Семинар по теме "Метод перевала"

22 апреля 2016 г.

Задача 1 (формула Стирлинга)

Найти асимптотику гамма-функции при $z \gg 1$:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} dt$$

Решение

Покажем сперва, чем интересна гамма-функция. Во-первых, интегрируя по частям, мы тривиально приходим к соотношению:

$$\Gamma(z+1) = -t^z e^{-t}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t} dt = z\Gamma(z)$$

Поскольку при этом $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$, то видно, что $\Gamma(n+1) = n!$.

Во-вторых, значение интеграла Пуассона тоже выражается через Гамма функцию:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2\int_0^\infty e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

откуда $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Кроме того, через гамма-функцию легко выражаются интегралы вида:

$$I(n,m) = \int_0^\infty x^n \exp\left(-x^m\right) dx = \int_0^\infty t^{\frac{n}{m}} e^{-t} \cdot \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{m}\Gamma\left(\frac{n+1}{m}\right)$$

Займёмся теперь поиском асимптотики. Перепишем интеграл в виде:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \exp(-t + z\ln t) dt$$

Найдем стационарные точки функции $f(t) = -t + z\ln t$ и разложим ее до второго порядка малости в их окрестности:

$$f'(t) = -1 + \frac{z}{t} \Rightarrow t_0 = z \Rightarrow f(t_0) = -z + z\ln z$$

$$f''(t) = -\frac{z}{t^2} \Rightarrow f''(t_0) = -\frac{1}{z}$$

Отсюда получаем:

$$\Gamma(z+1) \approx \int_{-\infty}^\infty \exp\left(-z + z\ln z - \frac{1}{2}\frac{1}{z}(t-z)^2\right) dt = \sqrt{2\pi z}\exp(z\ln z - z)$$

В случае натуральных $z = n \in \mathbb{N}$, мы получаем известную формулу Стирлинга:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Задача 2

Найти поведение интеграла при $a \gg 1$

$$I(a,x) = \int_0^x \exp(a \sin t) dt$$

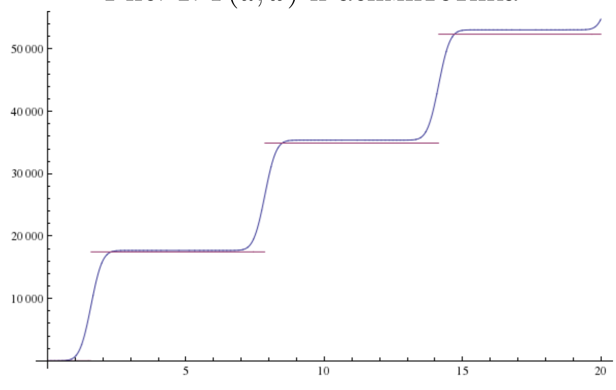
Решение

Особенность этой задачи заключается в том, что теперь у функции в показателе экспоненты бесконечное множество стационарных точек. Они определяются уравнением $f'(t) = a \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$; при этом ровно половина из них являются локальными максимумами: $f''(t) = -a \sin t \Rightarrow f''(t_n) = (-1)^n a$; поэтому локальные максимумы - лишь точки $t_{2n} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Вклад от окрестности каждой стационарной точки тоже легко определить:

$$I_{2n} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(a - \frac{a}{2}(t - t_{2n})^2) dt \approx \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a$$

Займёмся теперь поведением нашего интеграла. По мере увеличения x, в область интегрирования будет попадать больше и больше перевальных точек. Вклад от каждой точки - постоянный; поэтому x будет достигать t_{2n}, функция будет испытывать резкий скачок на величину, примерно равную вкладу от одной перевальной точки. Таким образом, график функции будет представлять собой "лесенку"; ширина перехода ступеньки будет порядка $\sim \frac{1}{\sqrt{a}}$.

Рис. 1: $I(a,x)$ и асимптотика



Важно однако отметить, что погрешность от реального значения интеграла такой функции по периоду отличается от апроксимации, полученной методом перевала; и при больших x, когда имеется вклад от большого количества перевальных точек, эта погрешность складывается. Этой погрешностью можно пренебречь при $x \lesssim a$, поскольку погрешность от каждой перевальной точки - порядка $\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^a \cdot O\left(\frac{1}{a}\right)$.

Задача 3 (перевал в кратном интеграле)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $N \gg 1$ и $|\alpha| < 1$.

$$I(N) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-N(\cosh x + \cosh y + \alpha xy)) dx dy$$

Решение

В многомерном случае, стационарная точка определяется условием $\mathrm{grad} f(x,y)=0$, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sinh x + \alpha y &= 0 \\ \sinh y + \alpha x &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases}$$

Дальше следует поступать абсолютно аналогично. Разложение вблизи стационарной точки дает:

$$f(x,y) \approx -N\left(1+\frac{x^2}{2}+1+\frac{y^2}{2}+\alpha xy\right) = -2N + N\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+\alpha xy\right)$$

В этом случае применение метода перевала сводится к взятию многомерного интеграла Пуассона. Общий вид такого интеграла - когда в показателе экспоненты стоит некая квадратичная форма. Интегралы такого вида берутся в общем виде, согласно формуле:

$$\int d^d\mathbf{x} \exp\left(-\sum_{ij} x_i A_{ij} x_j\right) = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det A}}$$

Эта формула работает для положительно-определенных матриц A (в противном случае, интеграл расходится). Для диагональных матриц она доказывается тривиально; если же матрица недиагональна, её можно диагонализовать унитарным преобразованием. В нашем случае матрица имеет вид

$$A = \frac{N}{2}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

$$I(N) \approx \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} e^{-2N} = \frac{2\pi}{N\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-2N}$$

Заметим, что условие $|\alpha|<1$ и означает положительную определённость матрицы A. Поскольку исходный интеграл, очевидно, сходится (функция $\cosh x$ - быстро растет на бесконечности), то это значит лишь что точка $(0,0)$ уже не является минимумом функции в показателе экспоненты, и перевальная точка смещается.

Задача 4 (несколько перевалов)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$

$$I(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-A(x^4-x^2))dx$$

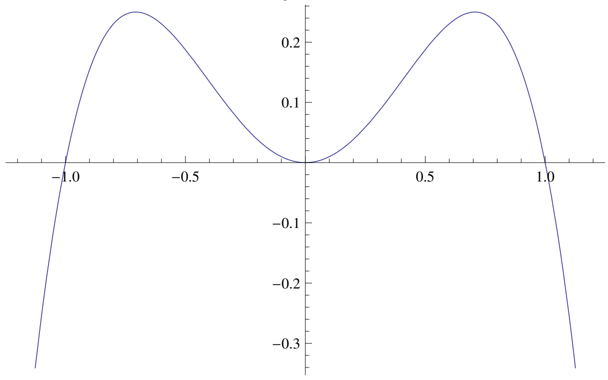
Решение

Функция в показателе экспоненты имеет два максимума:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Значения в перевальных точках определяются как:

Рис. 2: $y = x^2 - x^4$



$$f(x_{1,2}) = -A\left(\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\frac{A}{4}$$

А вторые производные:

$$f''(x_{1,2}) = -A(12x_{1,2}^2 - 2) = -4A$$

Поэтому в окрестности каждой из точек функция представляется как:

$$f(x) \approx \frac{A}{4} - 2A(x - x_{1,2})^2$$

Обе точки дадут вклад в перевальную оценку; поэтому для асимптотики имеем:

$$I\left(A\right) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x-x_1)^2\right)dx + \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{A}{4} - 2A(x-x_2)^2\right)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{A}}e^{A/4}$$

Задача 5 (перевал x^4)

Найти асимптотическое поведение интеграла при $A \gg 1$:

$$I\left(A\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(\cosh x - \frac{x^2}{2}\right)\right)dx$$

Решение

Поскольку функция $\cosh x$ вблизи нуля раскладывается как $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \ldots$, то видно, что ведущий член разложения функции в экспоненте имеет порядок x^4. Поэтому следуя идее метода перевала о разложении функции в экспоненте в ряд около стационарной точки, для асимптотики этого интеграла имеем:

$$I(A) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-A\left(1 + \frac{x^4}{24}\right)\right)dx$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Пуассона; его можно взять подстановкой $t = \frac{A}{24}x^4$, сведущей его к гамма-функции:

$$I(A) \approx e^{-A} \cdot 2 \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} \frac{1}{4} t^{-3/4} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{24}{A}\right)^{1/4} e^{-A} \int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt = \left(\frac{3}{2A}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) e^{-A}$$

Тут $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.62561$ — просто некое число; оно не выражается через известные мировые константы (π, e, C, …); однако это и не требуется.

Задачи для домашнего решения

Задача 1. Найдите асимптотическое поведение интеграла при $\alpha \ll \beta$ или $\alpha \gg \beta$:

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x \arctan(\beta x)) dx$$

Задача 2. При $N \gg A, 1$, в случаях $A \gg 1$ и $A \ll 1$ найдите асимптотическое поведение ряда

$$S(N, A) = \sum_{n=0}^{\infty} n^N e^{-An^2}$$

Задача 3. Найдите асимптотическое поведение интеграла при $N \gg 1$:

$$I(N) = \int_N^\infty (x - N)^2 e^{-x^2} dx$$

Задача 4. Найдите асимптотическое поведение интеграла при $N \gg 1$, $\varepsilon \ll 1$, $s \sim 1$:

$$I(s, N, \varepsilon) = \int_0^\infty x^s \exp\left(-N(1 - \cos x) - \varepsilon x\right) dx$$

Задача 5. При $\alpha \gg 1$ и $\alpha \ll 1$ найдите ведущие, зависящие от параметра, асимптотики интеграла

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-f(x)} dx$$

где $f(x)$ задана неявно уравнением

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1 + \alpha f(x)^4}}$$

Задача 6. При $N \gg 1$ и $0 < \alpha - 1 \ll 1$, найти асимптотическое поведение интеграла:

$$I(N) = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp(-N(\cosh x + \cosh y + \alpha xy)) dx dy$$