Семинар 5 по теме “Интегралы от быстроменяющихся функций и асимптотические разложения”

22 апреля 2016 г.

Метод стационарной фазы

Часто в приложениях встречаются определённые осциллирующие интегралы типа:

$$\int_a^b \cos f(x) dx$$

с очень быстроменяющийся функцией $f(x)$. К таким интегралам часто применим так называемый метод стационарной фазы, который очень похож на методом перевала и тесно с ним связан.

Логика Рассмотрим окрестность небольшого размера некой точки x_0. В окрестности этой точки можно ввести “локальную частоту осцилляций” согласно $\omega \simeq f'(x_0)$ и написать разложение:

$$\int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_2} \cos(f(x))dx \approx \int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_2} \cos(f(x_0)+\omega(x-x_0))dx = \frac{\sin(f(x_0)+\omega\delta_2) - \sin(f(x_0)+\omega\delta_1)}{\omega} \sim \frac{O(1)}{\omega}$$

Из этого простого соображения видно, что локально интеграл тем больше, чем меньше “локальная” частота ω (или чем больше “локальный” же период $T_{loc} = \frac{2\pi}{|\omega|}$); это позволяет нам заключить, что интеграл набирается в малой окрестности так называемых точек стационарной фазы - точек, где $\omega = f'(x_0) = 0$.

Метод Это соображение позволяет нам написать метод асимптотической оценки такого рода интегралов. А именно, вклад от каждой такой стационарной точки оценивается используя разложение в ряд Тейлора:

$$\int_a^b \cos\left(f(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots\right) dx$$

где пределы интегрирования уже можно распространить на всю числовую ось, поскольку в силу сильных осцилляций вклад от “хвостов” оказывается мал. Такой интеграл мы уже умеем считать, т.к он выражается через уже известные нам интегралы Френеля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x^2)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\alpha x^2)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$$

Критерии применимости Выше мы писали, что метод применим для "быстроменяющихся" функций $f(x)$. Можно написать явный критерий, что означают эти слова. Интеграл от разложенной функции набирается в малой окрестности стационарной точки шириной $|x - x_0| \sim \frac{1}{\sqrt{|f''(x_0)|}}$ (там, где фаза $f(x)$ изменяется на число порядка 1). Тогда пренебрежение следующими членами разложения в ряд Тейлора верно при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} |f^{(3)}(x_0)(x-x_0)^3| & \ll |f''(x_0)(x-x_0)^2| \\ |f^{(4)}(x_0)(x-x_0)^4| & \ll |f''(x_0)(x-x_0)^2| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |f^{(3)}(x_0)| & \ll |f''(x_0)|^{3/2} \\ |f^{(4)}(x_0)| & \ll |f''(x_0)|^2 \end{cases}$$

Задача 1 (функция Эйри)

В качестве примера разберем поведение функции Эйри (Airy) при $x \to -\infty$:

$$\mathrm{Ai}\,(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt$$

Решение

Найдем стационарные точки фазы:

$$f'(t) = t^2 + x = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm|x|^{1/2}$$

Только одна стационарная точка $t_1 = \sqrt{-x}$ попадает в отрезок интегрирования, и необходимо рассматривать вклад только от ее окрестности. Для поведения фазы в окрестности этой точки можно записать:

$$f''(t) = 2t \Rightarrow f''(t_1) = 2|x|^{1/2}$$

$$f(t) \approx -\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2}(t - |x|^{1/2})^2$$

Поэтому вклад в интеграл от окрестности стационарной точки записывается как:

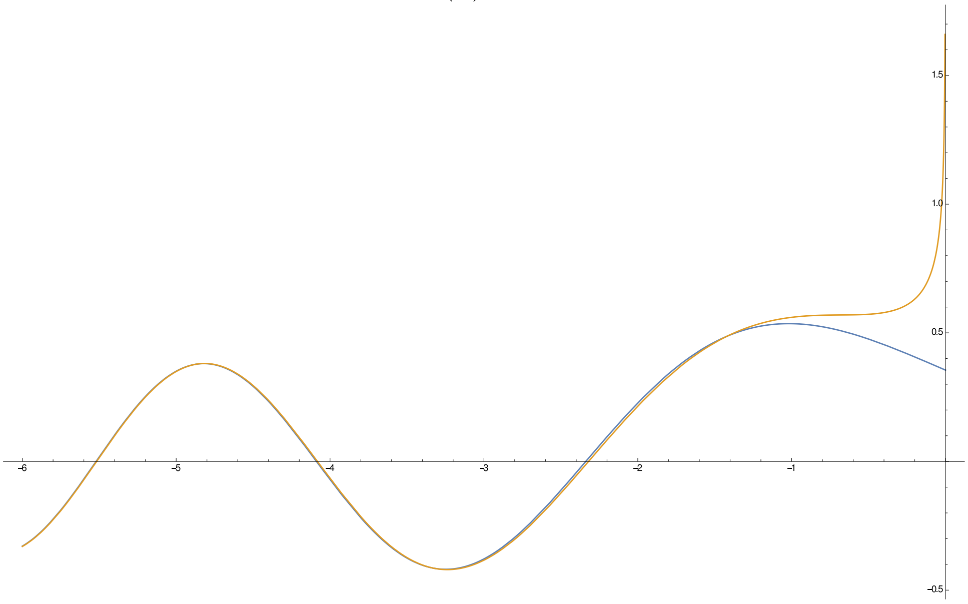
$$\mathrm{Ai}(x) \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + |x|^{1/2}(t-|x|^{1/2})^2\right)\cdot dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left(\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\cos\left(|x|^{1/2}(t-|x|^{1/2})^2\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\sin\left(|x|^{1/2}(t-|x|^{1/2})^2\right)\right) dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right)\sqrt{\frac{\pi}{2|x|^{1/2}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Задача 2 (функция Бесселя)

Разберем поведение функции Бесселя при $x \to \infty$:

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t)dt$$

Рис. 1: Функция Эйри $\mathrm{Ai}(x)$ при $x < 0$ и её асимптотика



Решение

Стационарные точки фазы даются условием:

$$f'(t) = x \cos t = 0 \Rightarrow t_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

В отрезок интегрирования попадает одна стационарная точка t_0; поведение функции определяется вкладом в интеграл лишь от окрестности этой точки. Имеем:

$$f''(t) = -x \sin t \Rightarrow f''(t_0) = -x$$

$$f(t) \approx x - \frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

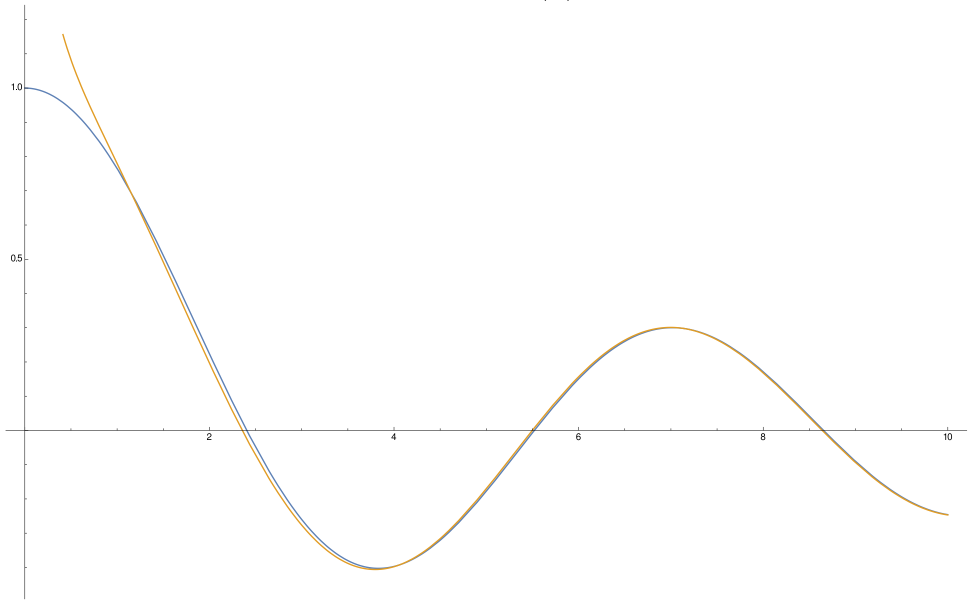
поэтому для оценки асимптотики функции Бесселя получаем:

$$\begin{aligned} J_0(x) \approx \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(x - \frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) dt = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\cos x \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right) + \sin x \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right) dt = \\ = \frac{1}{\pi}(\cos x + \sin x)\sqrt{\frac{2\pi}{2x}} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Асимптотические разложения

Практически во всех задачах мы сталкивались с асимптотическими разложениями в том или ином виде; и каждый раз мы находили первые несколько членов этого самого разложения. Поясним теперь, что из себя представляют эти самые разложения.

Рис. 2: Функция Бесселя $J_0(x)$ и её асимптотика



Пусть имеется функция $f(x)$ и последовательность функций $\varphi_k(x)$. Мы будем говорить, что функции $\varphi_k(x)$ представляют собой асимптотическое разложение функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 (может быть и бесконечно удалённой), и писать

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x), \quad x \to x_0$$

если, во-первых, каждый следующий член этого ряда меньше предыдущего:

$$\varphi_k(x) \gg \varphi_{k+1}(x) \Leftrightarrow \varphi_{k+1}(x) = \overline{o}(\varphi_k(x)), \quad x \to x_0$$

а во-вторых, функцию можно приблизить суммированием конечного члена этого ряда:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_k(x) + \underline{O}(\varphi_{N+1}(x)), \quad x \to x_0$$

Замечание Тут уместо сделать несколько замечаний. Во-первых, разложения в ряд Тейлора представляют собой пример асимптотических разложений с функциями $\varphi_k(x) = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$. А во-вторых, как правило в приложениях, асимптотические ряды формально непригодны для подсчёта значений функции в любой конкретной точке по той причине, что они часто **расходятся**. Что тем не менее не мешает их активно использовать для асимптотического анализа и приближенных оценок, как мы поступали с задачами ранее. В частности, так называемый метод диаграм Фейнмана представляет собой пример асимптотических разложений.

Задача 3 (функция Макдональда)

Найти асиптотическое разложение для интеграла при $a \to \infty$

$$I(a) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}} dx$$

Решение

Асимптотический ряд можно просто получить, раскладывая корень по малости $\frac{x}{\alpha}$. Имеем:

$$I\left(a\right)=\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x(x+\alpha)}}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)^{-1/2}dx=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}C_{-1/2}^{k}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^kdx$$

Тут C_α^k при нецелых α - обобщенный биномиальный коэффициент, определяемый как:

$$C_\alpha^k=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)\Gamma(k+1)}$$

В случае $\alpha=-\frac{1}{2}$ это можно переписать:

$$C_{-1/2}^k=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-k+\frac{1}{2}\right)}{k!}=\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{(2k-1)!!}{k!}$$

Дальше можно поменять местами сумму и интеграл; каждый из полученных интегралов представляет собой просто интеграл Эйлера; получаем:

$$I(a)\sim\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^k}C_{-1/2}^k\int_0^\infty e^{-x}x^{k-\frac{1}{2}}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1/2}}C_{-1/2}^k\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1/2}}\cdot\frac{(-1)^k}{2^k}\cdot\frac{(2k-1)!!}{k!}\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha^{k+1/2}}\cdot\frac{(-1)^k((2k-1)!!)^2\sqrt{\pi}}{2^{2k}k!}$$

тут мы воспользовались тем, что $\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdot\dots\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2k-1)!!}{2^k}\sqrt{\pi}$. Для первых нескольких членов разложения имеем:

$$I(a)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(1-\frac{1}{4\alpha}+\frac{9}{32\alpha^2}+O\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)\right)$$

Уместно заметить, что полученный ряд имеет радиус сходимости ноль, то есть расходится. Кроме того, отметим для справки, что точный ответ выражается через модифицированную функцию Бесселя - так называемую функцию Макдональда $I(a)=e^{\alpha/2}K_0(\alpha/2)$.

Задача 4 (интегральный синус)

Найдём полное асимптотическое разложение интегрального синуса при $x\to\infty$:

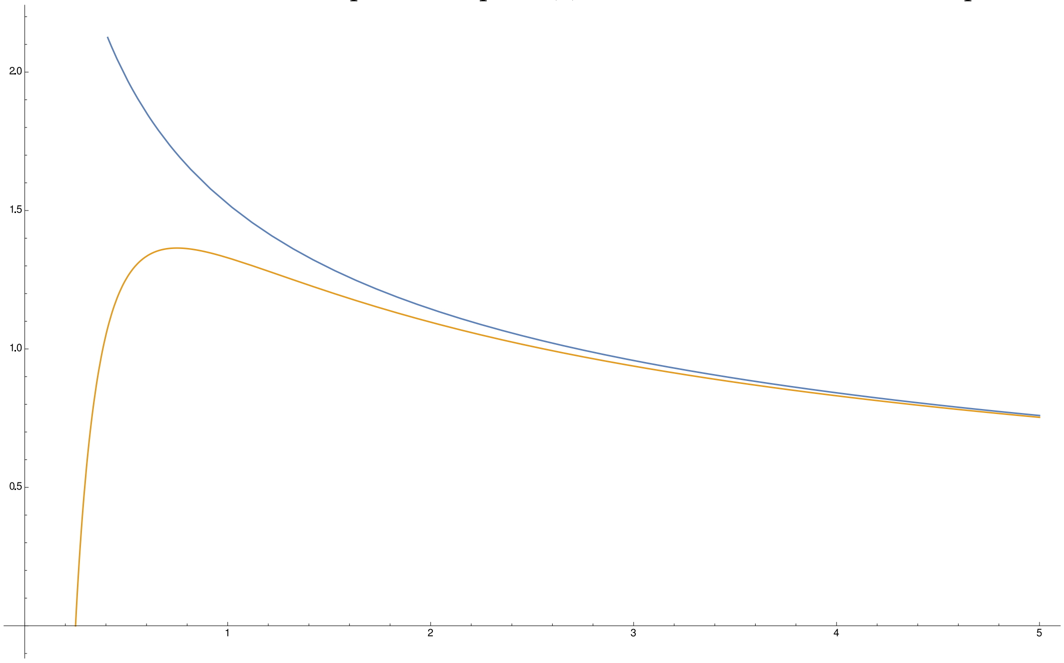
$$\mathrm{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$$

Решение

Перепишем выражение следующим образом, используя интеграл Дирихле:

$$\mathrm{Si}(x)=\frac{\pi}{2}-\int_x^\infty\frac{\sin t}{t}dt$$

Рис. 3: Точное значение интеграла и первые два члена асимптотического разложения



Можно получить асимптотический ряд, просто интегрируя по частям:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + \int_x^\infty \frac{\cos t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\int_x^\infty \frac{\sin t}{t^3} dt$$

В общем виде мы получаем следующую сумму:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{x^{2k+1}} - \sin x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!}{x^{2k}}$$

Первые несколько членов ряда дают:

$$\mathrm{Si}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} + 2\frac{\cos x}{x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Отметим, что, как и в предыдущем случае, полученные ряды также расходятся.

Задача 5

Найдем асимптотическое поведение интеграла при $n \to \infty$:

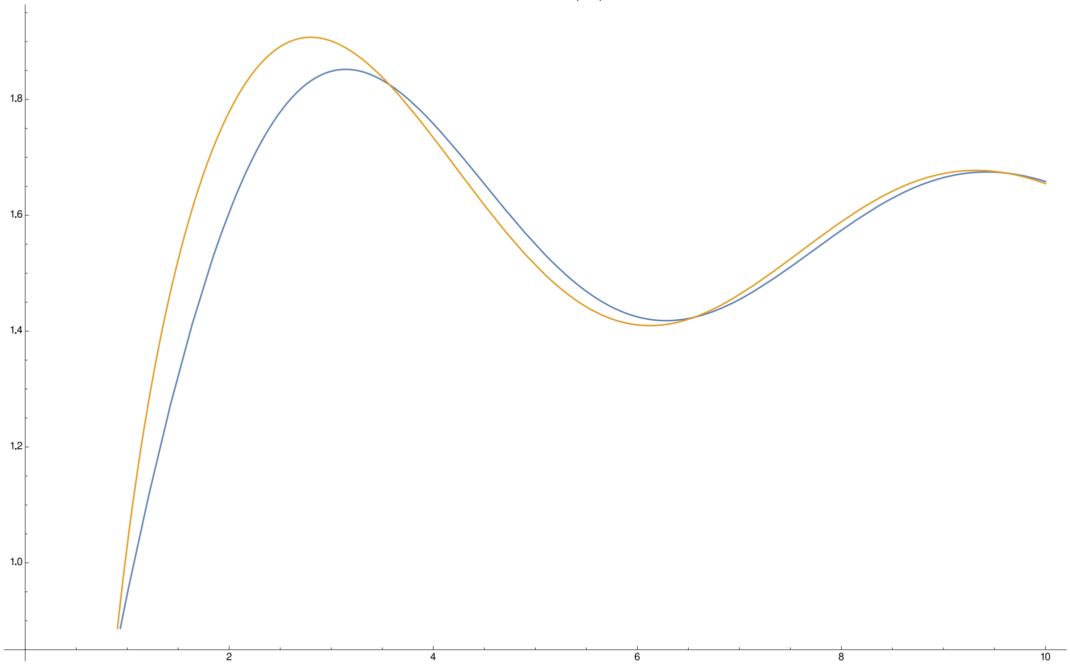
$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \cdot dx$$

Решение

Для асимптотики можно воспользоваться уже известным нам методом перевала. Действительно, интеграл можно переписать:

$$I(n) = \int_0^{\pi/2} \exp(n \cdot \ln(\sin x)) dx$$

Рис. 4: Интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$ и первое приближение



Стационарная точка находится из условия

$$f'(x) = \frac{n}{\sin x}\cos x = n\cot x = 0 \Rightarrow x_n = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Лишь одна стационарная точка x_0 попадает в отрезок интегрирования, и поведение интеграла определяется вкладом от окрестности этой точки.

$$f''(x) = -\frac{n}{\sin^2 x} \Rightarrow f''(x_0) = -n$$

$$f\left(x\right) \approx -\frac{1}{2}n\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Тут имеется тонкость. Стационарная точка попадает ровно на границу отрезка интегрирования. Это означает, что мы не можем распространять интеграл от разложенной функции на всю числовую ось, как мы поступали в методе перевала. Это обходится следующим образом: поскольку в области интегрирования лежит ровно половина Гауссового колокола (а в малой окрестности стационарной точки подынтегральная функция симметрична), то вклад от метода перевала нужно просто поделить на 2. Получаем:

$$f\left(x\right) \approx \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}n\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)dx = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Задача 6

Покажем, что функция

$$\delta_\omega(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin^2(\omega x)}{\omega x^2}$$

при $\omega \to \infty$ представляет собой δ-функцию Дирака.

Решение

Область, в которой функция существенно отлична от нуля, имеет ширину $|x| \sim \frac{1}{\omega}$, и при $\omega \to \infty$ она сужается:

$$\lim_{\omega\to\infty} \delta_\omega(x \neq 0) = 0$$

поэтому при рассмотрении интеграла вида $I = \int \delta_\omega(x) f(x) dx$ при $\omega \to \infty$ поведение определяется окрестностью нуля (область интегрирования должна содержать ноль, а функция $f(x)$ не должна иметь сингулярностей в нуле). Получаем:

$$I \approx \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) f(0) dx = f(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \omega x}{\omega x^2} dx = f(0)$$

Это и доказывает нужное утверждение:

$$\lim_{\omega\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\omega(x) f(x) dx = f(0) \Rightarrow \lim_{\omega\to\infty} \delta_\omega(x) = \delta(x)$$

Задачи для домашнего решения

Задача 1. Найти значение функции Эйри (см. задачу 1) в нуле $\mathrm{Ai}(0)$.
Задача 2. Найдите асимптотический ряд для интегрального косинуса при $x \to \infty$:

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$$

Задача 3. Найти асимптотический ряд для неполной гамма-функции при фиксированном $s \sim 1$ (не обязательно целом!) и $x \to \infty$:

$$\Gamma(s, x) = \int_x^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

Задача 4. Найдите асимптотику функции Бесселя целого порядка n при $x \gg n$, определяемой как

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nt - x \sin t) dt$$

Задача 5. Найдите асиптотику интеграла при $x \to \infty$:

$$I(x) = \int_0^{\infty} \cos\left(x(t^4 - t^2)\right) dt$$