Кафедра ФОПФ МФТИ “Проблемы теоретической физики” при ИТФ им. Л.Д. Ландау

Задачи и упражнения по курсу
“Нелинейные проблемы гидродинамики”.

1) В рамках лагранжевого описания решить задачу о гравитационном коллапсе сферически симметричного пылевого облака (в нерелятивистском приближении).

2) Исходя из произвольного лагранжиана $\mathcal{L}\{n, \mathbf{j}, s\}$, получить общий вид вариационного динамического уравнения в эйлеровом описании, не предполагая постоянства удельной энтропии $s(\mathbf{r}, t)$. Перейти к неканоническому гамильтоновскому формализму, вывести скобку Пуассона $\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}$ с учетом градиента s.

3) Лагранжиан ультрарелятивистской изэнтропической жидкости с уравнением состояния $\varepsilon(\tilde{n}) \sim \tilde{n}^{4/3}$ в плоском пространстве-времени имеет вид
$$\mathcal{L}\{n, \mathbf{j}\} = -\int (n^2 - \mathbf{j}^2)^{2/3} d\mathbf{r}.$$
Какой гамильтониан $\mathcal{H}\{n, \mathbf{p}\}$ соответствует этому лагранжиану?

4) Получить представление Клебша, исходя из требования экстремальности действия $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}\{n, \mathbf{j}\} dt$ при двух дополнительных условиях: $n_t + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$, $\mu_t + (\mathbf{j}/n)\cdot\nabla\mu = 0$.

   Указание: Применить метод множителей Лагранжа и варьировать модифицированный функционал действия
$$\mathcal{A}_* = \int dt \left[\mathcal{L}\{n, \mathbf{j}\} + \int \Big\{\phi(n_t + \nabla\cdot\mathbf{j}) - \lambda(\mu_t + (\mathbf{j}/n)\cdot\nabla\mu)\Big\} d\mathbf{r}\right].$$

5) Найти скорость звука в релятивистской жидкости с уравнением состояния $\varepsilon(\tilde{n})$.

   Ответ:
$$c_s^2 = \tilde{n} w'(\tilde{n}) / w(\tilde{n}). \tag{1}$$

6) Найти скорости первого и второго звука в сверхтекучей жидкости, исходя из гамильтониана
$$\mathcal{H}_{s.f} = \int \left[\rho \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + S(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{P}) + E_0(\rho, S, P^2)\right] d\mathbf{r}$$
и полагая течения потенциальными, то есть $\mathbf{v}_s = \nabla\alpha$, $\mathbf{P} = \nabla\beta$. Функцию $E_0(\rho, S, P^2)$ считать заданной.

7) Получить явные выражения для матричных элементов $U_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$ и $V_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$ нелинейного взаимодействия звуковых волн в обычной сжимаемой гидродинамике.

8) В уравнениях одномерной релятивистской гидродинмики

$$\frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial j}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{w(\tilde{n})j}{\sqrt{n^2-j^2}}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w(\tilde{n})n}{\sqrt{n^2-j^2}}\right),$$

где $\tilde{n}=\sqrt{n^2-j^2}$, а $w(\tilde{n})$– известная функция, произвести переход к новым независимым переменным w и $\beta=\mathrm{Arth}\,(j/n)$. Свести задачу к одному линейному уравнению.

Указание: предварительно переписать систему уравнений в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{n}(w)\mathrm{ch}\,\beta)+\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{n}(w)\mathrm{sh}\,\beta)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\,\mathrm{sh}\,\beta)+\frac{\partial}{\partial x}(w\,\mathrm{ch}\,\beta)=0. \tag{3}$$

Решение: Уравнение (3) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}-w\ \mathrm{sh}\beta=0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t}+w\ \mathrm{ch}\beta=0. \tag{4}$$

Для дифференциала φ, используя (4), получаем формулу

$$d\varphi=w\ \mathrm{sh}\beta\ dx-w\ \mathrm{ch}\beta\ dt=$$

$$=d(xw\ \mathrm{sh}\beta-tw\ \mathrm{ch}\beta)+dw(t\ \mathrm{ch}\beta-x\ \mathrm{sh}\beta)+d\beta(tw\ \mathrm{sh}\beta-xw\ \mathrm{ch}\beta).$$

Считая независимыми переменными пару (w,β), введем вспомогательную функцию $\chi(w,\beta)$, с помощью которой осуществляется преобразование Лежандра:

$$\chi=\varphi-x(w,\beta)w\ \mathrm{sh}\beta+t(w,\beta)w\ \mathrm{ch}\beta.$$

При этом частные производные новой функции линейно связаны с x и t:

$$\frac{\partial \chi}{\partial w}=t\ \mathrm{ch}\beta-x\ \mathrm{sh}\beta, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \beta}=tw\ \mathrm{sh}\beta-xw\ \mathrm{ch}\beta.$$

Зная зависимость $\chi(w,\beta)$, можно найти $x(w,\beta)$ и $t(w,\beta)$ по формулам

$$t=\frac{\partial \chi}{\partial w}\ \mathrm{ch}\beta-\frac{1}{w}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\ \mathrm{sh}\beta, \qquad x=\frac{\partial \chi}{\partial w}\ \mathrm{sh}\beta-\frac{1}{w}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\ \mathrm{ch}\beta, \tag{5}$$

которые определяют решение задачи в неявном виде. Чтобы написать уравнение для $\chi(w,\beta)$, следует использовать уравнение непрерывности. Записав частные производные в виде якобианов, получим из (2) после умножения на $\partial(t,x)/\partial(w,\beta)$

$$\mathrm{ch}\beta\ \tilde{n}'(w)\frac{\partial(w,x)}{\partial(w,\beta)}+\mathrm{sh}\beta\ \tilde{n}(w)\frac{\partial(\beta,x)}{\partial(w,\beta)}+\mathrm{sh}\beta\ \tilde{n}'(w)\frac{\partial(t,w)}{\partial(w,\beta)}+\mathrm{ch}\beta\ \tilde{n}(w)\frac{\partial(t,\beta)}{\partial(w,\beta)}=0.$$

После раскрытия якобианов, подстановки (5) и упрощения получаем отсюда уравнение на функцию $\chi(w,\beta)$:

$$\tilde{n}(w)\chi_{ww} + \tilde{n}'(w)\left(\chi_w - \frac{\chi_{\beta\beta}}{w}\right) = 0.$$

Использование формулы (1) для скорости звука позволяет окончательно представить данное уравнение в несколько иной форме:

$$c_s^2(w)w^2\chi_{ww} + w\chi_w - \chi_{\beta\beta} = 0. \tag{6}$$

Интересно отметить, что в ультрарелятивистском пределе уравнение состояния $w \sim \tilde{n}^{1/3}$ дает для скорости звука константу: $c_s^2 = 1/3$. В этом случае после замены $w = e^q$ приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\chi_{qq} + 2\chi_q - 3\chi_{\beta\beta} = 0.$$

9) Как известно, позади идущего с постоянной скоростью корабля на поверхности воды образуется характерная стационарная картина из двух рядов волновых гребней, расположенных симметрично под некоторым углом α к направлению движения. Чему равен угол α в случае "глубокой воды" ?

Ответ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

10) Найти собственные частоты малых колебаний сферической капли радиуса R, несущей на себе электрический заряд e. Жидкость полагать несжимаемой с плотностью ρ, идеальным проводником. Учесть поверхностное натяжение σ.

Решение: Лагранжиан потенциальных колебаний капли имеет вид

$$\mathcal{L} = \int r^2\dot{r}\psi \sin\vartheta d\vartheta d\varphi - (\mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{E})/\rho,$$

где $\mathcal{K}$ — кинетическая энергия капли, $\mathcal{A}$ — поверхностная энергия, $\mathcal{E}$ – энергия электрического поля. С нужной точностью потенциал скорости дается выражением

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l,m}\Psi_{l,m}\left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{l,m}(\vartheta,\varphi),$$

где $\Psi_{l,m}$ – коэффициенты разложения функции $\psi(\vartheta,\varphi)$ по сферическим гармоникам. Поэтому

$$\mathcal{K}/\rho \approx \frac{R^2}{2}\int \psi\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\Big|_{r=R}\right)\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{R}{2}\sum_{l,m} l|\Psi_{l,m}|^2. \tag{7}$$

Канонической переменной, сопряженной к $\psi(\vartheta,\varphi)$, является $Q(\vartheta,\varphi) = r^3/3 = R^3/3 + q(\vartheta,\varphi)$, где малая функция q не содержит нулевой гармоники в силу несжимаемости:

$$q(\vartheta,\varphi) = \sum_{l>0;m} q_{l,m} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi).$$

Для поверхностной энергии

$$\mathcal{A} = \sigma \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\, r \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

в квадратичном приближении получаем

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}_0 \approx \frac{\sigma}{2R^4} \int \left[q_\vartheta^2 + \frac{q_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} - 2q^2\right] \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\sigma}{2R^4} \sum_{l,m} (l(l+1)-2)|q_{l,m}|^2.$$

При вычислении электрической энергии удобно использовать тот факт, что электрическая сила, действующая на единицу поверхности проводника, равна $E^2/8\pi$, и что потенциал электрического поля постоянен вдоль поверхности:

$$\alpha(R+\xi) + \frac{e}{R+\xi} = \mathrm{const}, \quad \xi = r - R, \quad \alpha(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi).$$

В первом по ξ приближении α определяется из уравнения $\alpha(R,\vartheta,\varphi) - e\xi(\vartheta,\varphi)/R^2 = 0$, что дает

$$\alpha = \frac{e}{R^2} \sum_{l,m} \xi_{l,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi),$$

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{e}{R^3} \sum_{l,m} \xi_{l,m} (l+1) Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$$

Нормальная сила $(-\nabla(e/r) - \nabla\alpha)^2/8\pi$, которая действует на единицу поверхности капли, приближенно равна

$$F \approx \frac{e^2}{8\pi} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{(R+\xi)^2} + \frac{\mathbf{e}_r(\hat{l}+1)\xi}{R^3}\right)^2 \approx \frac{e^2}{4\pi R^4} \left(\frac{1}{2} + \frac{(\hat{l}-1)\xi}{R}\right).$$

Как известно, $F = -\delta\mathcal{E}/\delta q$. Отсюда следует, что квадратичная по малой деформации часть электрической энергии есть

$$\mathcal{E}^{(2)} = -\frac{e^2}{8\pi R^7} \int q[(\hat{l}-1)q] \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = -\frac{e^2}{8\pi R^7} \sum_{l,m} (l-1)|q_{l,m}|^2.$$

Таким образом, квадратичная часть гамильтониана имеет вид

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{l,m} \left(Rl|\Psi_{l,m}|^2 + \frac{(l-1)}{\rho}\left[\frac{\sigma}{R^4}(l+2) - \frac{e^2}{4\pi R^7}\right]|q_{l,m}|^2\right)$$

Из соответствующих линейных уравнений движения

$$\dot{q}_{l,m} = \frac{\partial \mathcal{H}^{(2)}}{\partial \Psi_{l,-m}}, \qquad -\dot{\Psi}_{l,m} = \frac{\partial \mathcal{H}^{(2)}}{\partial q_{l,-m}}$$

получаем ответ:

$$\omega_l^2 = \frac{l(l-1)}{\rho}\left[\frac{\sigma}{R^3}(l+2) - \frac{e^2}{4\pi R^6}\right], \qquad l = 2, 3, \dots$$

11) Найти собственные частоты малых колебаний однородной несжимаемой жидкой капли радиуса R и массы M, между элементами которой действует ньютоновское притяжение.

Решение: Потенциальная энергия деформированной капли есть

$$\Pi\{\Sigma\} = \frac{1}{2}\int\int U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

где $U(r) = -G/r$, а плотность $\rho(\mathbf{r})$ равна $\tilde{\rho}$ $(= const)$ или 0 в зависимости от того, находится точка $\mathbf{r}$ внутри или снаружи свободной поверхности Σ. Рассмотрим малые отклонения от равновесной сферической формы. Увеличение потенциальной энергии при деформации дается формулой

$$\delta\Pi = \int \varphi_0(r)\delta\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int\int U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)\delta\rho(\mathbf{r}_1)\delta\rho(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

где $\varphi_0(r)$ — потенциал, создаваемый равновесным распределением жидкости. Поскольку $\int \delta\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta M = 0$ и, кроме того, вблизи сферической поверхности можно написать $\varphi_0(r) = \varphi_0(R) + g(r-R) + \mathcal{O}((r-R)^2)$, то с точностью до квадратичных членов по малым отклонениям $\xi(\mathbf{n}) = r(\mathbf{n}) - R$ получим

$$\Pi^{(2)} = \frac{gR^2\tilde{\rho}}{2}\int \xi^2(\mathbf{n})d\Omega + \frac{R^4\tilde{\rho}^2}{2}\int\int U\Big(R\sqrt{2[1-(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)]}\Big)\xi(\mathbf{n}_1)\xi(\mathbf{n}_2)d\Omega_1 d\Omega_2,$$

где $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ — элемент телесного угла в направлении единичного вектора $\mathbf{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$. Далее заметим, что каноническими переменными в рассматриваемой задаче являются $\psi(\mathbf{n})$ (граничное значение потенциала скорости) и $Q(\mathbf{n}) = \tilde{\rho}r^3(\mathbf{n})/3$, причем гамильтониан равен сумме кинетической и потенциальной энергий. Квадратичная часть кинетической энергии есть [см. (7)]

$$\mathcal{K}^{(2)} = \frac{\tilde{\rho}R}{2}\sum_{l,m} l|\Psi_{l,m}|^2.$$

Квадратичную часть потенциальной энергии перепишем в терминах $q(\mathbf{n}) = Q(\mathbf{n}) - \tilde{\rho}R^3/3$:

$$\Pi^{(2)} = \frac{g}{2\tilde{\rho}R^2}\int q^2(\mathbf{n})d\Omega + \frac{1}{2}\int\int U\Big(R\sqrt{2[1-(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)]}\Big)q(\mathbf{n}_1)q(\mathbf{n}_2)d\Omega_1 d\Omega_2,$$

после чего произведем разложение $q(\mathbf{n})$ по сферическим гармоникам:

$$q(\mathbf{n}) = \sum_{lm} q_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \qquad q_{lm} = \int q(\mathbf{n}) Y^*_{lm}(\mathbf{n}) d\Omega.$$

Заметим, что функция $F(\mu) \equiv U\Big(R\sqrt{2[1-\mu]}\Big)$ раскладывается по полиномам Лежандра $P_l(\mu)$:

$$F(\mu) = \sum_l f_l P_l(\mu), \qquad P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2 - 1)^l,$$

причем

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} F(\mu) P_l(\mu) d\mu.$$

Весьма важно, что имеет место формула разложения для $P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1)$ (см. Приложения в книге Ландау и Лифшица “Квантовая механика”):

$$P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\mathbf{n}_1) Y_{lm}(\mathbf{n}), \tag{8}$$

использование которой дает

$$\frac{1}{2} \int\int F(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) q(\mathbf{n}_1) q(\mathbf{n}_2) d\Omega_1 d\Omega_2 = \frac{1}{2} \sum_{lm} F_l |q_{lm}|^2,$$

где

$$F_l = 2\pi \int_{-1}^{+1} F(\mu) P_l(\mu) d\mu = \frac{2\pi}{2^l l!} \int_{-1}^{+1} U\Big(R\sqrt{2[1-\mu]}\Big) \frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2 - 1)^l d\mu. \tag{9}$$

Вычисление величины g не требует дополнительных усилий, поскольку заранее очевидно, что потенциальная энергия сферической капли остается неизменной при однородном сдвиге в пространстве. Малый сдвиг соответствует сферическим гармоникам с $l = 1$. Отсюда получаем, что

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{lm} (F_l - F_1) |q_{lm}|^2$$

и, соответственно, частоты малых колебаний капли определяются общей формулой

$$\omega_l^2 = \tilde{\rho} R \cdot l (F_l - F_1), \tag{10}$$

верной при произвольном потенциале взаимодействия $U(r)$. В нашем случае

$$F_l = -\frac{2\pi G}{\sqrt{2} R 2^l l!} \int_{-1}^{+1} (1-\mu)^{-1/2} \frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2 - 1)^l d\mu.$$

l-кратное интегрирование по частям и замена $1 - \mu = 2\zeta^2$ позволяют элементарно вычислить интеграл и получить

$$F_l = -\frac{4\pi G}{R(2l+1)}.$$

Таким образом, в случае ньютоновского притяжения несжимаемая капля колеблется с частотами

$$\omega_l^2 = 4\pi G\tilde{\rho} \cdot l \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2l+1}\right) = \frac{2GM}{R^3} \cdot \frac{l(l-1)}{(2l+1)}, \qquad l = 2, 3, \ldots$$

Отметим попутно, что F_l легко вычисляются также в случаях 1) $U(r) = -\kappa/r^\alpha$ и 2) $U(r) = -U_0 \exp(-ar^2/2)$.

12) В идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ, находящейся под внешним давлением P_{ext}, в начальный момент времени создан сферический пустой пузырек объема $\mathcal{V}_0$. Под действием поверхностного натяжения σ и внешнего давления пузырек начал схлопываться. Через какое время пузырек полностью сколлапсирует?

Ответ: В общем случае динамика пузыря с газом внутри определяется неявно соотношением

$$t - t_0 = \pm \int_{\mathcal{V}_0}^{\mathcal{V}} \frac{d\tilde{\mathcal{V}}}{\sqrt{2a\tilde{\mathcal{V}}^{1/3}[E_0 - \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{V}}) - P_{ext}\tilde{\mathcal{V}} - b\tilde{\mathcal{V}}^{2/3}]}},$$

где $a = 3^{1/3}(4\pi)^{2/3}$, $b = 3^{2/3}(4\pi)^{1/3}\sigma/\rho$, E_0 – произвольная константа, а $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ – внутренняя энергия сжатого в пузыре газа (деленная на плотность жидкости). В нашем случае газа в пузыре нет, то есть $\mathcal{E}(\mathcal{V}) = 0$. Поскольку в начальный момент времени $d\mathcal{V}/dt = 0$, то $E_0 = P_{ext}\tilde{\mathcal{V}}_0 + b\tilde{\mathcal{V}}_0^{2/3}$, и поэтому время коллапса

$$T_{collapse} = \int_0^{\mathcal{V}_0} \frac{d\tilde{\mathcal{V}}}{\sqrt{2a\tilde{\mathcal{V}}^{1/3}[P_{ext}\tilde{\mathcal{V}}_0 + b\tilde{\mathcal{V}}_0^{2/3} - P_{ext}\tilde{\mathcal{V}} - b\tilde{\mathcal{V}}^{2/3}]}}.$$

13) Дно океана над эпицентром землетрясения испытывает отклонение $b(x, y, t)$ от средней глубины h. Пользуясь относительной малостью $b \ll h$ и условием $|\nabla b| \ll 1$, в линейном приближении решить задачу о возникновении и начальном распространении волны цунами на поверхности океана. Выразить отклонение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ через спектральные характеристики функции $b(x, y, t)$. Жидкость полагать идеальной и несжимаемой.

Ответ:

$$\eta(\mathbf{r}_\perp, t) = \int \frac{\omega^2 b(\mathbf{k}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp - \omega t)}}{(\omega^2 - gk\,\mathrm{th}kh)\,\mathrm{ch}kh} \frac{d^2\mathbf{k}d\omega}{(2\pi)^3}$$

14) Прямоугольный контейнер (размеры дна a=1 m и b=0.5 m) заполнен водой до некоторого уровня h. Внешняя сила приводит его в возвратно-поступательное вертикальное движение с амплитудой A=0.05 m и частотой ω_0 =5 rad/s ($A\omega_0^2 \ll g$).

При каких значениях h в системе имеет место параметрический резонанс? Воду считать идеальной жидкостью.

15) На дне водоема глубины h имеется подводный гребень с характерной шириной $\alpha^{-1} \gg h$, тянущийся вдоль оси x, так что равновесная глубина $H(y)$ является функцией с достаточно широким и плавным минимумом (например, $H(y) = H_*(y) \equiv h[1+\beta/\mathrm{ch}^2\alpha y]^{-1}$). Такая система обладает свойствами волновода, поскольку вдоль гребня могут распространяться волны с амплитудами, которые экспоненциально спадают при $|y| \to \infty$. Действуя в рамках линеаризованной "теории мелкой воды", то есть взяв уравнения движения $\dot{\psi} = -g\eta$, $\dot{\eta} + \nabla \cdot (H(y)\nabla\psi) = 0$ и рассматривая их решения вида $\eta(x, y, t) = A_n(k, y)\exp(-i\omega_n(k)t+ikx)$ [где $kh \ll 1$], требуется вывести "квазиклассическое" правило квантования поперечного движения волн, дающее законы дисперсии $\omega_n(k)$ для поперечных мод с достаточно большими номерами n, при условии, что $1 \ll n \ll 1/(\alpha h)$.

Ответ:

$$\oint q dy = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad q^2 = \frac{\omega_n^2}{gH(y)} - k^2 + \frac{H'^2(y)}{4H^2(y)} - \frac{H''(y)}{2H(y)}.$$

16) Исследовать в линейном приближении задачу о прохождении поверхностной волны с частотой ω через пролив — область $x^2 - y^2\mathrm{tg}^2\alpha < a^2$ между двумя отвесными берегами. Равновесная глубина воды равна h.

Указание: Перейти к новым координатам $x = A\sin u\ \mathrm{ch}v$, $y = A\cos u\ \mathrm{sh}v$ с параметром $A = a/\sin\alpha$ и решать в области $-\alpha \le u \le +\alpha$, $-\infty < v < +\infty$ уравнение $\psi_{uu} + \psi_{vv} + (kA)^2(\cos^2 u + \mathrm{sh}^2 v)\psi = 0$, где параметр k определяется из соотношения $\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,kh$.

17) Профиль дна заполненного водой (до уровня $y = 0$) канала задается параметрически комплексной формулой $X_b(u) + iY_b(u) = z(w)|_{w=u-i}$, где параметр u пробегает интервал $-\infty < u < +\infty$,

$$z(w) = h_1 w + \frac{(h_2 - h_1)}{\alpha}\ln(1 + e^{\alpha w}),$$

причем $h_1 > h_2 > 0$, $0 < \alpha < \pi$. Слева направо вдоль канала распространяется слабая гравитационная волна с частотой $\omega \ll \sqrt{g/h_1}$. Волна частично отражается от указанной неоднородности дна. Определить коэффициент отражения R (отношение квадратов амплитуд отраженной и падающей волны).

Подсказка: обратить внимание на тот факт, что

$$z'(w) \equiv \frac{dz}{dw} = h_1 + (h_2 - h_1)\frac{1}{1 + e^{-\alpha w}}, \tag{11}$$

и воспользоваться результатом задачи #3 к §25 "Коэффициент прохождения" из книги Ландау и Лифшица "Квантовая механика".

Решение: Аналититческая функция $z(w)$ отображает полосу $-1 < \mathrm{Im\ w} < 0$ на область, занятую покоящейся жидкостью. Поэтому квадратичная часть лагранжиана потенциальных волн имеет вид

$$\mathcal{L}^{(2)} = \int \psi y_t x'(u) du - \frac{1}{2} \int [\psi\, \hat{k} \mathrm{th} \hat{k}\, \psi\, + g y^2 x'(u)] du,$$

где $\psi = \psi(u,t)$, $y = y(u,t)$, $x'(u) = z'(w)|_{w=u}$. Соответствующие линейные уравнения движения

$$y_t = \frac{\hat{k} \mathrm{th} \hat{k}\, \psi}{x'(u)}, \qquad -\psi_t = gy$$

дают в случае монохроматической волны уравнение

$$\left(\frac{\omega^2}{g} x'(u) - \hat{k} \mathrm{th} \hat{k} \right) \psi_\omega(u) = 0.$$

Пределу малых частот соответствуют длинные волны, когда $\hat{k} \mathrm{th} \hat{k} \approx \hat{k}^2 = -(d/du)^2$, так что в этом пределе мы должны решать уравнение

$$\frac{\omega^2}{g} x'(u) \psi_\omega(u) + \psi''_\omega(u) = 0.$$

Подстановка конкретного выражения (11) дает уравнение

$$\psi''_\omega(u) + \frac{\omega^2}{g} \left(h_1 + (h_2 - h_1) \frac{1}{1 + e^{-\alpha u}} \right) \psi_\omega(u) = 0,$$

для которого коэффициент отражения известен:

$$R(\omega) = \left(\frac{\mathrm{sh}[\frac{\pi \omega}{\alpha \sqrt{g}} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})]}{\mathrm{sh}[\frac{\pi \omega}{\alpha \sqrt{g}} (\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})]} \right)^2.$$

18) Решить задачу #17 с другим профилем дна: $z(w) = h(w + (\beta/\alpha) \mathrm{th}\, \alpha w)$. Найти также значения ω, при которых функция $R(\omega)$ имеет минимум.

Ответ: Решая приближенное уравнение

$$\psi''(u) + q^2 \left(1 + \frac{\beta}{\mathrm{ch}^2 \alpha u} \right) \psi(u) = 0,$$

где $q = \omega \sqrt{h/g}$, получим коэффициент отражения

$$R = \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{4q^2\beta}{\alpha^2}} \right)}{\mathrm{sh}^2 \frac{\pi q}{\alpha} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{1 + \frac{4q^2\beta}{\alpha^2}} \right)}.$$

19) * Канал с водой имеет периодический профиль дна (см. условие задачи #17): $dz/dw = h(1 + 2\epsilon \cos \alpha w)$, где параметр ϵ удовлетворяет условиям $\epsilon \leq 1/(2 \operatorname{ch} \alpha)$, $\epsilon \ll 1$. Волны с какими частотами не могут распространяться вдоль канала без изменения амплитуды при сдвиге $u \to u + 2\pi/\alpha$? (Иными словами, требуется определить шели в спектре волн).

Решение: Уравнение, определяющее собственные функции $\psi_\lambda(u)$ (где $\lambda = \omega^2 h/g$), в данном случае имеет вид

$$\lambda(1 + 2\epsilon \cos \alpha u)\psi(u) - \hat{k}\mathrm{th}\hat{k}\psi(u) = 0.$$

Перепишем это уравнение в Фурье-представлении по переменной u:

$$(\lambda - k\mathrm{th}k)\psi(k) + \lambda\epsilon[\psi(k - \alpha) + \psi(k + \alpha)] = 0.$$

Для удобства дальнейших вычислений введем обозначения

$$F_\nu = \alpha\nu \,\mathrm{th}(\alpha\nu), \qquad \Psi_\nu = \psi(\alpha\nu).$$

Теперь мы имеем бесконечную цепочку линейных уравнений

$$(\lambda - F_\nu)\Psi_\nu + \lambda\epsilon[\Psi_{\nu-1} + \Psi_{\nu+1}] = 0, \tag{12}$$

в которой оказываются "зацепленными" Ψ_{ν_1} и Ψ_{ν_2} с ν_1 и ν_2, отличающимися на целое число. Условие обращения в нуль соответствующего бесконечного определителя даст упорядоченный набор собственных значений $\lambda_m(\nu)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Необходимо отметить, что эти функции периодические: $\lambda_m(\nu + 1) = \lambda_m(\nu)$, поскольку бесконечная матрица системы (12) по существу переходит сама в себя при замене $\nu \to \nu + 1$. Кроме того, благодаря четности рассматриваемой системы $\lambda_m(-\nu) = \lambda_m(\nu)$. Далее следует отметить, что (четная) функция F_ν монотонно возрастает при $\nu > 0$. Все эти свойства при достаточно малых ϵ приводят к тому, что для четных номеров $m = 2n$ справедлива формула $\lambda_{2n}(\nu) \approx F_{n+\{|\nu|\}}$ (где фигурные скобки $\{\ldots\}$ означают взятие дробной части), тогда как в случае нечетных номеров $m = 2n + 1$ имеет место приближенное равенство $\lambda_{2n+1}(\nu) \approx F_{n+1-\{|\nu|\}}$. При этом щели в спектре $\delta_m = \min_\nu[\lambda_m(\nu)] - \max_\nu[\lambda_{m-1}(\nu)]$ совпадают с минимумами $\min_\nu[\lambda_m(\nu) - \lambda_{m-1}(\nu)]$, которые достигаются либо при целых, либо при полуцелых значениях ν, где влияние периодического возмущения наиболее существенно (Брэгговские резонансы). Первая, третья, пятая, и т. д. щели соответствуют полуцелым значениям ν, а вторая, четвертая, и т. д. – целым ν. Существенно, что как при целых, так и при полуцелых ν решения системы (12) обладают определенной четностью в том смысле, что $\Psi_{-\nu} = \pm\Psi_\nu$. Это позволяет при нахождении границ щелей рассматривать только Ψ_ν с неотрицательными ν. Рассмотрим сначала полуцелые ν. В этом случае мы должны решать полубесконечную цепочку

$$(\lambda - F_{1/2})\Psi_{1/2} + \lambda\epsilon(\pm\Psi_{1/2} + \Psi_{3/2}) = 0,$$

$$(\lambda - F_{3/2})\Psi_{3/2} + \lambda\epsilon(\Psi_{1/2} + \Psi_{5/2}) = 0,$$

$$(\lambda - F_{5/2})\Psi_{5/2} + \lambda\epsilon(\Psi_{3/2} + \Psi_{7/2}) = 0,$$

$$\ldots$$

Очевидно, что λ, при которых имеются нетривиальные решения, различны в четном и нечетном случаях, чем и определяются щели в спектре. Для приближенного нахождения первой и третьей щелей оборвем эту систему, положив в ней $\Psi_{7/2} = 0$, $\Psi_{9/2} = 0$, ... Теперь нам нужно обратить в нуль детерминант 3×3

$$[\{\lambda(1 \pm \epsilon) - F_{1/2}\}(\lambda - F_{3/2}) - \lambda^2\epsilon^2](\lambda - F_{5/2}) - \lambda^2\epsilon^2[\lambda(1 \pm \epsilon) - F_{1/2}] = 0.$$

Положим сначала $\lambda = F_{1/2} + \Delta_1$, где Δ_1 — малая величина (порядка ϵ, как нетрудно видеть). Выпишем в главном (первом) порядке уравнение на Δ_1:

$$\Delta_1 \pm \epsilon F_{1/2} = 0,$$

что дает нам первую щель: $F_{1/2}(1 - \epsilon) < \lambda < F_{1/2}(1 + \epsilon)$.

Далее положим $\lambda = F_{3/2} + \Delta_3$, где Δ_3 – порядка ϵ^2. Уравнение на Δ_3 с точностью до третьего порядка есть

$$[(F_{3/2}(1 \pm \epsilon) - F_{1/2})\Delta_3 - \epsilon^2 F_{3/2}^2](F_{3/2} - F_{5/2}) - \epsilon^2 F_{3/2}^2(F_{3/2}(1 \pm \epsilon) - F_{1/2}) = 0.$$

Отсюда находим

$$\Delta_3 = \epsilon^2 F_{3/2}^2 \left[\frac{1}{(F_{3/2} - F_{5/2})} + \frac{1}{(F_{3/2}(1 \pm \epsilon) - F_{1/2})}\right],$$

причем мы вправе удержать в этом решении только члены второго и третьего порядков. Это дает нам границы третьей щели $\lambda_-^{(3)} < \lambda < \lambda_+^{(3)}$:

$$\lambda_\pm^{(3)} = F_{3/2} + \epsilon^2 F_{3/2}^2 \left[\frac{1}{(F_{3/2} - F_{5/2})} + \frac{1}{(F_{3/2} - F_{1/2})}\right] \pm \frac{\epsilon^3 F_{3/2}^3}{(F_{3/2} - F_{1/2})^2}.$$

Аналогично рассматриваются щели с четными номерами, определяемые системой

$$(\lambda - F_0)\Psi_0 + \lambda\epsilon(\pm\Psi_1 + \Psi_1) = 0,$$

$$(\lambda - F_1)\Psi_1 + \lambda\epsilon(\Psi_0 + \Psi_2) = 0,$$

$$(\lambda - F_2)\Psi_2 + \lambda\epsilon(\Psi_1 + \Psi_3) = 0,$$

$$\ldots$$

Например, границы второй щели во втором порядке по ϵ даются формулами

$$\lambda_-^{(2)} = F_1 - \frac{\epsilon^2 F_1^2}{F_2 - F_1}, \qquad \lambda_+^{(2)} = F_1(1 + 2\epsilon^2) - \frac{\epsilon^2 F_1^2}{F_2 - F_1}.$$

20) Гамильтониан модели Буссинеска, описывающей слабонелинейные волны с дисперсией на мелкой воде, имеет вид

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2}\int\left[g\eta^2 + h(\nabla\psi)^2 - \frac{h^3}{3}(\Delta\psi)^2 + \eta(\nabla\psi)^2\right]d\mathbf{r}_\perp,$$

где η и ψ – канонические переменные, h – постоянный параметр (равновесная глубина слоя жидкости). Из соответствующих этому гамильтониану уравнений движения вывести уравнение Кортевега-де-Вриза для плоской бегущей волны.

Ответ: Обозначив $c = \sqrt{gh}$, $u = \psi_x$, получим в результате

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = -\frac{3}{2}uu_x - \frac{ch^2}{6}u_{xxx}.$$

Уединенная волна (солитон) имеет вид

$$u = \frac{\epsilon c}{\mathrm{ch}^2[(2h)^{-1}\sqrt{6\epsilon}\{x - c(1+\epsilon)t\}]}.$$

21) * Двумерное (в плоскости xy) течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью имеет постоянную завихренность $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = -\Omega\mathbf{e}_z$, так что в стационарном состоянии жидкость заполняет полосу $-h < y < 0$, а невозмущенное поле скорости есть $\mathbf{V}_0 = \Omega y\mathbf{e}_x$. Показать, что задача о нестационарном плоском движении такой однородно завихренной жидкости сводится к одномерной, если ввести в рассмотрение отклонение границы $\eta(x,t)$ и подходящим образом определенный потенциал $\psi(x,t)$. Определить общую структуру лагранжиана этой системы. Найти дисперсионную зависимость $\omega(k)$ волн малой амплитуды с учетом силы тяжести $-g\mathbf{e}_y$ и поверхностного натяжения. Вычислить гамильтониан с точностью до членов третьего порядка по η и ψ. Вывести уравнение Кортевега-де-Вриза для слабонелинейной бегущей волны.

Ответ: Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L}_\Omega = \int\psi\eta_t dx + \frac{\Omega}{2}\int\eta_t\hat{\partial}_x^{-1}\eta dx - \mathcal{H}_\Omega\{\eta,\psi\},$$

где $\mathcal{H}_\Omega\{\eta,\psi\}$ — полная энергия системы (деленная на плотность жидкости ρ). Квадратичная часть гамильтониана дается выражением

$$\mathcal{H}_\Omega^{(2)}\{\eta,\psi\} = \frac{1}{2}\int\left[\psi\,\hat{k}\mathrm{th}\hat{k}h\,\psi + g\eta^2 + \tilde{\sigma}\eta_x^2\right]dx,$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\rho$. Соответствующие линейные уравнения движения в Фурье-представлении имеют вид

$$\dot{\eta}_k = k\mathrm{th}kh\,\psi_k, \qquad -\dot{\psi}_k - \Omega\frac{\dot{\eta}_k}{ik} = (g + \tilde{\sigma}k^2)\eta_k,$$

так что дисперсионное соотношение выглядит следуюшим образом:

$$\omega_k(\omega_k + \Omega\,\mathrm{th}kh) = (g + \tilde{\sigma}k^2)k\mathrm{th}kh.$$

Отсюда получаем, что

$$\omega_k = -\frac{\Omega}{2}\,\mathrm{th}kh + \sqrt{(g + \tilde{\sigma}k^2)k\mathrm{th}kh + \frac{\Omega^2\mathrm{th}^2 kh}{4}}$$

22) Точечный вихрь с циркуляцией Γ движется в плоскости вдоль тонкой прямолинейной стенки, на расстоянии b от нее. В стенке имеется отверстие шириной $2a$. Найти фазовые траектории вихря в такой системе. При каком соотношении между b и a вихрь пройдет в отверстие? Как изменится ответ, если имеется дополнительное потенциальное течение с потоком Q через отверстие ?

Решение: Область течения получается конформным отображением $z = a\sin w$ полосы $-\pi/2 < u < \pi/2$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$. Функция тока, создаваемая вихрем, в w-представлении имеет вид

$$\psi(u,v) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(w + \bar{W} - \pi)}{\sin\frac{1}{2}(w - W)}\right|,$$

где $W = U + iV$ – координата вихря в w-плоскости. Эта гармоническая функция имеет логарифмическую особенность при $w = W$ и обращается в нуль на границе области – при $u = \pm\pi/2$. Функция тока, связанная с потоком Q, есть просто $(Q/\pi)u$. Гамильтониан системы дается формулой

$$H(U,V) = \frac{\Gamma}{2}\psi(U + d_w, V) + \frac{\Gamma Q}{\pi}U + \mathrm{const},$$

где переменный в w-представлении (малый) размер вихря d_w связан соотношением $d = |z'(W)|d_w$ с неизменным в z-представлении размером d вихря, выступающим в роли параметра регуляризации. Таким образом, гамильтониан вихря есть

$$\begin{aligned} H(U,V) &= \frac{\Gamma Q}{\pi}U + \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln(\cos U \cdot |\cos(U + iV)|) + \mathrm{const} = \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln\left(\cos U\sqrt{\cos^2 U + \mathrm{sh}^2 V}\cdot\exp(4QU/\Gamma)\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Фазовые траектории вихря определяются линиями уровня гамильтониана. В системе имеется одна седловая точка $U = U_*$, $V = 0$, где $\mathrm{tg}\,U_* = 2Q/\Gamma$, так что уравнение соответствующих сепаратрис есть

$$\cos U\sqrt{\cos^2 U + \mathrm{sh}^2 V}\cdot\exp(4QU/\Gamma) = \left(1 + (2Q/\Gamma)^2\right)^{-1}\exp(\frac{4Q}{\Gamma}\mathrm{arctg}\frac{2Q}{\Gamma}).$$

Критические значения b_* определяются значениями y на сепаратрисах при $U \to \mp\pi/2$. Поскольку при этом $\cos U \to 0$, $\cos U\,\mathrm{sh}V = y/a$, то

$$(b_*/a)\exp(\mp 2\pi Q/\Gamma) = \Big(1 + (2Q/\Gamma)^2\Big)^{-1} \exp(\frac{4Q}{\Gamma}\mathrm{arctg}\frac{2Q}{\Gamma}).$$

Таким образом,

$$b_* = a\Big(1 + (2Q/\Gamma)^2\Big)^{-1} \exp(\pm\frac{2\pi Q}{\Gamma} + \frac{4Q}{\Gamma}\mathrm{arctg}\frac{2Q}{\Gamma}),$$

причем знак плюс в последней формуле относится к случаю, когда вихрь приближается к отверстию по течению, а минус – против течения. При $b < b_*$ вихрь пройдет в отверстие.

23) В условиях предыдущей задачи $Q = 0$, но имеется однородный "внешний" поток со скоростью C в горизонтальном направлении. Найти фазовые траектории точечного вихря с циркуляцией Γ в такой системе. Показать, что при достаточно больших значениях Γ возможно периодическое (финитное) движение вихря.

Решение: Траектории вихря определяются линиями уровня гамильтониана

$$H = \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln\left[\cos U\sqrt{\cos^2 U + \mathrm{sh}^2 V}\exp\left(\frac{4\pi a C}{\Gamma}\cos U \mathrm{sh} V\right)\right].$$

При $\beta = \Gamma/(8\pi a C) > 1$ в системе имеется устойчивая особая точка $U = 0$, $\mathrm{sh}V = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$, в окрестности которой фазовые траектории замкнуты.

24) Область двумерного течения идеальной жидкости представляет собой верхнюю полуплоскость, на которой имеются два разреза, тянущиеся вдоль единичной окружности $z = \exp i\varphi$, где $0 \le \varphi \le \alpha$ и $\pi - \alpha \le \varphi \le \pi$, $\alpha < \pi/2$. При каких значениях α единичный точечный вихрь может оказаться захваченным в области $|z| < 1$?
Решение: Аналитическая функция

$$w(z) = z + \frac{1}{z} + \sqrt{\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 4\cos^2\alpha}$$

конформно отображает область течения на верхнюю полуплоскость. Фазовые траектории вихря совпадают с линиями уровня гамильтониана

$$H(x, y) = \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln\left[\frac{\mathrm{Im}\, w(x + iy)}{|w'(x + iy)|}\right] = \frac{\Gamma^2}{8\pi}\ln F(x, y).$$

Рассмотрим гамильтониан на линии симметрии системы – при $x = 0$. Обозначив $\xi = y^2$, получим

$$F(0, \sqrt{\xi}) = f(\xi) = \xi - \frac{4\xi^2\sin^2\alpha}{(1 + \xi)^2}.$$

Нетрудно показать, что при $\sin^2\alpha 27/32$ у нее имеется максимум и минимум. Максимум соответствует устойчивой особой точке, вблизи которой траектории вихря замкнуты.

25) Неодносвязная область двумерного течения идеальной жидкости представляет собой верхнюю полуплоскость, из которой удалили “остров” — круг радиуса R с центром в точке $(0, A)$, где $A > R$. Вокруг “острова” имеется потенциальное течение с циркуляцией Γ_0. Найти фазовые траектории точечного вихря с циркуляцией Γ в такой системе.

Решение: Используем конформное отображение $z = \alpha \operatorname{tg} w$, где $w = u+iv$, $\alpha = \sqrt{A^2 - R^2}$, $-\pi/2 < u < \pi/2$, $0 < v < v_*$, $\mathrm{ch} 2v_* = A/R$. Функция тока, создаваемая вихрем, в w-представлении имеет вид

$$\psi(u,v) = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \left| \frac{\mathrm{sh} \frac{\pi}{2v_*}(w - \bar{W} - \pi m)}{\mathrm{sh} \frac{\pi}{2v_*}(w - W - \pi m)} \right|, \tag{14}$$

где $W = U + iV$ – координата вихря в w-плоскости. Эта гармоническая функция удовлетворяет всем необходимым требованиям: она имеет в области течения логарифмическую особенность при $w = W$, обращается в нуль при $v = 0$ и при $v = v_*$. Кроме того, она π-периодична по координате u. Функция тока, связанная с течением Γ_0, есть просто $(\Gamma_0/\pi)v$. Гамильтониан системы дается формулой

$$H(U,V) = \frac{\Gamma}{2} \psi(U, V + |z'(U+iV)|^{-1} d) + \frac{\Gamma\Gamma_0}{\pi} V + \mathrm{const},$$

где $d \ll \alpha$ – малый постоянный параметр регуляризации – размер вихря. Подстановка выражения (14) дает

$$\begin{aligned} H(U,V) &= \frac{\Gamma\Gamma_0}{\pi} V + \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left\{ F\left(\sin\left[\frac{\pi}{v_*} V \right] \right) \cdot \frac{|z'(U+iV)|}{\alpha} \right\} + const = \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left(\frac{F(\sin[\pi V/v_*]) \exp(4\Gamma_0 V/\Gamma)}{\mathrm{sh}^2 V + \cos^2 U} \right), \end{aligned} \tag{15}$$

где функция $F(\sin[\pi V/v_*])$ представляет собой бесконечное произведение

$$F(\sin[\pi V/v_*]) = \sin[\pi V/v_*] \prod_{m=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\sin^2[\pi V/v_*]}{\mathrm{sh}^2(\pi^2 m/2v_*)} \right).$$

В случае, когда $v_* \ll \pi^2/2$, это произведение сходится очень быстро, и при его вычислении достаточно ограничиться несколькими первыми m.

Фазовые траектории вихря совпадают с линиями уровня гамильтониана.

26) Свести задачу о движении двух точечных вихрей (с завихренностями Γ_1 и Γ_2) внутри круга к гамильтоновой системе с одной степенью свободы.

Решение: Функция тока системы N точечных вихрей внутри круга $x^2 + y^2 < 1$ определяется формулой

$$\psi(x,y) = \psi(z) = \sum_n \frac{\Gamma_n}{2\pi} \ln \left| \frac{1 - z\bar{Z}_n}{z - Z_n} \right|,$$

где $z = x+iy$, и $Z_n = X_n+iY_n$ – комплексные координаты вихрей. Эта функция гармоническая, имеет логарифмические особенности в точках нахождения вихрей и обращается в нуль на границе области течения – при $|z| = 1$. Гамильтониан этой системы есть

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\sum_m \Gamma_m \psi(Z_m + d_m) \ + C(d_1, \dots, d_N) = \\ &= \sum_n \frac{\Gamma_n^2}{4\pi} \ln(1 - |Z_n|^2) + \sum_{n\neq m} \frac{\Gamma_m\Gamma_n}{4\pi} \ln\left|\frac{1 - Z_m\bar{Z}_n}{Z_m - Z_n}\right|, \end{aligned} \tag{16}$$

где малые параметры $d_1, \dots, d_N$ – размеры вихрей – необходимы для регуляризации гамильтониана. В лагранжиане

$$L = \sum_n \frac{i\Gamma_n}{2} \dot{Z}_n \bar{Z}_n - H$$

можно заменить переменные: $Z_n = \sqrt{\rho_n}\exp(i\phi_n)$. В результате этой замены получим

$$\begin{aligned} L &= \sum_n \left[-\frac{\Gamma_n}{2}\rho_n\dot{\phi}_n - \frac{\Gamma_n^2}{4\pi}\ln(1 - \rho_n)\right] - \\ &- \sum_{n>m} \frac{\Gamma_m\Gamma_n}{4\pi} \ln\left(\frac{1 + \rho_m\rho_n - 2\sqrt{\rho_m\rho_n}\cos(\phi_n - \phi_m)}{\rho_m + \rho_n - 2\sqrt{\rho_m\rho_n}\cos(\phi_n - \phi_m)}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Если имеется всего лишь два вихря, то удобно перейти к каноническим переменным Φ, M и ϕ, μ по формулам

$$\phi_1 = \Phi + \frac{\phi}{2}, \qquad \phi_2 = \Phi - \frac{\phi}{2},$$

$$M = -\frac{\Gamma_1\rho_1 + \Gamma_2\rho_2}{2}, \qquad \mu = \frac{\Gamma_2\rho_2 - \Gamma_1\rho_1}{4}.$$

Поскольку обобщенная координата Φ является циклической, то соответствующий ей импульс $M =$const. Подставляя $\rho_1 = -(2\mu + M)/\Gamma_1$ и $\rho_2 = (2\mu - M)/\Gamma_2$ в гамильтониан исходной задачи, получим в результате гамильтониан для ϕ и μ, где M играет роль параметра:

$$\begin{aligned} H(\phi, \mu) = \frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\ln\left[1 + \frac{(M + 2\mu)}{\Gamma_1}\right] + \frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\ln\left[1 + \frac{(M - 2\mu)}{\Gamma_2}\right] + \\ + \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(\frac{1 + (M^2 - 4\mu^2)/\Gamma_1\Gamma_2 - 2\sqrt{(M^2 - 4\mu^2)/\Gamma_1\Gamma_2}\cos\phi}{2\mu(\Gamma_2^{-1} - \Gamma_1^{-1}) - M(\Gamma_2^{-1} + \Gamma_1^{-1}) - 2\sqrt{(M^2 - 4\mu^2)/\Gamma_1\Gamma_2}\cos\phi}\right). \end{aligned}$$

27) Найти канонические переменные и выписать гамильтониан для системы тонких соосных вихревых колец в трехмерном пространстве.

28) Модель Лапласовского роста конечной двумерной области D с гладкой границей ∂D задается уравнением $V_{\partial D} = |\nabla f||_{\partial D}$, где $V_{\partial D}$ – скорость продвижения границы в направлении внешней нормали, $f(x, y)$ – гармоническая вне области D функция

$(f_{xx}+f_{yy}=0)$ с условиями $f|_{\partial D}=0$, $f|_\infty \approx \ln\sqrt{x^2+y^2}$. Форму растущей области можно описывать аналитической при $|w|\geq 1$ функцией $z(w,t)$, которая конформно отображает внешность единичной окружности на внешность области D, так что $(x+iy)|_{\partial D} = z(e^{i\xi},t)$. Уравнение движения при этом выглядит следующим образом:

$$\operatorname{Im}(z_t \bar{z}_\xi) = -1. \tag{18}$$

Данная система допускает частные решения вида

$$z(w,t) = R(t)w + A(t) + \sum_{n=1}^{N} q_n \ln[w - B_n(t)], \tag{19}$$

где N – произвольное целое число, большее единицы, q_n – комплексные константы с равной нулю суммой ($\sum q_n = 0$), $R(t)$ – действительная функция, $A(t)$ и $B_n(t)$ – комплексные функции (очевидно,что все $|B_n(t)|<1$). Требуется вывести и проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих динамику величин $R(t)$, $A(t)$ и $B_n(t)$.

Решение: Подставляем выражение (19) в уравнение (18):

$$\operatorname{Im}\left[\left(\dot{R}w + \dot{A} - \sum_m \frac{q_m \dot{B}_m}{w - B_m}\right)\left(-i\frac{R}{w} - i\sum_n \frac{\bar{q}_n}{1 - w\bar{B}_n}\right)\right] = -1.$$

После раскрытия скобок и разложения на простые дроби получим с учетом $\sum q_n = 0$ уравнение следующего вида:

$$\dot{\bar{a}}Rw + \dot{a}Rw^{-1} + \sum_n \frac{q_n \dot{b}_n B_n}{w - B_n} + \sum_n \frac{\bar{q}_n \dot{\bar{b}}_n \bar{B}_n w}{1 - w\bar{B}_n} + \dot{d} = 2,$$

где

$$\dot{a} = \dot{A} + \sum_n q_n \frac{\dot{B}_n}{B_n},$$

$$\dot{b}_n = \frac{\dot{R}}{B_n} - R\frac{\dot{B}_n}{B_n^2} + \dot{\bar{A}} - \sum_m \bar{q}_m \frac{\dot{B}_n \bar{B}_m + B_n \dot{\bar{B}}_m}{1 - B_n \bar{B}_m},$$

$$\dot{d} = 2R\dot{R} - \sum_n \sum_m q_n \bar{q}_m \frac{B_n \dot{\bar{B}}_m + \dot{B}_n \bar{B}_m}{1 - B_n \bar{B}_m}.$$

Интегрируя уравнения в полных производных $\dot{a}=0$, $\dot{b}_n = 0$, $\dot{d}=2$, приходим к ответу

$$A + \sum_n q_n \ln B_n = \alpha,$$

$$\frac{R}{B_n} + \bar{A} + \sum_m \bar{q}_m \ln\left(1 - B_n \bar{B}_m\right) = \beta_n,$$

$$R^2 + \sum_n \sum_m q_n \bar{q}_m \ln(1 - B_n \bar{B}_m) = 2t + \delta,$$

где α, β_n и δ — константы интегрирования.