

Семинар по теме “Вариационные задачи”

22 апреля 2016 г.

Общая теория

Вариационные задачи, возникающие чаще всего в приложениях, сводятся к минимизации функционала (в механике он называется “действием”):

$$S[x(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

с некой функцией $L(x, \dot{x}, t)$, называемой в механике “функцией Лагранжа” или “лагранжианом”. - некая функция трех переменных (ее мы назовём “лагранжианом”). Этот функционал ставит в соответствие функции $x(t)$ некое число. Вариационная задача заключается в нахождении такой функции $x(t)$, чтобы действие на ней было минимальным (или максимальным).

Для обычных функций $f(x)$ условие экстремума можно записать следующим образом. Точка $x = x_{min}$ является экстремумом, если разложение до линейного порядка по $\delta x = x - x_{min}$ около этой точки зануляется:

$$f(x) - f(x_{min}) = f'(x_{min})\delta x + \underline{O}(\delta x^2) = 0 \Rightarrow f'(x_{min}) = 0$$

Это можно обобщить и на случай функционала. Пусть $x_{min}(t)$ - функция, на которой достигается экстремум функционала $S[x(t)]$. Тогда необходимо слабо возмутить эту функцию, рассмотрев значение функционала на функции $x(t) = x_{min}(t) + \delta x(t)$ и найти линейную по δx часть приращения функционала:

$$\begin{aligned} \delta S &= S[x_{min}(t) + \delta x(t)] - S[x_{min}(t)] \equiv \\ &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \left(L(x_{min}(t) + \delta x(t), \dot{x}_{min}(t) + \dot{\delta x}(t), t) - L(x_{min}(t), \dot{x}_{min}(t), t) \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} \cdot \delta x(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{\delta x}(t) \right) dt + \underline{O}(\delta x^2) \end{aligned}$$

Второе слагаемое можно проинтегрировать по частям. Для того, чтобы не рассматривать внеинтегральный член, добавим к нашей вариационной задаче так называемое условие закреплённых концов, а именно: функционал минимизируется на таких функциях $x(t)$, что $x(t_1) \equiv x_1$ и $x(t_2) \equiv x_2$ (значения на краях фиксированы). Это значит, что вариация удовлетворяет $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$, поэтому внеинтегрального члена не будет:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x(t) dt$$

Требование $f'(x_{min}) = 0$ в нашем случае заменяется на требование равенства нулю так называемой вариационной производной:

$$\frac{\delta S}{\delta x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$$

Это - обыкновенное дифференциальное уравнение; и функция, на которой действие достигает экстремального значения, обязана ему удовлетворять. Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа.

Примеры вариационных задач

Геометрическая оптика

Первый пример, в которых возникают вариационные задачи - это принцип Ферма в геометрической оптике, гласящий, что свет распространяется по такой траектории, на которой время его движения минимально. Запишем это на языке вариационной задачи. Пусть показатель преломления как-то меняется в пространстве $n(\mathbf{r})$; в этом случае, скорость света в среде записывается как $v(\mathbf{r}) = \frac{c}{n(\mathbf{r})}$. Пусть луч света описывает некую траекторию $\{\mathbf{r}(t), t \in (t_1, t_2)\}$ (при этом параметр t попросту параметризует эту траекторию; не стоит его путать со временем). Время распространения на этой траектории тогда записывается в виде криволинейного интеграла:

$$T[\mathbf{r}(t)] = \oint_{\mathbf{r}(t)} \frac{dr}{v(\mathbf{r})} \equiv \frac{1}{c} \int_{t_1}^{t_2} n(\mathbf{r}(t)) |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt$$

В трехмерном пространстве “лагранжиан” этого функционала записывается как (опуская несущественный фактор $1/c$):

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv n(\mathbf{r})|\dot{\mathbf{r}}| = n(x, y, z) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

В случае многих координат необходимо писать систему уравнений Эйлера-Лагранжа на каждую из координат, то есть:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \end{cases}$$

Классическая механика

Уравнения классической механики также можно переформулировать на вариационном языке. В общем случае оказывается, что лагранжиан записывается как $L = T - \Pi$, где T - кинетическая энергия, а Π - потенциальная. В частности, для классической частицы массы m , движущейся в одномерье в потенциале $U(x)$, лагранжиан имеет вид

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

и соответствующее уравнение Эйлера-Лагранжа имеет вид просто второго закона Ньютона:

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Задача 1

Пусть теперь свет распространяется в среде с переменным показателем преломления, с зависимостью:

$$n(x, y) = n_0 - \beta xy$$

причём параметр β мал. Исследуем траекторию, по которой луч будет двигаться из точки $(0; 0)$ в точку $(L; 0)$.

Решение

Пусть свет распространяется по траектории $y(x)$. Обезразмерим задачу, перейдя к $\tilde{x} = \frac{x}{L}$ и $\tilde{y}(\tilde{x}) = \frac{y(x)}{L}$. В таком случае, обезразмеренна задача записывается как:

$$S[y(x)] = \int_0^L n(x, y(x)) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = n_0 L \int_0^1 \left(1 - \frac{\beta L^2}{n_0} \tilde{x} \tilde{y}\right) \sqrt{1 + \tilde{y}'(\tilde{x})^2} d\tilde{x}, \quad \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0$$

Таким образом, в задаче имеется единственный важный безразмерный параметр $\kappa = \frac{\beta L^2}{n_0}$; малость β на самом деле означает $\kappa \ll 1$. Из малости κ , в частности, следует малость $y(x)$ и $y'(x)$ (тут и далее знак “ \sim ” будет опускаться), что позволит нам разложить корень:

$$S[y(x)] = n_0 x_0 \int_0^1 (1 - \kappa xy) \sqrt{1 + y'^2} dx \approx n_0 x_0 \int_0^1 \left(1 - \kappa xy + \frac{1}{2} y'^2\right) dx$$

Тут мы также выбросили “перекрёстный” член $\kappa xy \cdot y'^2$, поскольку он имеет ту же малость, что и следующий порядок разложения корня y'^4 ; оставлять его было бы превышением точности.

Пробная функция Найдём приближённую траекторию, минимизируя “действие” в классе пробных функций $y_\alpha(x) = \alpha x(1 - x)$. Такие решения представляют собой параболы; они, конечно, отличаются от настоящего решения этой задачи. Однако, вариационный принцип позволяет нам найти параболу, которая больше всего “похожа” на точное решение. В нашем случае, “действие”, в которое мы подставим такое решение, становится функцией параметра α . По этому параметру можно его минимизировать, и найти оптимальное значение α . Получаем:

$$S[y_\alpha(x)] \approx n_0 x_0 \int_0^1 \left[1 - \kappa xy_\alpha(x) + \frac{1}{2} y_\alpha'^2\right] dx = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\alpha \kappa}{12} + \frac{\alpha^2}{6}\right)$$

Минимум по α достигается при $\alpha = \frac{1}{4}\kappa$; действие на нём равно $S = n_0 x_0 \left(1 - \frac{1}{96}\kappa^2\right)$. Сама траектория записывается как $y(x) = \frac{\beta^2 L^3}{4n_0^2} x(L - x)$. Наибольшее отклонение по оси y достигается в точке $x = \frac{1}{2}L$ и равно $y_{max} = \frac{1}{16}\kappa L = \frac{\beta L^3}{16n_0}$.

Аналитическое приближенное решение В последнем приближении для действия, уравнение Эйлера-Лагранжа и его решение с учётом граничных условий записываются просто как:

$$y'' + \kappa x = 0 \Rightarrow y(x) = \alpha x(1 - x)(1 + \beta x)$$

$$y'' = 2\alpha(\beta - 1) - 6\alpha\beta x \Rightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{\kappa}{6} \end{cases} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{6}\kappa x(1 - x^2)$$

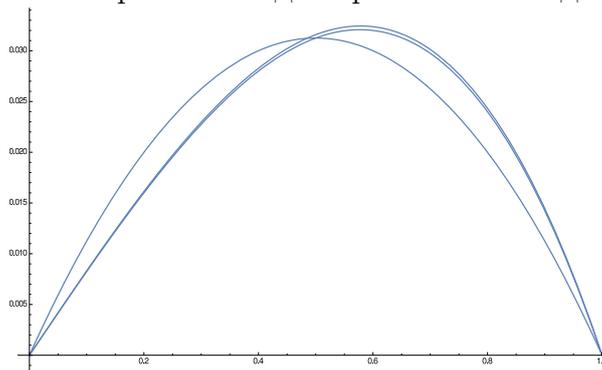
“Действие” на этом решении равно $S = n_0 x_0 \left(1 - \frac{\kappa^2}{90}\right)$ (оно меньше найденного в прошлом пункте; это приближение лучше). Максимальное отклонение достигается при $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ и равно $y_{max} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\kappa L \approx \frac{1}{15.6}\kappa L$ (можно сравнить с $1/16$, полученной в прошлом пункте).

Численный анализ Наконец, можно решать численно уравнения Эйлера-Лагранжа, которые в данном случае записываются как:

$$y'' + \kappa x(y'^2 + 1) - \kappa y(xy'' + y'^3 + y') = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

Для сравнения, приведём все три сделанных приближения на одном рисунке. Оказывается, что приближенное аналитическое решение даёт правильную ведущую асимптотику по κ , включая численный префактор.

Рис. 1: Точное решение и два приближённых для $\kappa = 0.5$



Задача 2 (статика и теория упругости)

Пусть имеется цепочка из N точечных масс \tilde{m} , соединённых пружинками жёсткостью \tilde{k} ; пружинки в нерастянутом состоянии имеют длину a . Первый шарик закрепляют в точке $(0; 0)$, а последний - в точке $(L; 0)$ (ось y направлена вертикально вверх). Под действием силы тяжести, цепочка провисает. Исследуем это провисание в пределе $N \rightarrow \infty$.

Чтобы задача имела конечный предел $N \rightarrow \infty$, параметры задачи тоже нужно менять в зависимости от N . Эта задача является моделью упругого тела (пружины) массы M и жёсткостью k , которая провисает под собственным весом. Если это так, то жёсткости каждой из маленьких пружинок выражаются как $\tilde{k} = k\frac{L}{a} = kN$, а массы равны $\tilde{m} = M\frac{a}{L} = \frac{M}{N}$.

Решение

Пусть координаты каждого из шариков $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^N$. Потенциальная энергия складывается из двух вкладов: во-первых, это потенциальная энергия в поле тяжести, а во-вторых, энергия растяжения пружинок:

$$U_1 = \sum_{n=1}^N \tilde{m} g y_n$$

$$U_2 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} \tilde{k} \left[\sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} - a \right]^2$$

Проведём теперь переход к пределу $N \rightarrow \infty$. Для этого введём вместо x_n и y_n непрерывные функции $x(l = na) \equiv x_n$ и $y(l = na) \equiv y_n$ и $l \in [0, L]$. Во-вторых, заменим суммы на интегралы по правилу $\sum_{n=1}^N \mapsto \int_0^L \frac{dl}{a}$. Наконец, конечные разности, стоящие под корнем, выразим через производные. Получим следующий функционал энергии:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^L dl \left[\frac{1}{2} k L \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{L} M g y \right]$$

Во-первых, мы избавились от всех бесконечно малых и бесконечно больших величин, оставшиеся величины имеют конечный предел при $N \rightarrow \infty$. Это - явный признак того, что мы правильно выбрали зависимость параметров исходной задачи от N для воспроизведения непрерывного предела. Во-вторых, физический смысл $x(l)$ и $y(l)$ можно понять следующим образом. Пусть в какой-то момент гравитацию “выключили”; при этом пружинка будет располагаться в горизонтальном положении; и $x(l) = l$ и $y(l) = 0$. После “включения” гравитации, пружина провиснет, при этом точка, которая изначально имела координаты $(l, 0)$ переместится в точку $(x(l), y(l))$. Наконец, обезразмерим задачу, введя следующие параметры: $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{y} = \frac{y}{L}$, $\tilde{l} = \frac{l}{L}$, $\kappa = \frac{Mg}{kL}$, $\tilde{U} = \frac{U}{kL^2}$. Получим:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^1 dl \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{x'(l)^2 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \kappa y(l) \right], \quad x(0) = y(0) = y(1) = 0, x(1) = 1$$

Тут и далее, как всегда, все знаки “ \sim ” будут опускаться. Поскольку мы предполагаем провис маленьким (иначе теория упругости, вообще говоря, не работает) - это значит, что параметр $\kappa \ll 1$.

Размерный анализ Получим из соображений размерности характерную высоту провисания пружинки. Пусть пружинка провисла на величину h . Тогда в интеграле можно сделать следующие оценки: $x' \sim 1$, $y \sim -h$, $y' \sim -h$ (напомним, что в обезразмеренной задаче $L = 1$; иначе оценка выглядела бы как $y' \sim -\frac{h}{L}$). Таким образом, потенциальная энергия имеет вид:

$$U \sim h^4 - \kappa h$$

Имеется противоборство двух вкладов: член $\sim \kappa h$, связанный с силой тяжести, стремится к наибольшему провисанию, в то время как член $\sim h^4$, связанный с упругой энергией, стремится “выровнять” пружинку и минимизировать провисание. Равновесие наступает, когда эти вклады примерно одинаковы, что дает нам размерную оценку на масштаб величины провисания:

$$h^4 \sim \kappa h \Rightarrow h \sim \kappa^{1/3}$$

А потенциальная энергия при этом имеет масштаб:

$$U \sim h^4 \sim \kappa^{4/3}$$

(напомним, что мы работаем в безразмерных единицах; в исходной задаче $h \sim L\kappa^{1/3}$).

Пробная функция В качестве пробной функции мы будем рассматривать параболы. Однако заметим, что параметризация $x(l)$ и $y(l)$ уже фиксирована; поэтому сделаем дополнительное приближение, а именно, мы пренебрежем смещением элементов пружины по горизонтали. Это приближение соответствует подстановке следующих пробных функций:

$$\begin{cases} x(l) = l \\ y(l) = -\alpha l(1-l) \end{cases}$$

(знак перед $\alpha > 0$ выбран так, чтобы явно отразить тот факт, что пружинка будет провисать вниз). Подставляя её в приближенный функционал:

$$U[x(l), y(l)] = \int_0^1 dl \left[\frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + y'(l)^2} - 1 \right)^2 + \kappa y(l) \right] \approx \int_0^1 dl \left[\frac{1}{8} y'^4 + \kappa y \right] = \frac{\alpha^4}{40} - \frac{\alpha \kappa}{6}$$

Минимум достигается при $\alpha = \left(\frac{5}{3}\kappa\right)^{1/3}$; при этом энергия равна $U = -\frac{1}{8} \left(\frac{5}{3}\right)^{1/3} \kappa^{4/3} \approx -0.148 \cdot kL^2 \left(\frac{Mg}{kL}\right)^{4/3}$; максимальное провисание равно $h = -y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{3}\kappa\right)^{1/3} \approx 0.296\kappa^{1/3}$.

Аналитическое приближенное решение Сделаем то же приближение $x(l) = l$; но при этом не будем ничего предполагать про $y(l)$, кроме её малости. В таком случае энергия запишется как:

$$U[x(l), y(l)] \approx \int_0^1 dl \left[\frac{1}{8} y'^4 + \kappa y \right]$$

Уравнение Эйлера-Лагранжа для этой задачи и его решение записывается следующим образом:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} y'^3 \right) = \kappa \Rightarrow y'(l) = \sqrt[3]{2\kappa(l-l_0)} \Rightarrow y(l) = (2\kappa)^{1/3} \cdot \frac{3}{4} (l-l_0)^{4/3} + y_0 = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} \left((2l-1)^{4/3} - 1 \right)$$

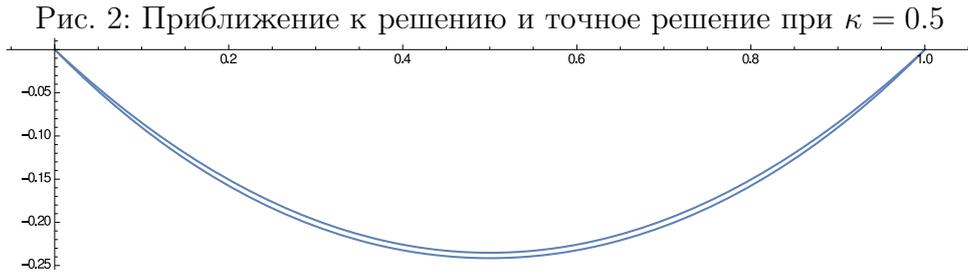
Можно сравнить это решение с предыдущим. Энергия равна $U = -\frac{9}{56} \kappa^{4/3} \approx -0.161\kappa^{4/3}$ (то есть это приближение лучше предыдущего); максимальное провисание равно $h = -y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} \kappa^{1/3} = 0.375\kappa^{1/3}$.

Численное решение Точные уравнения Эйлера-Лагранжа записываются как:

$$x' y' y'' + x'^2 x'' \sqrt{x'^2 + y'^2} + x'' y'^2 \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \right) = 0$$

$$x'^2 \left(\kappa \sqrt{x'^2 + y'^2} - 2y'' \left(\sqrt{x'^2 + y'^2} - 1 \right) \right) + y'^2 \sqrt{x'^2 + y'^2} (\kappa - 2y'') - 2x' x'' y' = 0$$

Это уравнение можно решать численно, сравнивая с аналитическими приближениями.



Задачи для домашнего решения

Задача 1. Получить наилучшее приближенное решение в задаче про движение луча в неоднородной среде с $n(x, y) = n_0 - \beta xy$, используя кубическую пробную функцию

Задача 2. Исследовать задачу про провисание пружины в случае, когда длина пружины в нерастянутом состоянии L_0 сильно меньше расстояния между точками закрепления $L_0 \ll L$. При этом κ по прежнему считать малым.

Задача 3. В приближенном решении задачи про провисание нерастянутой пружины делалось предположение $x(l) = l$, отвечающее тому, что все “элементы” пружины сместились строго вертикально. Исследовать отклонения от этого приближения.

Задача 4. Показатель преломления в атмосфере меняется с высотой как $n(z) = n_0(1 - \alpha z)$. Исследуйте, под каким углом θ будет видно точечный объект, находящийся на расстоянии d , таким что $\alpha d \ll 1$.

Задача 5. Между двумя кольцами единичного радиуса, разведёнными на расстояние d , натягивается мыльная плёнка, как показано на рисунке. Определите профиль плёнки точно, а также при $d \ll 1$ её “прогиб”.

Подсказка: в задачах с поверхностным натяжением, энергия пропорциональна площади поверхности тела.

Рис. 3: Схема мыльной плёнки

