

Введение в функциональные интегралы:
от случайных блужданий до суперсимметрии

21 октября 2025 г.

Вступление

Метод функционального интегрирования (интегрирования по траекториям) является очень мощным математическим инструментом, полезным во всех областях теоретической физики: от физики низких температур до теории струн и космологии. В рамках данного мини-курса будет дано элементарное введение в эту тему. Мы начнём с рассмотрения случайных блужданий (диффузии) и увидим, как в этой задаче возникает и оказывается полезным интеграл по траекториям. Затем обсудим более сложное движение под действием как регулярных, так и случайных сил (уравнение Ланжевена, уравнение Фоккера-Планка). Наконец, дойдём до интерпретации уравнения Фоккера-Планка как уравнения Шрёдингера, соответствующего так называемой суперсимметричной квантовой механике. Несмотря на сложную терминологию, рассмотрение будет вестись методами, уже известными первокурсникам. Незнакомые методы и понятия будут детально объясняться. Лекции будут сопровождаться домашними заданиями.

Оглавление

1	Случайное блуждание как функциональный интеграл	3
1.1	Случайное блуждание на одномерной решетке	3
1.2	Функциональный интеграл для уравнения Ланжевена	5
1.3	Задачи по лекции:	8
2	От уравнения Ланжевена к уравнению Фоккера-Планка: традиционный подход и представление в виде функционального интеграла	9
2.1	Уравнение Фоккера-Планка	9
2.2	Представление в виде функционального интеграла	11
2.3	Симуляция уравнения Ланжевена	13
2.4	Задачи по лекции:	14
3	Уравнение Фоккера-Планка и суперсимметричная квантовая механика	16
3.1	Уравнение Фоккера-Планка как уравнение Шрёдингера	16
3.2	Решение уравнения Фоккера-Планка методом собственных функций	17
3.2.1	Пример с параболическим потенциалом	18
3.3	Вероятность отклонений от оптимальной траектории	19
3.3.1	Пример параболического потенциала	19
3.3.2	Функция больших отклонений	20
3.4	Задачи по лекции:	21
A	Преобразование Фурье и характеристическая функция случайной величины	22
B	Дельта-функция Дирака	24
C	Метод перевала	25

Глава 1

Случайное блуждание как функциональный интеграл

1.1 Случайное блуждание на одномерной решетке

Будем считать, что частица движется по одномерной решётке, сдвигаясь на единицу за один шаг, но случайно выбирая направление. Найдём вероятность того, что за n шагов частица сдвинулась на длину k . Предположим, что за n шагов частица n_R раз смещалась вправо и n_L раз влево (будем считать, что $n_R \geq n_L$). Тогда находим два соотношения:

$$n_R + n_L = n, \quad n_R - n_L = k. \quad (1.1)$$

Заметим, что n и k имеют одинаковую чётность, так как по физическому смыслу $n_{R,L}$ — целые числа.

За n шагов необходимо было сделать выбор 2^n раз. Количество комбинаций выборов, которые приводят к заданному значению $n_R = (n+k)/2$, равно $C_n^{n_R}$. Таким образом, вероятность того, что частица удалилась на расстояние k за n шагов, равна

$$P_n(k) = \begin{cases} 2^{-n} C_n^{(n+k)/2}, & n \equiv k \pmod{2}, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Отметим, что введённая выше величина удовлетворяет всем свойствам вероятности, так как $\sum_{k=-n}^n P_n(k) = 1$.

Сосчитаем среднеквадратичное отклонение за n шагов (это вычисление можно сделать при помощи бинома Ньютона):

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k=-n}^n k^2 P_n(k) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n (2k-n)^2 C_n^k = n. \quad (1.3)$$

Аналогично найдём

$$\langle k^4 \rangle = n(3n-2), \quad \langle k^6 \rangle = n(15n^2 - 30n + 16), \quad \langle k^8 \rangle = n(105n^3 - 420n^2 + 588n - 272) \dots \quad (1.4)$$

Как мы видим, при $n \gg 1$ средние чётных степеней ведут себя как $\langle k^{2p} \rangle \sim n^p$. Как узнать коэф-

фициент? Применим к формуле (1.2) для случая $n \gg k \gg 1$ формулу Стирлинга: $n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

$$\begin{aligned} 2^{-n} C_n^{(n+k)/2} &= \frac{n!}{2^n ((n+k)/2)! ((n-k)/2)!} \simeq \\ &\simeq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \exp \left[-\frac{n+k}{2} \ln \left(1 + \frac{k}{n} \right) - \frac{n-k}{2} \ln \left(1 - \frac{k}{n} \right) \right] \simeq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi n}} \exp \left[-\frac{k^2}{2n} \right]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отметим, что в нашем приближённом подходе вероятность ненулевая даже для $k > n$. Нормируем вероятность, требуя, чтобы интеграл по всем $k \in \mathbb{R}$ был равен единице:

$$\mathcal{P}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-k^2/(2n)}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk \mathcal{P}_n(k) = 1. \quad (1.6)$$

С помощью ур. (1.6) получаем

$$\langle k^{2p} \rangle = (2n)^p \frac{\Gamma(p + 1/2)}{\Gamma(1/2)}, \quad (1.7)$$

где введена гамма-функция $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$. Также отметим, что вероятность того, что частица через n шагов вернётся назад, равна $\mathcal{P}_n(0) = 1/\sqrt{2\pi n}$.

Теперь рассмотрим более сложный вариант случайного блуждания: пусть длины шагов сами по себе будут случайными величинами и смогут принимать разные значения. Это означает, что частица блуждает не по решётке, а по непрерывной прямой. Тогда координата частицы через n шагов x_n равна сумме n случайных величин, каждая из которых независима и распределена равномерно в некотором интервале:

$$x_n = \sum_{j=1}^n \eta_j, \quad \eta_j \in [-a_j, a_j]. \quad (1.8)$$

Вычислим характеристическую функцию величины x_n (см. Приложение А):

$$\langle e^{i\lambda x_n} \rangle = \prod_{j=1}^n \langle e^{i\lambda \eta_j} \rangle = \prod_{j=1}^n \int_{-a_j}^{a_j} \frac{d\eta_j}{2a_j} e^{i\lambda \eta_j} = \prod_{j=1}^n \text{sinc}(a_j \lambda), \quad (1.9)$$

где $\text{sinc}(x) = \sin(x)/x$. Рассмотрим предел $n \gg 1$ и $\lambda \rightarrow 0$. Тогда, раскладывая функцию $\sin x/x$ в ряд Тейлора, получим

$$\langle e^{i\lambda x_n} \rangle \simeq \prod_{j=1}^n e^{\ln(1 - a_j^2 \lambda^2/6 + a_j^4 \lambda^4/120 + \dots)} \simeq e^{-na^2 \lambda^2/2 - n\tilde{a}^4 \lambda^4/180 - \dots}, \quad a^2 = \frac{1}{3n} \sum_{j=1}^n a_j^2, \quad \tilde{a}^4 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j^4. \quad (1.10)$$

Здесь a и $\tilde{a}$ того же порядка, что a_j . Заметим, что первый член в экспоненте в этой формуле определяет характерное значение $\lambda^2 \sim 1/(na^2)$. Тогда второй член оказывается порядка $n\tilde{a}^4 \lambda^4 \sim (\tilde{a}/a)^4/n \ll 1$. Это позволяет ограничиться квадратичным приближением. Теперь мы можем найти функцию распределения величины x_n :

$$P(x_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x_n} e^{-na^2 \lambda^2/2} = \frac{1}{a\sqrt{2\pi n}} e^{-x_n^2/(2na^2)}. \quad (1.11)$$

Как видно, мы опять получили нормальное распределение для величины x_n . Обратим внимание, что распределение случайных величин η_j не очень важно для получения этого результата.

Заметим также, что ур. (1.8) можно переписать как

$$x_n - x_{n-1} = \eta_n. \quad (1.12)$$

Переходя к непрерывному пределу и вводя вместо дискретного шага n непрерывное время t , это уравнение можно записать как

$$\frac{dx}{dt} = \eta(t), \quad (1.13)$$

где $\eta(t)$ — случайная величина. Полученное уравнение является частным случаем уравнения Ланжевена для безмассовой частицы. Покажем, что если случайная величина в правой части дельта-коррелирована, то есть $\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = \delta(t-t')$ (см. Приложение В), то мы получим такое же выражение для $\langle x_n^2 \rangle$, что и выше. Действительно, находим

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \langle \eta(t_1)\eta(t_2) \rangle = \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \delta(t_2 - t_1) = \int_0^t dt_1 = t. \quad (1.14)$$

1.2 Функциональный интеграл для уравнения Ланжевена

Используем идею с непрерывным пределом, см. ур. (1.13), чтобы представить вероятность того, что частица находится на расстоянии x от начальной точки в момент времени t . Для этого представим траекторию частицы как последовательный процесс: частица на шаге n_j была на расстоянии k_j ($n_N = n$ и $k_N = k$), $j=1, \dots, N$. Тогда вероятность (1.6) можно записать как произведение условных вероятностей:

$$\mathcal{P}_n(k) = \sum_{\{k_2, \dots, k_{N-1}\}} \mathcal{P}_{n_1 \rightarrow n_2}(k_1 \rightarrow k_2) \dots \mathcal{P}_{n_{N-1} \rightarrow n_N}(k_{N-1} \rightarrow k_N), \quad \mathcal{P}_{n_{j-1} \rightarrow n_j}(k_{j-1} \rightarrow k_j) \sim e^{-\frac{(k_j - k_{j-1})^2}{2\Delta n_j}}, \quad (1.15)$$

где $\Delta n_j = n_j - n_{j-1}$. Сумма идёт по всевозможным наборам промежуточных точек $\{k_2 \dots k_{n-1}\}$. Запишем разность $k_j - k_{j-1} \simeq (dk(n_j)/dn_j)\Delta n_j$, что верно в пределе $\Delta n_j \rightarrow 0$. Тогда из выражения произведений условных вероятностей найдём

$$\mathcal{P}_n(k) \sim \sum_{\{k_j\}} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_j \Delta n_j \left(\frac{dk(n_j)}{dn_j} \right)^2 \right). \quad (1.16)$$

Переходя к непрерывному пределу $\Delta n \rightarrow 0$ и заменяя k на x/a , где a — постоянная решетки, а Δn на dt/τ , где τ — это время одного шага, получаем

$$\mathcal{P}_t(x) \sim \int \mathcal{D}[x] \exp \left[-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \left(\frac{dx}{dt'} \right)^2 \right]. \quad (1.17)$$

Величина $D = a^2/\tau$ называется коэффициентом диффузии. Заметим, что для того, чтобы вычислить величину в экспоненте, нам требуется задаться функцией $x(t)$ с граничными условиями,

$x(0)=0$ и $x(t)=x$, и сосчитать соответствующий интеграл. Для нахождения нормировки вероятности нам необходимо проинтегрировать по всем таким функциями $x(t)$. Такой интеграл называют функциональным. Как будет видно из дальнейшего, знание выражения для нормировки нам не потребуется.

Вычислим характеристическую функцию величины $x=x(t)$:

$$\langle e^{i\lambda x} \rangle = \int \mathcal{D}[x] e^{i\lambda x} e^{-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \dot{x}^2} \left[\int \mathcal{D}[x] e^{-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \dot{x}^2} \right]^{-1}. \quad (1.18)$$

Рассмотрим выражение в экспоненте:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \dot{x}^2 + i\lambda x &= -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \dot{x}^2 + i\lambda \int_0^t dt' \dot{x} = -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' (\dot{x} - iD\lambda)^2 - \frac{D}{2} \int_0^t dt' \lambda^2 \\ &= -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' (\dot{x} - iD\lambda)^2 - \frac{Dt\lambda^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Таким образом, мы получаем

$$\langle e^{i\lambda x} \rangle = e^{-Dt\lambda^2/2} \int \mathcal{D}[x] e^{-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \dot{y}^2} \left[\int \mathcal{D}[x] e^{-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \dot{x}^2} \right]^{-1}, \quad (1.20)$$

где $\dot{y}=\dot{x}-iD\lambda$. Так как функциональный интеграл получился как предел обычных интегралов, то функциональный интеграл обладает таким же свойством относительно сдвига переменной интегрирования, как и обычный интеграл. Поэтому находим

$$\langle e^{i\lambda x} \rangle = e^{-Dt\lambda^2/2}. \quad (1.21)$$

Отсюда мы сразу можем найти функцию распределения x :

$$\mathcal{P}_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-i\lambda x} e^{-Dt\lambda^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} e^{-x^2/(2Dt)}. \quad (1.22)$$

Интересно отметить, что функция распределения при $t \rightarrow 0$ стремится к дираковской дельта-функции: $\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{P}_t(x) = \delta(x)$. Физически это означает, что в начальный момент времени частица действительно находится в точке $x=0$.

Заметим, что этот же ответ можно получить и другим способом. Представим произвольную функцию $x(t')$ с граничными условиями $x(0)=0$ и $x(t)=x$ в виде $x(t') = xt'/t + \sum_n a_n f_n(t')$, где функции представляют полный базис функций на отрезке $[0, t]$ с граничными условиями $f_n(0)=f_n(t)=0$. Тогда получаем

$$\int_0^t dt' \dot{x}^2 = \frac{x^2}{t} + \sum_{n,m} a_n a_m \int_0^t dt' f_n(t') f_m(t'). \quad (1.23)$$

Так как второе слагаемое в уравнении выше не зависит от x , то оно может определять только нормировку. Таким образом, мы опять возвращаемся к ур. (1.22). Отметим, что это общая ситуация и для случая, когда функциональный интеграл не гауссов и разложение по флуктуациям содержит все члены, а не только квадратичный. В этом случае интеграл по флуктуациям определяет предэкспоненциальный фактор.

Ещё один способ получить ответ (1.22) такой. Давайте найдём оптимальную траекторию, которая максимизирует величину, стоящую в экспоненте в ур. (1.17). Вычислим вариацию, представив $x(t')=x_0(t')+\delta x(t')$, где $\delta x(t')$ — небольшое отклонение от траектории $x_0(t)$, удовлетворяющее граничным условиям $\delta x(0)=\delta x(t)=0$:

$$\begin{aligned} \delta \int_0^t dt' \left(\frac{dx}{dt'} \right)^2 &= \int_0^t dt' \left[(\dot{x}_0 + \delta \dot{x})^2 - \dot{x}_0^2 \right] \simeq 2 \int_0^t dt' \dot{x}_0 \delta \dot{x} = \\ &= 2 \dot{x}_0(t) \delta x(t) - 2 \dot{x}_0(0) \delta x(0) - 2 \int_0^t dt' \delta x \ddot{x}_0 = -2 \int_0^t dt' \delta x \ddot{x}_0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Чтобы траектория $x_0(t')$ была экстремальной, необходимо потребовать, чтобы в первом порядке вариация тождественно обращалась в нуль. Таким образом, мы получаем уравнение Эйлера-Лагранжа для оптимальной траектории:

$$\ddot{x}_0 = 0, \quad x_0(0) = 0, \quad x_0(t) = x. \quad (1.25)$$

Решение этого дифференциального уравнения есть $x_0(t')=xt'/t$. Подставляя это решение в интеграл в ур. (1.17), мы опять возвращаемся к ответу (1.22). Идея этого приближения похожа на метод перевала для приближённого вычисления обычных интегралов (см. Приложение С), поскольку найденная оптимальная траектория реализует минимум вероятности. Однако заметим, что в данном случае ответ получился точным, т. к. интеграл внутри экспоненты в ур. (1.17) квадратичен по $x(t')$.

Вероятность (1.17) удобно проинтерпретировать следующим образом. Пусть координата частицы удовлетворяет уравнению Ланжевена:

$$\frac{dx}{dt} = \eta(t), \quad (1.26)$$

где случайная величина распределена по нормальному закону,

$$\mathcal{P}_t(\eta) \sim \exp \left[-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \eta^2(t') \right]. \quad (1.27)$$

Вычислим корреляционную функцию $\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle$. Рассмотрим следующий интеграл:

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int \mathcal{D}[\eta] \exp \left[-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \eta^2(t') + \lambda_1 \eta(t_1) + \lambda_2 \eta(t_2) \right] \left\{ \int \mathcal{D}[\eta] \exp \left[-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \eta^2(t') \right] \right\}^{-1}. \quad (1.28)$$

Тогда очевидно, что

$$\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle = \partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} I(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0}. \quad (1.29)$$

Запишем выражение в экспоненте как

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \eta^2(t') + \lambda_1 \eta(t_1) + \lambda_2 \eta(t_2) &= -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \eta^2(t') + \int_0^t dt' \eta(t') [\lambda_1 \delta(t' - t_1) + \lambda_2 \delta(t' - t_2)] = \\ &= -\frac{1}{2D} \int_0^t dt' \left[\eta(t') - D \lambda_1 \delta(t' - t_1) - D \lambda_2 \delta(t' - t_2) \right]^2 + \frac{D}{2} \int_0^t dt' \left[\lambda_1 \delta(t' - t_1) + \lambda_2 \delta(t' - t_2) \right]^2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Отсюда, так же как и выше, находим

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \exp \left\{ \frac{D}{2} \int_0^t dt' \left[\lambda_1 \delta(t' - t_1) + \lambda_2 \delta(t' - t_2) \right]^2 \right\}. \quad (1.31)$$

Таким образом, получаем

$$\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle = D \int_0^t dt' \delta(t' - t_1) \delta(t' - t_2) = D \delta(t_1 - t_2). \quad (1.32)$$

1.3 Задачи по лекции:

- (1.1) Рассмотреть интеграл $I_N = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \prod_{n=1}^N \text{sinc}(\lambda/(2n-1))$. Доказать, что $I_1 = \dots = I_7 = \pi$ и $I_N < \pi$ для $N \geq 8$. Подсказка: связать интеграл I_N с вероятностью возврата назад. Решение можно найти в работе [1]. (4 балла)
- (1.2) Доказать, что траектория $x_0(t') = xt'/t$ реализует минимум вероятности (1.17) среди всех траекторий с граничными условиями $x(0)=0$ и $x(t)=x$. (1 балл)
- (1.3) С помощью введения источников λ_i вычислить среднее $\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \eta(t_3) \eta(t_4) \rangle$. (3 балла)
- (1.4) Вычислить распределение вероятности того, что частица в момент времени t находится в точке x при условии, что она никогда не возвращалась в $x=0$. Решение можно найти в работе [2]. (4 балла)
- (1.5) Вычислить распределение вероятности того, что частица, стартуя из $x=0$ первый раз, вернётся в $x=0$ в момент времени t . Решение можно найти в работе [2]. (4 балла)

Глава 2

От уравнения Ланжевена к уравнению Фоккера-Планка: традиционный подход и представление в виде функционального интеграла

2.1 Уравнение Фоккера-Планка

Прямым обобщением ур. (1.26) является уравнение Ланжевена (иногда его в форме ниже называют уравнением Смолуховского):

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} = F(x) + \eta(t), \quad F(x) = -V'(x), \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\gamma T \delta(t - t'). \quad (2.1)$$

Это уравнение имеет прозрачный физический смысл. Если положить γ и η равными нулю, то ур. (2.1) превращается просто в уравнение Ньютона для движения на прямой частицы под действием силы F (мы положили массу частицы равной 1). Член с первой производной по времени описывает вязкое трение, которое пропорционально скорости частицы. $\eta(t)$ — это случайная компонента силы, которая воздействует на частицу. При этом мы считаем, что она распределена по нормальному закону, дельта-коррелирована и имеет нулевое среднее (см. предыдущую лекцию). Обратим внимание, что в коррелятор случайной силы входит параметр γ , который определяет вязкое трение. Также мы ввели параметр T : его смысл станет ясен ниже.

Нашей целью будет вывести уравнение, которому подчиняется функция распределения $P(x, t)$, которая определяет вероятность того, что в момент времени t координата частицы $x(t)=x$. Для упрощения выкладок рассмотрим так называемый передемпфированный случай, когда вязкое трение превалирует над инерционным членом, т. е. вместо ур. (2.1) будем рассматривать более простое уравнение первого порядка:

$$\gamma \dot{x} = F(x) + \eta(t), \quad F(x) = -V'(x), \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\gamma T \delta(t - t'). \quad (2.2)$$

Как первый шаг запишем это уравнение в дискретном виде. Для этого надо проинтегрировать обе части уравнения по времени от t до $t+\varepsilon$ (подразумевая, что $\varepsilon \rightarrow 0$):

$$x(t + \varepsilon) \simeq x(t) + \frac{1}{\gamma} F(x(t))\varepsilon + \eta_\varepsilon, \quad \eta_\varepsilon = \frac{1}{\gamma} \int_t^{t+\varepsilon} dt' \eta(t'). \quad (2.3)$$

Отметим, что величина η_ε является (так же как и η) нормально распределённой величиной. Поэтому, чтобы найти функцию распределения η_ε , достаточно сосчитать её дисперсию:

$$\langle \eta_\varepsilon^2 \rangle = \frac{1}{\gamma^2} \int_t^{t+\varepsilon} dt' dt'' \langle \eta(t') \eta(t'') \rangle = \frac{2T}{\gamma} \varepsilon. \quad (2.4)$$

Отсюда получаем, что функция распределения для η_ε имеет вид

$$\mathcal{P}(\eta_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(T/\gamma)\varepsilon}} e^{-\frac{\eta_\varepsilon^2}{4(T/\gamma)\varepsilon}}. \quad (2.5)$$

Полезно сравнить это выражение с выражением (1.22) из первой лекции. Исходя из сравнения, можно сказать, что отношение $2T/\gamma$ равно коэффициенту диффузии: $D=2T/\gamma$.

Запишем следующее уравнение:

$$P(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dy W_\varepsilon(x, y) P(y, t), \quad (2.6)$$

где $W_\varepsilon(x, y)$ — это вероятность того, что частица, стартуя из точки y в момент времени t , окажется в точке x в момент времени $t+\varepsilon$. Так как точка y может быть любой, мы по этому параметру интегрируем. Фактически, уравнение (2.6) есть определение условной вероятности $W_\varepsilon(x, y)$. Однако в данном случае мы эту величину знаем:

$$W_\varepsilon(x, y) = \mathcal{P}(x - y - \varepsilon F(y)/\gamma). \quad (2.7)$$

Это соотношение сообщает, что вероятность $W_\varepsilon(x, y)$ определяется случайным блужданием из точки y в точку x за время ε с учетом дрейфа за счет действия силы F . Таким образом, получаем

$$P(x, t + \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi D\varepsilon}} e^{-\frac{(x-y-\varepsilon F(y)/\gamma)^2}{2D\varepsilon}} P(y, t). \quad (2.8)$$

Нашей целью будет разложить это интегральное уравнение до первого порядка по ε , что даст искомое дифференциальное уравнение на $P(x, t)$. Удобно ввести новую переменную интегрирования $y=x+\sqrt{\varepsilon D}z$. Тогда получим

$$\begin{aligned} P(x, t) + \varepsilon \partial_t P(x, t) &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-[z+\sqrt{\varepsilon}F(x+\sqrt{\varepsilon D}z)/(\gamma\sqrt{D})]^2/2} P(x + \sqrt{\varepsilon D}z, t) \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \left[P(x, t) + \sqrt{\varepsilon D} z \partial_x P(x, t) + \frac{1}{2} \varepsilon D z^2 \partial_x^2 P(x, t) \right] \exp \left[-\frac{\sqrt{\varepsilon} z}{\gamma \sqrt{D}} F(x) - \frac{\varepsilon}{2\gamma^2 D} F^2(x) - \frac{\varepsilon z^2}{\gamma} \partial_x F \right] \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \left[P(x, t) - \frac{\varepsilon z^2}{\gamma} \partial_x (F(x) P(x, t)) + \frac{\varepsilon}{2} D z^2 \partial_x^2 P(x, t) + \frac{(z^2 - 1)\varepsilon}{2\gamma^2 D} P(x, t) F^2(x) \right] \\ &= P(x, t) + \varepsilon \left[\frac{D}{2} \partial_x^2 P(x, t) - \frac{1}{\gamma} \partial_x (F(x) P(x, t)) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Сравнивая члены первого порядка по ε в левой и правой частях равенства, получаем уравнение Фоккера-Планка

$$\partial_t P(x, t) = \frac{D}{2} \partial_x^2 P(x, t) + \frac{1}{\gamma} \partial_x (P(x, t) \partial_x V(x)). \quad (2.10)$$

Заметим, что при $V=0$ решением уравнения Фоккера-Планка является распределение (1.22). В случае наличия потенциальной энергии $V(x)$, уравнение Фоккера-Планка допускает стационарное решение $P_{\text{st}}(x) \sim \exp(-V(x)/T)$. Это распределение называется распределением Больцмана, а параметр T называется температурой.

2.2 Представление в виде функционального интеграла

Используем интегральное соотношение (2.8) для построения выражения для $P(x, t)$ в виде функционального интеграла. Для этого разобьём отрезок $[0, t]$ на интервалы так, что $t_n = \varepsilon n$, где $n=0, 1, \dots, N$ и $\varepsilon = t/N$. Также введём обозначение $x_n = x(t_n)$, так что $x_N = x$. Тогда, используя выражение (2.8), запишем

$$P(x_n, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{n-1}}{\sqrt{2\pi D\varepsilon}} e^{-\frac{(x_n - x_{n-1} - \varepsilon F(x_{n-1})/\gamma)^2}{2D\varepsilon}} P(x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (2.11)$$

Применяя это рекуррентное соотношение, получим:

$$P(x, t) = \prod_{n=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{n-1}}{\sqrt{2\pi D\varepsilon}} e^{-\frac{(x_n - x_{n-1} - \varepsilon F(x_{n-1})/\gamma)^2}{2D\varepsilon}} \right) P(x_0, 0). \quad (2.12)$$

Вводя обозначение $\dot{x}_{n-1} = (x_n - x_{n-1})/\varepsilon$, перепишем выражение выше в следующем виде:

$$P(x, t) = \prod_{n=1}^N \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{n-1}}{\sqrt{2\pi D\varepsilon}} \right) e^{-\frac{\varepsilon}{2D} \sum_{n=1}^{N-1} (\dot{x}_{n-1} - F(x_{n-1})/\gamma)^2} P(x_0, 0). \quad (2.13)$$

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ и $N \rightarrow \infty$ при условии $\varepsilon N = t$, получаем представление для функции распределения в виде функционального интеграла:

$$P(x, t) = \int_{\substack{x(0)=0 \\ x(t)=x}} \mathcal{D}[x] \exp \left(-\frac{1}{2D} \int_0^t dt' [\dot{x} - F(x)/\gamma]^2 \right). \quad (2.14)$$

Здесь мы учли, что по определению $P(x_0, 0) = \delta(x_0)$, т.к. в начальный момент времени частица находится в точке с координатой $x_0 = 0$. Заметим, что результат (2.14) может быть получен из следующего простого соображения: выражаем случайную силу из (2.2) и подставляем в функциональный интеграл (1.27). Однако на этом пути есть тонкое место — переход от интегрирования по η к интегрированию по x . Для вычисления соответствующего якобиана перехода требуется разбиение на конечные интервалы, которое было выполнено выше.

Оказывается, что для работы с функциональным интегралом (2.14) удобно ввести новую переменную интегрирования $p(t)$, так что функциональный интеграл примет вид

$$P(x, t) = \int \mathcal{D}[x, p] \exp \left(-\int_0^t dt' p [\dot{x} - F(x)/\gamma - Dp/2] \right) = \int \mathcal{D}[x, p] \exp \left(-\int_0^t dt' [p\dot{x} - H(p, x)] \right), \quad (2.15)$$

$$H(p, x) = \frac{Dp^2}{2} + \frac{p}{\gamma} F(x).$$

Отметим, что здесь и ниже мы опускаем граничные условия для конфигураций $x(t')$, по которым берётся функциональный интеграл. Заметим, что величина $H(p, x)$ аналогична функции Гамильтона в классической механике: переменная p играет роль импульса, $1/D$ — массы. Член $\frac{p}{\gamma} F(x)$ является необычным с точки зрения классической механики. Заметим, что это формальная аналогия. Движение частицы в вязкой среде не является консервативным, так что функции Гамильтона с точки классической механики для такого движения не существует.

Выведем уравнения Эйлера-Лагранжа для величины (обычно её называют действием), стоящей в экспоненте ур. (2.15). Рассмотрим сначала вариацию интеграла при изменении траектории от $x(t')$ до $x(t') + \delta x(t')$:

$$\delta \int_0^t dt' [p\dot{x} - H(p, x)] = \int_0^t dt' [p\delta\dot{x} - \partial_x H(p, x)\delta x] = \int_0^t dt' [-\dot{p} - \partial_x H(p, x)]\delta x. \quad (2.16)$$

Аналогично, вариация интеграла при изменении траектории от $p(t')$ до $p(t') + \delta p(t')$ имеет вид

$$\delta \int_0^t dt' [p\dot{x} - H(p, x)] = \int_0^t dt' [\delta p\dot{x} - \partial_p H(p, x)\delta p] = \int_0^t dt' [\dot{x} - \partial_p H(p, x)]\delta p. \quad (2.17)$$

Отсюда получаем уравнения Эйлера-Лагранжа для оптимальной траектории в пространстве переменных x, p :

$$\dot{x} = \partial_p H(p, x) = Dp + \frac{1}{\gamma}F(x), \quad \dot{p} = -\partial_x H(p, x) = -\frac{p}{\gamma}F'(x). \quad (2.18)$$

В классической механике соответствующие уравнения называются уравнениями Гамильтона. Покажем, что на оптимальной траектории сохраняется во времени функция Гамильтона (энергия). Действительно, имеем

$$\dot{H} = \partial_p H(p, x)\dot{p} + \partial_x H(p, x)\dot{x} = -\partial_p H(p, x)\partial_x H(p, x) + \partial_x H(p, x)\partial_p H(p, x) \equiv 0. \quad (2.19)$$

Рассмотрим пример диффузии в параболическом потенциале $V(x) = \omega x^2/2$. В этом случае уравнения (2.18) принимают вид

$$\dot{x} = Dp - \frac{\omega x}{\gamma}, \quad \dot{p} = \frac{\omega p}{\gamma}. \quad (2.20)$$

Продифференцируем первое уравнение еще раз по времени и выразим правую часть через x и $\dot{x}$. Тогда получим

$$\ddot{x} = \frac{\omega^2}{\gamma^2}x, \quad Dp = \dot{x} + \frac{\omega}{\gamma}x, \quad x(0) = 0, \quad x(t) = x. \quad (2.21)$$

Решая эту систему уравнений с граничными условиями, находим:

$$x(t') = x \frac{\sinh(\omega t'/\gamma)}{\sinh(\omega t/\gamma)}, \quad p(t') = \frac{\omega x}{D\gamma} \frac{e^{\omega t'/\gamma}}{\sinh(\omega t/\gamma)}. \quad (2.22)$$

Вычислим действие:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' [p\dot{x} - H(p, x)] &= \int_0^t dt' [p\dot{x} - Dp^2/2 + (\omega/\gamma)px] = \\ &= \frac{x^2\omega^2}{2D\gamma^2 \sinh^2(\omega t/\gamma)} \int_0^t dt' e^{2\omega t'/\gamma} = \frac{x^2}{2D} \frac{\omega e^{\omega t/\gamma}}{\gamma \sinh(\omega t/\gamma)}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, искомая функция распределения вероятности, вычисленная на экстремальной траектории, равна

$$P(x, t) = [2\pi D(\gamma/\omega) e^{-\omega t/\gamma} \sinh(\omega t/\gamma)]^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{2D} \frac{\omega e^{\omega t/\gamma}}{\gamma \sinh(\omega t/\gamma)}\right). \quad (2.24)$$

Заметим, что, так же как для случайного блуждания, см. ур. (1.23), ответ, вычисленный на экстремали, оказывается точным. Можно проверить, что решение (2.24) удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка (2.10).

Заметим, что в пределе $\omega \rightarrow 0$, когда параболического потенциала нет, выражение (2.24) переходит в ответ для случайного блуждания. Этот же ответ возникает в пределе $t \rightarrow 0$. Другой интересный предельный случай — это предел $t \rightarrow \infty$, когда $P(x, t) \sim \exp[-\omega x^2/(2T)]$, что соответствует больцмановскому распределению. Можно сказать, что на малых временах $t \ll \gamma/\omega$ частица не чувствует наличие потенциала и движется как при обычном случайном блуждании, а на временах $t \gg \gamma/\omega$ функция распределения вероятности начинает приближаться к стационарной, определяемой потенциалом и температурой.

На решении (2.22) функция Гамильтона (энергия) принимает вид

$$H(p, x) = \frac{1}{2D}[\dot{x}^2 - (\omega x/\gamma)^2] = \frac{\omega^2 x^2}{2D\gamma^2 \sinh^2(\omega t/\gamma)}. \quad (2.25)$$

Как и должно быть, $H(p, x)$ на траектории не зависит от t' . Обратим внимание, что в пределе $t \rightarrow \infty$ энергия обращается в нуль. Другими словами, больцмановскому распределению соответствует экстремальное решение уравнений Эйлера-Лагранжа с энергией $H=0$.

Воспользуемся этим соображением для произвольного потенциала. У уравнения $H(p, x)=0$ есть два решения: $p=0$ и $p=-2F(x)/(\gamma D)$. Первое решение приводит к бесшумовому уравнению для x и нулевому значению интеграла в экспоненте функции распределения вероятности. Это явно не то, что нас интересует. Другое решение оказывается совместно с системой уравнений Эйлера-Лагранжа, а уравнение на x оказывается таким:

$$-\dot{x} = \frac{1}{\gamma} F(x). \quad (2.26)$$

Отметим, что от классического уравнения движения это уравнение отличается знаком перед производной по времени. Это уравнение соответствует движению в среде с вязким трением в перевернутом потенциале $-V(x)$. Оказывается, что нам не требуется решать это уравнение для вычисления действия:

$$\int_0^t dt' [p\dot{x} - H(p, x)] = \int_0^t dt' p\dot{x} = \int_0^x dy p(y) = \frac{2}{\gamma D} \int_0^x dy V'(y) = [V(x) - V(0)]/T. \quad (2.27)$$

Таким образом, получаем, что функция распределения вероятности равна $P(x, t) \sim \exp[-V(x)/T]$.

2.3 Симуляция уравнения Ланжевена

В этой главе мы рассмотрим симуляцию случайного блуждания на основе уравнения Ланжевена:

$$\gamma \frac{dx}{dt} = -m\omega^2 x + \eta(t); \quad \langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2T\gamma \delta(t - t'). \quad (2.28)$$

Для удобной симуляции перейдём к безразмерной координате $x=x_0 z$ и времени: $t=\frac{\gamma x_0^2}{T} \xi$. Тогда останется один безразмерный параметр, определяющий силу потенциала, $\alpha=\frac{m\omega^2 x_0^2}{T}$. Уравнение Ланжевена теперь имеет вид:

$$\frac{dz}{d\xi} = -\alpha z + f(t); \quad \langle f(t)f(t') \rangle = \delta(\xi - \xi'). \quad (2.29)$$

Простейший код в Wolfram Mathematica, реализующий дискретную динамику уравнения Ланжевена:

```
d = 0.1; (*Шаг дискретизации по времени*)
a = 1;    (*Параметр вязкости*)

For[i = 1; S = {{0, 0}}, i < 100, i++,
  x = (1 - a d) S[[-1,2]] + d RandomVariate[NormalDistribution[0, 1/Sqrt[d]]];
  AppendTo[S, {i, x}]]

ListLinePlot[S]
```

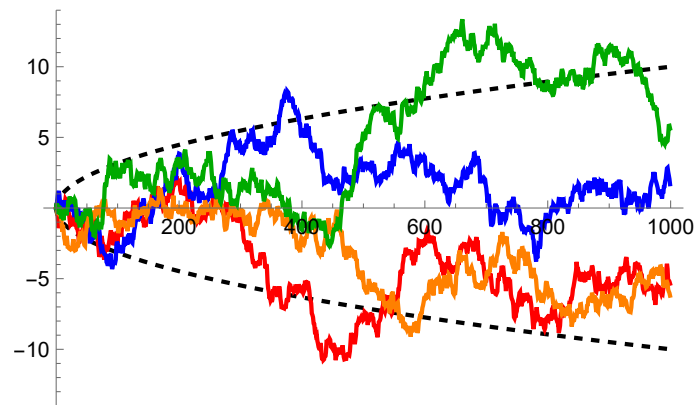


Рис. 2.1: Случайное блуждание без внешнего потенциала. Штриховой линией построен корень из дисперсии $\sqrt{\xi/10}$ ($1/10$ — шаг дискретизации по времени).

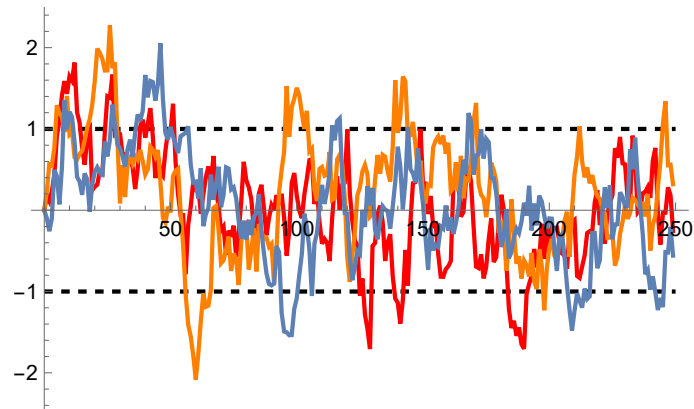


Рис. 2.2: Случайное блуждание в потенциале $V = m\omega^2 x^2/2$. Хорошо видно, что потенциал локализует случайное блуждание.

2.4 Задачи по лекции:

- (2.1) Вывести уравнение Фоккера-Планка для уравнения Ланжевена с инерционным членом. Подсказка: это уравнение надо писать на функцию распределения $P(x, v, t)$, которая определяет вероятность того, что в момент времени t координата и скорость частицы равны

$x(t)=x$ и $\dot{x}(t)=v$, соответственно. Найти стационарное решение для функции распределения. (4 балла)

- (2.2) Показать, что учет отклонений от экстремальной траектории не меняет функцию распределения вероятности (2.24). Подсказка: см. ур. (1.23). (2 балла)
- (2.3) Доказать, что решение (2.24) удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка (2.10). (2 балла)
- (2.4) Решить уравнение Фоккера-Планка для случая постоянной силы, $V(x)=-Fx$. Считать, что в начальный момент времени частица находится в точке $x=0$. (3 балла)

Глава 3

Уравнение Фоккера-Планка и суперсимметричная квантовая механика

3.1 Уравнение Фоккера-Планка как уравнение Шрёдингера

Вернёмся к рассмотрению уравнения Фоккера-Планка (2.10):

$$\partial_t P(x, t) = \frac{D}{2} \partial_x^2 P(x, t) + \frac{1}{\gamma} \partial_x (P(x, t) \partial_x V(x)). \quad (3.1)$$

Сделаем замену $P(x, t) = e^{-V(x)/(2T)} \Psi(x, t)$, тогда на Ψ получаем уравнение

$$\partial_t \Psi(x, t) = -\frac{T}{\gamma} \left[-\partial_x^2 + W(x) \right] \Psi(x, t), \quad W(x) = \left(\frac{V'}{2T} \right)^2 - \frac{V''}{2T}. \quad (3.2)$$

Это уравнение похоже на уравнение Шрёдингера, только, как говорят, во мнимом времени. Заметим, что это уравнение можно переписать и в таком виде:

$$\partial_t \Psi(x, t) = -\frac{T}{\gamma} B^+ B \Psi(x, t), \quad B = i\partial_x + \frac{iV'(x)}{2T}, \quad B^+ = i\partial_x - \frac{iV'(x)}{2T}. \quad (3.3)$$

В случае, когда правую часть уравнения Шрёдингера удаётся представить в виде произведения двух эрмитово сопряжённых операторов, соответствующую квантово-механическую задачу называют суперсимметричной. Заметим, что в отличие от стандартной квантовой механики нормировка функции Ψ определяется интегралом

$$\int dx \Psi(x, t) e^{-V(x)/(2T)} = 1. \quad (3.4)$$

Стационарное решение уравнения (3.3) определяется уравнением

$$B\Psi(x) = 0 \quad \implies \quad \Psi(x) \sim e^{-V(x)/(2T)}. \quad (3.5)$$

Таким образом, мы возвращаемся к ответу для распределения Больцмана $P(x) \sim \exp[-V(x)/T]$.

3.2 Решение уравнения Фоккера-Планка методом собственных функций

А как найти $P(x, t)$ из решения ур. (3.2)? Будем считать, что дифференциальный оператор в правой части этого уравнения имеет собственные функции $\Phi_n(x)$ и собственные значения ε_n :

$$\left[-\partial_x^2 + W(x)\right]\Phi_n(x) = \varepsilon_n \Phi_n(x). \quad (3.6)$$

Заметим, что $\varepsilon_n \geq 0$ для того, чтобы гарантировать выход функции распределения на стационарное значение. Покажем, что собственные функции $\Phi_n(x)$ являются ортогональными в смысле

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_n(x) \Phi_m(x) = 0, \quad n \neq m. \quad (3.7)$$

Для этого рассмотрим величину

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_n - \varepsilon_m) \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_n(x) \Phi_m(x) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_m(x) \left[-\partial_x^2 + W(x)\right] \Phi_n(x) - \int_{-\infty}^{\infty} dx \Phi_n(x) \left[-\partial_x^2 + W(x)\right] \Phi_m(x) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Считая, что спектр не вырожден, т. е. $\varepsilon_n \neq \varepsilon_m$ при $n \neq m$, получаем условие ортогональности.

Отметим ещё одно полезное свойство. Представим произвольную функцию $\Psi(x)$ в виде разложения по собственным функциям $\Phi_n(x)$: $\Psi(x) = \sum_n c_n \Phi_n(x)$. Тогда, считая все собственные значения неотрицательными, получим

$$\frac{\int dx \Psi(x) \left[-\partial_x^2 + W(x)\right] \Psi(x)}{\int dx \Psi^2(x)} \geq \min_n \varepsilon_n. \quad (3.9)$$

Заметим, что для суперсимметричной квантовой механики это условие становится тривиальным, т. к. левая часть — это всегда неотрицательная величина, а правая часть — нуль:

$$\frac{\int dx |B\Psi(x)|^2}{\int dx \Psi^2(x)} \geq \min_n \varepsilon_n = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, решение ур. (3.2) можно записать в виде

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-\varepsilon_n t} \Phi_n(x), \quad P(x, t) = e^{-V(x)/(2T)} \sum_n c_n e^{-\varepsilon_n t} \Phi_n(x). \quad (3.11)$$

Произвольные коэффициенты c_n находятся из начального условия $P(x, t=0) = \delta(x)$:

$$e^{-V(x)/(2T)} \sum_n c_n \Phi_n(x) = \delta(x). \quad (3.12)$$

3.2.1 Пример с параболическим потенциалом

Рассмотрим опять пример параболического потенциала $V(x)=\omega x^2/2$. В этом случае ур. (3.2) превращается в

$$\partial_t \Psi(X, t) = -\frac{\omega}{2\gamma} \left[-\partial_X^2 + X^2 - 1 \right] \Psi(X, t), \quad (3.13)$$

где мы ввели безразмерную переменную $X=x\sqrt{\omega/(2T)}$. Найдём собственные функции оператора $-\partial_X^2 + X^2 - 1$. Заметим, что при $n=0, 1, 2, \dots$ удовлетворяются соотношения

$$\left[-\partial_X^2 + X^2 - 1 \right] \Phi_n(X) = 2n\Phi_n(X), \quad \Phi_n(X) = e^{-X^2/2} H_n(X), \quad H_n(X) = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy (X+iy)^n e^{-y^2}. \quad (3.14)$$

Полином $H_n(X)$ называется полиномом Эрмита и удовлетворяет уравнению

$$H_n'' - 2XH_n' + 2nH_n = 0. \quad (3.15)$$

Действительно,

$$H_n'' = -in \int_{-\infty}^{\infty} dy \partial_y (X+iy)^{n-1} e^{-y^2} = in \int_{-\infty}^{\infty} dy (-2y) (X+iy)^{n-1} e^{-y^2} = -2XH_n' + 2nH_n. \quad (3.16)$$

Полиномы Эрмита также удовлетворяют условию нормировки, которое обеспечивает ортогональность найденных собственных функций:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}. \quad (3.17)$$

Теперь можно записать общий вид решения для функции распределения вероятности:

$$P(x, t) = \sqrt{\frac{\omega}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\omega n t / \gamma} e^{-X^2} H_n(X). \quad (3.18)$$

Найдём теперь коэффициенты c_n . Заметим, что чётность полиномов Эрмита совпадает с чётностью n , поэтому нужно положить $c_{2n-1}=0$ и

$$\sqrt{\frac{\omega}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} e^{-X^2} H_{2n}(X) = \delta(x) = \sqrt{\frac{\omega}{2T}} \delta(X). \quad (3.19)$$

Пользуясь условием нормировки (3.17) и тем, что $H_{2n}(0)=(-1)^n(2n)!/(2^n n!)$, можно показать, что $c_{2n}=(-1)^n/(2^n n! \sqrt{\pi})$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sqrt{\frac{\omega}{2T}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} e^{-2\omega n t / \gamma} e^{-X^2} H_n(X) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2T}} e^{-X^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2 - e^{-2\omega t / \gamma} (X+iy)^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\omega}{2T}} e^{-X^2(1+e^{-2\omega t / \gamma})} \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp \left[-(1-e^{-2\omega t / \gamma}) \left(y + iX \frac{e^{-2\omega t / \gamma}}{1-e^{-2\omega t / \gamma}} \right)^2 - X^2 \frac{e^{-4\omega t / \gamma}}{1-e^{-2\omega t / \gamma}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{\omega}{2\pi T}} \sqrt{\frac{1}{1-e^{-2\omega t / \gamma}}} \exp \left[-\frac{X^2}{1-e^{-2\omega t / \gamma}} \right] = \sqrt{\frac{\omega e^{\omega t / \gamma}}{2\pi D \gamma \sinh(\omega t / \gamma)}} \exp \left(-\frac{x^2}{2D \gamma \sinh(\omega t / \gamma)} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Здесь мы воспользовались разложением экспоненты в ряд Тейлора: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / n!$. Полученный ответ в точности совпадает с ответом (2.24).

3.3 Вероятность отклонений от оптимальной траектории

3.3.1 Пример параболического потенциала

Зададим теперь важный вопрос: как устроена функция распределения для отклонений от оптимальной траектории? Рассмотрим сначала случай гармонического потенциала. Будем следить за статистикой случайной величины

$$q = \frac{1}{t} \int_0^t dt' x(t'). \quad (3.21)$$

Естественно ожидать, что её среднее значение определяется оптимальной траекторией (2.22):

$$\langle q \rangle = \frac{\gamma x}{\omega t} \tanh \frac{\omega t}{2\gamma}. \quad (3.22)$$

Заметим, что в пределе $t \rightarrow \infty$ мы получаем $\langle q \rangle \rightarrow 0$, тогда как в пределе $t \rightarrow 0$ получается $\langle q \rangle = x/2$. Последнее связано с линейным ростом координаты в начальный момент на оптимальной траектории, см. ур. (2.22).

Для того чтобы посчитать функцию распределения q , используем представление функционального интеграла:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(q) &= \left\langle \delta \left(q - \int_0^t \frac{dt'}{t} x(t') \right) \right\rangle = \int \mathcal{D}[x, p] \delta \left(q - \int_0^t \frac{dt'}{t} x(t') \right) \exp \left(- \int_0^t dt' p [\dot{x} + \omega x / \gamma - Dp/2] \right) = \\ &= t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{iqt\lambda} \int \mathcal{D}[x, p] \exp \left(- \int_0^t dt' [p[\dot{x} + \omega x / \gamma - Dp/2] + i\lambda x] \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Вычисление этого функционального интеграла сводится к решению уравнений для оптимальной траектории,

$$\dot{x} = Dp - \frac{\omega x}{\gamma}, \quad \dot{p} = \frac{\omega p}{\gamma} + i\lambda, \quad (3.24)$$

с такими же, как и раньше, граничными условиями $x(0)=0$ и $x(t)=x$. Производя решение этих уравнений и вычисляя интеграл в экспоненте, находим

$$\mathcal{P}_t(q) \sim t \exp \left[- \frac{\omega x^2}{2D\gamma} \frac{e^{\omega t/\gamma}}{\sinh(\omega t/\gamma)} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{i\lambda[qt - x(\gamma/\omega) \tanh(\omega t/(2\gamma))]} \exp \left[- \frac{t\gamma^2 D}{2\omega^2} \lambda^2 \left(1 - \frac{\gamma}{\omega t} (1 - e^{-\omega t/\gamma}) \right) \right]. \quad (3.25)$$

Опуская независящий от q экспоненциальный множитель перед интегралом и интегрируя по λ , получаем нормальное распределение

$$\mathcal{P}_t(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(q-\langle q \rangle)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma = \frac{\gamma^2 D}{t\omega^2} \left(1 - \frac{1 - e^{-\omega t/\gamma}}{\omega t/\gamma} \right). \quad (3.26)$$

Отметим, что на больших временах $t \rightarrow \infty$ дисперсия уменьшается обратно пропорционально времени: $\sigma = \gamma^2 D / (t\omega^2)$, т. е. случайная величина q всё лучше и лучше приближается к своему среднему. На малых временах, при $t \rightarrow 0$, дисперсия не зависит от времени: $\sigma = T/\omega$.

3.3.2 Функция больших отклонений

Попробуем теперь сформулировать общий подход для нахождения функции распределения случайной величины

$$q = \frac{1}{t} \int_0^t dt' Y(x(t')) \quad (3.27)$$

в пределе $t \rightarrow \infty$. Как мы видели в примере выше, соответствующую функцию распределения можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t(q) &= \left\langle \delta \left(q - \int_0^t \frac{dt'}{t} Y(x(t')) \right) \right\rangle = t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{iq t \lambda} \int \mathcal{D}[x, p] \exp \left(- \int_0^t dt' [p \dot{x} - H(p, x) + i \lambda Y(x)] \right) = \\ &= t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{iq t \lambda} \int \mathcal{D}[x] \exp \left(- \frac{1}{2D} \int_0^t dt' [(\dot{x} - F(x)/\gamma)^2 + i \lambda Y(x)] \right) t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{iq t \lambda} P_\lambda(x, t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

где мы проинтегрировали по p , см. ур. (2.14). Функция $P_\lambda(x, t)$ удовлетворяет модифицированному уравнению Фоккера-Планка

$$\partial_t P_\lambda(x, t) = \frac{D}{2} \partial_x^2 P_\lambda(x, t) + \frac{1}{\gamma} \partial_x (P_\lambda(x, t) \partial_x V(x)) - i \lambda Y(x) P_\lambda(x, t). \quad (3.29)$$

Делая опять замену $P_\lambda(x, t) = e^{-V(x)/(2T)} \Psi(x, t)$, получим уравнение вида (3.2), но с модифицированным потенциалом:

$$\partial_t \Psi(x, t) = - \frac{T}{\gamma} \left[-\partial_x^2 + W_\lambda(x) \right] \Psi(x, t), \quad W_\lambda(x) = \left(\frac{V'}{2T} \right)^2 - \frac{V''}{2T} + i \frac{\gamma \lambda}{T} Y(x). \quad (3.30)$$

Раз теперь при ненулевом λ условие суперсимметричной квантовой механики нарушилось, значит имеется минимальное ненулевое собственное значение $\varepsilon_0(\lambda)$. Заметим, что для параболического потенциала и $Y(x)=x$ легко показать, что $\varepsilon_0(\lambda) = \gamma^2 \lambda^2 / \omega^2$. Заметим, что поправка к потенциалу комплексна, и можно ожидать, что $\varepsilon_0(\lambda)$ будет тоже комплексной величиной.

Мы можем опять для поиска решения $\Psi(x, t)$ применить разложение в ряд по собственным функциям, см. ур. (3.11), однако при $t \rightarrow 0$ всё будет определяться первым членом с $n=0$, так что $P_\lambda(x, t) \sim \exp[-t \varepsilon_0(\lambda)]$. Подставляя это выражение в ур. (3.28), находим

$$\mathcal{P}_t(q) \sim t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi} e^{-t[T \varepsilon_0(\lambda)/\gamma - i \lambda q]}. \quad (3.31)$$

Применим метод перевала (см. Приложение С) для вычисления этого интеграла при больших t . Поведение этого интеграла на больших t определяется точкой минимума функции $T \varepsilon_0(\lambda)/\gamma - i \lambda q$. Обозначим эту комплексную точку как λ_q :

$$iq = \frac{T}{\gamma} \varepsilon'_0(\lambda_q), \quad \Lambda(q) = T \varepsilon_0(\lambda_q)/\gamma - i \lambda_q q \equiv \min_\lambda [T \varepsilon_0(\lambda)/\gamma - i \lambda q]. \quad (3.32)$$

Заметим, что переход от функции $\varepsilon_0(\lambda)$ к функции $\Lambda(q)$ называется преобразованием Лежандра. Теперь, раскладываясь вблизи точки λ_q , запишем $\lambda = \lambda_q + \delta \lambda$ и

$$\mathcal{P}_t(q) \sim t e^{-t \Lambda(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\delta \lambda}{2\pi} e^{-(Tt/\gamma) \varepsilon''_0(\lambda_q) (\delta \lambda)^2 / 2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T \varepsilon''_0(\lambda_q) / (\gamma t)}} e^{-t \Lambda(q)}. \quad (3.33)$$

Отметим, что подразумевается выполнение условия $\varepsilon''_0(\lambda_q) > 0$.

3.4 Задачи по лекции:

- (3.1) Найти результат действия операторов B^+ и B на собственные функции $\Phi_n(X)$ для случая параболического потенциала. Ответ выразить через полиномы Эрмита. (3 балла)
- (3.2) Доказать, что $c_{2n}=(-1)^n/[2^n n! \sqrt{\pi}]$. (4 балла)
- (3.3) Получить выражение (3.25). (4 балла)
- (3.4) Найти собственные значения оператора в правой части уравнения Фоккера-Планка (3.29) для $Y(x)=x$. (4 балла)

Приложение А

Преобразование Фурье и характеристическая функция случайной величины

Преобразование Фурье

Если есть функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то для неё можно определить разложение в интеграл Фурье (так называемое обратное преобразование Фурье):

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{-ipx} \frac{dp}{2\pi}. \quad (\text{A.1})$$

При этом функцию $F(p)$ можно получить, используя прямое преобразование Фурье:

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ipx} dx. \quad (\text{A.2})$$

Согласованность прямого и обратного преобразований обеспечивается представлением Фурье для дельта-функции (см. Приложение В, ур. (В.7)). Прямая подстановка (А.2) в (А.1) даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(p) e^{-ipx} \frac{dp}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) e^{ipy-ipx} = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \delta(y-x) = f(x). \quad (\text{A.3})$$

Элементарные свойства:

- Если $f(x)$ действительна, то $F(-p) = F^*(p)$.
- Если $F(p)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$, то преобразованием Фурье для её производной $f'(x)$ будет $-ipF(p)$.
- Преобразование Фурье для δ -функции — это 1.

Замечание

В разных источниках преобразование Фурье вводится по-разному. Например, в прямом преобразовании Фурье вместо e^{ipx} можно написать e^{-ipx} : в таком случае аналогичную замену нужно сделать и в обратном преобразовании Фурье, тогда соотношения по-прежнему останутся согласованными. Кроме того, в математике часто рассматривается преобразование Фурье, в котором в интегралах вместо dx и $\frac{dp}{2\pi}$ стоит $\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$ и $\frac{dp}{\sqrt{2\pi}}$. Допустим любой выбор констант, лишь бы их произведение было 2π .

Характеристическая функция случайной величины

Пусть случайная величина x имеет функцию распределения $P(x)$. Тогда её характеристической функцией $F(\lambda)$ называется преобразование Фурье $P(x)$:

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x) e^{ix\lambda} dx.$$

Как видно из определения, характеристическая функция является средним от комплексной экспоненты, $F(\lambda) \equiv \langle e^{ix\lambda} \rangle$. Часто в задачах бывает удобнее вычислить именно это среднее, а потом уже получить функцию распределения, сделав обратное преобразование Фурье.

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-ix\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \langle e^{ix\lambda} \rangle e^{-ix\lambda} \frac{d\lambda}{2\pi}.$$

Приложение В

Дельта-функция Дирака

Дельта-функцией Дирака называют функцию $\delta(x)$, обладающую следующими свойствами:

$$\delta(x \neq 0) = 0, \quad \delta(x = 0) = \infty. \quad (\text{В.1})$$

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x) = \begin{cases} f(0), & a < 0 < b \\ 0, & 0 \notin (a, b) \end{cases} \quad (\text{В.2})$$

Здесь $f(x)$ — любая «хорошая» функция.

Если $g(x)$ — монотонная на отрезке интегрирования функция, пересекающая ноль в точке x_0 , то при помощи замены переменной получаем

$$\delta(g(x)) = \frac{1}{|g'(x_0)|} \delta(x - x_0). \quad (\text{В.3})$$

Самый простой способ представлять дельта-функцию — это думать о ней как о функциональном пределе сужающегося «колокола» с постоянной площадью. При этом конкретная форма колокола обычно оказывается неважна. Например, подходят такие представления:

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}, \quad (\text{В.4})$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-x^2/\epsilon^2}, \quad (\text{В.5})$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\epsilon} \theta(\epsilon/2 - |x|), \quad (\text{В.6})$$

где $\theta(x \geq 0) = 1$, $\theta(x < 0) = 0$ (это функция Хевисайда или тета-функция). Кроме того, часто используется представление Фурье:

$$\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega x}. \quad (\text{В.7})$$

Можно использовать и более экзотический вид

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\sin\{x/\epsilon\}}{x}. \quad (\text{В.8})$$

Замечание

Если дельта-функция обращается в бесконечность на границе интервала интегрирования, то её конкретная форма оказывается важна и зависит от задачи. Например, бывает удобно определять $\int_0^\infty dx \delta(x) f(x) = f(0)/2$.

Приложение С

Метод перевала

Рассмотрим важный класс интегралов вида

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(t)} dt, \quad (\text{C.1})$$

где $f(t)$ имеет резкий (условие резкости обсудим чуть позже) максимум при $t=t_0$. Вблизи t_0

$$f(t) \approx f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2, \quad f''(t_0) < 0. \quad (\text{C.2})$$

Подставив это разложение в экспоненту, получаем гауссов интеграл, который элементарно вычисляется:

$$I \approx \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(t_0)|}} e^{f(t_0)}. \quad (\text{C.3})$$

Это главная формула метода перевала.

Посмотрим, чем мы пренебрегли в ряде Тейлора (C.2):

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \frac{f^{(3)}(t_0)}{3!}(t-t_0)^3 + \frac{f^{(4)}(t_0)}{4!}(t-t_0)^4 + \dots$$

Если подставить это в экспоненту и разложить по кубическому члену, в результате интегрирования получим ноль из-за нечётности относительно t_0 . Поэтому наиболее существенное отброшенное нами слагаемое — это четвёртый порядок в ряде Тейлора. Без него наш интеграл (C.3) набрался на $\Delta t \sim 1/\sqrt{|f''(t_0)|}$, где $\Delta t = t - t_0$. Пренебрежение четвёртым порядком в ряде Тейлора было законным, если на таких Δt он мал:

$$f^{(4)}(t_0)\Delta t^4 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{f^{(4)}(t_0)}{(f''(t_0))^2} \ll 1. \quad (\text{C.4})$$

Это и есть условие применимости метода перевала, оно же условие резкости максимума функции $f(t)$.

Литература

- [1] Satya N. Majumdar and Emmanuel Trizac, *When Random Walkers Help Solving Intriguing Integrals*, Phys. Rev. Lett. **123**, 020201 (2019).
- [2] Satya N. Majumda, *Universal First-passage Properties of Discrete-time Random Walks and Levy Flights on a Line: Statistics of the Global Maximum and Records*, <https://arxiv.org/pdf/0912.2586>