Семинар по теме “Преобразования Фурье”

22 апреля 2016 г.

Интеграл Фурье

Если есть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то для неё можно определить разложение в интеграл Фурье (так называемое обратное преобразование Фурье):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(p) e^{ipx} \frac{dp}{2\pi}$$

При этом функцию $\tilde{f}(p)$ можно получить, используя прямое преобразование Фурье:

$$\tilde{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ipx} dx$$

Согласованность двух формул обеспечивается следующим выражением для δ-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dp = 2\pi\delta(x)$$

Напомним, δ-функция определяется как функция, такая, что для любой функции $f(x)$ выполнено:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Замечание

В разных источниках преобразование Фурье вводится по-разному. Например, в прямом преобразовании Фурье вместо e^{-ipx} можно написать e^{ipx}; в таком случае аналогичную замену нужно проделать и в обратном преобразовании Фурье; соотношения по-прежнему останутся согласованными. Кроме того, в математике часто рассматривается преобразование Фурье, в котором в интегралах вместо dx и $\frac{dp}{2\pi}$ стоит $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ и $\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$; допустим любой выбор констант, лишь бы их произведение было 2π.

Ряд Фурье

Если есть функция $f(x)$, периодичная с периодом T (или просто определенная на отрезке длиной T; в таком случае ее можно просто периодически продолжить), то для этой функции можно определить разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{i\omega_n t}$$

Периодичность функции обеспечивается требованием на частоты $\omega_n T = 2\pi n$. Коэффициенты ряда Фурье можно получить из соотношения

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\omega_n t}dt$$

Согласованность разложения в ряд Фурье обеспечивается следующим тождеством (тождество Пуассона):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t+nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i\omega_n t}$$

Замечание

Тут тоже имеется произвол в выборе знаков в экспоненте (лишь бы они были разные) и в коэффициентах перед интегралом и рядом (лишь бы их произведение равнялось T).

Ряд Фурье для решёточных функций

Если есть исходная функция, определенная на решётке (то есть, на самом деле, она представляет собой обычную числовую последовательность) f_n, $n \in \mathbb{Z}$. В таком случае, можно рассмотреть преобразование, аналогичное предыдущему, только в "обратном" направлении. А именно, можно рассмотреть разложение f_n по плоским волнам в виде

$$f_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(k)e^{ikn}\frac{dk}{2\pi}$$

и выражение для $f(k)$ ($k \in [-\pi;\pi]$) даётся выражением:

$$f(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-ikn}$$

Это преобразование полностью аналогично предыдущему, и его согласованность тоже обеспечивается тождеством Пуассона.

Дискретное преобразование Фурье

Если есть исходный набор из N чисел f_n, $n = 1,\ldots,N$, то для него можно определить дискретное преобразование Фурье. Оно представляет собой разложение по дискретному набору плоских волн:

$$f_n = \sum_k \tilde{f}_k e^{ikn}$$

при этом волновой вектор $k_m = \frac{2\pi}{N}m$ и $m = 1,\ldots,N$; под $\sum_k f(k)$ подразумевается $\sum_{m=1}^{N} f(k_m)$. При этом обратное преобразование Фурье даётся выражением

$$\tilde{f}_k = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n e^{-ikn}$$

Согласованность дискретного преобразования Фурье обеспечивается следующим тождеством:

$$\sum_k e^{ikn} = N\delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Замечание

Интересно, что разложение в ряд Фурье можно получить как предел $N \to \infty$ у дискретного преобразования Фурье; а разложение в интеграл Фурье можно получить как предел $T \to \infty$ разложения в ряд Фурье. Таким образом, все эти преобразования получаются друг из друга.

Задача 1 (Потенциал Юкавы или потенциал Дебая)

В рамках Стандартной Модели возникает так называемое взаимодействие Юкавы. Если имеется точечная частица, несущая "заряд" q и расположенная в начале координат, то оказывается, что потенциал, создаваемый этим зарядом (аналог электрического потенциала) удовлетворяет уравнению

$$-\Delta\varphi(\mathbf{r}) + \kappa^2\varphi(\mathbf{r}) = 4\pi q \cdot \delta(\mathbf{r})$$

где $\Delta\varphi \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа; κ - некий параметр задачи. Решим это уравнение, найдём потенциал.

Решение

Исходное однородное уравнение (без правой части) удовлетворяет требованию трансляционной инвариантности (то есть - если провести в уравнении замену $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{a}$, где $\mathbf{a}$ - произвольный вектор, то уравнение не изменится); это значит, что его можно решать при помощи преобразования Фурье.

Подставим в уравнение $\varphi(\mathbf{r})$ в виде (обратное преобразование Фурье):

$$\varphi(\mathbf{r}) \equiv \varphi(x, y, z) = \iiint \varphi(p_x, p_y, p_z)e^{ip_x x + ip_y y + ip_z z}\frac{dp_x}{2\pi}\frac{dp_y}{2\pi}\frac{dp_z}{2\pi} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{p})e^{i\mathbf{pr}}$$

(тут для удобства функцию $\varphi(\mathbf{r})$ и её фурье-образ $\varphi(\mathbf{p})$ мы обозначаем одинаково; чтобы их различать, будем иметь в виду, что когда аргумент функции - $\mathbf{p}$, то имеется в виду фурье-образ, а когда аргумент - $\mathbf{r}$, то имеется в виду сама функция). В таком случае, все дифференцирования, содержащиеся в операторе Лапласа, можно "пронести" под знак интеграла, где они будут действовать только на экспоненту как $\frac{\partial}{\partial x}e^{i\mathbf{pr}} = ip_x e^{i\mathbf{pr}}$. Таким образом, можно сразу записать:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{p})(-\mathbf{p}^2)e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

По свойству δ-функции, правую часть можно тоже представить в виде преобразования Фурье от константы:

$$4\pi q\delta(\mathbf{r}) = 4\pi q \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А значит, уравнение запишется как:

$$\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}(\mathbf{p}^2+\kappa^2)\varphi(\mathbf{p})e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}4\pi q\cdot e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}$$

А теперь мы можем провести преобразование Фурье этого выражения. В данном уравнении это равносильно условному "сокращению" операции $\int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}\ldots$ слева и справа. Таким образом, для Фурье-образа $\varphi(\mathbf{p})$ получается тривиальное скалярное уравнение:

$$\varphi(\mathbf{p})(\mathbf{p}^2+\kappa^2) = 4\pi q \Rightarrow \varphi(\mathbf{p}) = \frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2+\kappa^2}$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\varphi(\mathbf{p})e^{i\mathbf{pr}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{4\pi q}{\mathbf{p}^2+\kappa^2}e^{i\mathbf{pr}}$$

Этот интеграл можно взять, перейдя к сферическим координатам. Азимутальный угол θ мы будем отсчитывать от направления вектора $\mathbf{r}$. Как мы знаем из предыдущих семинаров, якобиан перехода к сферическим координатам выглядит как $d^3\mathbf{p} = p^2dp\sin\theta d\theta d\varphi$. Таким образом:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty p^2dp\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi\frac{4\pi q}{p^2+\kappa^2}e^{ipr\cos\theta} =$$
$$= \frac{2q}{\pi}\int_0^\infty p^2dp\cdot\frac{\sin(pr)}{pr}\cdot\frac{1}{p^2+\kappa^2} = \frac{2q}{\pi r}\int_0^\infty \frac{z\sin z}{z^2+\kappa^2r^2}dz = \frac{q}{r}e^{-\kappa r}$$

Тут мы взяли сперва интеграл по φ и θ, затем обезразмерили интеграл по p и воспользовались интегралом Лапласа из 4 семинара. Полученный ответ совпадает с законом Кулона на малых расстояниях $r \ll \frac{1}{\kappa}$; на больших расстояниях возникает эффект экранирования. Аналогичное явление возникает в плазме, при внесении в неё электростатического заряда q. Явление это называется дебаевским экранированием, параметр $\frac{1}{\kappa}$ в этой модели называется дебаевским радиусом. Сам же потенциал тоже иногда называется дебаевским.

Задача 2

Пусть имеется грузик на пружинке (осциллятор), который возмущается периодической внешней силой $F(t)$. Уравнение движения запишется в таком случае как:

$$\ddot{x}(t)+\omega^2x(t) = f(t)$$

(где $f(t) = \frac{1}{m}F(t)$ и $\omega^2 = \frac{k}{m}$). Внешняя сила имеет период T и имеет вид "прямоугольников": сперва в течении первой половины периода, грузик "тянут" в одну сторону, а затем - в другую:

$$f(t) = \begin{cases} -f_0 & -\frac{T}{2} < t < 0 \\ f_0 & 0 < t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Исследуем отклик осциллятора на такую периодическую силу. Решим задачу с начальными условиями $x\,(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Решение

В силу однородности по времени уравнения без правой части (однородность и трансляционная инвариантность - это одно и то же), различные гармоники (колебания с различными частотами) будут жить независимо.

Значит, для исследования уравнения нужно представить возмущающую силу $f(t)$ в виде разложения в ряд Фурье. Поскольку функция имеет период T, то разложение будет содержать лишь гармоники $\omega_n T = 2\pi n \Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{T}n$. Получаем:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

в таком случае коэффициенты ряда Фурье будут выражаться как:

$$f_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(\tau)\, e^{i\omega_n \tau} d\tau = \frac{1}{T}\left\{-\int_{-T/2}^{0} f_0 e^{i2\pi\frac{\tau}{T}n} d\tau + \int_0^{T/2} f_0 e^{i2\pi\frac{\tau}{T}n} d\tau\right\} =$$

$$= 2i\frac{f_0}{T}\int_0^{T/2} \sin\left(2\pi\frac{\tau}{T}n\right) d\tau = \begin{cases} \frac{2if_0}{\pi}\cdot\frac{1}{n}, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

В силу вещественности функции $f(t)$, коэффициенты f_n всегда должны удовлетворять условию $f_{-n} = f_n^*$. Кроме того, в силу нечётности функции $f(t)$, коэффициенты также удовлетворяют условию $f_{-n} = -f_n$.

В таком случае, решение можно искать в виде разложения по таким гармоникам. Кроме того, для того, чтобы записать общее решение, необходимо добавить решение однородного уравнения (то есть уравнения без правой части), которое в данном случае представляет собой $C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t$ с произвольными константами C_1 и C_2. Получаем:

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-i\omega_n t}$$

Подстановка в уравнение даёт нам

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \left(\omega^2 - \omega_n^2\right) e^{-i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_n t}$$

Значит, мы можем условно “сократить” на $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \ldots e^{-i\omega_n t}$ и получить:

$$x_n = \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Таким образом, общее решение представляется в виде ряда:

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} =$$

$$= C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \sum_{n=2k+1} \frac{2if_0}{\pi}\cdot\frac{1}{n}\frac{1}{\omega^2 - \omega_n^2} e^{-i\omega_n t} == C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t + \sum_{n=2k+1, k\geq 0} \frac{4f_0}{\pi n}\frac{\sin\omega_n t}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Теперь исследуем задачу Коши. Определим константы C_1 и C_2 решения из начальных условий. Поскольку $x(0) = 0$, то $C_2 \equiv 0$. Кроме того, поскольку $\dot{x}(0) = 0$, то:

$$\omega C_1 + \sum_{n=2k+1, k\geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} = 0$$

поэтому подставляя C_1, окончательно ответ можно записать в виде

$$x(t) = \sum_{n=2k+1, k\geq 0} \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}$$

Ряд этот в общем случае не суммируется. Однако наибольший интерес представляет случай резонанса. Структура ответа подсказвыает нам, что резонанс будет наступать, когда какая-то из ω_{2k+1} будет близка или равна ω. В таком случае, эта гармоника будет иметь наибольшую амплитуду и будет давать наибольший вклад в ряд; из всего ряда можно оставить лишь её. Значит, в случае близости к резонансу, решение будет выглядеть как:

$$x(t) \approx x_n e^{-i\omega_n t} + x_{-n} e^{i\omega_n t} = \frac{4f_0}{\pi n} \cdot \frac{\sin \omega_n t - \frac{\omega_n}{\omega} \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_n^2}, \, \omega \approx \omega_n$$

Сам резонанс, когда $\omega = \omega_n$, можно получить, воспользовавшись трюком: в этом выражении можно взять предел $\omega \to \omega_n$, расписав его по правилу Лопиталя. Это даст ответ:

$$x(t) \approx -\frac{2f_0}{\pi \omega n} \cdot t \cdot \cos \omega t, \, \omega = \omega_n$$

Мы видим, что в случае резонанса, амплитуда соответствующей гармоники будет неограниченно возрастать со временем.

Задача 3 (случайные блуждания на решетке)

Рассмотрим задачу, которая является моделью диффузии. Пусть имеется одномерная решётка (набор узлов $n \in \mathbb{Z}$). В начальный момент времени $N \gg 1$ частиц посадили в узел $n = 0$. Затем частицы начинают случайно блуждать по решётке, причём за время dt каждая частица может перейти в один из двух соседних узлов с вероятностью λdt ($\lambda > 0$ - параметр задачи). Исследуем движение частиц.

Замечание Вместо рассмотрения N частиц и исследования числа частиц, эквивалентно можно рассматривать 1 частицу и исследовать вероятность нахождения частицы на каком-то из узлов.

Решение

Пусть в момент времени t, число частиц на узле n равна $p_n(t)$. Кроме того, начальные условия задачи таковы, что

$$p_n(0) = N \cdot \delta_{n0} = \begin{cases} N, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

Случайный процесс, описанный в условии задачи, можно представить в виде бесконечной системы дифференциальных уравнений. За время dt, в узел с номером

n из узлов с номерами $n \pm 1$ приходит $p_{n\pm1}(t)\lambda dt$ частиц; кроме того, с этого узла в соседние уходит $2p_n(t)\lambda dt$ частиц. Полная система дифференциальных уравнений тем самым записывается как

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = \lambda(p_{n-1}(t) + p_{n+1}(t) - 2p_n(t))$$

Эта задача тоже обладает трансляционной симметрией, как и предыдущие, а значит можно опять воспользоваться преобразованием Фурье:

$$p_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k,t) e^{ikn}$$

и при этом:

$$p(k,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(t) e^{-ikn}$$

Делая необходимую подстановку в уравнение, мы получаем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \cdot \frac{dp(k,t)}{dt} \cdot e^{ikn} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} p(k,t) \cdot \lambda(e^{-ik} + e^{ik} - 2)$$

Опять условно “сокращая” на $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \dots e^{ikn}$, получаем тривиальное уравнение:

$$\frac{dp\,(k,t)}{dt} = -2\lambda(1 - \cos k)$$

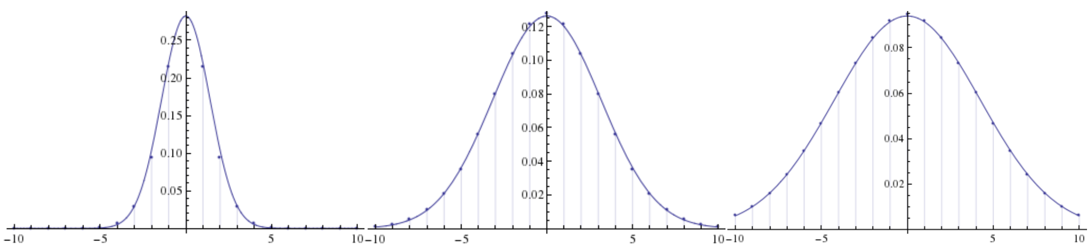
$$p\,(k,t) = p\,(k,0) \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t)$$

Теперь необходимо определить начальные условия. Возвращаясь к определению $p(k,t)$:

$$p(k,0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(0) e^{-ikn} = N$$

Рис. 1: Численные значения $p_n\,(t)$ при различных λt

(a) $\lambda t = 1$ (b) $\lambda t = 5$ (c) $\lambda t = 9$



Пользуясь обратным преобразованием Фурье, ответ можно выразить как:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda(1 - \cos k)t + ikn)$$

Преобразуем интеграл, избавившись от мнимой единицы (вероятность - величина чисто вещественная). Для этого добавим такой же интеграл с заменой $k \to -k$ и разделим пополам:

$$p_n(t) = N \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \exp(-2\lambda t(1 - \cos k)) \cos kn$$

Мы получили ответ на вопрос задачи в виде интеграла. Этот интеграл не берётся в элементарных функциях, однако можно исследовать аналитически различные асимптотики, используя большое количество методов, изложенных в этом курсе ранее. Кроме того, его можно исследовать численно (см. рисунок 1).

Задачи для домашнего решения

Задача 1. Найдите Фурье-образ следующих функций:

$$\frac{a}{x^2 + a^2}, \quad \exp\left(-\kappa|x|\right), \quad \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right), \quad \theta(x - x_0) = \begin{cases} 1, & x > x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

Задача 2. Найдите Фурье-образ следующей функции:

$$R(x) = 1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}$$

Задача 3. Исследовать случай резонанса в задаче про осциллятор, движущийся под действием возмущающей силы, предполагая коэффициенты ряда Фурье зависящими от времени.

Задача 4. Исследовать ведущие асимптотику решения задачи про случайные блуждания, работающее на малых временах $\lambda t \ll 1$ при произвольном n.

Задача 5. Исследовать ведущую асимптотику решения задачи про случайные блуждания на решётке при больших временах $\lambda t \gg 1$.

Задача 6. Задача 3, разобранная на семинаре, представляет собой решёточную модель диффузии, описываемую в непрерывном пределе следующим уравнением:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$$

Найдите соотношение между “микроскопическими” параметрами λ и шагом решётки a с “макроскопическим” коэффициентом диффузии D. Решите это уравнение с начальным условием $f(x, t = 0) = N\delta(x)$. Сравните полученное решение с асимптотиками из задачи 4.

Задача 7. Доказать тождество, обеспечивающее согласованность дискретного преобразования Фурье. А именно, показать, что

$$\sum_k e^{ikn} = N\delta_{n0} = \begin{cases} N, & n \dots N \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где $\sum_k f(k) \equiv \sum_{m=1}^{N} f(k_m)$ и $k_m = \frac{2\pi}{N} m$.

Задача 8. Используя преобразование Фурье, решите дифференциальное уравнение Эйри:

$$y''(x) - xy(x) = 0$$