}^N$  имеются  $s$  различных векторов  $\{|n_k^{(0)}\}_{k=1}^s$ , соответствующих этому собственному числу), тогда схема действий следующая. Сперва запишем проекцию матрицы  $\hat{V}$  на вырожденное собственное подпространство. Это значит, что нужно рассмотреть матрицу  $\tilde{V}$  размера  $s \times s$ , которая записывается как:

$$\tilde{V}_{ab} = \langle n_a^{(0)} | \hat{V} | n_b^{(0)} \rangle = \begin{pmatrix} V_{n_1 n_1} & V_{n_1 n_2} & \cdots & V_{n_1 n_s} \\ V_{n_2 n_1} & V_{n_2 n_2} & \cdots & V_{n_2 n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n_s n_1} & V_{n_s n_2} & \cdots & V_{n_s n_s} \end{pmatrix}, \quad V_{n_i n_j} \equiv \langle n_i^{(0)} | \hat{V} | n_j^{(0)} \rangle$$

Затем эту матрицу нужно диагонализировать стандартным образом в базисе из  $\{|n_k^{(0)}\}_{k=1}^s$  (что гораздо проще - исходная матрица была размера  $N \times N$ , а эта матрица - размера  $s \times s$ ; как правило, кратность вырождения  $s$  - не очень большое число). Для этого записывается секулярное уравнение

$$\det(\tilde{V} - v\hat{\mathbb{I}}) \equiv \det \begin{pmatrix} V_{n_1 n_1} - v & V_{n_1 n_2} & \cdots & V_{n_1 n_s} \\ V_{n_2 n_1} & V_{n_2 n_2} - v & \cdots & V_{n_2 n_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n_s n_1} & V_{n_s n_2} & \cdots & V_{n_s n_s} - v \end{pmatrix} = 0$$

затем находятся  $s$  его собственных чисел  $\{v_a\}_{a=1}^s$  и  $s$  его собственных векторов  $\{|\tilde{n}_k\rangle\}_{k=1}^s$ . Эти вектора называются «правильными векторами главного (ведущего) приближения». Они были выбраны таким образом, что они тоже являются собственными векторами исходного оператора  $\hat{H}_0$ , с собственным числом  $E_n^{(0)}$ , и, кроме того, образуют базис вырожденного собственного подпространства. Далее необходимо перейти от базиса исходных векторов  $\{|n_a^{(0)}\}_{a=1}^s$  к базису из  $\{|\tilde{n}_a\rangle\}_{a=1}^s$ ; и в новом базисе уже можно применять стандартные формулы для невырожденной теории возмущений. В частности, случая, когда происходит деление на ноль ( $V_{kn} \neq 0$  но  $E_k^{(0)} = E_n^{(0)}$ ) уже не будет.

Заметим, что при этом числа  $\{v_a\}_{a=1}^s$  (которые являлись собственными числами матрицы  $\tilde{V}$ ) будут играть роль первой поправки  $E_n^{(1)}$  к собственному числу  $E_n^{(0)}$ ; кроме того, поскольку этих чисел  $s$ , и они в общем случае различны, то говорят о снятии вырождения возмущением - число  $E_n^{(0)}$  перестаёт быть вырожденным, происходит расщепление.

**Замечание** Параметр  $\epsilon$  был введён лишь для того, чтобы аккуратно следить за тем, какой порядок теории возмущений рассматривается. Оказывается, что в  $k$ -м порядке теории возмущений, матрица  $\hat{V}$  входит ровно  $k$  раз (и этот порядок домножается на  $\epsilon^k$ ); это позволяет нам формально положить параметр  $\epsilon = 1$  во всех выражениях, и просто считать саму матрицу  $\hat{V}$  малой.

**Литература** [3], §38 (“возмущения, не зависящие от времени”) и §39 (“секулярное уравнение”).

### Задача 1

Считая параметр  $a > b$  и  $\epsilon \ll 1$ , исследуем с помощью теории возмущений матрицу

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} a & \epsilon \\ \epsilon & b \end{pmatrix}$$

### Решение

Невозмущенные собственные вектора и собственные значения матрицы  $\hat{H}_0$  записываются тривиально как:

$$\begin{cases} |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1^{(0)} = a \\ |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_2^{(0)} = b \end{cases}$$

Следуя теории возмущений, первые поправки к собственным числам  $\lambda_1^{(0)}$  записываются как:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(1)} = V_{11} = \langle 1 | \hat{V} | 1 \rangle = 0 \\ \lambda_2^{(1)} = V_{22} = \langle 2 | \hat{V} | 2 \rangle = 0 \end{cases}$$

Эти поправки оказались нулевыми, поэтому необходимо исследовать следующий порядок теории возмущений. Он даёт нам:

$$\begin{cases} \lambda_1^{(2)} = \sum_{k \neq 1} \frac{|V_{k1}|^2}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} = \frac{|V_{21}|^2}{a-b} = \frac{\epsilon^2}{a-b} \\ \lambda_2^{(2)} = \sum_{k \neq 2} \frac{|V_{k2}|^2}{\lambda_2^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} = \frac{|V_{12}|^2}{b-a} = -\frac{\epsilon^2}{a-b} \end{cases}$$

Таким образом, приближенно спектр записывается как:

$$\begin{cases} \lambda_1 \approx a + \frac{\epsilon^2}{a-b} \\ \lambda_2 \approx b - \frac{\epsilon^2}{a-b} \end{cases}$$

**Точное решение** Эту задачу можно решить точно. Уравнение на собственные значения для матрицы  $\hat{H}$  записывается как:

$$\det(\hat{H} - \lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & \epsilon \\ \epsilon & b - \lambda \end{pmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda) - \epsilon^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a + b \pm \sqrt{(a-b)^2 + 4\epsilon^2}}{2}$$

Представим ответ в виде разложения по  $\epsilon$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( a + b \pm (a-b) \sqrt{1 + \frac{4\epsilon^2}{(a-b)^2}} \right) \approx \frac{1}{2} \left( a + b \pm (a-b) \left( 1 + \frac{2\epsilon^2}{(a-b)^2} \right) \right) = \begin{cases} a + \frac{\epsilon^2}{a-b} \\ b - \frac{\epsilon^2}{a-b} \end{cases}$$

## Задача 2 (эффект Штарка)

В атоме водорода энергетические уровни нумеруются тремя квантовыми числами  $n$ ,  $l$  и  $m$ . При этом число  $n = 1, 2, \dots$ ; при фиксированном  $n$ , число  $l = 0, 1, \dots, n-1$ , а при фиксированных  $n$  и  $l$ , число  $m = -l, \dots, l$ . Энергия же состояния атома водорода зависит только от числа  $n$  (и выражается как  $E = -\frac{\text{Rd}}{n^2}$ , где Rd называется постоянной Ридберга); тем самым, состояние с  $n = 2$  оказывается четырёхкратно вырожденным по энергии (энергии  $E_2 = -\frac{\text{Rd}}{4}$  соответствуют состояния  $|n, l, m\rangle \in \{|2, 0, 0\rangle, |2, 1, -1\rangle, |2, 1, 0\rangle, |2, 1, 1\rangle\}$ ). Наложение электрического поля воспринимается в этой задаче как возмущение; при этом возмущенный оператор энергии (гамильтониан), записывается как:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_2 & V & 0 & 0 \\ V^* & E_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}$$

Собственные значения этого оператора в квантовой механике играют роль допустимых значений энергии системы. Требуется найти поправки при наложении такого возмущения.

## Решение

В данном случае у невозмущенного оператора  $\hat{H}_0$  имеется четырёхкратно вырожденный уровень энергии  $E_2$ , и имеются четыре собственных вектора:

$$|1^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |2^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |3^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |4^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку имеется вырождение, то необходимо применять вырожденный случай теории возмущений. Следуя ему, необходимо записать секулярное уравнение:

$$\det(\hat{V} - v) = \det \begin{pmatrix} -v & V & 0 & 0 \\ V^* & -v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -v \end{pmatrix} = v^2 (v^2 - |V|^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_{1,2} = \pm |V| \\ v_{3,4} = 0 \end{cases}$$

Далее, необходимо найти собственные вектора, соответствующие этим собственным значениям. Пусть  $V = |V|e^{i\varphi}$  ( $V$  - комплексное число). Тогда, уравнения на собственные вектора записываются как:

$$\begin{pmatrix} -|V| & |V|e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ |V|e^{-i\varphi} & -|V| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -|V| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -|V| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow |\tilde{1}^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |V| & |V|e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ |V|e^{-i\varphi} & |V| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |V| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |V| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow |\tilde{2}^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и тривиально  $|\tilde{3}^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $|\tilde{4}^{(0)}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Напомним, вектора  $|\tilde{k}^{(0)}\rangle$  называются «правильными

векторами ведущего приближения», и далее необходимо перейти к базису из этих векторов. В частности, первый порядок теории возмущений даст поправки, совпадающие с собственными числами  $v_k$ :

$$\begin{cases} E_{2;1} & = E_2 - |V| \\ E_{2;2} & = E_2 + |V| \\ E_{2;3,4} & = E_2 \end{cases}$$

Таким образом, уже в первом порядке теории возмущений, вырождение частично снялось (вместо четырехкратно вырожденного уровня энергии  $E_2$  мы получаем однократно вырожденный уровень энергии  $E_2 + |V|$ , однократно вырожденный уровень  $E_2 - |V|$  и двукратно вырожденный уровень  $E_2$ ). Кроме того, расщепление линейно по возмущению  $|V|$ ; это - прямое следствие вырождения в этой задаче. В квантовой механике это явление называется линейным эффектом Штарка. Если бы вырождения не было, то ведущая поправка была бы лишь во втором порядке теории возмущений, и поправки к уровням энергии были бы квадратичны по  $|V|$  (как в первой задаче).

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Рассматриваются эрмитовы матрицы (операторы)  $\hat{H}$  и  $\hat{V}$  размера  $n \times n$ , при этом все собственные значения  $E_1^0, \dots, E_n^0$  и нормированные собственные векторы  $|\psi_1^0\rangle, \dots, |\psi_n^0\rangle$  матрицы  $\hat{H}$  считаются известными, более того  $E_i^0 \neq E_j^0$  при  $i \neq j$  (невырожденный случай). Далее составляется матрица  $\hat{H} + \epsilon\hat{V}$ . При  $\epsilon \rightarrow 0$ , ищем собственные векторы и значения этой матрицы в виде

$$E_i = E_i^0 + \epsilon E_i^1 + \epsilon^2 E_i^2 + \dots$$

$$|\psi_i\rangle = |\psi_i^0\rangle + \epsilon|\psi_i^1\rangle + \epsilon^2|\psi_i^2\rangle + \dots$$

На семинаре было доказано, что  $E_i^1 = \langle \psi_i^0 | V | \psi_i^0 \rangle$ . Получите формулы для  $|\psi_i^1\rangle$  и для  $E_i^2$ . Не забудьте, что мы рассматриваем нормированные векторы, т.е. при выводе есть дополнительное условие  $\langle \psi_i | \psi_j \rangle = \langle \psi_i^0 | \psi_j^0 \rangle = \delta_{ij}$ .

### Упражнение 2

Матрицы Паули определены как

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для матрицы  $\hat{H} + \epsilon\hat{V}$  найдите поправки к собственным значениям вплоть до второго порядка по  $\epsilon$  и к собственным векторам вплоть до первого порядка для следующих случаев:

$$\hat{H} = \sigma_x, \quad \hat{V} = \sigma_x; \quad \hat{H} = \sigma_x, \quad \hat{V} = \sigma_y; \quad \hat{H} = \sigma_x, \quad \hat{V} = \sigma_z$$

### Упражнение 3

Матрицы  $\hat{H}$  и  $\hat{V}$  имеют вид:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \hat{V} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя теорию возмущений, найдите с точностью до  $\epsilon^2$  собственные значения матрицы  $H + \epsilon V$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$  (собственные векторы искать не нужно).

## Большая задача про квантовую механику

### Часть один

Любой дифференциальный оператор  $\hat{H}$  можно рассматривать, как матрицу в функциональном пространстве. Т.е. для обычных матриц  $n \times n$  при действии матрицы на вектор получался какой-то другой вектор:  $\hat{H}|\psi\rangle = |\psi'\rangle$ . Точно также, дифференциальный оператор  $\hat{H}$ , действуя на какую-нибудь функцию одной переменной  $\psi(x)$ , возвращает какую-то другую функцию  $\psi'(x)$ :

$$\hat{H}\psi(x) = \left( a_0(x) + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + \dots + a_N(x)\frac{d^N}{dx^N} \right) \psi(x) = \psi'(x).$$

Дальше мы будем рассматривать оператор

$$\hat{H} = -\frac{d^2}{dx^2} - \kappa\delta(x),$$

где  $\kappa > 0$ .

Собственные функции (векторы) такого оператора определены обычным образом

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x).$$

Это уравнение на собственные значения и функции в квантовой механике называется стационарным уравнением Шредингера. Скалярное произведение определено как

$$(\psi(x) \cdot \phi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x)\phi(x).$$

Эта формула очень сильно напоминает формулу для  $n$ -компонентных векторов:  $(\vec{\psi} \cdot \vec{\phi}) = \langle \psi | \phi \rangle = \sum_{i=1}^n \psi_i^* \phi_i$ . Найдите собственную функцию  $\hat{H}$ , которая спадает в ноль на  $\pm\infty$  и соответствующее ей собственное значение  $E$ . Тут нужно действовать так:

- Найдите общее решение уравнения Шредингера при  $x > 0$  и  $x < 0$  по-отдельности для произвольного  $E$ . В итоге у вас получится 4 неизвестных коэффициента, которые нужно определить, а также определить нужно  $E$ . Теперь потребуем убывания функций на бесконечностях. Какие условия это требование накладывает на неизвестные коэффициенты и на величину  $E$ ?
- Теперь нужно “обработать” точку  $x = 0$ . Первое условие, которое накладывается на нашу функцию в этой точке - непрерывность. Чтобы получить еще одно условие, которое позволит явно найти  $E$  необходимо учесть наличие  $\delta$ -функции в операторе. Чтобы получить это условие, проинтегрируйте уравнение Шредингера в пределах от  $-\lambda$  до  $\lambda$ , а затем возьмите предел  $\lambda \rightarrow +0$
- После всех этих процедур собственная функция найдена с точностью до общего множителя, а собственное число  $E$  - определено. Отнормируйте собственную функцию на единицу, т.е. потребуйте  $(\psi(x) \cdot \psi(x)) = 1$ .

### Часть два

Найдите поправку к найденному собственному значению, получающуюся при рассмотрении слабо отличающегося дифференциального оператора  $\hat{H} + \epsilon\hat{V}$ , где  $\hat{V} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(x - i)$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Оказывается, что все остальные собственные функции для исходного оператора  $\hat{H}$  (а их бесконечно много) имеют другой знак  $E$ , т.е. ситуация невырожденная. Тогда можно воспользоваться теорией возмущений для матриц. Как всегда, ищем собственное значение полного оператора в виде  $E = E^0 + \epsilon E^1 + \dots$ , где  $E^0$  - собственное значение  $\hat{H}$  определенное в первой части задачи. Тогда  $E^1$  можно найти по формуле

$$(\psi \cdot \hat{V}\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x)\hat{V}\psi(x)$$

где  $\psi(x)$  также был найден в первой части задачи.

# Глава 12

## Преобразования Фурье

### 12.1 Лекция (М.А. Скворцов)

#### Введение

Олимпиадная задача. Сопротивление между двумя соседними узлами квадратной сетки сопротивлений. Ответ:  $R/2$ . Решается путем комбинации решения с источником и со стоком. Проблема в том, как посчитать сопротивление между произвольными узлами.

#### Непрерывное преобразование Фурье

##### Определение

Пусть  $f(x)$  — функция координаты  $x$ . ПФ:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi} \quad (12.1)$$

Обратное ПФ дается формулой:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx \quad (12.2)$$

Подстановка (12.2) в (12.1) дает разложение  $\delta$ -функции по плоским волнам:

$$f(x) = \int f(y) dy \int e^{ip(x-y)} \frac{dp}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \delta(x) = \int e^{ipx} \frac{dp}{2\pi} \quad (12.3)$$

**Элементарные свойства**

- Если  $f(x)$  действительна, то  $F(-p) = F^*(p)$ .

- ФП производной:

$$f'(x) \mapsto ipF(p) \quad (12.4)$$

- ФП  $\delta$ -функции:

$$\delta(x) \mapsto 1 \quad (12.5)$$

- ФП функции Гаусса:

$$e^{-ax^2} \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-p^2/4a} \quad (12.6)$$

Два последних примера говорят о дуальности координатного и импульсного представлений. Чем уже функция в одном — тем шире в другом:  $\Delta p \Delta x \sim 1$ . В квантовой механике это станет соотношением неопределенности Гейзенберга.

**Пример 1: Кулоновский потенциал**

Потенциал  $\varphi(\mathbf{r})$  точечного заряда удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$-\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (12.7)$$

Для его решения воспользуемся ПФ, которое в многомерном случае является естественным обобщением одномерного выражения (12.1):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \Phi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \quad (12.8)$$

Левая часть уравнения (12.7) преобразуется с использованием свойства (12.4), а правая — с использованием свойства (12.5). В результате получим

$$(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)\Phi(\mathbf{p}) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\mathbf{p}^2} \quad (12.9)$$

Теперь закон Кулона получается путем вычисления интеграла (12.8) в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \int \frac{e^{ipr \cos \theta}}{p^2} \frac{2\pi p^2 dp \sin \theta d\theta}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \int_0^\pi e^{ipr \cos \theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \int_{-1}^1 e^{ipr \mu} d\mu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2 \sin pr}{pr} dp = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{\sin q}{q} dq = \frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad (12.10)$$

где мы воспользовались известным значением последнего интеграла.

**Пример 2: Потенциал Юкавы**

Потенциал Юкавы точечного заряда определяется путем решения дифференциального уравнения

$$-\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2 \varphi(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \quad (12.11)$$

Для решения можем сразу записать

$$\varphi(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{p \sin pr}{p^2 + \kappa^2} dp = \frac{e^{-\kappa r}}{4\pi r} \quad (12.12)$$

**Пример 3: Решение уравнения диффузии**

Пусть имеется поле  $\rho(x, t)$ , подчиняющееся уравнению диффузии:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2} \quad (12.13)$$

Стандартной задачей является определение эволюции  $\rho(x, t)$ , если известно его значение в нулевой момент времени:  $\rho(x, 0) = \rho_0(x)$ .

Применим к функции  $\rho(x, t)$  ПФ, перейдя к фурье-гармоникам  $R(q, t)$ . Тогда уравнение (12.13) переписется в виде

$$\frac{\partial R(q, t)}{\partial t} = -Dq^2 R(q, t) \quad (12.14)$$

Принципиальное отличие уравнения (12.14) от (12.13) заключается в том, что в ПФ разные фурье-гармоники оказываются расцепленными. Так что, в отличие от (12.13), уравнение 12.14 является не уравнением в частных производных, а всего лишь обыкновенным дифференциальным уравнением, которое может быть элементарно решено:

$$R(q, t) = R(q, 0) e^{-Dq^2 t} \quad (12.15)$$

Осталось просто собрать все гармоники:

$$\rho(x, t) = \int R(q, 0) e^{-Dq^2 t} e^{iqx} \frac{dq}{2\pi} \quad (12.16)$$

Можно получить и явную формулу через  $\rho_0(x)$ :

$$\rho(x, t) = \iint dy \rho_0(y) e^{-iqy} e^{-Dq^2 t} \frac{dq}{2\pi} = \int G_D(x - y, t) \rho_0(y) dy \quad (12.17)$$

где

$$G_D(x - y, t) = \frac{e^{-(x-y)^2/4Dt}}{\sqrt{4\pi Dt}} \quad (12.18)$$

является функцией Грина уравнения диффузии.

**Пример 4: Решение интегральных уравнений**

ПФ позволяет эффективно решать интегральные (и интегро-дифференциальные) уравнения, содержащие *свертку функций*.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу об определении плотности заряда, создающего заданный потенциал. Пусть потенциал точечного ( $\delta$ -функционного) заряда есть  $V(x)$ . Тогда распределение заряда  $\rho(x)$  приводит к потенциалу

$$\varphi(x) = \int V(x-y)\rho(y)dy \quad (12.19)$$

Правая часть называется сверткой функций  $V$  и  $\rho$ . Необходимо восстановить  $\rho(x)$  по заданному  $\varphi(x)$ . Выполнив ПФ, видим, что свертка в (12.19) превратилась в произведение фурье-образов:

$$\Phi(p) = V(p)R(p) \quad (12.20)$$

Таким образом,

$$R(p) = \frac{\Phi(p)}{V(p)} \quad (12.21)$$

и осталось просто собрать  $\rho(x)$  из известных плоских волн.

**Ряд Фурье для периодических функций**

Если функция  $f(x)$  периодическая с периодом  $L$ , то ее ПФ содержит только гармоники с импульсом кратным  $2\pi/L$ , и интеграл фурье превращается в ряд фурье:

$$f(x) = \sum_n F_n e^{2\pi inx/L} \quad (12.22)$$

Обратное ПФ дается формулой:

$$F_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-2\pi inx/L} dx \quad (12.23)$$

Согласованность ПФ основана на формуле суммирования Пуассона:

$$\sum_k \delta(x+kL) = \frac{1}{L} \sum_n e^{2\pi inx/L} \quad (12.24)$$

**Пример 5: Уравнение диффузии на окружности**

Рассмотрим снова уравнение диффузии (12.13), на сей раз заданное на окружности длиной  $L$ . Разрешенные импульсы  $q_n = 2\pi n/L$  (моды оказались проквантованными). Для компонент фурье вместо уравнения (12.14) получим

$$\frac{\partial R_n(t)}{\partial t} = -Dq_n^2 R_n(t) \quad \Longrightarrow \quad R_n(t) = R_n(0)e^{-Dq_n^2 t} \quad (12.25)$$

Собираем гармоники назад:<sup>1</sup>

$$\rho(x, t) = \sum_n R_n(0)e^{-Dq_n^2 t} e^{iq_n x} \quad (12.26)$$

Таким образом, в конечной системе неоднородности плотности затухают экспоненциально. На больших временах скорость затухания определяется первой ненулевой гармоникой:  $\tau_D^{-1} = D(2\pi/L)^2$ .

**Задача 11.1.** Разложите функцию  $f(x) = x$ , определенную на отрезке  $[0, 1]$  в ряд фурье а) по косинусам, б) по синусам. Для этого нужно доопределить  $f(x)$  на отрезке  $[-1, 0]$  четным или нечетным образом и воспользоваться формулой (12.23) для функций с периодом  $L = 2$ .

**Преобразование Фурье функций, заданных на решетке**

Пусть функция  $f_n$  задана на узлах решетки с координатами  $x_n = na$ . В этом случае ПФ имеет вид:

$$f_n = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} F(q) e^{iqx_n} \frac{dq}{2\pi} \quad (12.27)$$

---

<sup>1</sup>В явном виде

$$\rho(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho_0(y) dy \sum_n e^{-Dq_n^2 t} e^{iq_n(x-y)}$$

Для того, чтобы избавиться от суммирования по гармоникам в этом уравнении, воспользуемся тем, что, согласно (12.17),  $e^{-Dq_n^2 t}$  есть фурье-компонента функции Грина уравнения диффузии (12.18)

$$e^{-Dq_n^2 t} = \int G_D(s, t) e^{-iq_n s} ds$$

Теперь можно просуммировать по  $q_n$  с помощью формулы суммирования Пуассона 12.24. Таким образом, получаем

$$\rho(x, t) = \int_0^L \rho_0(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} G_D(s, t) ds \sum_k \delta(x - y - s + kL) = \sum_k \int_0^L G_D(x - y + kL, t) \rho_0(y) dy$$

Последнее есть ни что иное, как формула (12.17), записанная для плотности  $\rho_0(y)$ , периодически продолженной на всю действительную ось.

Область интегрирования по импульсам в (12.27) называется зоной Бриллюэна. ОПФ:

$$F(q) = a \sum_n f_n e^{-iqx_n} \quad (12.28)$$

Давайте подставим 12.28 в (12.27).

$$f_n = \sum_m f_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{ip(n-m)} \frac{dp}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ip(n-m)} \frac{dp}{2\pi} = \delta_{nm} \quad (12.29)$$

### Пример 6: Классическая цепочка осцилляторов

Рассмотрим одномерную цепочку атомов массы  $m$ , соединенную пружинками с жесткостью  $K$ . Обозначив через  $x_i$  смещение  $i$ -го атома от положения равновесия, запишем уравнения движения:

$$m\ddot{x}_i = K(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) \quad (12.30)$$

Будем искать решение в виде плоской волны ( $a$  — расстояние между атомами в положении равновесия):

$$x_n = e^{iqan - i\omega t} x(q) \quad (12.31)$$

Подставляя в уравнение (12.30), получаем

$$m\omega^2 x(q) = 2K(1 - \cos qa)x(q) \quad (12.32)$$

Откуда находим закон дисперсии

$$\omega^2(q) = \frac{2K}{m}(1 - \cos qa) = \frac{4K}{m} \sin^2(qa/2) \quad (12.33)$$

Длинноволновые возбуждения являются акустическими фононами со скоростью звука  $c = \sqrt{Ka^2/m}$ .

**Задача 11.2.** Найдите закон дисперсии колебаний в цепочке, состоящей из двух типов чередующихся атомов с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Жесткость всех пружин одинакова и равна  $K$ , расстояние между соседними атомами равно  $a$ . *Указание:* обратите внимание на то, чему равен период структуры (два атома в элементарной ячейке!), и не ошибитесь с размером зоны Бриллюэна.

### Пример 7: Сетка сопротивлений

Вернемся к исходной задаче о сетке сопротивлений. Узлы сетки будем параметризовать двумя целочисленными координатами  $(n_x, n_y)$ . Потенциал в узле будем обозначать через  $\varphi_{n_x, n_y}$ . Запишем уравнение Кирхгофа для узла  $(n_x, n_y)$ :

$$\varphi_{n_x+1, n_y} + \varphi_{n_x-1, n_y} + \varphi_{n_x, n_y+1} + \varphi_{n_x, n_y-1} - 4\varphi_{n_x, n_y} = IR [\delta_{n_x, 0} \delta_{n_y, 0} - \delta_{n_x, N_x} \delta_{n_y, N_y}] \quad (12.34)$$

Левая часть представляет собой дискретный оператор Лапласа на квадратной решетке. Правая — источник и сток тока, расположенные в точках  $(0, 0)$  и  $(N_x, N_y)$ . Делаем двумерное ПФ:

$$-(4 - 2 \cos q_x - 2 \cos q_y) \Phi(q_x, q_y) = IR [1 - e^{-iq_x N_x - iq_y N_y}] \quad (12.35)$$

откуда

$$\Phi(q_x, q_y) = -IR \frac{1 - e^{-iq_x N_x - iq_y N_y}}{2(2 - \cos q_x - \cos q_y)} \quad (12.36)$$

Теперь осталось найти разность потенциалов между точкам стока и истока:

$$\varphi_{0,0} - \varphi_{N_x, N_y} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(q_x, q_y) [1 - e^{iq_x N_x + iq_y N_y}] \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} = -IR \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(q_x N_x + q_y N_y)}{2 - \cos q_x - \cos q_y} \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \quad (12.37)$$

Откуда для сопротивления

$$R(N_x, N_y) = R \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos(q_x N_x + q_y N_y)}{2 - \cos q_x - \cos q_y} \frac{dq_x dq_y}{(2\pi)^2} \quad (12.38)$$

## 12.2 Семинар по теме «Преобразования Фурье»

### Интеграл Фурье

Если есть функция  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то для неё можно определить разложение в интеграл Фурье (так называемое обратное преобразование Фурье):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}$$

При этом функцию  $\tilde{f}(p)$  можно получить, используя прямое преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Согласованность двух формул обеспечивается следующим выражением для  $\delta$ -функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi \delta(x)$$

Напомним,  $\delta$ -функция определяется как функция, такая, что для любой функции  $f(x)$  выполнено:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

**Замечание**

В разных источниках преобразование Фурье вводится по-разному. Например, в прямом преобразовании Фурье вместо  $e^{-ipx}$  можно написать  $e^{ipx}$ ; в таком случае аналогичную замену нужно проделать и в обратном преобразовании Фурье; соотношения по-прежнему останутся согласованными. Кроме того, в математике часто рассматривается преобразование Фурье, в котором в интегралах вместо  $dx$  и  $\frac{dp}{2\pi}$  стоит  $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$  и  $\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$ ; допустим любой выбор констант, лишь бы их произведение было  $2\pi$ .

**Ряд Фурье**

Если есть функция  $f(x)$ , периодичная с периодом  $T$  (или просто определенная на отрезке длиной  $T$ ; в таком случае ее можно просто периодически продолжить), то для этой функции можно определить разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}$$

Периодичность функции обеспечивается требованием на частоты  $\omega_n T = 2\pi n$ . Коэффициенты ряда Фурье можно получить из соотношения

$$f_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega_n t} dt$$

Согласованность разложения в ряд Фурье обеспечивается следующим тождеством (тождество Пуассона):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t + nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\omega_n t}$$

**Замечание**

Тут тоже имеется произвол в выборе знаков в экспоненте (лишь бы они были разные) и в коэффициентах перед интегралом и рядом (лишь бы их произведение равнялось  $T$ ).

**Ряд Фурье для решёточных функций**

Если есть исходная функция, определенная на решётке (то есть, на самом деле, она представляет собой обычную числовую последовательность)  $f_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . В таком случае, можно рассмотреть преобразование, аналогичное предыдущему, только в “обратном” направлении. А именно, можно рассмотреть разложение  $f_n$  по плоским волнам в виде

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(k) e^{ikn} \frac{dk}{2\pi}$$

и выражение для  $f(k)$  ( $k \in [-\pi; \pi]$ ) даётся выражением:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn}$$

Это преобразование полностью аналогично предыдущему, и его согласованность тоже обеспечивается тождеством Пуассона.

## Дискретное преобразование Фурье

Если есть исходный набор из  $N$  чисел  $f_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , то для него можно определить дискретное преобразование Фурье. Оно представляет собой разложение по дискретному набору плоских волн:

$$f_n = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikn}$$

при этом волновой вектор  $k_m = \frac{2\pi}{N}m$  и  $m = 1, \dots, N$ ; под  $\sum_k f(k)$  подразумевается  $\sum_{m=1}^N f(k_m)$ . При этом обратное преобразование Фурье даётся выражением

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_n e^{-ikn}$$

Согласованность дискретного преобразования Фурье обеспечивается следующим тождеством:

$$\sum_k e^{ikn} = N\delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

### Замечание

Интересно, что разложение в ряд Фурье можно получить как предел  $N \rightarrow \infty$  у дискретного преобразования Фурье; а разложение в интеграл Фурье можно получить как предел  $T \rightarrow \infty$  разложения в ряд Фурье. Таким образом, все эти преобразования получаются друг из друга.

## Задача 1 (Потенциал Юкавы или потенциал Дебая)

В рамках Стандартной Модели возникает так называемое взаимодействие Юкавы. Если имеется точечная частица, несущая “заряд”  $q$  и расположенная в начале координат, то оказывается, что потенциал, создаваемый этим зарядом (аналог электрического потенциала) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r})$$

где  $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$  - оператор Лапласа;  $\kappa$  - некий параметр задачи. Решим это уравнение, найдём потенциал.

**Решение**

Исходное однородное уравнение (без правой части) удовлетворяет требованию трансляционной инвариантности (то есть - если провести в уравнении замену  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{a}$ , где  $\mathbf{a}$  - произвольный вектор, то уравнение не изменится); это значит, что его можно решать при помощи преобразования Фурье.

Подставим в уравнение  $\varphi(\mathbf{r})$  в виде (обратное преобразование Фурье):

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y, z) = \iiint \varphi(p_x, p_y, p_z) e^{ip_x x + ip_y y + ip_z z} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} \frac{dp_z}{2\pi} \equiv \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

(тут для удобства функцию  $\varphi(\mathbf{r})$  и её фурье-образ  $\varphi(\mathbf{p})$  мы обозначаем одинаково; чтобы их различать, будем иметь в виду, что когда аргумент функции -  $\mathbf{p}$ , то имеется в виду фурье-образ, а когда аргумент -  $\mathbf{r}$ , то имеется в виду сама функция). В таком случае, все дифференцирования, содержащиеся в операторе Лапласа, можно “пронести” под знак интеграла, где они будут действовать только на экспоненту как  $\frac{\partial}{\partial x} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = ip_x e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$ . Таким образом, можно сразу записать:

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) (-\mathbf{p}^2) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

По свойству  $\delta$ -функции, правую часть можно тоже представить в виде преобразования Фурье от константы:

$$4\pi q \delta(\mathbf{r}) = 4\pi q \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

А значит, уравнение запишется как:

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} (\mathbf{p}^2 + \kappa^2) \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} 4\pi q \cdot e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

А теперь мы можем провести преобразование Фурье этого выражения. В данном уравнении это равносильно условному “сокращению” операции  $\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \dots$  слева и справа. Таким образом, для Фурье-образа  $\varphi(\mathbf{p})$  получается тривиальное скалярное уравнение:

$$\varphi(\mathbf{p}) (\mathbf{p}^2 + \kappa^2) = 4\pi q \Rightarrow \varphi(\mathbf{p}) = \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \varphi(\mathbf{p}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2 + \kappa^2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

Этот интеграл можно взять, перейдя к сферическим координатам. Азимутальный угол  $\theta$  мы будем отсчитывать от направления вектора  $\mathbf{r}$ . Как мы знаем из предыдущих семинаров, якобиан перехода к

сферическим координатам выглядит как  $d^3\mathbf{p} = p^2 dp \sin\theta d\theta d\varphi$ . Таким образом:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty p^2 dp \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{4\pi q}{p^2 + \kappa^2} e^{ipr \cos\theta} = \\ &= \frac{2q}{\pi} \int_0^\infty p^2 dp \cdot \frac{\sin(pr)}{pr} \cdot \frac{1}{p^2 + \kappa^2} = \frac{2q}{\pi r} \int_0^\infty \frac{z \sin z}{z^2 + \kappa^2 r^2} dz = \frac{q}{r} e^{-\kappa r}\end{aligned}$$

Тут мы взяли сперва интеграл по  $\varphi$  и  $\theta$ , затем обезразмерили интеграл по  $p$  и воспользовались интегралом Лапласа из 4 семинара. Полученный ответ совпадает с законом Кулона на малых расстояниях  $r \ll \frac{1}{\kappa}$ ; на больших расстояниях возникает эффект экранирования. Аналогичное явление возникает в плазме, при внесении в неё электростатического заряда  $q$ . Явление это называется дебаевским экранированием, параметр  $\frac{1}{\kappa}$  в этой модели называется дебаевским радиусом. Сам же потенциал тоже иногда называется дебаевским.

## Задача 2

Пусть имеется грузик на пружинке (осциллятор), который возмущается периодической внешней силой  $F(t)$ . Уравнение движения запишется в таком случае как:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t)$$

(где  $f(t) = \frac{1}{m} F(t)$  и  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ). Внешняя сила имеет период  $T$  и имеет вид “прямоугольников”: сперва в течении первой половины периода, грузик “тянут” в одну сторону, а затем - в другую:

$$f(t) = \begin{cases} -f_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ f_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Исследуем отклик осциллятора на такую периодическую силу. Решим задачу с начальными условиями  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ .

## Решение

В силу однородности по времени уравнения без правой части (однородность и трансляционная инвариантность - это одно и то же), различные гармоники (колебания с различными частотами) будут жить независимо.

Значит, для исследования уравнения нужно представить возмущающую силу  $f(t)$  в виде разложения в ряд Фурье. Поскольку функция имеет период  $T$ , то разложение будет содержать лишь гармоники  $\omega_n T = 2\pi n \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$ . Получаем:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

в таком случае коэффициенты ряда Фурье будут выражаться как:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\tau) e^{i\omega_n \tau} d\tau = \frac{1}{T} \left\{ - \int_{-T/2}^0 f_0 e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} d\tau + \int_0^{T/2} f_0 e^{i2\pi \frac{\tau}{T} n} d\tau \right\} = \\ &= 2i \frac{f_0}{T} \int_0^{T/2} \sin \left( 2\pi \frac{\tau}{T} n \right) d\tau = \begin{cases} \frac{2if_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n}, & n = 2k + 1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \end{aligned}$$

В силу вещественности функции  $f(t)$ , коэффициенты  $f_n$  всегда должны удовлетворять условию  $f_{-n} = f_n^*$ . Кроме того, в силу нечётности функции  $f(t)$ , коэффициенты также удовлетворяют условию  $f_{-n} = -f_n$ .

В таком случае, решение можно искать в виде разложения по таким гармоникам. Кроме того, для того, чтобы записать общее решение, необходимо добавить решение однородного уравнения (то есть уравнения без правой части), которое в данном случае представляет собой  $C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$  с произвольными константами  $C_1$  и  $C_2$ . Получаем:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega_n t}$$

Подстановка в уравнение даёт нам

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n (\omega^2 - \omega_n^2) e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

Значит, мы можем условно “сократить” на  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dots e^{-i\omega_n t}$  и получить:

$$x_n = \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Таким образом, общее решение представляется в виде ряда:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} = \\ &= C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=2k+1} \frac{2if_0}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\sin \omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2} \end{aligned}$$

Теперь исследуем задачу Коши. Определим константы  $C_1$  и  $C_2$  решения из начальных условий. Поскольку  $x(0) = 0$ , то  $C_2 \equiv 0$ . Кроме того, поскольку  $\dot{x}(0) = 0$ , то:

$$\omega C_1 + \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} = 0$$

поэтому подставляя  $C_1$ , окончательно ответ можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{n=2k+1, k \geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Ряд этот в общем случае не суммируется. Однако наибольший интерес представляет случай резонанса. Структура ответа подсказывает нам, что резонанс будет наступать, когда какая-то из  $\omega_{2k+1}$  будет близка или равна  $\omega$ . В таком случае, эта гармоника будет иметь наибольшую амплитуду и будет давать наибольший вклад в ряд; из всего ряда можно оставить лишь её. Значит, в случае близости к резонансу, решение будет выглядеть как:

$$x(t) \approx x_n e^{-i\omega_n t} + x_{-n} e^{i\omega_n t} = \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}, \quad \omega \approx \omega_n$$

Сам резонанс, когда  $\omega = \omega_n$ , можно получить, воспользовавшись трюком: в этом выражении можно взять предел  $\omega \rightarrow \omega_n$ , расписав его по правилу Лопиталья. Это даст ответ:

$$x(t) \approx -\frac{2f_0}{\pi \omega n} \cdot t \cdot \cos \omega t, \quad \omega = \omega_n$$

Мы видим, что в случае резонанса, амплитуда соответствующей гармоники будет неограниченно возрастать со временем.

### Задача 3 (случайные блуждания на решетке)

Рассмотрим задачу, которая является моделью диффузии. Пусть имеется одномерная решётка (набор узлов  $n \in \mathbb{Z}$ ). В начальный момент времени  $N \gg 1$  частиц посадили в узел  $n = 0$ . Затем частицы начинают случайно блуждать по решётке, причём за время  $dt$  каждая частица может перейти в один из двух соседних узлов с вероятностью  $\lambda dt$  ( $\lambda > 0$  - параметр задачи). Исследуем движение частиц.

**Замечание** Вместо рассмотрения  $N$  частиц и исследования числа частиц, эквивалентно можно рассматривать 1 частицу и исследовать вероятность нахождения частицы на каком-то из узлов.

#### Решение

Пусть в момент времени  $t$ , число частиц на узле  $n$  равна  $p_n(t)$ . Кроме того, начальные условия задачи таковы, что

$$p_n(0) = N \cdot \delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Случайный процесс, описанный в условии задачи, можно представить в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. За время  $dt$ , в узел с номером  $n$  из узлов с номерами  $n \pm 1$  приходит  $p_{n \pm 1}(t)\lambda dt$  частиц; кроме того, с этого узла в соседние уходит  $2p_n(t)\lambda dt$  частиц. Полная система дифференциальных уравнений тем самым записывается как

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda(p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t) - 2p_n(t))$$

Эта задача тоже обладает трансляционной симметрией, как и предыдущие, а значит можно опять воспользоваться преобразованием Фурье:

$$p_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k, t) e^{ikn}$$

и при этом:

$$p(k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-ikn}$$

Делая необходимую подстановку в уравнение, мы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{dp(k, t)}{dt} \cdot e^{ikn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k, t) \cdot \lambda(e^{-ik} + e^{ik} - 2)$$

Опять условно “сокращая” на  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \dots e^{ikn}$ , получаем тривиальное уравнение:

$$\frac{dp(k, t)}{dt} = -2\lambda(1 - \cos k)$$

$$p(k, t) = p(k, 0) \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t)$$

Теперь необходимо определить начальные условия. Возвращаясь к определению  $p(k, t)$ :

$$p(k, 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(0) e^{-ikn} = N$$

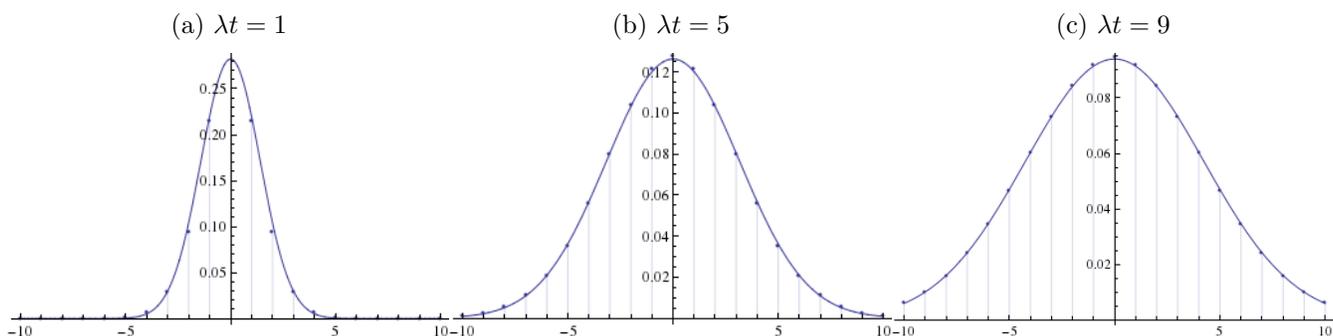
Пользуясь обратным преобразованием Фурье, ответ можно выразить как:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t + ikn)$$

Преобразуем интеграл, избавившись от мнимой единицы (вероятность - величина чисто вещественная). Для этого добавим такой же интеграл с заменой  $k \rightarrow -k$  и разделим пополам:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda t(1 - \cos k)) \cos kn$$

Мы получили ответ на вопрос задачи в виде интеграла. Этот интеграл не берётся в элементарных функциях, однако можно исследовать аналитически различные асимптотики, используя большое количество методов, изложенных в этом курсе ранее. Кроме того, его можно исследовать численно (см. рисунок 1).

Рис. 12.1: Численные значения  $p_n(t)$  при различных  $\lambda t$ 

## Задачи для домашнего решения

### Упражнение 1

Вычислите преобразование Фурье следующих функций

$$\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}, \quad e^{-|x|/\epsilon}, \quad e^{-x^2/\epsilon^2}.$$

### Упражнение 2

Пусть  $\phi(x)$  - вещественная функция, которая  $\rightarrow 0$ , при  $|x| \rightarrow +\infty$ . Докажите следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \left( m^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (m^2 + k^2) |\phi(k)|^2 \frac{dk}{2\pi},$$

где  $\phi(k)$  - преобразование Фурье функции  $\phi(x)$ .

### Упражнение 3

Рассмотрите задачу про диффузию на решетке (см. материалы семинара). Приблизительно вычислите интеграл, который получился на семинаре для распределения частиц в зависимости от времени

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{ikn - 2\lambda t(1 - \cos k)}$$

в двух предельных случаях: а)  $\lambda t \ll 1$ ,  $n$  - фиксированное произвольное число; б)  $\lambda t \gg 1$ .

### Задача 1

В теории случайных матриц встречаются следующие функции:

$$R_U(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}, \quad R_O(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2} + \left[ \int_1^{+\infty} dz \frac{\sin xz}{z} \right] \cdot \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right).$$

Вычислите их Фурье-преобразования. Результаты изобразите графически.

### Задача 2

Функция Бесселя нулевого порядка задается интегралом

$$J_0(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \exp(ix \sin \phi).$$

Для справки: при больших значениях аргумента она ведет себя как

$$J_0(x \gg 1) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \pi/4).$$

Вычислите преобразование Фурье функции  $J_0(x)$  точно. Подумайте, почему особенности в полученном ответе ожидаемы?

### Задача 3

Рассмотрим самую простую модель твердого тела - цепочку из одинаковых “атомов”, соединенных пружинками.

Уравнение, которое определяет закон движения атомов в цепочке:

$$m\ddot{u}_n = C(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

Здесь  $u_i$  - смещение атомов от положения равновесия,  $m$  - масса одного атома,  $C$  - жесткость пружин. Пусть  $a$  - расстояние, между атомами в состоянии равновесия. Если подставить в уравнения движения плоскую волну

$$u_n = u_0 e^{ikan - i\omega t},$$

можно найти закон дисперсии одноатомной цепочки:

$$\omega^2(k) = \frac{4C}{m} \sin^2 \frac{ka}{2}.$$

Найдите уравнения движения и закон дисперсии “двухатомной” цепочки, т.е. такой же цепочки, как выше, с единственным отличием - массы атомов чередуются как

$$m_n = \begin{cases} m & n = 2l \\ M & n = 2l + 1 \end{cases}$$

Без ограничений общности считайте, что  $M > m$ .

Подсказка: может быть удобно составить “вектор смещений”

$$\vec{U}_l = \begin{pmatrix} u_{2l} \\ u_{2l+1} \end{pmatrix}.$$

# Литература

- [1] А.Б. Мигдал, «Качественные методы в квантовой теории», «Наука», Москва, 1975
- [2] Я. Б. Зельдович и А. Д. Мышкис, «Элементы прикладной математики», «Наука», Москва, 1972 (возможно, есть недавнее переиздание)
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Курс теоретической физики, Том III «Квантовая механика. Нерелятивистская теория»
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Курс теоретической физики, Том VI «Гидродинамика»