Семинар по теме “Интегралы с параметрами”

22 апреля 2016 г.

Бета-функция Эйлера

Порой приходится иметь дело с интегралами вида:

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

или интегралами, которые сводятся к интегралам такого вида подстановкой. Это — так называемый бета-интаграл Эйлера или просто бета-функция. Этот интеграл удобно выражается через $\Gamma(z)$ - гамма-функцию Эйлера, значения и свойства которой уже хорошо известны из предыдущих семинаров; это позволяет просто получать значения этого интеграла при различных значениях параметров:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Добавим еще одно полезное свойство гамма-функции (приводим без доказательства):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Задача 1 (интегральные представления и подстановки)

Вычислим интеграл Френеля:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx$$

Решение

Перейдем к переменной интегрирования $t = x^2$. Получим:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$$

Следующий шаг нетривиален. Для взятия этого интеграла удобно воспользоваться “интегральным представлением функции $1/\sqrt{t}$”. Такие интегральные представления - часто используемый приём, позволяющий брать определённые интегралы; в данном случае в роли этого интегрального представления будет интеграл Гаусса:

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-tx^2}dx \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dx e^{-tx^2} \cos t$$

Теперь возьмем интеграл по t, обозначив подынтегральную функцию как $J(x^2)$. Тогда:

$$J(a) = \int_0^\infty e^{-at} \cos t dt = \mathrm{Re} \int_0^\infty e^{-at+it} dt = \mathrm{Re} \frac{1}{a-i} = \frac{a}{a^2+1}$$

Тем самым, получаем следующий интеграл:

$$I \;\;=\;\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$$

Приведём два способа взятия этого интеграла.

"Правильный" способ Получившийся интеграл является интегралом от дробно-рациональной функцией и его можно взять стандартным методом разбиения на элементарные дроби. Он довольно громоздкий, поэтому приведём тут метод, позволяющий вычислить интеграл проще. Сделав замену $x = \frac{1}{t}$, заметим следующее:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\infty^0 \left(-\frac{dt}{t^2}\right) \frac{1/t^2}{1+1/t^4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{1+t^4} dt$$

Беря полусумму двух представлений для интеграла I, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

Теперь можно перейти к стандарнтой переменной для интегрирования симметрических многочленов $t = x - \frac{1}{x}$; при этом $dt = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx$, получим:

$$I = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} \bigg|_{-\infty}^\infty = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

"Главный" способ Очень полезно научиться сводить такие интегралы к B-функции, о которой было рассказано выше. Перейдем в этом интеграле к переменной $t = \frac{1}{1+x^4} \Rightarrow x = \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/4} \Rightarrow dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$. Имеем:

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^0 \left(\frac{1-t}{t}\right)^{1/2} \cdot t \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{-3/4} \left(-\frac{dt}{t^2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_0^1 t^{-3/4}(1-t)^{-1/4} dt = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Используя приведенные выше свойства бета- и гамма-функций, получаем:

$$B\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Замечение Заметим, что этот же ответ можно было получить гораздо проще, используя трюк с комплексными переменными и комплексным интегралом Гаусса. Нужно лишь обратить внимание на тонкость, связанную с тем, что $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4}$, и необходимо выбрать правильный знак:

$$I = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \int_{-\infty}^\infty e^{ix^2} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \sqrt{\frac{\pi}{-i}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \mathrm{Re} e^{i\pi/4} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Задача 2 (дифференцирование и интегрирование по параметру)

Возьмём интеграл:

$$I(\alpha,\beta)=\int_0^\infty \frac{\ln(\alpha^2+x^2)}{\beta^2+x^2}dx$$

Решение

Заметим, что без логарифма интеграл легко считается. Если мы продиффиренцируем интеграл по α, то логарифм заменится на дробь, а интегралы с дробями считать легче:

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=\int_0^\infty \frac{2\alpha}{(\beta^2+x^2)(\alpha^2+x^2)}dx$$

Пусть $\alpha\neq\beta$, тогда верно разложение:

$$\frac{1}{(\beta^2+x^2)(\alpha^2+x^2)}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)$$

и каждый полученый интеграл легко считается:

$$\frac{\partial I(\alpha,\beta)}{\partial\alpha}=2\alpha\int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2+x^2}-\frac{1}{\alpha^2+x^2}\right)dx=\frac{2\alpha}{\alpha^2-\beta^2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{(\alpha+\beta)\beta}$$

На самом деле, при $\alpha=\beta$, эта формула тоже верна:

$$\int_0^\infty \frac{2\alpha}{(\alpha^2+x^2)^2}\cdot dx=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\infty \frac{dx}{\alpha^2+x^2}=-\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\pi}{2\alpha}=\frac{\pi}{2\alpha^2}$$

Теперь проинтегрируем полученное выражение по α:

$$I(\alpha,\beta)=\frac{\pi}{\beta}\ln(\alpha+\beta)+C(\beta)$$

Тут “постоянная” $C(\beta)$ - произвольная функция, которая не зависит от α. Чтобы найти её подставим в исходный интеграл $\alpha=0$:

$$I\left(0,\beta\right)=2\int_0^\infty \frac{\ln x}{\beta^2+x^2}dx=\left|\begin{array}{c}x=\beta t\\ dx=\beta dt\end{array}\right|=2\int_0^\infty \frac{\ln t+\ln\beta}{\beta(1+t^2)}dt=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}+2\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}dt$$

Последний интеграл равен нулю, это посто показать сделав замену $t=e^z$:

$$\int_0^\infty \frac{\ln t}{1+t^2}dt=\int_{-\infty}^\infty \frac{z}{1+e^{2z}}e^z dz=\int_{-\infty}^\infty \frac{z}{e^{-z}+e^z}dz=0$$

Итого $I(0,\beta)=\frac{\pi\ln\beta}{\beta}\Rightarrow C(\beta)\equiv 0$. Стоит заметить, что в решении мы неявно пользовались тем, что $\alpha,\beta>0$; но поскольку исходный интеграл очевидным образом не чувствителен к изменению их знака, то ответ в общем виде записывается как:

$$I\left(\alpha,\beta\right)=\frac{\pi}{|\beta|}\ln(|\alpha|+|\beta|)$$

Задача 3 (составление дифференциальных уравнений)

Вычислим интегралы Лапласа:

$$I_1(a,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{x^2+a^2}dx$$

$$I_2(a,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(\omega x)}{x^2+a^2}dx$$

Решение

Обезразмерим интеграл, перейдя к переменной интегрирования $x=at$ и введя "безразмерный" параметр $\alpha=\omega a$; для определенности далее будем считать, что $\alpha>0$. Получим:

$$I_1\left(a,\omega\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{a}=\frac{1}{a}J(\alpha)$$

Возьмем производную $J(\alpha)$ по α:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+1}dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin\alpha x}{x^2+1}dx$$

Получившийся интеграл сходится, однако производная от него уже расходится. В таком случае используем такой трюк:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}J(\alpha)=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\sin\alpha x}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x}=-\int_{-\infty}^{\infty}\left[1-\frac{1}{x^2+1}\right]\frac{\sin\alpha x}{x}dx=-\pi+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x}$$

Тут мы воспользовались табличным значением интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\pi$. Теперь можно вычислять вторую производную, так как получающийся интеграл сходится:

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}J(\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x^2+1}\cdot\frac{dx}{x}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{x^2+a^2}\cdot dx=J(\alpha)$$

Мы получили замкнутое дифференциальное уравнение на функцию $J(\alpha)$. Это уравнение линейно и с постоянными коэффициентами, поэтому оно решается с помощью подстановки $J(\alpha)=e^{\lambda\alpha}$. Такая подстановка приводит к алгебраическому уравнению на λ: $\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=\pm1$ и, следовательно, общее решение уравнения записывается как:

$$J(\alpha)=C_1e^{\alpha}+C_2e^{-\alpha}$$

Константа C_1 должна быть положена равной нулю. Это связано с тем, что исходный интеграл, очевидно, ограничен: $|J\left(\alpha\right)|\leq\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx\right|=\pi$. Константу C_2можно найти из значения интеграла при $\alpha=0\Rightarrow J(0)=\pi$. Значит, наш интеграл записывается как:

$$J(\alpha)=\pi e^{-\alpha}$$

Ответ был получен в предположении $\alpha>0$. Поскольку исходный интеграл зависит лишь от модулей параметров a и ω, то ответ в общем виде записывается как:

$$I_1(a,\omega) = \frac{\pi}{|a|}e^{-|a\omega|}$$

Ну и кроме того, заметим, что:

$$I_2(a,\omega) = -\frac{\partial}{\partial\omega}I_1(a,\omega) = \pi e^{-|\alpha\omega|}\mathrm{sign}\omega$$

Задача 4 (экспоненциальняа регуляризация)

Используя экспоненциальную регуляризацию, найти “сумму” ряда из натуральных чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} n$$

Указание Суть экспоненциальной регуляризации сводится к домножению на $e^{-\varepsilon n}$ и рассмотрению поведения функции при $\varepsilon \to 0$.

Решение

Нам необходимо рассмотреть следующий ряд:

$$S(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\varepsilon n}$$

Этот ряд можно представить как производную по ε от геометрической прогрессии:

$$S(\varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} = -\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{e^{-\varepsilon}}{1-e^{-\varepsilon}} = \frac{e^{\varepsilon}}{(e^{\varepsilon}-1)^2}.$$

А теперь разложимся по ε, чтобы взять предел $\varepsilon \to 0$:

$$\begin{aligned} S\left(\varepsilon\right) = &\left(\frac{1}{1+\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon^2+\frac{1}{6}\varepsilon^3-1+o(\varepsilon^3)}\right)^2\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2)\right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon^2}{6}+o(\varepsilon^2)\right)^{-2}\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2)\right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon^2}{3}+\frac{3\varepsilon^2}{4}+o(\varepsilon^2)\right)\left(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}+o(\varepsilon^2)\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}-\frac{1}{12}+o(1) \end{aligned}$$

Замечение Дзета-функция Римана при $\mathrm{Re}z > 1$ определяется как сумма ряда $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$. Используя экспоненциальную регуляризацию, мы, на самом деле, получили значение $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Эту функцию можно доопределить (единственным образом) и для $\mathrm{Re}z < 1$ так, чтобы полученная функция получилась аналитической (то есть имела все производные вплоть до бесконечного порядка везде, кроме некоторого набора особых точек); и значение в $z = -1$ получено именно в смысле аналитического продолжения. Этот результат означает, что (в определенном смысле) сумма всех натуральных чисел равна $-\frac{1}{12}$.

Задачи для домашнего решения:

Задача 1. При $0 < m < 1$ вычислите интеграл:

$$I(m) = \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^m} dx$$

Указание: используйте подстановку

$$\frac{1}{x^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty t^{m-1} e^{-xt} dt$$

Задача 2. Используя бета-функцию Эйлера, вычислите интегралы

$$I_1(n, m) = \int_0^{\pi/2} dx \sin^n x \cos^m x$$

$$I_2(n, m, k) = \int_0^\infty \frac{x^n}{(1 + x^m)^k} dx$$

Задача 3. Вычислите интеграл

$$I = \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Задача 4. Вычислите интеграл:

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

Задача 5. Функция Бесселя первого рода целого индекса n можно определить как интеграл:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - z \sin \varphi) d\varphi$$

Покажите, что она удовлетворяет так называемому уравнению Бесселя:

$$J_n''(z) + \frac{1}{z} J_n'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n(z) = 0$$

Также выразить производную функции Бесселя через её же, но, возможно, с другими индексами n.