Семинар по теме “Кратные и криволинейные интегралы”

22 апреля 2016 г.

Задача 1

Найдём энергию гравитационного взаимодействия шара массы M радиуса r и точечной частицы массы m, которая находится на расстоянии $R > r$ от него.

Решение

Результат известен из курса общей физики; эта энергия совпадает с энергией взаимодействия двух точечных частиц: $E = G\frac{Mm}{R}$ (G — гравитационная постоянная). Получим этот результат непосредственным вычислением. Из закона приятяжения следует, что энергия выражается в виде следующего интеграла по шару:

$$E = G\iiint_\Omega \frac{\rho m}{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}d^3\mathbf{r}$$

где вектор $\mathbf{R}$ направлен на точечную массу, $\rho = \frac{3M}{4\pi r^3}$ — плотность, а область интегрирования Ω представляет собой шар. Введем систему координат - поместим шар в начало координат; ось Oz направим на частицу, так что её координаты $\mathbf{R} = (0; 0; R)$. Запишем этот интеграл в сферических координатах: $d^3r = \rho^2 d\rho \sin\theta d\theta d\varphi$, причём вектор $\mathbf{r} = (\rho\sin\theta\cos\varphi; \rho\sin\theta\sin\varphi; \rho\cos\theta)$. Получаем:

$$E = G\frac{3Mm}{4\pi r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \frac{1}{\sqrt{(R-\rho\cos\theta)^2 + \rho^2\sin^2\theta}}$$

Интеграл по φ даёт просто 2π. Раскрывая скобки, видим, что в знаменателе стоит $R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$. Делая замену в получившемся интеграле $z = -\cos\theta \Rightarrow dz = \sin\theta d\theta$, мы приходим к следующему интегралу:

$$\begin{aligned}E = G\frac{3Mm}{2r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-1}^1 \frac{dz}{\sqrt{R^2+\rho^2+2R\rho\cdot z}} = \\ = G\frac{3Mm}{2r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{R\rho}\sqrt{R^2+\rho^2+2R\rho z}\Big|_{z=-1}^1 = \\ = G\frac{3Mm}{2r^3}\int_0^r \rho^2 d\rho \frac{1}{R\rho}(R+\rho-|R-\rho|) \underset{R>r\geq\rho}{=} G\frac{3Mm}{r^3 R}\int_0^r \rho^2 d\rho = \frac{GmM}{R}\end{aligned}$$

Задача 2

Найдём момент инерции тора большого радиуса R и малого радиуса r относительно оси, перпендикулярной “плоскости тора”.

Решение

Введём координаты на торе:

$$\begin{cases} x &= (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi \\ y &= (R+\rho\cos\theta)\sin\varphi \\ z &= \rho\sin\theta \end{cases}$$

При этом $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0; 2\pi]$, $\rho \in [0; r]$. Найдём якобиан перехода к таким координатам:

$$J = \det\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \det\begin{vmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta \\ -(R+\rho\cos\theta)\sin\varphi & (R+\rho\cos\theta)\cos\varphi & 0 \\ -\rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta \end{vmatrix} =$$
$$= (R+\rho\cos\theta)\rho(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\theta\sin^2\varphi) = \rho(R+\rho\cos\theta)$$

Посчитаем объём тора Ω:

$$V = \iiint_\Omega d^3\overline{r} = \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta\,(R+\rho\cos\theta) = \pi r^2 \times 2\pi R$$

поэтому плотность тора равна $\frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}$. Момент инерции тора определяется как:

$$I_z = \frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}\iiint_\Omega (x^2+y^2)d^3\mathbf{r} = \frac{M}{\pi r^2 \times 2\pi R}\int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta (R+\rho\cos\theta)^3 =$$
$$= \frac{M}{\pi r^2 \times R}\int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (R^3 + 3R^2\rho\cos\theta + 3R\rho^2\cos^2\theta + \rho^3\cos^3\theta)$$

Нечётные степени косинуса будучи усреднены по периоду дают ноль. Кроме того, известно, что $\left\langle \sin^2\theta \right\rangle = \left\langle \cos^2\theta \right\rangle = \frac{1}{2}$; поэтому интеграл по θ легко берётся и остаётся:

$$I_z = \frac{2M}{r^2}\int_0^r \rho d\rho (R^2 + \frac{3}{2}\rho^2) = M\left(R^2 + \frac{3}{4}r^2\right)$$

Задача 3

Найдём площадь σ_n единичной сферы в n-мерном пространстве.

Решение

Рассмотрим n-мерный Гауссов интеграл:

$$I = \iiint_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mathbf{x}|^2} d^n\mathbf{x}$$

С одной стороны, если рассмотреть его в n-мерных декартовых координатах, мы получим:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n e^{-x_1^2 - \cdots - x_n^2} = \pi^{n/2}$$

С другой стороны, мы можем его же рассмотреть в n-мерных сферических координатах. Поскольку подынтегральная функция зависит лишь от расстояния до центра, то мы можем сразу взять интеграл по всем углам; несложно заметить, что полученный интеграл даст нам как раз площадь единичной сферы в n-мерном пространстве (например, в трехмерном пространстве $d^3\mathbf{x} = 4\pi x^2 dx$, и 4π - как раз площадь единичной сферы в трёхмерье). Таким образом, мы можем записать:

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sigma_n x^{n-1} dx = \begin{vmatrix} x = \sqrt{t} \\ dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \end{vmatrix} = \frac{\sigma_n}{2} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \sigma_n \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \begin{cases} \frac{2\pi^k}{(k-1)!}, & n = 2k \\ \frac{2^k \pi^{k-1}}{(2k-3)!!}, & n = 2k-1 \end{cases} = \begin{cases} 2, & n = 1 \\ 2\pi, & n = 2 \\ 4\pi, & n = 3 \\ 2\pi^2, & n = 4 \end{cases}$$

Мы видим, что известные нам результаты (для $n = 1, 2, 3$) воспроизводятся.

Комментарий про размерную регуляризацию Аналитичность полученного результата как функции параметра n позволяет рассматривать такие, на первый взгляд абсурдные вещи, как "площадь сферы в пространстве размерности $n = 4 - \epsilon$", при нецелых ϵ. На этом основан один из способов регуляризации расходящихся интегралов - так называемая "размерная регуляризация", о которой рассказывалось ранее.

Допустим, нас интересует интеграл в пространстве размерности $n = 4$, и он расходится. Тогда можно формально доопределить n-мерный интеграл на нецелые n, как замену $d^n\mathbf{x}$ на $\sigma_n x^{n-1} dx$; и при этом может оказаться, что интеграл сходится при любых $n < 4$. Это позволяет формально рассмотреть интеграл в пространстве размерности $n = 4 - \epsilon$ (где интеграл сходится), а затем устремить $\epsilon \to 0$.

Задача 4

Пусть C - замкнутая кривая, соответствующая обходу единичной окружности против часовой стрелки. Найдём значение интеграла

$$I = \oint\limits_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

Решение

Неправильный способ Функция под интегралом является полным дифференциалом. Действительно:

$$d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

поэтому, казалось бы, пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, достаточно взять разницу первообразной на концах контура C. Поскольку контур замкнут, то эта разница тождественно равна нулю. Однако такой способ рассуждений ошибочен, что связано с неаналитичностью “первообразной” в точках $x = 0$ (и, соответственно, неаналитичностью подынтегральной функции в начале координат). Этот интеграл играет важнейшую роль в теории вычетов (теория функций комплексного переменного).

Правильный способ Поступим по определению. Запараметризуем контур C как $C = \{\mathbf{r}(\varphi), \varphi \in [0; 2\pi]\}$ и $\mathbf{r}(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. В таком случае интеграл запишется как:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\cos\varphi d\varphi + \sin\varphi\sin\varphi d\varphi}{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$$

Задачи для домашнего решения

Задача 1. Найти энергию гравитационного взаимодействия точечной массы m с однородным шаром массы M и радиуса R, если расстояние от центра шара до точечной массы $r < R$.

Задача 2. Найдите момент инерции тора из относительно оси, лежащей в плоскости тора.

Задача 3. Найти интеграл по единичной сфере (тут $d\Omega_{\mathbf{r}}$ означает элемент площади поверхности):

$$I = \iint_{|\mathbf{r}|=1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^2\Omega_{\mathbf{r}}$$

Задача 4. Найти значение интеграла

$$I = \frac{1}{4\pi^2} \iint \frac{1 - \cos(x+y)}{2 - \cos x - \cos y} dxdy$$

где интегрирование происходит по квадрату $x \in [0; 2\pi]$ и $y \in [0; 2\pi]$.

Подсказка: в этой задаче удобно перейти к “повёрнутой” системе координат $u = \frac{x+y}{2}$ и $v = x - y$ и, кроме того, воспользоваться периодичностью функции в плоскости (x, y).

Задача 5. Вычислить двойной интеграл по шару ($|\mathbf{x}| < 1$ и $|\mathbf{y}| < 1$):

$$I = \iint \frac{d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}$$

Подсказка: в этой задаче удобно перейти к повёрнутой системе координат $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}}{2}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$. Якобиан такого перехода равен единице.