

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Избранные главы математической физики

И. В. Колоколов и В. В. Лебедев

В настоящем пособии обсуждаются математические задачи, возникающие в различных физических ситуациях, а также способы их решения. Рассматриваются линейные задачи, которые описываются дифференциальными задачами в частных производных, с начальными и граничными условиями, анализ ведется на языке функций Грина. Представлены сведения об основных специальных функциях, их свойства, включая поведение в комплексной плоскости и асимптотическое поведение. Приводятся основные сведения по нелинейным динамическим системам, включая так называемые точно решаемые уравнения, допускающие солитонные решения.

26 августа 2018 г.

Оглавление

0.1	Введение	3
1	Линейные уравнения	5
1.1	Эволюционные задачи	5
1.1.1	Уравнение первого порядка	5
1.1.2	Уравнения порядка выше первого	6
1.1.3	Матричное уравнение	7
1.2	Граничные задачи	9
1.2.1	Одномерный случай	9
1.2.2	Трёхмерный и двумерный случаи	11
1.2.3	Уравнение Шрёдингера в Кулоновском поле	14
1.3	Динамические полевые задачи	15
1.3.1	Уравнение диффузии	16
1.3.2	Уравнение Шрёдингера	17
1.3.3	Волновое движение	18
2	Специальные функции	21
2.1	Гамма-функция Эйлера	21
2.2	Функция Эйри	23
2.3	Функции Бесселя	25
2.4	Полиномы Лежандра	27
2.5	Полиномы Эрмита	30
2.6	Вырожденная гипергеометрическая функция	33
3	Нелинейные уравнения	35
3.1	Уравнения Хопфа и Бюргерса	35
3.1.1	Уравнение Хопфа	35
3.1.2	Уравнение Бюргерса	36
3.2	Уравнение Кортевега-де-Фриза	37
3.3	Уравнение синус-Гордон	38
3.4	Нелинейное уравнение Шрёдингера	40
3.4.1	Общие свойства нелинейного уравнения Шрёдингера	41
3.4.2	Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера	42
4	Отдельные вопросы и методы	43
4.1	δ -функция Дирака	43
4.2	Преобразования функций	44
4.2.1	Преобразование Фурье	44
4.2.2	Преобразование Лапласа	46
4.2.3	Метод Лапласа	47
4.3	Собственные функции оператора	47
4.4	Метод характеристик	49
4.5	Асимптотические методы	49
4.5.1	Метод перевала и стационарной фазы	49
4.5.2	Метод WKB	50
4.6	Нётеровские интегралы движения	51
	ЛИТЕРАТУРА	53

0.1 Введение

В настоящем пособии мы представим подходы, которые используются в теоретической физике для решения задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений, включая нелинейные уравнения и уравнения в частных производных, то есть уравнений полевых. Значимость этих сюжетов была установлена в ходе развития физики.

Осознание важности решения дифференциальных уравнений и связанных с ними задач восходит к тому же времени, когда был достигнут первый грандиозный успех современной теоретической физики – объяснение Ньютоном формы орбит планет на основе законов механики. Хотя сам Ньютон зачастую предпочитал пользоваться геометрическими методами, он хорошо сознавал, что наиболее адекватным языком созданной им конструкции являются именно дифференциальные уравнения.

В течение восемнадцатого века параллельно с быстрым ростом качества астрономических наблюдений происходило уточнение законов движения планет и более мелких астрономических объектов (комет, астероидов), связанное с воздействием на них других планет. На этом пути родилась, по современной терминологии, теория возмущений. В частности, было осознано, что в некоторых случаях даже слабое возмущение способно за большое время сильно исказить орбиту. Так появились так называемые секулярные члены.

В том же восемнадцатом веке возник новый предмет изучения – гидродинамика. Эйлер и Лагранж сформулировали основные уравнения, которым подчиняется движение любой жидкости. И эти уравнения оказались дифференциальными уравнениями в частных производных. Впоследствии эти уравнения были уточнены Навье и Стоксом, которые включили в рассмотрение вязкость. Гидродинамика оказалась удивительно богатой на различные явления, что связано с существенной ролью нелинейности в динамике жидкости.

Гидродинамика на долгие годы стала тем полигоном, на котором испытывались различные методы математической физики. Особенно богатым в этом отношении оказался период конца девятнадцатого – начала двадцатого века, когда были поставлены и решены многие гидродинамические задачи. Эта наука не исчерпана до сих пор, например, не существует последовательной теории турбулентности, то есть хаотического состояния жидкости, которое возникает при больших числах Рейнольдса.

Однако гидродинамика сыграла и еще одну очень важную роль – она стала парадигмой, на основе которой строилось понимание других физических явлений. Именно гидродинамика послужила плацдармом, с которого началась осознание таких явлений, как термодинамика и электромагнетизм. И хотя понятия флогистона и эфира были впоследствии отброшены, как слишком грубые модели явлений, использующие прямые аналогии с жидкостью, сам подход, связанный с дифференциаль-

ными уравнениями в частных производных, восходящий к гидродинамике, оказался чрезвычайно плодотворным. Именно на этом пути в течении девятнадцатого века в физике родилось современное понятие поля.

В девятнадцатом веке произошло первое великое объединение – постепенно было осознано, что такие явления, как электричество, магнетизм и распространение света являются проявлениями единой сущности – электромагнитного поля. Впоследствии к свету добавились электромагнитные волны различной длины волны, от радиоволн до рентгеновского излучения. И описание всех этих явлений в рамках единой теории электромагнитного поля остается одним из самых значимых достижений физики. Это описание базируется на дифференциальных уравнениях в частных производных.

По мере расширения круга задач, с которыми имеет дело физика, выяснилось, что далеко не во всех случаях для анализа можно обойтись элементарными функциями. Поэтому в течении восемнадцатого-девятнадцатого века в оборот математической физики были введены более сложные функции, которые называются специальными. Репертуар специальных функций установился к началу двадцатого века. Подчеркнем, что использование специальных функций тесно связано с теорией функций комплексного переменного, построенной в основном в девятнадцатом веке.

В течении девятнадцатого века было осознано, что теоретическая физика имеет дело с разнообразным асимптотическим поведением. В связи с этим в математической физике были разработаны методы определения асимптотического поведения различных функций и решений разнообразных уравнений. С другой стороны, выявилась значительная роль законов сохранения, происхождение которых было выявлено уже в двадцатом веке.

При построении в первой половине двадцатого века теории относительности (как специальной, так и общей) и квантовой механики использовались в основном методы, разработанные в рамках теории классического поля. Это частично объясняет удивительно высокий темп создания этих разделов физики. Например, уравнение Шрёдингера представляет собой типичное полевое уравнение в частных производных.

В ходе дальнейшего развития в двадцатом веке в теоретической физике возникли области исследования в рамках которых приводят к интегродифференциальным уравнениям. Примерами могут служить кинетика, которая исследуется в рамках кинетического уравнения, или квантовая теория поля. Эти области лежат вне рамок настоящего пособия.

В то же время в двадцатом веке чрезвычайно расширилась область применимости методов классического поля. Речь идет о динамике любой среды, которую можно рассматривать, как непрерывную. Приведем в качестве примера плазму, которая чрезвычайно богата на различные динамические явления. Подчеркнем также, что плазма может существовать на различных мас-

штабах, от космических до ядерных (так называемая кварк-глюонная плазма), способ ее описания от этого принципиально не меняется.

В связи с бурным развитием динамики непрерывных сред во второй половине двадцатого века были сформулированы базисные нелинейные полевые уравнения, которые описывают ключевые динамические явления в самых разных физических ситуациях. Это в основном уравнения для полей, зависящих от времени и одной координаты. Поразительным образом оказалось, что большинство этих базисных уравнений приводят к бесконечному набору законов сохранения. С другой стороны, эти уравнения допускают аналитическое построение весьма сложных решений, которые обычно называют солитонами.

Все перечисленные сюжеты так или иначе нашли отражение в настоящем пособии. Конечно, его нельзя назвать исчерпывающим. Однако мы надеемся, что приведенный в нем материал позволит освоившему его читателю ориентироваться в значительном числе разделов современной математической физики.

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В равновесии параметры физической системы не меняются со временем. Если систему отклонить от равновесия, то она будет релаксировать к нему. При наличии внешнего воздействия состояние системы изменится. Эти процессы описываются линейными уравнениями при условии, что отклонение от равновесия невелико и внешнее воздействие достаточно слабо.

1.1 Эволюционные задачи

Во многих физических приложениях возникает задача о реакции физической системы на внешнее воздействие, выводящее ее из равновесия. Чтобы найти состояние системы в данный момент времени, надо решить эволюционную задачу, поскольку это состояние будет определяться предысторией системы. Если отклонение системы от равновесия невелико, то ее реакцию на внешнее воздействие можно изучать в рамках линейных уравнений.

1.1.1 Уравнение первого порядка

Рассмотрим простейший пример уравнения, которое описывает релаксацию системы к равновесию:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi, \quad (1.1)$$

где $x(t)$ – переменная, описывающая отклонение системы от равновесия, γ – кинетический коэффициент (некоторый положительный параметр), а величина $\phi(t)$ представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия. Уравнение типа (1.1) возникает в том случае, когда инерционными свойствами системы можно пренебречь. Например, такое уравнение возникает при описании движения частицы в сильно вязкой среде.

Решение линейного уравнения (1.1) можно записать, как интеграл

$$x(t) = \int ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.2)$$

Здесь $G(t)$ – так называемая функция Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt} + \gamma G = \delta(t), \quad (1.3)$$

то есть уравнению (1.1) с правой частью $\phi = \delta(t)$. (Основные свойства δ -функции приведены в разделе 4.1.) Это утверждение проверяется непосредственно: применяя к правой части (1.2) оператор $d/dt + \gamma$ и пользуясь

затем соотношением (1.3), мы находим, что $x(t)$ является решением уравнения (1.1).

Однако функция Грина $G(t)$ определена уравнением (1.3) неоднозначно, поскольку его решение определено с точностью до решения однородного (то есть с нулевой правой частью) уравнения (1.1). Для того, чтобы однозначно определить функцию Грина $G(t)$, необходимо привлечь принцип причинности. Из соотношения (1.2) следует, что $G(t) = 0$ при $t < 0$, поскольку система может реагировать только на воздействие, имевшее место в прошлом, но не в будущем. Принцип причинности уже однозначно фиксирует функцию Грина. В силу того, что $G(t) = 0$ при $t < 0$, выражение (1.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.4)$$

Здесь подразумевается, что ϕ действует на систему на полном временном интервале, от $-\infty$ до $+\infty$ по времени.

Найдем явное выражение для функции Грина $G(t)$, которая определяется уравнением (1.3). Поскольку $\delta(t)$ равна нулю при $t > 0$, то в этой области $G(t)$ является решением однородного уравнения (1.1), то есть $G(t) = A \exp(-\gamma t)$, где A – некоторая константа. Учитывая, что $G(t) = 0$ при $t < 0$, мы заключаем, что при $t = 0$ функция $G(t)$ испытывает скачок A . В силу уравнения (1.3) и соотношения (4.10) этот скачок должен быть равен единице. Таким образом, $A = 1$, и мы находим окончательно

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t), \quad (1.5)$$

где $\theta(t)$ – функция Хэвисайда, равная нулю при $t < 0$, и равная единице при $t > 0$. Подставляя это выражение в соотношение (1.4), мы находим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)]\phi(s). \quad (1.6)$$

Отсюда следует, что система постепенно (за время γ^{-1}) забывает о воздействии на нее, которое было в прошлом.

Выражение (1.4) или (1.6) подразумевает, что мы рассматриваем эволюцию системы на бесконечном временном интервале. В то же время широко распространены задачи, когда состояние системы задано в начальный момент времени, а далее она эволюционирует под внешним воздействием. Будем отсчитывать время от момента, когда задано начальное состояние. В данном случае начальное состояние характеризуется начальным значением переменной x , которое мы обозначаем $x(0)$. Тогда

вместо (1.4) решение уравнения переписывается в следующем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.7)$$

Действительно, выражение (1.7) удовлетворяет исходному уравнению и начальному условию, поскольку $G(+0) = 1$.

Задача 1.1.1. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.1) при нулевых начальных условиях и $\phi = \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$. Как выглядит решение при $\alpha \rightarrow \gamma$?

1.1.2 Уравнения порядка выше первого

Рассмотрим более сложный пример, а именно уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2x = \phi, \quad (1.8)$$

где ν имеет смысл собственной частоты колебаний системы. Решение уравнения (1.8) можно записать через функцию Грина $G(t)$, в виде (1.2) или (1.4). Функция $G(t)$ удовлетворяет уравнению (1.8) с δ -функцией в правой части:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2\right)G(t) = \delta(t). \quad (1.9)$$

Найдем решение этого уравнения.

Как мы уже установили, в силу причинности $G(t) = 0$ при $t < 0$. В отличие от функции Грина (1.5), решение уравнения (1.9) остается непрерывным при $t = 0$ в силу того, что в его левой части стоит вторая производная по t . В этом случае δ -функция производится, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 4.1. Используя соотношение (4.10), легко найти, что скачок первой производной в $G(t)$ должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем, что при $t = +0$ $G = 0$, $G' = 1$. Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего $G(t)$ при $t > 0$, поскольку правая часть уравнения (1.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t)\frac{1}{\nu} \sin(\nu t). \quad (1.10)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер функции Грина.

Выражение (1.4) дает решение уравнения (1.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть этими условиями являются значения функции и ее производной, x и \dot{x} , в начальный момент

времени, в качестве которого мы выберем $t = 0$. Решение задачи Коши для уравнения (1.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.11)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.8), а также начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений $G(+0) = 0$, $\dot{G}(+0) = 1$, $\ddot{G}(+0) = 0$, следующих из выражения (1.10).

Задача 1.1.2. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.8) при нулевых начальных условиях и $\phi = \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$. Найти предел $\nu \rightarrow 0$.

В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Его можно найти для уравнений вида

$$L(d/dt)x = \phi, \quad (1.12)$$

где $L(z)$ – некоторый полином от z . Именно к типу (1.12) относятся рассмотренные нами выше уравнения (1.1,1.8). Решение уравнения (1.12) записывается в виде (1.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t), \quad (1.13)$$

и условию $G = 0$ при $t < 0$. Заметим, что если старшая производная в $L(d/dt)$ равна $(d/dt)^n$, то $(d/dt)^m G(0) = 0$ для всех имеющихся в $L(d/dt)$ производных $m < n$. Выше мы нашли явные выражения для функций Грина уравнений (1.1,1.8). Изложим теперь метод, применимый для уравнения (1.12) общего вида.

Поскольку функция Грина отлична от нуля только при положительных временах, естественно рассмотреть ее преобразование Лапласа, смотри раздел 4.2.2:

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt)G(t).$$

Учитывая, что преобразование Лапласа от δ -функции равно единице, находим из (1.13) соотношение

$$\int_0^\infty dt \exp(-pt)L(d/dt)G(t) = 1.$$

Произведем теперь интегрирование по частям в производных $(d^n/dt^n)G$. Учитывая, что все содержащиеся в $L(d/dt)$ производные от функции Грина $G(t)$ в нуле равны нулю (за исключением старшей), мы приходим к выводу, что при интегрировании по частям внеинтегральные члены не возникают, и мы находим

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p). \quad (1.14)$$

Таким образом, $\tilde{G}(p)$ имеет полюса, которые определяются нулями полинома $L(p)$.

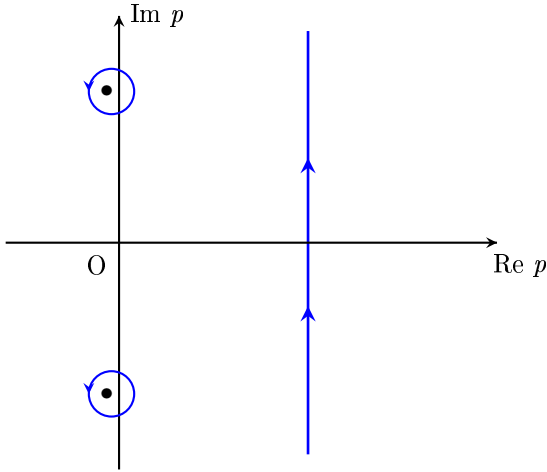


Рис. 1.1: Преобразование контура, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

Обратное преобразование Лапласа имеет вид (4.27), то есть

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p). \quad (1.15)$$

Контур интегрирования в этом выражении показан на рисунке 4.1. При $t < 0$ мы можем смещать контур интегрирования вправо, поскольку e^{pt} при этом стремится к нулю. В результате мы заключаем, что при $t < 0$ функция Грина равна нулю, как и должно быть. При $t > 0$ мы можем смещать контур интегрирования влево, поскольку e^{pt} при этом стремится к нулю. При таком смещении мы будем “наткаться” на полюсы $\tilde{G}(p)$. Далее контур можно “протащить” через полюса, добавив контура, идущие вокруг полюсов. При дальнейшем сдвиге влево мы получаем нулевой вклад в интеграл по прямой, поскольку e^{pt} стремится к нулю. Таким образом, интеграл сводится к сумме контурных интегралов, идущих вокруг полюсов $G(p)$, смотри рисунок 1.1. Каждый такой интеграл сводится к вычету в полюсе, и мы находим

$$G(t) = \sum_i \text{res}_i \exp(pt) / L(p), \quad (1.16)$$

где суммирование идет по полюсам $\tilde{G}(p)$, то есть нулям $L(p)$.

Задача 1.1.3. Найдите выражения для функций Грина (1.5, 1.10), исходя из соотношения (1.16).

Для устойчивой системы все полюса выражения (1.14) лежат в левой полуплоскости по p , что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. Тогда $G(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (1.14) в правой полуплоскости. Вычеты в этих полюсах породят вклад в функцию Грина $G(t)$, расходящийся на больших t , в соответствии с (1.16).

Задача 1.1.4. Найдите функцию Грина уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi.$$

Задача 1.1.5. Найдите функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi.$$

Задача 1.1.6. Найдите функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi.$$

При решении задачи $\hat{L}x = \phi$ с нулевыми начальными условиями при $t = 0$ мы находим

$$x(t) = \int_0^t ds G(t-s) \phi(s). \quad (1.17)$$

Производя преобразование Лапласа обеих частей соотношения (1.17), получаем

$$\tilde{x}(p) = \tilde{G}(p) \tilde{\phi}(p). \quad (1.18)$$

Таким образом, если известны $\tilde{G}(p)$ и $\tilde{\phi}(p)$, то $x(t)$ можно представить в виде интеграла (4.27). Для случая, когда L является полиномом, находим из (1.14)

$$\tilde{x}(p) = \tilde{\phi}(p) / L(p). \quad (1.19)$$

Задача 1.1.7. Найдите $x(t)$, как решение уравнения $(d^2/dt^2 + \nu^2)x = \phi$ с нулевыми начальными условиями для $\phi = \exp(-\alpha t)$.

1.1.3 Матричное уравнение

Прямым обобщением скалярного релаксационного уравнения (1.1) является линейное уравнение для векторной величины \mathbf{y} :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma} \mathbf{y} = \boldsymbol{\chi}. \quad (1.20)$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ – матрица, которая определяет релаксацию системы, а вектор $\boldsymbol{\chi}$ представляет внешнее воздействие на систему.

Отметим, что к виду (1.20) приводится дифференциальное уравнение n -го порядка для скалярной переменной x . Для этого достаточно ввести $y_1 = x$, $y_2 = dx/dt$, \dots , $y_n = d^{n-1}x/dt^{n-1}$. После этого $d\mathbf{y}/dt$ выражаются через компоненты \mathbf{y} , исходя из введенных определений и исходное уравнение, приводя к матрице $\hat{\Gamma}$ $n \times n$ весьма специфического вида. Отметим, что обратное, вообще говоря, неверно: не всякое уравнение вида (1.20) с матрицей $\hat{\Gamma}$ размера $n \times n$ можно свести к уравнению n -го порядка для скалярной величины. В этом смысле уравнение (1.20) является более общим.

Задача 1.1.8. Свести к виду (1.20) уравнение, введенное в задаче 1.1.5.

Как известно, можно ввести собственные векторы \mathbf{a}_i матрицы $\hat{\Gamma}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\Gamma}\mathbf{a}_i = \lambda_i\mathbf{a}_i, \quad (1.21)$$

где λ_i – собственные числа матрицы $\hat{\Gamma}$. Если собственные числа не вырождены, то любой вектор можно разложить по собственным векторам \mathbf{a}_i , в частности $\mathbf{y} = \sum_i x_i\mathbf{a}_i$, $\boldsymbol{\chi} = \sum_i \phi_i\mathbf{a}_i$. Подставляя это представление в уравнение (1.20), находим

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda_i x_i = \phi_i. \quad (1.22)$$

Таким образом, задача сводится к набору уже рассмотренных нами скалярных уравнений (1.1).

Можно ввести функцию Грина для уравнения (1.20), которая является матрицей $\hat{G}(t)$, через которую выражается решение этого уравнения

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t ds \hat{G}(t-s)\boldsymbol{\chi}(s). \quad (1.23)$$

Функция Грина $\hat{G}(t)$ равна нулю при $t < 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} + \hat{\Gamma}\right)\hat{G}(t) = \delta(t)\hat{1}, \quad (1.24)$$

где $\hat{1}$ – единичная матрица. Можно выписать явное выражение для функции Грина. Для этого помимо собственных столбцов \mathbf{a}_i матрицы Γ надо ввести собственные строки \mathbf{b}_i^T , которые удовлетворяют уравнениям $\mathbf{b}_i^T\hat{\Gamma} = \lambda_i\mathbf{b}_i^T$. Как известно, собственные столбцы и строки можно выбрать ортонормированными $\mathbf{b}_i^T\mathbf{a}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, равный единице, если $i = j$, и нулю, если $i \neq j$. Тогда

$$\hat{G} = \theta(t) \sum_i e^{-\lambda_i t} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^T. \quad (1.25)$$

Это выражение представляет собой сумму функций Грина (1.5) с множителями, которые обеспечивают проекции на собственные векторы матрицы $\hat{\Gamma}$.

Переходим к случаю, когда имеются вырожденные собственные значения λ_i . Никаких проблем в этом случае не возникает, например, если матрица $\hat{\Gamma}$ является симметричной. Тогда имеется n собственных векторов \mathbf{a}_i матрицы $\hat{\Gamma}$, по которым можно разложить любой вектор. Поэтому мы возвращаемся к описанной выше ситуации, когда задача распадается на n независимых скалярных уравнений, каждое из которых имеет вид (1.1). Рассмотрим случай несимметричных матриц, имеющих вырожденные собственные значения λ_i , когда задачу нельзя свести к n независимых скалярных уравнений, каждое из которых имеет вид (1.1).

Это происходит, если канонической формой матрицы $\hat{\Gamma}$ является совокупность клеток Жордана. Чтобы проиллюстрировать этот случай, рассмотрим матрицу 2×2

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

которая является канонической формой матрицы Жордана 2×2 . В компонентах

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} + \lambda y_1 + y_2 &= \chi_1, \\ \frac{dy_2}{dt} + \lambda y_2 &= \chi_2. \end{aligned}$$

Таким образом, y_2 удовлетворяет стандартному уравнению (1.1). Введя $y_1 = y - ty_2$, мы находим стандартное уравнение для y :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = \chi_1 + t\chi_2.$$

Тем не менее, в y_1 содержится секулярный член $-ty_2$.

Данная ситуация является типичной. Наличие клеток Жордана в каноническом представлении матрицы $\hat{\Gamma}$ приводит к появлению секулярных членов в решении уравнения (1.20). Они могут быть первого порядка по t (то есть содержать первую степень t , как множитель при экспоненте), как в рассмотренном нами выше простейшем случае, или более высокого порядка по t (в случае более сложной клетки Жордана) в качестве множителя при экспоненте. Все это не меняет качественно экспоненциальный характер решения однородного уравнения (1.20), однако приводит к степенным множителям при экспонентах.

Найдем функцию Грина уравнения (1.20) для матрицы

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

которая относится к типу Жордана. Нам необходимо решить уравнение (1.24). Сделаем преобразование Лапласа этого уравнения, что дает

$$(p + \lambda)\hat{\mathcal{G}} + \hat{N}\hat{\mathcal{G}} = \hat{1}, \quad (1.28)$$

где $\hat{\mathcal{G}}(p)$ – преобразование Лапласа функции Грина. Матрица \hat{N} и ее квадрат имеют вид

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все более высокие степени матрицы \hat{N} равны нулю. Такие матрицы, степени которых, начиная с некоторой, обращаются в ноль, называют нильпотентными.

Будем решать уравнение (1.28) для $\hat{\mathcal{G}}(p)$ итерациями по \hat{N} . Этот путь оказывается эффективным в силу нильпотентности матрицы \hat{N} . В результате находим

$$\hat{\mathcal{G}} = \frac{\hat{1}}{p + \lambda} - \frac{\hat{N}}{(p + \lambda)^2} + \frac{\hat{N}^2}{(p + \lambda)^3}.$$

Выполним теперь обратное преобразование Лапласа, которое после деформации контура интегрирования сведется к вычетам в точке $p = -\lambda$. В результате находим

$$\hat{G} = \hat{1}e^{-\lambda t} - \hat{N}te^{-\lambda t} + \hat{N}^2(t^2/2)e^{-\lambda t}.$$

В этом выражении присутствуют секулярные члены первого и второго порядков. Аналогичным образом можно находить функции Грина уравнения (1.20) в более сложных случаях, когда матрица \hat{G} содержит более громоздкие клетки Жордана или несколько клеток Жордана.

Задача 1.1.9. Найти функцию Грина уравнения (1.20) для матрицы

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

которая относится к типу Жордана.

1.2 Граничные задачи

В разделе 1.1 мы рассматривали задачи эволюционного типа, когда решение определялось внешним воздействием и/или начальными условиями. Однако распространены также краевые или граничные задачи, когда искомая функция удовлетворяет каким-либо условиям на границах некоторой области в пространстве, которые, как и эволюционные задачи, могут быть решены при помощи метода функций Грина. Простейшие по постановке краевые задачи и соответствующие функции Грина возникают в электростатике, когда, например, требуется найти поле системы (распределенных) зарядов в присутствии проводников. Более сложные задачи такого типа возникают при исследовании распространения электромагнитных волн.

1.2.1 Одномерный случай

В данном разделе мы будем изучать одномерный случай, когда область, в которой мы будем искать решение краевых задач, является интервалом (a, b) . Тогда условия на интересующие нас функции накладываются на границах интервала, при $x = a$ и/или $x = b$. Такого сорта задачи возникают как при анализе полей, зависящих только от одной декартовой координаты, так и в случаях, когда в силу симметрии поля зависят, скажем, только от расстояния до начала координат, но не от углов.

Рассмотрим в качестве примера потенциал Φ распределения заряда, плотность которого ρ зависит только от одной декартовой координаты x . В этом случае потенциал также зависит только от координаты x и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi = -4\pi\rho. \quad (1.29)$$

Поскольку уравнение (1.29) является дифференциальным уравнением второго порядка, его надо дополнить граничными условиями. Если, например, речь идет об области пространства между заземленными параллельными металлическими поверхностями, заданными условиями $x = a$ и $x = b$, то граничные условия имеют вид $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$. Мы будем говорить о таких граничных условиях, как нулевых.

Введем теперь соответствующую уравнению (1.29) функцию Грина $G(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, y) = \delta(x - y), \quad a < x, y < b, \quad (1.30)$$

а также граничным условиям $G(a, y) = G(b, y) = 0$. Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь от обеих переменных, а не просто от их разности, как это было в предыдущем разделе. Это связано с нарушением однородности пространства за счет границ. Решение уравнения (1.29) с нулевыми граничными условиями запишется в виде

$$\Phi(x) = \int_a^b dy G(x, y)[-4\pi\rho(y)]. \quad (1.31)$$

Очевидно, выражение (1.31) удовлетворяет уравнению (1.29) в силу (1.30) и нулевым граничным условиям, поскольку им удовлетворяет функция Грина.

Найдем явное выражение для функции Грина $G(x, y)$. Для этого заметим, что при $x < y$ уравнение (1.30) сводится к $\partial_x^2 G = 0$, что дает $G(x, y) = A(x - a)$, где A — некоторая константа. Это общее решение уравнения с нулевым граничным условием при $x = a$. Аналогично, при $x > y$ мы находим $G(x, y) = B(x - b)$, где B — другая константа. Это выражение удовлетворяет тому же уравнению $\partial_x^2 G = 0$ и нулевому граничному условию при $x = b$. Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению второго порядка по x , она должна быть непрерывной в точке $x = y$, что дает соотношение $A(y - a) = B(y - b)$. Далее, скачок производной функции Грина $G(x, y)$ в точке $x = y$ равен $B - A$, что в силу уравнения (1.30) должно быть равно единице. Решая полученные уравнения для A и B , и подставляя результат в выражение для функции Грина, мы находим

$$G(x, y) = \begin{cases} (y - b)(x - a)(b - a)^{-1}, & x < y, \\ (y - a)(x - b)(b - a)^{-1}, & x > y. \end{cases} \quad (1.32)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина (1.32) симметрична: $G(x, y) = G(y, x)$.

Рассмотрим теперь более общую задачу, которая ставится для функции $f(x)$ на интервале $a < x < b$ и формулируется в виде следующего дифференциального уравнения

$$\hat{L}f(x) = \phi, \quad (1.33)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q(x)\frac{d}{dx} + U(x). \quad (1.34)$$

Дифференциальный оператор \hat{L} (1.34) называется оператором Штурма-Лиувилля. Здесь ‘сила’ ϕ и факторы Q, U являются заданными функциями x . Решение уравнения (1.33) подразумевает наложение некоторых граничных условий на функцию $f(x)$ на границах интервала, то есть при $x = a$ и $x = b$. Они не обязательно должны быть нулевыми, возможны и другие варианты. Например, встречаются нулевые условия на производную f' в точках $x = a$ и $x = b$ или смешанные граничные условия, связывающие значения производной f' и функции f в точках $x = a$ и $x = b$.

Решение уравнения (1.33) можно по аналогии с (1.31) написать в виде свертки правой части уравнения (1.33) с функцией Грина $G(x, y)$:

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y)\phi(y), \quad (1.35)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \quad (1.36)$$

и соответствующим граничным условиям при $x = a$ и $x = b$. Действительно, интеграл в формуле (1.35) удовлетворяет уравнению (1.33) в силу (1.36) и граничным условиям по построению.

Приведенная выше конструкция, работающая при $Q = U = 0$, подсказывает нам, как найти функцию Грина $G(x, y)$ в случае произвольного оператора Штурма-Лиувилля (1.34). Введем сначала два решения однородного уравнения (1.36) u и v (то есть $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$), которые удовлетворяют ‘левому’ (при $x = a$) и ‘правому’ (при $x = b$) граничным условиям, соответственно. Например, для нулевых граничных условий $u(a) = 0$ и $v(b) = 0$. Функцию Грина надо искать в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y, \\ Bv(x), & x > y, \end{cases} \quad (1.37)$$

где A, B – некоторые параметры, не зависящие от x . Тогда уравнение (1.36) будет выполняться при $x < y$ и $x > y$ вместе с граничными условиями при $x = a$ и $x = b$. Константы же A и B определяются условием непрерывности функции Грина при $x = y$ и единичным значением скачка производной при $x = y$:

$$G'(y + 0, y) - G'(y - 0, y) = 1. \quad (1.38)$$

Решая полученную систему линейных уравнений для A и B , мы приходим к следующему явному выражению для функции Грина $G(x, y)$:

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases} \quad (1.39)$$

Здесь $W(x)$ – так называемый Вронскиан решений $u(x)$ и $v(x)$, который определяется следующим образом

$$W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x). \quad (1.40)$$

Дифференцируя это выражение и используя уравнения $\hat{L}u = \hat{L}v = 0$, легко получить соотношение $W'(x) = -Q(x)W(x)$, откуда следует

$$W(x) = W(a) \exp \left[- \int_a^x dy Q(y) \right]. \quad (1.41)$$

Отметим, что при $Q = 0$ Вронскиан (1.41) не зависит от x , и тогда функция Грина становится симметричной: $G(x, y) = G(y, x)$.

Рассмотрим в качестве примера потенциал $\Phi(r)$ заряженного цилиндра радиуса b при условии, что плотность заряда зависит только от расстояния r от точки наблюдения до оси цилиндра. Уравнение для $\Phi(r)$ получается из уравнения Пуассона переходом к цилиндрическим координатам:

$$\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Phi(r) = -4\pi\rho. \quad (1.42)$$

Выберем значение потенциала на поверхности цилиндра за ноль. Тогда граничными условиями для этой задачи являются $\Phi(b) = 0$ и отсутствие особенности в Φ при $r = 0$. Регулярным при $r = 0$ ‘левым’ решением u является некоторая константа, которую мы полагаем равной единице, $u(r) = 1$. ‘Правое’ же решение v имеет вид $v(r) = \ln(r/b)$, а вронскиан равен $W(r) = 1/r$. Поэтому формула (1.39) приводит к следующему выражению для функции Грина оператора в левой части уравнения (1.42):

$$G(r, R) = \begin{cases} b \ln(R/b), & r < R, \\ b \ln(r/b), & r > R. \end{cases} \quad (1.43)$$

Следует отметить, что с точки зрения исходной задачи граничное условие $\Phi(b) = 0$ было задано на границе $r = b$ области, в которой мы ищем потенциал Φ , и этого условия достаточно для его определения. Дополнительное же условие отсутствия особенности при $r = 0$ возникает из-за перехода к полярной системе координат, приводящему к сингулярности коэффициента при первой производной в уравнении (1.42) в точке $r = 0$.

Заметим, что при нулевых граничных условиях и $Q = 0$ оператор (1.34) является самосопряженным, смотри раздел 4.3. Действительно, интегрирование по частям переводит $\int dx f(d^2/dx^2 + U)g$ в $\int dx g(d^2/dx^2 + U)f$, при этом вне-интегральные члены оказываются равными нулю в силу нулевых граничных условий. Оператор $d^2/dx^2 + U$ является самосопряженным также и на классе периодических функций f , удовлетворяющих условиям $f(b) = f(a)$ и $f'(b) = f'(a)$, поскольку эти граничные условия также приводят к занулению вне-интегральных членов при интегрировании по частям.

Задача 1.2.1. Найти функцию Грина операторов $\hat{L}_1 = (d/dx + x)(d/dx - x)$ и $\hat{L}_2 = (d/dx - x)(d/dx + x)$ на интервале $(-l, +l)$ с нулевыми граничными условиями.

Отметим, что для периодических граничных условий функцию Грина нельзя построить в соответствии

с выражением (1.39), так как условия $f(b) = f(a)$ и $f'(b) = f'(a)$ связывают значения функции f на разных концах интервала, так что нельзя ввести ‘левую’ и ‘правую’ функции u и v . Поэтому для периодических функций следует использовать более общее выражение

$$G(x, y) = \sum_n A_n^{-1} \frac{f_n(x)f_n(y)}{\lambda_n}, \quad (1.44)$$

где f_n – собственные функции оператора \hat{L} : $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$, удовлетворяющие граничным условиям.

Выражение (1.44) корректно, если все собственные значения λ_n отличны от нуля. Используя соотношение (4.44), легко проверить выполнение уравнения (1.36). Кроме того, функция (1.44) удовлетворяет необходимым граничным условиям. Если же среди собственных значений λ_n оператора \hat{L} имеются нулевые, то функция Грина не существует. Можно однако, ограничить класс функций f так, чтобы исключить собственные функции с нулевыми собственными значениями. На этом ограниченном классе функцию Грина уже можно построить.

В качестве примера анализа периодических граничных условий рассмотрим простейший оператор второго порядка $\hat{L} = d^2/dx^2$, а на функцию f наложим периодические граничные условия на интервале $0 < x < 2\pi$. Тогда полный набор собственных функций оператора \hat{L} будет

$$\cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.45)$$

что соответствует собственным значениям $\lambda_n = -n^2$. Отметим, что для $n = 1, 2, \dots$ собственные функции нашего оператора являются дважды вырожденными, и что собственные функции (1.45) выбраны так, что выполняется условие ортогональности (4.41). Разложение же (4.42) является не чем иным, как разложением в ряд Фурье периодической функции. Соотношение (4.44) в данном случае приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx) \cos(ny) + \sin(nx) \sin(ny)] = \delta(x - y). \quad (1.46)$$

На пространстве периодических функций не существует функции Грина оператора $\hat{L} = d^2/dx^2$, поскольку на этом пространстве оператор $\hat{L} = d^2/dx^2$ имеет нулевое собственное значение, которое достигается при $n = 0$ в формуле (1.45). Поэтому выражение (1.44) оказывается некорректным. Тем не менее, можно определить функцию Грина оператора $\hat{L} = d^2/dx^2$ на пространстве функций, где он не имеет нулевых собственных значений. Собственная функция, соответствующая $\lambda = 0$, как следует из формулы (1.45), является просто константой: $f = \text{const}$. Таким образом, надо исключить из набора (1.45) константу. Это можно сделать, если наложить на функцию f дополнительное условие $\int_0^{2\pi} dx f(x) = 0$. После этого функцию Грина уже можно найти в соответствии с выражением (1.44).

Поучительно найти эту функцию Грина, исходя непосредственно из дифференциального уравнения, которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x - y) = \delta(x - y) - \frac{1}{2\pi}.$$

Дополнительная константа в правой части этого уравнения связана с тем, что интеграл от этой правой части по x должен быть равен нулю. Таким образом, функцию Грина можно записать в виде $G(x, y) = |x - y|/2 + c_1 + c_2 x - x^2/(4\pi)$, где константы c_1 и c_2 находятся из условий периодичности $G(x - y)$ и условия $\int_0^{2\pi} dx G(x - y) = 0$. В результате находим

$$G(x - y) = \frac{1}{2}|x - y| - \frac{\pi}{6} - \frac{(x - y)^2}{4\pi}. \quad (1.47)$$

Отметим, что функция Грина зависит только от разности $x - y$, что связано с эффективной однородностью периодической задачи, поскольку интервал, на котором рассматриваются функции f , можно выбрать в виде $(w, w + 2\pi)$ с произвольным w .

Задача 1.2.2. Найти функцию Грина оператора $d^2/dx^2 + \kappa^2$ для периодических функций с периодом 2π .

Задача 1.2.3. Найти решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале $(-\pi, \pi)$.

Задача 1.2.4. Найти решение задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right) f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале $(-\pi, \pi)$.

1.2.2 Трехмерный и двумерный случаи

Здесь мы рассмотрим ряд трехмерных задач, важных прежде всего с точки зрения электродинамики. В электростатике восстановление потенциала Φ по распределению заряда ρ означает решение задачи $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$, где ∇^2 – Лапласиан. При исследовании электромагнитных волн возникает волновое уравнение $(\nabla^2 - c^{-2}\partial_t^2)f = \phi$, где f характеризует распространяющееся поле, c – скорость распространения, а ϕ – его источник. Для монохроматической волны с частотой ω $\partial_t^2 \rightarrow -\omega^2$ и мы приходим к уравнению Гельмгольца (Helmholtz) $(\nabla^2 + \kappa^2)f = \phi$, где $\kappa^2 = \omega^2/c^2$. Мы также рассмотрим свойства уравнения Дебая (Debye) $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$, которое описывает распределение потенциала в электролитах и плазме.

Обычно, мы будем называть уравнениями Лапласа, Гельмгольца и Дебая уравнения без правой части:

$$\nabla^2 f = 0, \quad \text{Laplace}, \quad (1.48)$$

$$(\nabla^2 + \kappa^2)f = 0, \quad \text{Helmholtz}, \quad (1.49)$$

$$(\nabla^2 - \kappa^2)f = 0, \quad \text{Debye}. \quad (1.50)$$

Все приведенные выше уравнения могут быть определены в пространстве произвольной размерности d . В настоящем разделе мы сосредоточимся на практически наиболее важных случаях $d = 3$ и $d = 2$. Хотя некоторые из приведенных ниже результатов обобщаются и на случай произвольной размерности.

Функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа (1.48), называются гармоническими. Заметим, что не существует гармонических функций, определенных во всем пространстве и стремящихся к нулю на бесконечности. Для таких функций хорошо определено преобразование Фурье $\tilde{f}(\mathbf{q})$. Произведя преобразование Фурье уравнения $\nabla^2 f = 0$, находим $q^2 \tilde{f} = 0$. У этого уравнения имеется только решение $\tilde{f} \propto \delta(\mathbf{q})$, что означает $f = \text{const}$. Если мы требуем стремления к нулю функции f на бесконечности, то константа здесь должна быть равна нулю, что и обосновывает сделанное утверждение. Подчеркнем, что изложенная аргументация относится к пространству произвольной размерности.

То же относится и к уравнению Дебая (1.50): не существует решений этого уравнения, определенных во всем пространстве и стремящихся к нулю на бесконечности. А уравнение Гельмгольца (1.49) допускает нетривиальные решения, которые определены во всем пространстве, и стремящихся к нулю на бесконечности. Например, в трехмерном случае имеется его решение

$$f = \frac{1}{r} \sin(\kappa r). \quad (1.51)$$

Такая разница связана с волновой природой уравнения Гельмгольца. Скажем, решение (1.51) представляет собой сферическую стоячую волну.

Возвращаемся к гармоническим функциям. Обычная задача о гармонической функции f в ограниченной области. В этом случае уравнение Лапласа (1.48) должно быть дополнено условиями на границе этой области. Например, можно задать значение f на границе. Возможны и иные граничные условия, например, нулевой производной в направлении, перпендикулярном границе. Вполне осмыслена и задача о решении во всем пространстве электростатического уравнения $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$, где потенциал Φ стремится к нулю на бесконечности. Для этого плотность заряда ρ также должна удовлетворять определенным условиям. Например, быть отличной от нуля в ограниченной области пространства.

Для решения задачи о потенциале, который создается плотностью заряда, необходимо знать Гриновскую функцию Лапласиана в неограниченном пространстве. Она является решением уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (1.52)$$

Тогда решение уравнения $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$ в неограниченном пространстве записывается в виде интеграла

$$\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi \int d^d r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}'), \quad (1.53)$$

что является сверткой функции Грина Лапласиана с правой частью уравнения $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$. В уравнении (1.53) $\int d^d r$ означает интегрирование по всему d -мерному пространству.

Рассмотрим трехмерный случай. Тогда $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\nabla^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$, $\delta(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Решение уравнения (1.52) в трехмерном случае хорошо известно – это потенциал поля точечного заряда

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad (1.54)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Подставляя в (1.53) в качестве функции Грина (1.54), находим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int dV' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}'), \quad (1.55)$$

что является известным выражением для электростатического потенциала распределения зарядов в неограниченном пространстве.

Существуют различные способы получения выражения (1.54). Приведем здесь вывод, основанный на преобразовании Фурье. Произведем преобразование Фурье уравнения (1.52), смотри раздел (4.2.1). В результате получим $q^2 \tilde{G}(q) = -1$, где \tilde{G} – преобразование Фурье от G . Функцию $G(\mathbf{r})$ можно найти, как обратное Фурье-преобразование

$$G(\mathbf{r}) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2}.$$

Разобьем \mathbf{q} на компоненту q_{\parallel} вдоль \mathbf{r} и перпендикулярную \mathbf{r} компоненту \mathbf{q}_{\perp} . Интеграл по компоненте q_{\parallel} дает

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel} r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} = \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r),$$

где мы подставили $q^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2$. Оставшийся интеграл по перпендикулярной компоненте

$$G(r) = - \int \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r),$$

приводит к выражению (1.54).

Задача 1.2.5. Найти решение уравнения (1.52) в пространстве произвольной размерности d .

Задача 1.2.6. Найти выражение для потенциала Φ в случае, когда ρ зависит только от расстояния до начала координат.

Указанный выше способ, связанный с преобразованием Фурье, не работает в двумерном случае, поскольку в этом случае обратное преобразование Фурье формально расходится при малых волновых векторах \mathbf{q} . Поэтому в двумерном случае мы будем искать решение уравнения (1.52) другим способом. Ясно, что функция G зависит только от абсолютной величины радиус-вектора \mathbf{r} . Вне начала координат, где сосредоточена δ -функция, уравнение (1.52) имеет вид $(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r)G(r) = 0$. Помимо тривиального решения – константы, это уравнение имеет своим решением $\ln r$. Таким образом, $G \propto \ln r$. Чтобы найти коэффициент пропорциональности в этом соотношении, проинтегрируем уравнение (1.52) по диску радиуса R . В правой части мы получим единицу, а в левой части поток ∇G через окружность – поверхность диска, который равен $2\pi R \partial G / \partial R$. Приравнявая эту величину единице, находим

$$d = 2 \quad G(r) = \frac{\ln r}{2\pi}. \quad (1.56)$$

Разумеется, к этой величине можно добавить произвольную константу.

Задача 1.2.7. Вывести указанным способом выражение (1.54).

Переходим теперь к уравнению Дебая (1.50). Найдем его функцию Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 - \kappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (1.57)$$

В трехмерном пространстве она имеет вид

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-\kappa r). \quad (1.58)$$

Как и следует, при $\kappa \rightarrow 0$ выражение (1.58) переходит в (1.54). Обратим внимание на то, что в отличие от (1.54) функция (1.58) экспоненциально затухает на больших расстояниях, которые намного превосходят κ^{-1} .

Для вывода (1.58) действуем также, как и при выводе выражения (1.54). Произведем преобразование Фурье уравнения (1.57) смотри раздел (4.2.1). В результате получим $(q^2 + \kappa^2)\tilde{G}(q) = -1$, где \tilde{G} – преобразование Фурье от G . Функцию $G(r)$ можно найти, как обратное Фурье-преобразование

$$G(r) = -\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2 + \kappa^2}.$$

Разобьем \mathbf{q} на компоненту q_{\parallel} вдоль \mathbf{r} и перпендикулярную \mathbf{r} компоненту \mathbf{q}_{\perp} . Интеграл по компоненте q_{\parallel} дает

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel}r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 + \kappa^2} = \frac{\pi}{\beta} \exp(-\beta r),$$

где $\beta^2 = q_{\perp}^2 + \kappa^2$. Оставшийся интеграл по перпендикулярной компоненте дает

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\kappa}^{\infty} d\beta \exp(-\beta r),$$

что и приводит к (1.58).

Задача 1.2.8. Найти решение уравнения $(\nabla^2 - \kappa^2)\Phi = -4\pi\rho$ в случае, когда ρ зависит только от расстояния до начала координат.

Переходим теперь к функции Грина уравнения Гельмгольца (1.49), которая удовлетворяет уравнению $(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$. Если попытаться найти ее тем же методом, что и выше, то есть через преобразование Фурье, то получаем $\tilde{G} = (\kappa^2 - q^2)^{-1}$. Поэтому обратное преобразование Фурье становится неопределенным из-за обращения \tilde{G} в бесконечность при $q = \kappa$. Эта проблема связана с наличием распространяющихся волн, которые описывает уравнение Гельмгольца, и которые как раз имеют волновой вектор $q = \kappa$.

Поэтому применим другой метод. Вне начала координат $(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = 0$. Введя $G = \chi/r$, находим в трехмерном случае $(\partial_r^2 + \kappa^2)\chi = 0$. Решение этого уравнения является произвольная комбинация $\cos(\kappa r)$ и $\sin(\kappa r)$. При малых r членом с κ в уравнении Гельмгольца можно пренебречь. Поэтому при малых r мы должны получить (1.54). Этому удовлетворяет, например, функция $G = -\cos(\kappa r)/(4\pi r)$, которая и является решением уравнения $(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$. Однако мы можем добавить к χ и синус с произвольным множителем. Другими словами, функция Грина уравнения Гельмгольца определена с точностью до решения однородного уравнения, которым является (1.51) с произвольным коэффициентом. Чтобы определить этот коэффициент, требуются дополнительные соображения. Если речь идет о решении уравнения $(\nabla^2 + \kappa^2)f = \phi$, где ϕ – источник излучения, то в функции Грина должна стоять расходящаяся волна

$$G = -\frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r}. \quad (1.59)$$

Выражение (1.59) можно обосновать, если ввести в исходное волновое уравнение, ведущее к уравнению Гельмгольца, малое затухание.

Задача 1.2.9. Получить (1.59), введя в исходное волновое уравнение, ведущее к уравнению Гельмгольца, малое затухание.

Чаше всего уравнения Лапласа, Гельмгольца и Дебая приходится решать в области конечных размеров с определенными условиями, заданными на ее границах. К сожалению, никаких общих методов решения такой задачи не существует и ее надо каждый раз заново решать для области с данной геометрией. Конечно, это можно сделать численно, но в ряде случаев можно найти аналитическое решение. Иногда способ решения подсказывает симметрия области. Например, при рассмотрении поля в волноводе постоянного сечения можно ввести координату вдоль этого волновода и сделать Фурье-преобразование по этой координате. В силу однородности задачи уравнения для различных Фурье-гармоник оказываются независимыми. Таким образом удается эффективно понизить размерность пространства, в котором решается задача.

Задача 1.2.10. Найти набор распространяющихся вдоль волновода квадратного сечения $l \times l$ мод, которые являются решениями уравнения Гельмгольца (1.49) с нулевыми граничными условиями на стенках волновода.

Задача 1.2.11. Найти функцию Грина уравнения Лапласа (1.48) в области вне шара радиуса R , если на его поверхности задано нулевое граничное условие.

Двумерный случай выделен с точки зрения решения уравнения Лапласа $(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = 0$, которое задает гармонические функции. Дело в том, что решением этого уравнения является произвольная аналитическая функция $g(z)$, где $z = x + iy$, а также по отдельности ее действительная и мнимая части. Это сразу дает обширный корпус решений двумерного уравнения Лапласа, а также позволяет значительно продвинуться в решении этого уравнения в ограниченной области с заданными граничными условиями. Поскольку не существует аналитических на всей комплексной плоскости функций, стремящихся к нулю на бесконечности, мы возвращаемся к утверждению об отсутствии гармонических функций на всей плоскости, стремящихся к нулю на бесконечности.

Разумеется, не случайно, что в двумерном случае функция Грина Лапласиана пропорциональна $\ln r$, что является действительной частью аналитической функции $\ln z$. Тот же факт, что Лапласиан $\ln r$ не просто равен нулю, а пропорционален δ -функции, связан с тем, что $z = 0$ является сингулярной точкой $\ln z$. Обобщая это наблюдение, следует сказать, что Лапласиан аналитической функции равен нулю в области ее аналитичности, вне сингулярных точек.

Задача о решении уравнения Лапласа в области произвольной геометрии с данными граничными условиями является достаточно трудной даже в двумерном случае. Мы проанализируем здесь случай, когда интересующая нас область является полуплоскостью $y > 0$. Поставим задачу об определении гармонической функции f , то есть функции, удовлетворяющей уравнению $(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = 0$, в полуплоскости $y > 0$, если задано ее значение при $y = 0$. В этом случае

$$f(x, y) = \int d\xi \frac{y}{\pi[(x - \xi)^2 + y^2]} f(\xi, 0). \quad (1.60)$$

Существуют различные способы вывода соотношения (1.60). Можно заметить, что $y/[(x - \xi)^2 + y^2] = -\text{Im}(x - \xi + iy)^{-1}$. Таким образом, функция f (1.60) является мнимой частью аналитической функции и, следовательно, гармонической функцией. Далее, при $y \rightarrow 0$ функция $(y/\pi)[(x - \xi)^2 + y^2]^{-1}$ стремится к $\delta(x - \xi)$, смотри раздел (4.1). Поэтому при $y \rightarrow 0$ функция (1.60) стремится к $f(x, 0)$, что и заканчивает доказательство (1.60).

Альтернативный способ доказательства (1.60) заключается в переходе к Фурье-преобразованию по x , который мы обозначим $\tilde{f}(q, y)$. Уравнение Лапласа для этой

величины имеет вид $(\partial_y^2 - q^2)\tilde{f} = 0$. Отсюда $\tilde{f}(q, y) = \exp(-|q|y)\tilde{f}(q, 0)$, то есть

$$f(x, y) = \int \frac{dq}{2\pi} \exp(iqx) \exp(-|q|y) \tilde{f}(q, 0).$$

Подставляя сюда $\tilde{f}(q, 0) = \int d\xi \exp(-iq\xi) f(\xi, 0)$ и беря интеграл по q , мы получаем (1.60).

Задача 1.2.12. Найти решение уравнения Лапласа f в полуплоскости $y > 0$, если $f(x, 0) = \exp(ix)$.

Обобщим выражение (1.60) на трехмерный случай. Будем считать, что уравнение Лапласа решается в полупространстве $z > 0$ и задано значение функции f на плоскости $z = 0$: $f(x, y, 0)$. Тогда в заданном полупространстве

$$f(x, y, z) = \int \frac{d\xi d\eta z f(\xi, \eta, 0)}{2\pi[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (1.61)$$

Действительно, определенная интегралом в правой части (1.61) функция является гармонической, что проверяется непосредственно. Кроме того, легко проверить, что при $z \rightarrow 0$ коэффициент при $f(\xi, \eta, 0)$ в подынтегральном выражении в правой части (1.61) стремится к $\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$.

Задача 1.2.13. Найти поведение функции (1.61) при больших z , считая, что $f(x, y, 0)$ локализована вблизи начала координат.

1.2.3 Уравнение Шрёдингера в Кулоновском поле

К задачам, рассмотренным нами выше, примыкают задачи на собственные функции уравнения Шрёдингера, в которых наряду с Лапласианом фигурирует потенциал внешнего поля U . Особенно интересен случай притягивающего потенциала, когда возможно образование связанных состояний, которые характеризуются волновыми функциями, локализованными в ограниченной области пространства. Конечно, в общем случае задача не имеет аналитического решения. Однако для ряда важных случаев это оказывается возможным. Здесь мы рассмотрим случай квантовой частицы, помещенной в притягивающий Кулоновский потенциал. Проблема известна, как задача об атоме водорода.

Изучим движение квантовой частицы в притягивающем Кулоновском потенциале. Обычно при ее исследовании используют единицы измерения, в терминах которых уравнение Шрёдингера на собственное значение записывается в следующем безразмерном виде

$$\left(\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{r} + E\right)\psi = 0, \quad (1.62)$$

где E – энергия состояния, а r – расстояние до притягивающего центра. Нас будут интересовать отрицательные значения энергии, соответствующие связанным состояниям.

Как известно, задача допускает разделение переменных, то есть волновая функция может быть записана в виде произведения радиальной функции R , зависящей от r , и угловой функции, зависящей от азимутального и полярного углов. Уравнение на радиальную функцию имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + 2E \right) R = 0, \quad (1.63)$$

где l – орбитальное квантовое число (целое неотрицательное). Вводя функцию $\Phi = r^{1+l}R$, мы получаем уравнение

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r} + E \right) \Phi = 0. \quad (1.64)$$

Рассмотрим сначала случай нулевого l :

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} + E \right) \Phi = 0, \quad (1.65)$$

Умножим уравнение (1.65) на r и сделаем преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[(p^2/2 + E)\tilde{\Phi} \right] = \tilde{\Phi}.$$

Нас будут интересовать связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии. Подставляя $E = -\alpha^2/2$, $\alpha > 0$, и решая полученное уравнение для $\tilde{\Phi}$, находим

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}. \quad (1.66)$$

Выражение (1.66) имеет сингулярность при $p = \alpha$, то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (4.27) должен идти справа от этой точки. Это означает, что при больших r функция $\Phi(r)$ ведет себя пропорционально $\exp(\alpha r)$. Это поведение не соответствует связанным состояниям. Исключением является случай $\alpha = 1/n$ (n – целое число), тогда особенность при $p = \alpha$ исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией $E = -1/(2n^2)$:

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-1}}{(p + 1/n)^{n+1}}. \quad (1.67)$$

Чтобы вычислить $\Phi(r)$, необходимо произвести обратное преобразование Лапласа $\tilde{\Phi}(p)$. Для функции (1.67) соответствующий интеграл сведется к вычету в точке $p = -1/n$. Таким образом, Φ будет пропорциональна $\exp(-r/n)$ с полиномиальным множителем, который возникает в силу того, что полюс (1.67) является кратным. Например, для основного состояния, то есть при $n = 1$, мы находим $\tilde{\Phi} \propto (p + 1)^{-2}$. Таким образом интегрирование в обратном преобразовании Лапласа сводится к взятию вычета в точке $p = -1$. Вычисляя этот вычет, находим $\Phi \propto r \exp(-r)$, то есть $R \propto \exp(-r)$.

Переходим теперь к случаю произвольного l . Умножим уравнение (1.64) на r и сделаем преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[(p^2/2 + E)\tilde{\Phi} \right] = \tilde{\Phi} - p\tilde{\Phi}.$$

При выводе последнего члена мы при интегрировании по частям учли, что $\Phi(0) = 0$ в силу определения $\Phi = r^{1+l}R$. Решая полученное уравнение, находим прямое обобщение (1.66)

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{(p^2 - \alpha^2)^{l+1}} \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha},$$

где, как и выше, $E = -\alpha^2/2$. Связанным состояниям соответствуют $\alpha = 1/n$. Итак

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-l-1}}{(p + 1/n)^{n+l+1}}, \quad (1.68)$$

что является прямым обобщением (1.67). Поскольку полюс в точке $p = -1/n$, который определяет значение Φ , является кратным, то, как и для случая нулевого орбитального квантового числа l , функция Φ будет пропорциональна $\exp(-r/n)$ с полиномиальным множителем.

Таким образом, воспользовавшись преобразованием Лапласа, мы воспроизвели основные результаты, касающиеся задачи об атоме водорода.

Задача 1.2.14. Найти радиальную функцию R связанного состояния атома водорода, соответствующего $n = 2$, $l = 0$.

Задача 1.2.15. Найти радиальную функцию R связанного состояния атома водорода, соответствующего $n = 2$, $l = 1$.

1.3 Динамические полевые задачи

Выше мы рассмотрели эволюционные задачи, где от времени зависит одна или несколько переменных. В то же время весьма распространенными в физике являются задачи, где от времени зависит поле, которое является функцией координат. Можно рассматривать пространства различной размерности d , конкретный выбор размерности зависит от физической задачи. В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые часто встречающиеся динамические полевые уравнения.

В ряде физических приложений возникают дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Примерами таких уравнений являются уравнение диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы. Это характерно для однородных времени и пространства. В то же время часто ситуация является неоднородной. Мы рассмотрим такой случай на примере уравнения Шрёдингера для частицы во внешнем короткодействующем потенциале.

1.3.1 Уравнение диффузии

В различных физических приложениях встречается уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u. \quad (1.69)$$

Это уравнение описывает, например, эволюцию плотности числа частиц или вариаций температуры. Но оно же описывает статистические свойства случайных блужданий.

Изучим свойства решения уравнения (1.69). В дальнейшем под решением уравнения мы обычно имеем в виду решение задачи Коши, то есть восстановление функции, подчиняющейся заданному уравнению, по ее начальному значению. Если не оговорено обратное, за начальный момент времени принимается $t = 0$.

Произведём Фурье-преобразование:

$$\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \int dy_1 \dots dy_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{y}) u(t, \mathbf{y}). \quad (1.70)$$

Тогда уравнение (1.69) приводит к уравнению $\partial \tilde{u} / \partial t = -q^2 \tilde{u}$ для Фурье-компоненты, которое имеет очевидное решение $\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{u}(0, \mathbf{q})$. Подставляя это выражение в интеграл Фурье

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{U}(t, \mathbf{q}), \quad (1.71)$$

обратный к соотношению (1.70), и беря интегралы по \mathbf{q} , мы находим

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] u(0, \mathbf{y}). \quad (1.72)$$

Соотношение (1.72) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

Задача 1.3.1. *Найти аналог представления (1.72) для одномерного поля $u(t, x)$, динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением $\partial \tilde{u} / \partial t = -|q| \tilde{u}$.*

Если начальное поле $u(0, \mathbf{x})$ локализовано вблизи начала координат, то есть если $u(0, \mathbf{x})$ достаточно быстро спадает при росте $|\mathbf{x}|$, то решение $u(t, \mathbf{x})$ обладает универсальной асимптотикой на больших временах. Чтобы установить эту асимптотику, мы рассмотрим времена $t \gg l^2$, где l – длина, на которой локализовано поле $u(0, \mathbf{x})$. Это означает, что интеграл (1.72) набирается в области $|\mathbf{y}| \lesssim l$. При этом условии можно пренебречь \mathbf{y} в экспоненте в (1.72). В результате мы заключаем, что при $t \gg l^2$

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (1.73)$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d u(0, \mathbf{y}). \quad (1.74)$$

Отметим, что приближение (1.73) соответствует постановке $u(0, \mathbf{y}) \rightarrow A\delta(\mathbf{y})$. Если для локализованного вблизи начала координат поля $u(0, \mathbf{x})$ интеграл A (1.74) равен нулю, то асимптотика $u(t, \mathbf{x})$ на больших временах будет уже иной. Раскладывая экспоненту в (1.72) по \mathbf{y} , мы находим следующий ведущий член разложения при $A = 0$:

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{B\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (1.75)$$

$$B = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} u(0, \mathbf{y}). \quad (1.76)$$

Выражения (1.73, 1.75) являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

Задача 1.3.2. *Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия: $u(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$. Сравните ответ с асимптотическим поведением (1.73).*

Задача 1.3.3. *Найти асимптотическое поведение решения одномерного диффузионного уравнения для следующих начальных условий: 1) $u(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$; 2) $u(0, x) = \exp(-|x|/l)$; 3) $u(0, x) = x \exp(-|x|/l)$; 4) $u(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}$; 5) $u(0, x) = x(x^2 + l^2)^{-2}$.*

Задача 1.3.4. *Найти асимптотическое поведение на больших временах для одномерного поля $u(t, x)$, динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением $\partial \tilde{u} / \partial t = -|q| \tilde{u}$.*

Рассмотрим уравнение диффузии с правой частью,

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \phi, \quad (1.77)$$

где ϕ имеет смысл источника частиц, плотность которых u в дальнейшем эволюционирует в соответствии с уравнением диффузии. Эта задача решается с помощью функции Грина G :

$$u(\tau, \mathbf{x}) = \int dt d^d \mathbf{y} G(\tau - t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(t, \mathbf{y}). \quad (1.78)$$

Учитывая однородность задачи по времени и пространству, мы сразу подставили функцию Грина, которая зависит только от разностей времен и координат. Функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$(\partial_t - \nabla_x^2)G(t, \mathbf{x}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}), \quad (1.79)$$

Мы уже фактически нашли решение этого уравнения, так как при $t > 0$ оно описывает свободную эволюцию, которое соответствует начальному условию $G(+0, \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$. Подставляя это начальное условие в (1.72), находим

$$G(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}\right). \quad (1.80)$$

Задача 1.3.5. Найдите решение уравнения (1.77) для $\phi = \theta(t) \exp[-x^2/(2l^2)]$ в четырехмерном случае.

Заметим, что соотношение (1.72) может быть переписано в виде

$$u(t, \mathbf{x}) = \int d^d y G(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(0, \mathbf{y}). \quad (1.81)$$

Справедливо также

$$u(t + \tau, \mathbf{z}) = \int d^d x G(\tau, \mathbf{z} - \mathbf{x}) u(t, \mathbf{x}).$$

Сравнивая это с прямым применением (1.81) к $u(t + \tau, \mathbf{z})$, находим

$$G(t + \tau, \mathbf{z} - \mathbf{y}) = \int d^d x G(t, \mathbf{z} - \mathbf{x}) G(\tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Это соотношение построено только на (1.81) и справедливо для любых функций Грина уравнений с первой производной по времени.

До сих пор мы рассматривали решение уравнения диффузии в неограниченном пространстве. Вообще говоря, можно решать его в ограниченной области пространства. В этом случае уравнение должно быть дополнено условиями на границе этой области. В качестве иллюстрации рассмотрим полупространство $x_1 > 0$. Если поле $u = 0$ при $x_1 = 0$, то задача решается при помощи функции Грина

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \quad (1.82)$$

$$\frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t}\right]$$

$$- \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(x_1 + z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t}\right].$$

Очевидно, что в полупространстве $x_1 > 0$ выражение (1.82) удовлетворяет уравнению (1.79), а также обращается в ноль при $x_1 = 0$. Отметим, что при решении задачи с граничным условием, которое заключается в равенстве при $x_1 = 0$ производной от u в направлении, перпендикулярном плоскости $x_1 = 0$, следует использовать функцию Грина, которая отличается от (1.82) знаком при втором члене.

Задача 1.3.6. Как будет вести себя изначально локализованное вблизи стенки $x_1 = 0$ решение уравнения диффузии на больших временах, если на стенке $u = 0$.

1.3.2 Уравнение Шрёдингера

В квантовой механике состояние частицы определяется ее волновой функцией ψ , которая является комплексным полем, зависящим от времени и координат. Уравнение, которому подчиняется волновая функция квантовой частицы во внешнем поле с потенциалом U , имеет вид

$$i\partial_t \psi = -\nabla^2 \psi + U\psi = 0. \quad (1.83)$$

В дальнейшем мы считаем, что потенциал U не зависит от времени и стремится к нулю при стремлении координат к бесконечности.

Уравнение (1.83) можно рассматривать, как условие экстремума действия

$$S = \int dt d\mathbf{r} (-i\psi^* \partial_t \psi + \nabla\psi^* \nabla\psi + U\psi^* \psi). \quad (1.84)$$

Здесь ψ^* означает величину, комплексно сопряженную к ψ . Поскольку ψ имеет две независимые компоненты, при варьировании действия S поля ψ и ψ^* можно считать независимыми величинами. Варьирование действия (1.84) по ψ^* и дает (1.83).

Действие (1.84) относится к типу (4.69), рассмотренному в разделе 4.6. Это действие, очевидно, инвариантно относительно сдвига фазы ψ , что ведет к закону сохранения величины $\int d\mathbf{r} |\psi|^2$, которая имеет смысл полной вероятности найти частицу в какой-либо точке пространства, и потому должна быть равна единице. Помимо упомянутого закона сохранения, запись уравнения (1.83), как экстремума действия (1.84), гарантирует закон сохранения энергии (смотри раздел 4.6), которая записывается в виде интеграла

$$\int d\mathbf{r} (\nabla\psi^* \nabla\psi + U\psi^* \psi). \quad (1.85)$$

Импульс же системы, вообще говоря, не сохраняется, поскольку наличие зависящего от координат потенциала нарушает пространственную однородность системы.

Если внешний потенциал U равен нулю, то мы получаем из (1.83) уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi, \quad (1.86)$$

которое похоже на уравнение диффузии (1.69). Рассмотрим задачу Коши для уравнения (1.86). Как и в случае с уравнением диффузии, для ее решения эффективно использовать преобразование Фурье, поскольку в Фурье-представлении эволюционная задача решается явно. Переходя затем обратно к пространственному представлению, находим выражение

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi it)^{d/2}} \exp\left[i\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] \psi(0, \mathbf{y}), \quad (1.87)$$

аналогичное (1.72).

Однако имеется и существенное различие между выражениями (1.72) и (1.87). В то время как не существует интегрального представления, позволяющего восстановить $u(0, \mathbf{x})$ по $u(t, \mathbf{x})$, выражение (1.87) допускает обращение по времени:

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi it)^{d/2}} \exp\left[-i\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] \psi(t, \mathbf{y}).$$

Это связано с различным характером процессов, описываемых уравнениями (1.69) и (1.86). Уравнение диффузии (1.69) описывает диссипативный процесс, ведущий к

расплыванию со временем локализованных полей, смотри выражения (1.73,1.75). Поэтому уравнение диффузии (1.69) не допускает обращения времени. Уравнение же Шрёдингера (1.86), как, впрочем, и уравнение (1.83), обращение времени допускает: оно инвариантно относительно замены $t \rightarrow -t$, $\psi \rightarrow \psi^*$. Поэтому наряду с прямым выражением (1.87) работает и обратное ему выражение.

Задача 1.3.7. Найти для свободного уравнения Шрёдингера асимптотические выражения, аналогичные (1.73,1.75).

Задача 1.3.8. Найти решения одномерного свободного уравнения Шрёдингера для следующих начальных условий: 1) $\psi(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$; 2) $\psi(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$.

Поскольку уравнение (1.83) однородно по времени, можно изучать его решения $\psi \propto \exp(-iEt)$, где E – энергия соответствующего состояния. Указанная подстановка ведет к уравнению

$$E\psi = -\nabla^2\psi + U\psi. \quad (1.88)$$

Характер этих решений существенно зависит от знака E . Если $E > 0$, то на больших расстояниях, где потенциалом U можно пренебречь, мы возвращаемся к свободному уравнению Шрёдингера (1.86), решениями которого являются плоские волны. Об этом случае говорят, как о непрерывном спектре. В случае же $E < 0$ могут существовать решения, локализованные в области присутствия потенциала U , такие состояния называют связанными. Они реализуются в случае притягивающего потенциала, когда $U < 0$.

Мы проиллюстрируем особенности этого случая на простейшем примере одномерного уравнения Шрёдингера для частицы в короткодействующем притягивающем потенциале, сосредоточенном вблизи начала координат. Соответствующее уравнение имеет вид

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \partial_x^2\psi + 2\kappa\delta(x)\psi, \quad (1.89)$$

где $\kappa > 0$. Уравнение (1.89) является уравнением Шрёдингера (1.83) с потенциалом $U = -2\kappa\delta(x)$.

Решая уравнение (1.88), можно найти набор собственных функций для уравнения (1.89):

$$\chi(x) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \exp(-\kappa|x|), \quad E = -\kappa^2, \quad (1.90)$$

$$\phi(q, x) = \sin(qx), \quad E = q^2, \quad q > 0, \quad (1.91)$$

$$\eta(q, x) = \cos(q|x| + \varphi), \quad E = q^2, \quad q > 0, \quad \tan \varphi = \kappa/q. \quad (1.92)$$

Функция (1.90) относится к связанному состоянию, а функции (1.91,1.92) – к непрерывному спектру. Функция (1.90) нормирована на единичную вероятность, то

есть $\int dx \chi^2 = 1$. Нормировку функций непрерывного спектра можно найти из соотношений (4.5):

$$\int dx \phi(q, x)\phi(k, x) = \pi\delta(q - k), \quad (1.93)$$

$$\int dx \eta(q, x)\eta(k, x) = \pi\delta(q - k). \quad (1.94)$$

В соответствии с общими свойствами уравнения Шрёдингера (смотри раздел 4.3), функции χ, ϕ, η ортогональны друг другу.

Задача 1.3.9. Непосредственно проверить ортогональность χ и η .

Чтобы найти решение уравнения (1.89) с данным начальным условием $\psi(0, x)$, следует разложить его по собственным функциям χ, ϕ, η :

$$\psi(0, x) = a\chi + \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} [\alpha(q)\phi + \beta(q)\eta]. \quad (1.95)$$

После этого решение уравнения (1.89) записывается в виде

$$\begin{aligned} \psi(t, x) &= a\chi(x) \exp(ik^2t) \\ &+ \int_0^\infty dq \pi \alpha(q) \phi(q, x) \exp(-iq^2t) \\ &+ \int_0^\infty dq \pi \beta(q) \eta(q, x) \exp(-iq^2t). \end{aligned} \quad (1.96)$$

Разложение произвольной функции $\psi(0, x)$ (1.95) можно найти при помощи соотношений (1.93,1.94):

$$a = \int dx \psi(0, x)\chi(x), \quad (1.97)$$

$$\alpha(q) = \int dx \psi(0, x)\phi(q, x),$$

$$\beta(q) = \int dx \psi(0, x)\eta(q, x).$$

Если функция $\psi(0, x)$ была первоначально локализована вблизи начала координат, то ее ‘часть’ $a\chi$, связанная с дискретным спектром, остается локализованной вблизи начала координат, а ее часть, связанная с непрерывным спектром, постепенно расплывается.

Задача 1.3.10. Найти коэффициент a разложения (1.95) для функции $\psi(0, x) = \exp(-b|x|)$.

1.3.3 Волновое движение

Волновое движение весьма распространено в природе. Оно реализуется тогда, когда диссипация в системе относительно слаба, и потому отклонение ее от равновесия приводит к колебательным движениям. Распространение колебаний в пространстве и представляет собой волновое движение. Мы будем считать его амплитуду

достаточно малой для того, чтобы волны можно было описывать в линейном приближении.

Хорошо известно волновое уравнение

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2)u = 0, \quad (1.98)$$

где c – скорость волны. Это уравнение описывает распространение звука или света. Отметим, что уравнение (1.98) содержит дифференциальный оператор второго порядка с разными знаками при вторых производных. Такого рода дифференциальный оператор называют гиперболическим. Гиперболические операторы встречаются обычно именно в контексте волновых процессов.

Задача 1.3.11. Как записывается решение волнового уравнения (1.98) в одномерном случае?

В силу однородности уравнения (1.98) имеет смысл сделать Фурье-преобразование по пространству (смотри раздел 4.2.1). Тогда (1.98) приводит к уравнению

$$\partial_t^2 \tilde{u}(\mathbf{q}) = -c^2 q^2 \tilde{u}(\mathbf{q}). \quad (1.99)$$

Мы уже анализировали подобное уравнение, смотри раздел 1.1.2. Воспользовавшись приведенным там результатом, мы запишем решение задачи Коши для уравнения (1.99) в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{q}) = w_1(\mathbf{q}) \exp(-icqt) + w_2(\mathbf{q}) \exp(icqt). \quad (1.100)$$

Здесь функции $w_1(\mathbf{q})$, $w_2(\mathbf{q})$ определяются начальными условиями, которые формулируются в терминах поля u и его первой производной по времени.

Задача 1.3.12. Как выглядит Фурье-преобразование (1.100) по времени?

Отметим, что мы уже сталкивались с представлением, подобным (1.100), в контексте уравнения Шрёдингера для свободной частицы (1.86). В этом случае

$$\tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \tilde{\psi}(0, \mathbf{q}) \exp(-iq^2 t). \quad (1.101)$$

Наличие всего одного слагаемого в выражении (1.101) связано с первым порядком по времени уравнения (1.86). Тем не менее, это уравнение является полноценным волновым уравнением.

В более общем случае волнового движения в однородном случае для волнового поля справедливо представление типа (1.100) или (1.101) (в зависимости от порядка уравнения по времени), где экспоненты имеют вид $\exp[\pm i\varpi(q)t]$, где $\varpi(q)$ называется законом дисперсии. Для звуковых волн $\varpi = cq$, а для уравнения Шрёдингера (1.86) $\varpi = q^2$. Приведем более сложный закон дисперсии

$$\varpi^2 = gq + (\sigma/\rho)q^3, \quad (1.102)$$

который реализуется для волн, распространяющихся на поверхности жидкости. Здесь g – ускорение свободного падения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, и ρ – плотность жидкости. В предельном случае

гравитационных волн (малые q) выражение (1.102) дает $\varpi = \sqrt{gq}$, а в предельном случае капиллярных волн (большие q) выражение (1.102) дает $\varpi = (\sigma/\rho)^{1/2} q^{3/2}$. Отношение $\varpi(q)/q$ называется фазовой скоростью волны.

Рассмотрим теперь случай волнового поля u , когда $\tilde{u}(\mathbf{q})$ локализовано около волнового вектора \mathbf{q}_0 (или около волновых векторов $\pm \mathbf{q}_0$, что неизбежно для действительного поля). В этом случае в t, \mathbf{r} -представлении

$$u = \Psi(t, \mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{q}_0 \mathbf{r}), \quad (1.103)$$

где $\omega_0 = \varpi(q_0)$ и (комплексная) амплитуда ψ меняется на временах много больше ω_0^{-1} и на масштабах много больше q_0^{-1} . Если поле u является действительным, то в качестве u следует брать действительную часть правой части (1.103). Функцию ψ в (1.103) обычно называют огибающей (envelop).

В Фурье-представлении $\partial_t \tilde{u} = -i\varpi u$. Переходя в этом соотношении к \mathbf{r} -представлению, находим для огибающей

$$\partial_t \Psi = -i[\varpi(\mathbf{q}_0 - i\nabla) - \varpi(\mathbf{q}_0)]\Psi. \quad (1.104)$$

Поскольку огибающая Ψ меняется на масштабах много больших q_0^{-1} , разность в (1.104) можно разложить в ряд Тейлора по ∇ . В первом порядке находим

$$(\partial_t + \mathbf{V}\nabla)\Psi = 0, \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0). \quad (1.105)$$

Стоящая здесь величина \mathbf{V} называется групповой скоростью волны.

Задача 1.3.13. Найти выражение для групповой скорости поверхностных волн с законом дисперсии (1.102).

Уравнение (1.105) является уравнением, которое содержит производные не выше первого порядка и, следовательно, может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4. В данном случае скорость \mathbf{V} является константой, и решение (1.105) легко выписывается явно

$$\Psi = b(\mathbf{r} - \mathbf{V}t), \quad (1.106)$$

где b – произвольная функция. Другими словами, Ψ не меняется в системе отсчета, которая движется относительно лабораторной с групповой скоростью.

Если в уравнении на исходную переменную u присутствует источник с частотами вблизи ω_0 и волновыми векторами вблизи \mathbf{q}_0 , то мы получаем вместо (1.105)

$$(\partial_t + \mathbf{V}\nabla)\Psi = \phi. \quad (1.107)$$

Это уравнение легко решается методом характеристик, смотри раздел 4.4. В результате находим

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = b(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + \int^t d\tau \phi(\tau, \mathbf{r} + \mathbf{V}\tau - \mathbf{V}t). \quad (1.108)$$

Задача 1.3.14. Найдите решение уравнения (1.107) в одномерном случае для нулевых начальных условий и $\phi = A \cosh^{-2}(x)$.

Поскольку решение (1.106) не предполагает никакой эволюции волнового пакета в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, уравнение (1.105) следует уточнить. Для этого разность в уравнении (1.104) следует разложить до второго порядка по ∇ , что дает

$$-i \frac{d}{dt} \Psi = \left[\frac{V}{2q_0} \nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial q_0} \partial_x^2 \right] \Psi, \quad (1.109)$$

где ось X направлена вдоль \mathbf{q}_0 , а ∇_{\perp} действует в перпендикулярной к оси X плоскости. В уравнении (1.109) $d/dt = \partial_t + V \partial_x$, это производная по времени в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью \mathbf{V} . Если обе величины, V и $\partial v / \partial q_0$, положительны, то уравнение (1.109) перемасштабированием переменных может быть сведено к свободному уравнению Шрёдингера (1.86). Если же V и $\partial v / \partial q_0$ имеют разные знаки, то мы имеем в правой части (1.109) гиперболический дифференциальный оператор. Например, это имеет место для гравитационных волн с законом дисперсии $\varpi = \sqrt{gq}$.

Задача 1.3.15. Найдите аналог представления (1.87) для уравнения $-i \partial_t \psi = (\partial_x^2 - \partial_y^2) \psi$.

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

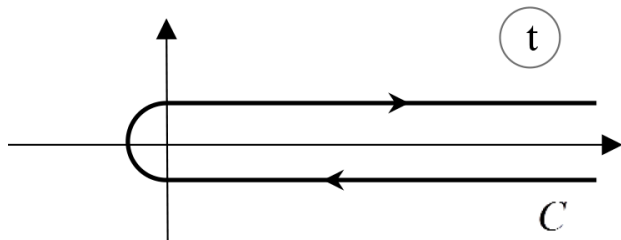


Рис. 2.1: Контур интегрирования в интегральном представлении гамма-функции

Специальные функции были введены для описания случаев, когда элементарных функций оказывается недостаточно. Мы даем сведения только о самых распространенных специальных функциях. Как правило, эти функции являются решениями дифференциальных уравнений, которые в силу своей универсальности часто возникают в самых разных физических приложениях.

2.1 Гамма-функция Эйлера

На практике довольно часто возникают случаи, когда требуется взять интеграл, содержащий комбинацию экспоненциальной и степенной функций. Такого сорта интегралы сводятся к так называемой Гамма-функции $\Gamma(x)$, которая была введена Эйлером еще в 18 веке. Гамма-функция определяется следующим интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (2.1)$$

Интеграл (2.1) сходится при любом положительном z , или, если речь идет о функции комплексной переменной, при любом z с положительной действительной частью. Интеграл (2.1) легко вычисляется путем многократного интегрирования по частям при целом положительном $z = n$. В этом случае получается $\Gamma(n) = (n-1)!$. Поэтому можно сказать, что Гамма-функция является обобщением факториала на случай произвольного комплексного n . Отметим также значение $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, которое может быть получено из (2.1), если перейти к интегрированию по \sqrt{t} . Однократное интегрирование по частям в выражении (2.1) дает соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (2.2)$$

которое также является обобщением соответствующего свойства факториала.

Задача 2.1.1. Найти площадь единичной сферы в d -мерном пространстве.

При $z \rightarrow 0$ значение интеграла (2.1) неограниченно возрастает. Это означает, что при $z = 0$ функция $\Gamma(z)$ имеет особенность. Чтобы установить характер этой особенности и, более общо, продолжить аналитически $\Gamma(z)$ на z с отрицательной действительной частью, можно использовать модификацию интеграла (2.1)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (2.3)$$

где контур C изображен на рисунке 2.1.

В выражении (2.3) предполагается, что t^z задано ветвью с разрезом вдоль действительной оси, причем на верхнем берегу разреза аргумент t^z равен нулю (то есть t^z действительно), а контур C обходит этот разрез, приходя из $+\infty$ снизу разреза и уходя в $+\infty$ сверху разреза. Если $\operatorname{Re} z > 0$, то контурный интеграл (2.3) может быть сведен к сумме интегралов по верхнему и нижнему берегам разреза, причем интеграл по верхнему берегу разреза совпадает с интегралом (2.1), а интеграл по верхнему берегу разреза отличается от интеграла (2.1) множителем $-\exp(2\pi iz)$. Отсюда и получается выражение (2.3).

Правая часть соотношения (2.3) определена и для z с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на эту область переменной z . Контурный интеграл в (2.3) не имеет особенностей в плоскости z . Следовательно, особенности функции $\Gamma(z)$ определяются разностью $1 - \exp(2\pi iz)$, которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных) z . При положительных целых z в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталья. В любом случае, $\Gamma(z)$ не имеет особенностей при целых положительных z , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных z контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюса.

Задача 2.1.2. Найти контурное представление $\Gamma(z)$ в терминах $(-t)^{z-1} e^{-t}$.

Задача 2.1.3. Показать, что

$$\int_0^{\infty} du u^{z-1} \cos u = \cos(\pi z/2) \Gamma(z), \quad (2.4)$$

$$\int_0^{\infty} du u^{z-1} \sin u = \sin(\pi z/2) \Gamma(z). \quad (2.5)$$

Установить область применимости этих выражений.

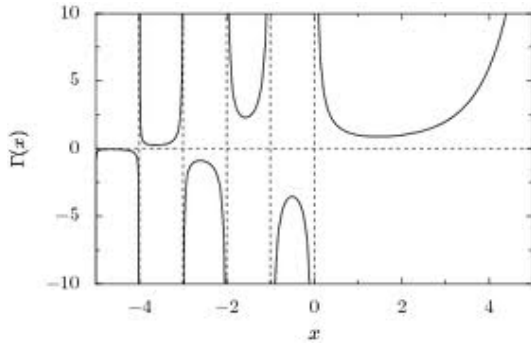


Рис. 2.2: Гамма-функция Эйлера.

Найдем вычеты функции $\Gamma(z)$ в полюсах $z = 0, -1, -2, \dots$. При $z = -n$ (n – целое неотрицательное) контурный интеграл в (2.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\operatorname{res} \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}. \quad (2.6)$$

График зависимости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 2.2. В точках $x = -n$ функция Γ стремится к бесконечности.

Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции $\Gamma(z)$ при больших положительных значениях z , воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 4.5.1. Для этого в интеграле (2.1) произведем замену $t \rightarrow tz$, которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (4.48). Стоящая в экспоненте функция $\ln t - t$ достигает максимума в точке $t = 1$. Используя теперь приближение (4.49), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z). \quad (2.7)$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших n) выражение для факториала $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (2.7) справедлива и для комплексных z при условии большого положительного значения действительной части z .

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (2.8)$$

где действительные части α и β предполагаются положительными. Для доказательства соотношения (2.8) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по s с весом e^{-s} , мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных $s = x + y$ сводит правую часть к произведению интегралов по x по y , которые дают произведение $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. Таким образом, мы приходим к соотношению (2.8).

Задача 2.1.4. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi.$$

Задача 2.1.5. Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Выведем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (2.9)$$

Для этого запишем левую часть (2.9), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}.$$

Произведя здесь замену $s = t\zeta$ и взяв интеграл по t , мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по ζ , следует преобразовать его в контурный

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta},$$

где контур C изображен на рисунке 2.1. После этого контур можно деформировать, загибая его ‘усы’ в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке $\zeta = -1$, что и дает выражение, стоящее в правой части (2.9).

Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные z . В частности, соотношение (2.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (2.6). Как следует из соотношения (2.9), $\Gamma^{-1}(z)$ не имеет полюсов в плоскости z , то есть $\Gamma(z)$ нигде не обращается в ноль.

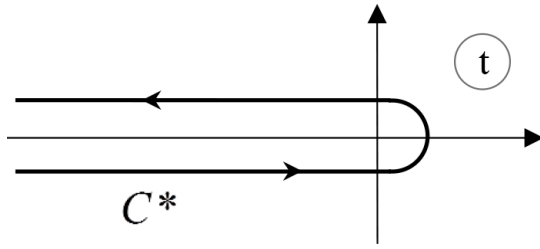


Рис. 2.3: Контур интегрирования вдоль отрицательной полуоси.

Задача 2.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t, \quad (2.10)$$

где контур C^* изображен на рисунке 2.3.

Задача 2.1.7. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

Задача 2.1.8. Найти $|\Gamma(1/2 + ix)|$, где x действительное число.

2.2 Функция Эйри

В данном разделе мы анализируем решения уравнения Эйри (Airy)

$$d^2 Y/dx^2 - xY = 0, \quad (2.11)$$

которое возникает в ряде физических приложений. Пожалуй, наиболее важным применением уравнения Эйри является определение поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом. Решения уравнения (2.11) демонстрируют ряд универсальных особенностей этого поведения.

Уравнение Эйри (2.11) относится к классу уравнений (4.32), решения которых могут быть проанализированы при помощи метода Лапласа. Для этого составляем функции (4.35)

$$P(t) = t^2, \quad Q(t) = -1.$$

Далее находим из (4.36) $Z = -\exp(-t^3/3)$. Подставляя это выражение в (4.33), находим общее решение уравнения Эйри (2.11)

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp(xt - t^3/3). \quad (2.12)$$

Контур C в представлении (2.12) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (2.12) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур C должен приходить из бесконечности и

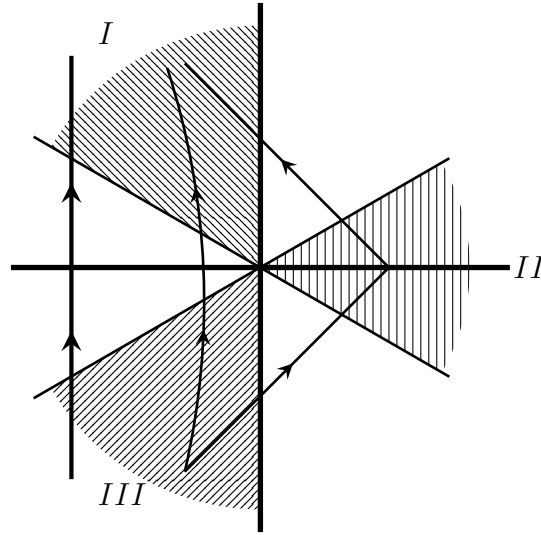


Рис. 2.4: Возможные контуры, по которым идет интегрирование в интегральном представлении функции Эйри.

уходить в бесконечность. Поскольку поведение $\exp(xt - t^3/3)$ в бесконечности определяется фактором $-t^3$, имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (2.12) стремится к нулю: $-\pi/6 < \text{Arg } t < \pi/6$, $\pi/2 < \text{Arg } t < 5\pi/6$, $7\pi/6 < \text{Arg } t < 3\pi/2$, смотри рисунок 2.4, сектора I, II, III. Контур C должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равна, очевидно, нулю. Таким образом, имеется две независимые возможности, что соответствует второму порядку уравнения Эйри, которое должно иметь два независимых решения.

Решению, которое остается конечным при $x \rightarrow \pm\infty$ соответствует контур, идущий из сектора III в сектор I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 2.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы $\exp(xt - t^3/3)$ стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение $t = iu$, мы сводим этот интеграл к виду

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \cos(xu + u^3/3), \quad (2.13)$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (2.13) функция называется функцией Эйри первого

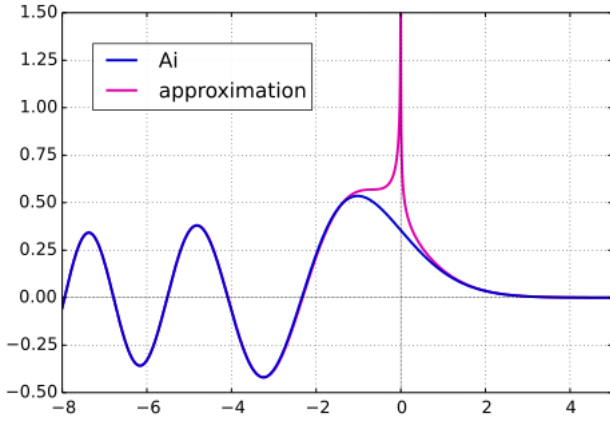


Рис. 2.5: Функция Эйри с асимптотиками.

рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях $|x|$. При больших отрицательных x в интеграле (2.13) имеется точка стационарной фазы $u = \sqrt{|x|}$, окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших $|x|$. Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 4.5.1), находим, используя (4.52)

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.14)$$

При больших положительных x стационарная точка в интеграле (2.13) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp(tx - t^3/3).$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 4.5. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку $t = -x^{1/2}$ (смотри вертикальную прямую на рисунке 2.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (4.55), находим

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad (2.15)$$

График зависимости функции Эйри от x приведен на рисунке 2.5. На этом же графике красным цветом приведены асимптотики (2.14, 2.15).

В качестве второго решения уравнения Эйри (2.11) выбирают обычно функцию

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \left[\exp(xu - u^3/3) + \sin(xu + u^3/3) \right], \quad (2.16)$$

которая называется функцией Эйри второго рода. Выражение для Bi получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в

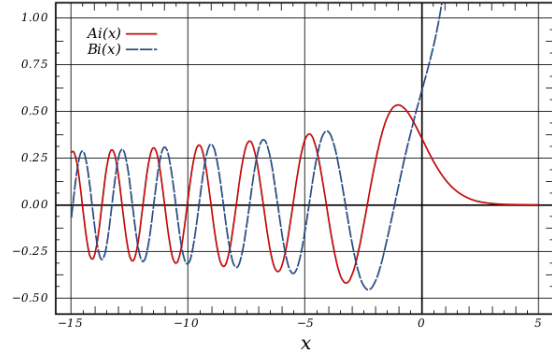


Рис. 2.6: Функции Эйри первого и второго рода.

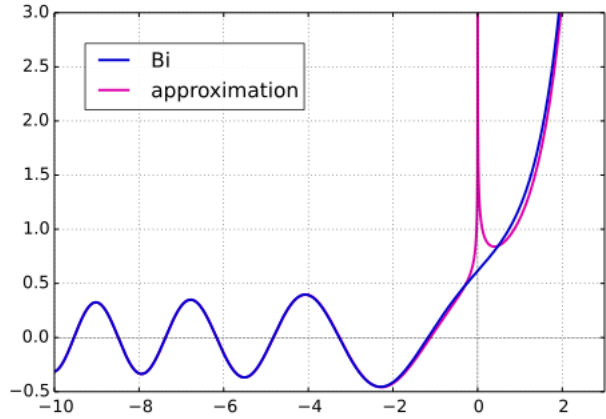


Рис. 2.7: Функция Эйри второго рода с асимптотиками.

сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (2.16). Коэффициент в (2.16) традиционен. Сравнение функций Эйри Ai и Bi проведено на рисунке 2.6.

Задача 2.2.1. Найти значения $\text{Ai}(0)$, $\text{Ai}'(0)$, $\text{Bi}(0)$, $\text{Bi}'(0)$.

Асимптотическое поведение функции Bi при больших положительных значениях аргумента определяется выражением

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad (2.17)$$

Асимптотическое поведение функции Bi при больших отрицательных значениях аргумента определяется выражением

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.18)$$

Сравнение функции $\text{Bi}(x)$ и ее асимптотик приведены на рисунке 2.7.

Задача 2.2.2. Получить асимптотическое поведение функции $\text{Bi}(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

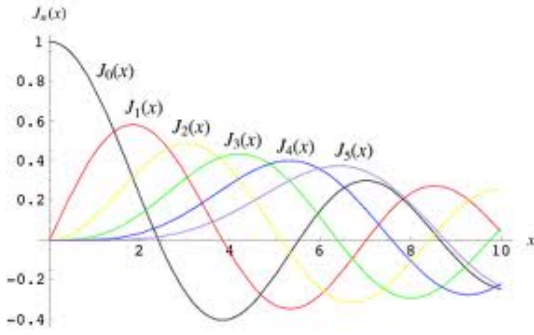


Рис. 2.8: Несколько первых функций Бесселя.

2.3 Функции Бесселя

Функции Бесселя удивительным образом возникают в самых различных задачах математической физики. Они естественным образом присутствуют в задачах теории поля, когда речь идет о зависящих от двух координат решениях уравнения типа Гельмгольца (1.49), описывающего, например, различные электромагнитные и акустические явления. Однако область применимости функций Бесселя отнюдь не ограничивается этими проблемами, они оказываются полезными в очень широком круге приложений, чем и определяется важность этих функций.

Решение уравнения (1.49) можно разложить по плоским волнам, зависимость поля от координат в плоской волне определяется фактором $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где \mathbf{k} — волновой вектор, а $\mathbf{r} = (x, y)$ — радиус-вектор. Однако часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат r, φ , где r — расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а φ — полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла φ скалярное произведение $\mathbf{k}\mathbf{r} = rk \sin \varphi$.

Функции Бесселя являются коэффициентами разложения $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ в ряд Фурье по угловым гармоникам:

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\varphi), \quad (2.19)$$

где $z = kr$. Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 2.8. Добавляя π к φ , находим

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(z) \exp(in\varphi).$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z) \exp(in\varphi),$$

мы заключаем, что $J_{-n} = (-1)^n J_n$.

Задача 2.3.1. Получить соотношение

$$\int_0^\infty dr \, r J_n(kr) J_n(qr) = k^{-1} \delta(k - q).$$

Указание: воспользоваться соотношением (2.19) и Фурье-представлением двумерной δ -функции.

Подставляя в выражение (2.19) $t = e^{i\varphi}$, находим ряд Лорана по t

$$\exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n. \quad (2.20)$$

Здесь t может быть произвольным комплексным числом. Дифференцируем соотношение (2.20) по z , что дает

$$\frac{1}{2}(t - 1/t) \exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z) t^n.$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (2.20) и собирая коэффициенты при степенях t , находим

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)]. \quad (2.21)$$

Дифференцируем соотношение (2.20) по t , что дает

$$\frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \exp\left[\frac{z}{2}(t - 1/t)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(z) t^{n-1}.$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (2.20) и собирая коэффициенты при степенях t , находим

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z). \quad (2.22)$$

Комбинируя (2.21) и (2.22), находим

$$\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z), \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{J_n(z)}{z^n} = -\frac{J_{n+1}(z)}{z^n}. \quad (2.24)$$

В частности, $dJ_0/dz = -J_1$. Из (2.23) следует соотношение $z^{-2n+1} \frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^{-n+1} J_{n-1}(z)$. Дифференцируя его по z и применяя (2.24), находим замкнутое уравнение на J_n

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2} J_n = 0, \quad (2.25)$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (1.34).

Выписывая обратное преобразование Фурье к (2.19), находим следующее представление функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta), \end{aligned} \quad (2.26)$$

которое называется представлением Парсеваля. При получении второго равенства в (2.26) мы воспользовались

тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того, что мнимая часть $\exp(iz \sin \theta - in\theta)$ антисимметрична по θ , и что косинус является четной функцией. Отметим, что представление (2.26) автоматически приводит к соотношению $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Задача 2.3.2. Доказать правила дифференцирования (2.21), исходя из соотношения (2.26).

Раскладывая правую часть соотношения (2.26) по z , мы заключаем что при $n > 0$ первый член разложения по z равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin \theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!}. \quad (2.27)$$

Следующие члены разложения функции Бесселя по z можно найти из того же выражения (2.26). В результате мы получаем следующий ряд Тейлора для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (2.28)$$

Отметим, что это ряд по целым степеням z , который содержит только четные или только нечетные степени z , в зависимости от четности n .

Задача 2.3.3. Построить разложение в ряд (2.28), исходя из соотношения (2.26).

Ряд (2.28) абсолютно сходится при всех действительных z , поскольку отношение коэффициентов при степенях $(z/2)^{n+2m+2}$ и $(z/2)^{n+2m}$ равно $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$, то есть стремится к нулю с ростом m . Таким образом, ряд (2.28) определяет функцию Бесселя при всех действительных z . Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением $J_n(z)$ с действительных z . Поскольку ряд (2.28) является абсолютно сходящимся, то функция $J_n(z)$ не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного z . В то же время бесконечность является существенной особой точкой функции Бесселя $J_n(z)$.

Рассмотрим случай малых z , $z \ll 1$. В этом случае третьим слагаемым в уравнении (2.25) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0, \quad (2.29)$$

которое имеет степенные решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$. Обратим внимание на причину, по которой уравнение (2.29) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании $z \rightarrow Az$, где A — произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (2.29) преобразуются одинаковым образом, то есть уравнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (2.29), которые при преобразовании

$z \rightarrow Az$ переходят в себя с точностью до множителя, именно такими являются степенные решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$.

Поскольку уравнение Бесселя (2.25) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (2.29), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$ определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (2.25) при малых z . Обратим внимание на то, что при $n > 0$ решение g_2 сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при $z \rightarrow 0$. Поэтому, если функция g регулярна в нуле, то ее поведение определяется g_1 , то есть $g \propto z^n$ при малых z . Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (2.25). Такими решениями являются функции Бесселя $J_n(z)$, первый член разложения которой по z определяется (2.27).

Заметим, что при $n = 0$ оба решения уравнения (2.29), $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$, совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (2.29), в котором надо положить $n = 0$. Это уравнение является уравнением первого порядка для dg/dz , решением которого, очевидно, является $dg/dz = C_1/z$, где C_1 — произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение $g = C_2 + C_1 \ln z$, где C_2 — вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при $n = 0$ имеется два решения уравнения (2.29), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Решение уравнения (2.29) при $n = 0$, которое является регулярным в нуле, пропорционально $J_0(z)$.

Соотношение (2.26) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях z . В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 4.5.1. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по θ в выражении (2.26), что дает $z \cos \theta_0 = n$. Таким образом, в силу большого значения z стационарная фаза близка к $\pi/2$ (что предполагает неравенство $z \gg n$). Используя выражение для приближения стационарной фазы (4.52), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (2.30)$$

Таким образом, $J_n(z)$ стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Задача 2.3.4. Найти асимптотическое выражение функции Бесселя при больших по абсолютной величине отрицательных z .

Введем функции $f(\lambda, z) = \sqrt{z} J_n(\lambda z)$. Эти функции вследствие (2.25) удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{n^2 - 1/4}{z^2}\right) f = -\lambda^2 f. \quad (2.31)$$

Обратим внимание на то, что здесь стоит оператор Штурма-Лиувилля (1.34) с $Q = 0$. Прямым следствием уравнения (2.31) является

$$f(\lambda, z)f''(\mu, z) - f''(\lambda, z)f(\mu, z) = (\lambda^2 - \mu^2)f(\lambda, z)f(\mu, z).$$

Интегрируя это соотношение на интервале от нуля до единицы, мы находим

$$\int_0^1 dz f(\lambda, z)f(\mu, z) = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [f(\lambda, 1)f'(\mu, 1) - f'(\lambda, 1)f(\mu, 1)].$$

Перепишем это соотношение в терминах функций Бесселя

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz z J_n(\lambda z) J_n(\mu z) \\ &= \frac{J_n(\lambda)\mu J_n'(\mu) - J_n(\mu)\lambda J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \\ &= -\frac{J_n(\lambda)\mu J_{n+1}(\mu) - J_n(\mu)\lambda J_{n+1}(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где мы использовали соотношение (2.24). Устремляя здесь $\mu \rightarrow \lambda$ и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталя, мы находим

$$\int_0^1 dz z J_n^2(\lambda z) = \frac{1}{2} [J_{n+1}^2(\lambda) - J_n^2(\lambda)] + \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda), \quad (2.33)$$

где мы использовали соотношения (2.23, 2.24).

Рассмотрим граничную задачу, когда функция f подчиняется уравнению (2.31), ее значение при $z = 1$ равно нулю и она регулярна в нуле. В этом случае из набора $f(\lambda, z)$ следует выделить функции с $\lambda = \gamma_k$, где γ_k – нули функции Бесселя J_n : $J_n(\gamma_k) = 0$. Обозначим эти функции f_k , $f_k(z) = \sqrt{z} J_n(\gamma_k z)$. Как следует из уравнения (2.32), функции f_k ортогональны: $\int_0^1 dz f_k(z) f_m(z) = 0$, если $k \neq m$. Впрочем, это свойство следует также и из самосопряженности оператора в левой части уравнения (2.31) на классе функций f_k (с нулевыми условиями на границе). Нормировку функций f_k можно найти из соотношения (2.33), которое для $\lambda = \gamma_k$ дает

$$A_k = \int_0^1 dz z J_n^2(\gamma_k z) = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k). \quad (2.34)$$

Функции f_k составляют полный набор для класса функций, обращающихся в ноль при $z = 1$. Поэтому такие функции можно разложить в ряд:

$$F(z) = \sum_k C_k \sqrt{z} J_n(\gamma_k z), \quad (2.35)$$

$$C_k = A_k^{-1} \int_0^1 dz \sqrt{z} J_n(\gamma_k z) F(z). \quad (2.36)$$

Задача 2.3.5. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z).$$

Задача 2.3.6. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z).$$

Указание: воспользоваться соотношением $dJ_0/dz = -J_1$.

Задача 2.3.7. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz z \exp(-p^2 z^2) J_0(z).$$

Задача 2.3.8. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

Задача 2.3.9. Разложить функцию $\sqrt{z} J_1(z) - z^{3/2} J_1(1)$ на интервале $(0, 1)$ в ряд по $\sqrt{z} J_1(\gamma_k z)$ (то есть найти коэффициенты этого разложения).

2.4 Полиномы Лежандра

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого U зависит только от расстояния r до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда $1/R$ равен нулю, $\nabla^2(1/R) = 0$. Здесь R – расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку $(0, 0, 1)$ и перейдем к сферической системе координат r, θ, φ . В этом случае $R = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$. Условие же $\nabla^2 R^{-1} = 0$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R^{-1} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta} \right) = 0.$$

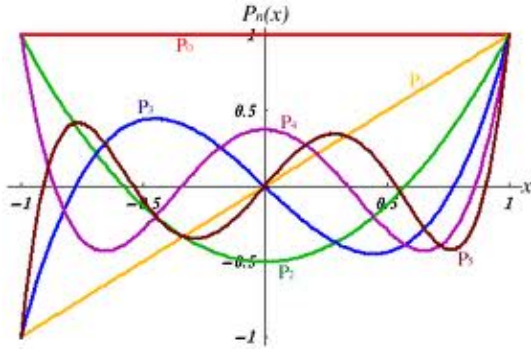


Рис. 2.9: Несколько первых полиномов Лежандра.

Здесь отсутствует производные по φ , поскольку R от этой переменной не зависит. Переходя к переменной $\mu = \cos \theta$, которая меняется от -1 до $+1$, мы находим

$$(r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r) R^{-1} + \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu R^{-1}] = 0. \quad (2.37)$$

Полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора R^{-1} :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n. \quad (2.38)$$

Поскольку особенности левой части (2.38) по r (точки ветвления) $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$ лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (2.38) равен единице, то есть он сходится при $r < 1$. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (2.38) разложение по отрицательным степеням r :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}. \quad (2.39)$$

Этот ряд сходится при $r > 1$.

Как следует из (2.38) или (2.39), функция $P_n(\mu)$ является полиномом n -го порядка, симметричным по μ при четных n и антисимметричным по μ при нечетных n . Отметим также равенство $P_n(1) = 1$. Оно непосредственно следует из того, что при $\mu = 1$ $R = 1 - r$, а $(1 - r)^{-1} = \sum r^n$. Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением R^{-1} в соответствии с (2.38) или (2.39). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1). \quad (2.40)$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 2.9, где они изображены на интервале $-1 < \mu < 1$. В силу антисимметрии для нечетного индекса $P_{2n+1}(0) = 0$.

Задача 2.4.1. Найти значение $P_{2n}(0)$.

Подставляя правую часть соотношения (2.38) вместо R^{-1} в уравнение (2.37), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n \right] + n(n+1) P_n = 0, \quad (2.41)$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням r . Уравнения (2.41) переписываются в виде $P'' - 2\mu(1 - \mu^2)^{-1}P' + n(n+1)(1 - \mu^2)^{-1}P = 0$ (где штрих обозначает производную по μ), то есть мы опять имеем дело с оператором Штурма-Лиувилля (1.34).

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0, \quad (2.42)$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu(2r\partial_r + 1) + (r^2\partial_r + r), \quad (2.43)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор \hat{K}_1 к правой части (2.38) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях r , находим рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0. \quad (2.44)$$

Это соотношение позволяет явно находить $P_{n+1}(\mu)$, если известны выражения для $P_{n-1}(\mu)$ и $P_n(\mu)$. Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (2.44), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

Задача 2.4.2. Найти выражение для $P_3(\mu)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением (2.44).

Задача 2.4.3. Доказать соотношение

$$\sum_{k=0}^n (2k+1) P_k(x) P_k(y) = (n+1) \frac{P_n(x) P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x) P_n(y)}{y-x}.$$

Указание: действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (2.44).

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0, \quad (2.45)$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1 - \mu/r) \partial_\mu, \quad (2.46)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор \hat{K}_2 к правой части (2.38) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях r , находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0. \quad (2.47)$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (2.48)$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (2.44): если (2.48) справедливо для P_{n-1} и P_n , то в силу (2.44) оно справедливо и для P_{n+1} . Кроме того, выражение (2.48) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (2.40), что завершает доказательство.

Задача 2.4.4. Показать, что в силу (2.44) соотношение (2.48) справедливо для P_{n+1} , если (2.48) справедливо для P_{n-1} и P_n .

Задача 2.4.5. Найти значение $P_{2n}(0)$, исходя из (2.48).

Полиномы Лежандра удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n[\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)]. \quad (2.49)$$

Соотношения (2.49) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов. Доказательство соотношений (2.49) можно получить по индукции, используя соотношения (2.44, 2.47).

Задача 2.4.6. Докажите, что если соотношение (2.49) справедливо для $n - 1$, то в силу соотношений (2.44, 2.47) оно справедливо и для n .

Задача 2.4.7. Вывести соотношения (2.49), исходя из соотношения (2.48).

Задача 2.4.8. Проверить выполнение уравнения (2.41) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (2.47, 2.49).

Соотношение (2.38) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (2.38)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\mu + z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по z при $z_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$, которые лежат на единичной окружности, если μ — действительное число и $|\mu| < 1$. Эти точки ветвления расположены в точках $z_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$, где $\mu = \cos \theta$. Таким образом, разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости z , которая определяется условиями $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$, где θ предполагается

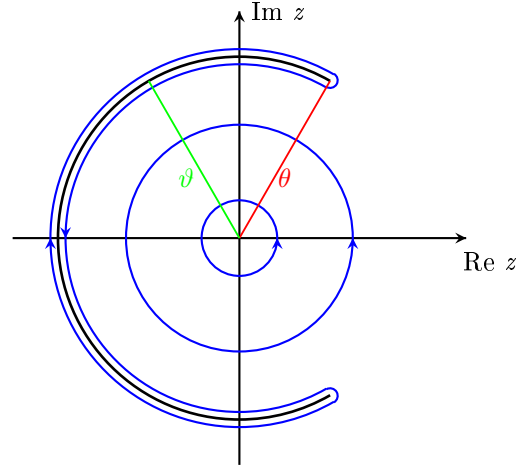


Рис. 2.10: Преобразование контура интегрирования в интегральном представлении полиномов Лежандра.

лежащим в интервале $0 < \theta < \pi$, а ϑ — аргумент z . Это построение представлено на рисунке 2.10, где разрез показан черной дугой.

Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем “вывернем” через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$. Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 2.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции $z^{-n-1}(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$. В терминах интеграла по углу ϑ получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n + 1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \vartheta)}}, \quad (2.50)$$

где мы свели интеграл к интегрированию по полудуге.

Интегральное представление (2.50) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших n . В этом случае в силу быстрой осцилляции $\sin[(n + 1/2)\vartheta]$ главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (2.50). Подставляя $\vartheta = \theta + x$, раскладывая по x подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n + 1/2)(\theta + x)]}{\sqrt{2 \sin \theta x}}. \quad (2.51)$$

Вычисляя здесь интеграл по x , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2 \cos[(n + 1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n + 1)\pi \sin \theta}}. \quad (2.52)$$

Задача 2.4.9. Получить выражение (2.52) из (2.51).

Выражение (2.52) можно получить также методом WKБ (смотри раздел 4.5.2), который работает как раз при больших n . Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (2.41) в терминах переменной $t = \ln \tan(\theta/2)$, где $\mu = \cos \theta$. Тогда оно принимает вид уравнения (4.56):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t} P_n = 0. \quad (2.53)$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin \theta, \\ S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$. При больших n выполняется неравенство $dp/dt \ll p^2$, что оправдывает применение метода WKБ. Суммируя теперь два члена (4.57), мы и получаем выражение (2.52). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (2.41), регулярное в точке $\mu = 1$, когда оно разлагается в ряд Тейлора по $x = \mu - 1$. Перепишем уравнение (2.41) в терминах переменной x :

$$(2x+x^2)P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по x . Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора P по x , $P = \sum_k p_k x^k$, мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом n цепочка соотношений обрывается на $k = n$, и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с $P_n(\mu)$. Если же n не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени x . В пределе больших k мы имеем $p_{k+1} = -(1/2)p_k$. Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при $x = -2$, то есть $\mu = -1$. Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (2.41), регулярные как в точке $\mu = 1$, так и в точке $\mu = -1$.

Как следует из уравнения (2.41), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}, \quad (2.54)$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале $-1 < \mu < 1$ и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (2.54), то есть свойство (4.37), смотри раздел 4.3, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (4.41):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu)P_l(\mu) = 0, \quad (2.55)$$

если $n \neq l$.

Задача 2.4.10. Прямо доказать соотношение ортогональности (2.55). Указание: воспользоваться представлением (2.48).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.56)$$

Общее соотношение (4.44) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (2.54), конечных на интервале $(-1, +1)$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2)P_k(x)P_k(y) = \delta(x-y). \quad (2.57)$$

Задача 2.4.11. Получить выражение для нормировочного множителя (2.56). Указание: воспользоваться соотношением (2.38).

Задача 2.4.12. Прямо получить соотношение (2.57). Указание: воспользоваться результатом задачи (2.4.3).

Задача 2.4.13. Найдите $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)$.

Задача 2.4.14. Найдите разложение в ряд по полиномам Лежандра $P_n(x)$ монома x^k .

2.5 Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита естественно возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку $(-1, 1)$. Кроме того, в ряде случаев разложение по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора.

Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \quad (2.58)$$

Функция в левой части соотношения (2.58) является производящей функцией полиномов Эрмита. Очевидно, полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями x , а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями x .

Подставляя в выражении (2.58) $x = 0$ и раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по t , находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!, \quad (2.59)$$

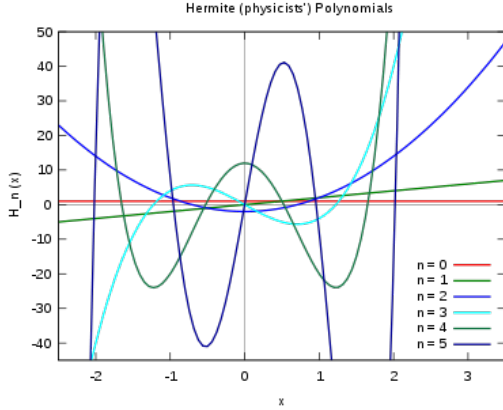


Рис. 2.11: Несколько первых полиномов Эрмита.

где $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\dots$. Далее, при малых x $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1 + 2tx)$. Снова раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по t , находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n+1)!! \quad (2.60)$$

Дифференцируя соотношение (2.58) по x , мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x). \quad (2.61)$$

Далее, беря производную по t от соотношения (2.58) и приравнявая коэффициенты при степенях t , мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (2.62)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита. Первые полиномы Эрмита записываются в следующем виде

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (2.63)$$

Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке 2.11.

Подставляем в правую часть соотношения (2.61) H_{n-1} , выраженное в соответствии с (2.62) и дифференцируем получившееся соотношение по x . Выражая затем из (2.61) dH_{n+1}/dx , находим следующее уравнение

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0, \quad (2.64)$$

которому подчиняются полиномы Эрмита. Отметим, что оператор в (2.64) относится к типу Штурма-Лиувилля (1.34). Уравнение (2.64) инвариантно относительно замены $x \rightarrow -x$ и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанным выше о четности полиномов Эрмита.

Четное решение уравнения (2.64) может быть разложено в ряд по четным степеням x :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2.64) и приравнявая коэффициенты при степенях x , мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k-n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения u в ряд по x . При больших k мы находим $a_{k+1} \approx a_k/k$, что дает асимптотику $u \propto \exp(x^2)$ на больших x . Единственным исключением являются четные n , тогда ряд по x обрывается на $k = n/2$, и мы имеем дело с конечным полиномом, пропорциональным H_n с четным индексом. Аналогичным образом можно показать, что ряд по нечетным степеням x , представляющий нечетное решение уравнения (2.64), обрывается, если n нечетно. Этот ряд пропорционален полиному Эрмита H_n с нечетным индексом.

Выражая в соотношении (2.61) H_{n-1} в соответствии с (2.62), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1}. \quad (2.65)$$

Это соотношение легко позволяет доказать по индукции выражение

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (2.66)$$

Соотношение (2.66) очевидно, выполняется при $n = 0$ воспроизводится при применении оператора в левой части (2.65). Соотношение (2.66) приводит к выводу, что H_n является полиномом степени n .

Задача 2.5.1. Доказать, что старший член разложения $H_n(x)$ имеет вид $2^n x^n$.

Задача 2.5.2. Получить соотношение (2.58) из (2.66).

Для полиномов Эрмита справедливо интегральное представление

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x+it)^n \exp(-t^2). \quad (2.67)$$

Для доказательства заметим, что представление (2.67) воспроизводит соотношение (2.61), а также удовлетворяет (2.59, 2.60). Таким образом, мы можем по индукции, переходя от $n-1$ к n , обосновать представление (2.67). Представляя подынтегральное выражение в соотношении (2.67) в виде $\exp[n \ln(x+it) - t^2]$ и используя для больших n метод перевала, мы находим (суммируя вклады от двух перевальных точек) выражение

$$H_n(x) \approx \sqrt{2} (2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos\left(\sqrt{2n} x - \pi n/2\right), \quad (2.68)$$

справедливое при $n \gg x, 1$.

Возвратимся теперь к уравнению (2.64). Функции $\Psi_n(x) \propto \exp(-x^2/2)H_n(x)$ составляют полный набор решений этого уравнения, стремящиеся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. В силу того, что оператор в левой части уравнения (2.64) является самосопряженным на этом классе функций, то Ψ_n являются ортогональными, то есть $\int dx \Psi_n(x)\Psi_m(x) = 0$, если $n \neq m$. Это означает

$$\int dx \exp(-x^2)H_n(x)H_m(x) = 0. \quad (2.69)$$

Отнормируем теперь функции $\Psi_n(x)$ так, чтобы этот набор был ортонормированным: $\int dx \Psi_n(x)\Psi_m(x) = \delta_{mn}$. Для этого воспользуемся выражением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2)H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (2.70)$$

Отсюда находим ортонормированный базис

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp(-x^2/2)H_n(x). \quad (2.71)$$

Докажем теперь полноту базиса (2.71). Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} (iq)^n \exp(-q^2/4 + iqx).$$

Далее

$$\begin{aligned} \sum_n \Psi_n(x)\Psi_n(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp(-q^2/4 + iqx) \\ &\exp(x^2/2 + y^2/2) \sum_n \frac{(iq)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n} \exp(-y^2). \end{aligned}$$

Сумма по n представляет собой ряд Тейлора, который собирается в $\exp[-(y + iq/2)^2]$. Подставляя этот результат в полученную выше формулу, мы находим

$$\begin{aligned} \sum_n \Psi_n(x)\Psi_n(y) &= \exp(x^2/2 - y^2/2) \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp[iq(x - y)] = \delta(x - y), \end{aligned}$$

что завершает доказательство полноты.

Таким образом, любую функцию $f(x)$, заданную на действительных x и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при $x \rightarrow \pm\infty$, можно разложить в ряд по базису (2.71):

$$f(x) = \sum_n b_n \Psi_n(x), \quad b_n = \int dx \Psi_n(x)f(x).$$

Это разложение можно переписать в терминах полиномов Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-x^2/2)H_n(x), \quad (2.72)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2} H_n(x)f(x). \quad (2.73)$$

Задача 2.5.3. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2)H_{2n}(xy).$$

Задача 2.5.4. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(x - y)^2]H_n(x).$$

Задача 2.5.5. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-x^2)H_{2n-1}(xy).$$

Задача 2.5.6. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-x^2)H_n(xy).$$

Примечание: Ответ выражается через полиномы Лежандра.

Задача 2.5.7. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \sinh(\beta x)H_{2n+1}(x).$$

Задача 2.5.8. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \cosh(\beta x)H_{2n}(x).$$

Задача 2.5.9. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}\right) (2x)^n.$$

Указание: просуммировать по n правую часть этого соотношения с весом $t^n/n!$ и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (2.58).

Задача 2.5.10. Доказать соотношение (2.70). Указание: составить комбинацию $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$, выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (2.58) и проинтегрировать получившееся равенство по x с весом $\exp(-x^2)$. На этом пути получатся и соотношение ортогональности.

2.6 Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0, \quad (2.74)$$

где α и γ – произвольные параметры. Уравнение (2.74) переписывается в виде $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$, то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (1.34). Функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ характеризуется тем, что она аналитична в точке $z = 0$ и имеет единичное значение в нуле: $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$.

Уравнение (2.74) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ в ряд Тейлора около точки $z = 0$. Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (2.74) с учетом условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha + 1) z^2}{\gamma(\gamma + 1) 2!} + \dots, \quad (2.75)$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых α ряд (2.75) обрывается и $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. При больших n отношение коэффициентов при степенях z^n и z^{n-1} в разложении (2.75) стремится к $1/n$. Поэтому ряд (2.75) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой $\Phi(\alpha, \gamma, z)$.

При неотрицательных целых α ряд (2.75) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2), \quad (2.76)$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2), \quad (2.77)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (2.74) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Второе независимое решение можно найти, заметив, что если u удовлетворяет уравнению (2.74), то $z^{\gamma-1}u$ также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$. Таким образом, общим решением уравнения (2.74) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (2.78)$$

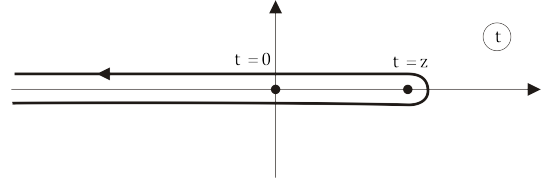


Рис. 2.12: Контур интегрирования в интегральном представлении вырожденной гипергеометрической функции.

где c_1 и c_2 – произвольные константы. При $\gamma = 1$ оба члена в сумме (2.78) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (2.74) является дифференциальным уравнением, в котором переменная z входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 4.2.3. Составляем функции P и Q в соответствии с выражениями (4.35): $P = \gamma t - \alpha$, $Q = t(t - 1)$, и далее находим $Z = t^{\alpha-1}(t - 1)^{\gamma-\alpha-1}$. Таким образом, решение уравнения (2.74) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t - 1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к $z^{\gamma-1}u$, мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t - 1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования $tz \rightarrow t$, мы получаем

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}. \quad (2.79)$$

Контур C в интеграле (2.79) естественно выбрать так, чтобы он приходил из $-\infty$ и возвращался в $-\infty$ (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при $t = 0$ и $t = z$), тогда произведение $ZQ \exp(t)$ на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (2.79) не имеет особенностей при $z = 0$, если контур интегрирования “охватывает” обе особенности. Выберем контур C , который приходит “снизу” из $-\infty$ огибает особенности “справа” и возвращался в $-\infty$ “сверху”, смотри рисунок 2.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Мы считаем, что разрывы функций $t^{\alpha-\gamma}$ и $(t - z)^{-\alpha}$ идут в $-\infty$, а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При $z = 0$ контур интегрирования превращается в C^* , изображенный на рисунке 2.3, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (2.10). Вспоминая теперь, что

$\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^{t\alpha-\gamma}(t-z)^{-\alpha}. \quad (2.80)$$

При целых отрицательных значениях γ ряд (2.75) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у $\Gamma(\gamma)$ в соотношении (2.80). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (2.80) остается конечным и при целых отрицательных значениях γ . Поэтому $\Phi(\alpha, \gamma, z)$, как функция γ , имеет простые полюса при $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

Производя в равенстве (2.80) замену $t \rightarrow t + z$, мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (2.81)$$

Дифференцирование по z соотношения (2.80) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (2.82)$$

$$\frac{z}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = \Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z), \quad (2.83)$$

$$\alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma, z). \quad (2.84)$$

При больших положительных z основной вклад в контурный интеграл в (2.80) определяется окрестностью особой точки $t = z$. Делая замену переменных $t = z + \zeta$ и пренебрегая зависимостью от ζ в $t^{\alpha-\gamma}$, мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C^*} d\zeta e^{\zeta} \zeta^{-\alpha},$$

где контур C^* изображен на рисунке 2.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}. \quad (2.85)$$

Асимптотическое выражение (2.85) справедливо и в комплексной области для z с большой положительной действительной частью.

Задача 2.6.1. Доказать, что $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$.

Задача 2.6.2. Доказать соотношение (2.82, 2.83, 2.84).

Задача 2.6.3. Найти поведение вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при $\gamma \rightarrow 0$. Выполняется ли при малых γ соотношение $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$?

Задача 2.6.4. Найти значение $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при целых положительных α и γ , $\alpha \geq \gamma$. Проверить выполнение условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$. Указание: в этом случае интеграл (2.80) сводится к вычету в точке $t = z$.

Задача 2.6.5. Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (2.74) при $\gamma = 1$. Указание: в соответствии с (2.78) при произвольном γ второе независимое решение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)],$$

здесь надо перейти к пределу $\gamma \rightarrow 1$.

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нелинейные явления играют весьма важную роль в современной физике. В настоящем разделе мы рассматриваем основные нелинейные уравнения. В частности, анализируется ряд так называемых ‘точно решаемых’ уравнений, где функции зависят от времени и одной координаты. Такие уравнения ведут к бесконечному числу законов сохранения и обладают набором нетривиальных солитонных решений.

3.1 Уравнения Хопфа и Бюргерса

Мы начинаем изучение нелинейных явлений с акустики. Сначала мы рассмотрим одномерный случай, когда все характеризующие акустическое поле величины зависят только от одной координаты x . Нас будут интересовать явления, связанные с волнами, распространяющимися в одном направлении. Как известно, в линейном приближении решение одномерного волнового акустического уравнения говорит, что в системе отсчета, движущейся с (линейной) скоростью звука, характеристики акустического поля не меняются. Учтем теперь нелинейные эффекты, которые мы будем анализировать в той же системе отсчета. Нелинейные эффекты будут считаться слабыми, то есть мы будем принимать во внимание только главные нелинейные члены в уравнениях.

3.1.1 Уравнение Хопфа

Введем характеризующую акустическое поле величину u , которая, например, может описывать отклонение плотности вещества от его равновесного значения. В линейном приближении в выбранной системе отсчета мы имеем тривиальное уравнение $\partial_t u = 0$. Учтем теперь нелинейность. В главном порядке это квадратичная нелинейность. Однако мы не можем ввести в уравнение член, пропорциональный u^2 . Дело в том, что однородное в пространстве поле u соответствует просто изменению давления среды и не может вызвать эволюцию u . Поэтому мы должны ввести в уравнение член, содержащий пространственные производные. В главном порядке он пропорционален $u \partial_x u$.

Таким образом, после соответствующего перемасштабирования мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

которое называется уравнение Хопфа (Hopf). Можно сказать, что нелинейный член в уравнении Хопфа отражает зависимость скорости звука от плотности (или давления). Действительно, в лабораторной системе отсчета уравнение (3.1) имеет вид $\partial_t u + (c_0 + u) \partial_x u = 0$,

где c_0 – скорость звука в линейном уравнении. Отсюда видно, что u – поправка к этой скорости.

Уравнение Хопфа (3.1) содержит только первые производные от u и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4. А именно, можно найти уравнения для изменения поля u вдоль специальных траекторий (характеристик), которые определяются уравнениями:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (3.2)$$

Таким образом, начальные значения поля u , не меняясь, переносятся со скоростью u . Поле u вследствие уравнений (3.2) неявно определяется из соотношений

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y), \quad (3.3)$$

где, как и выше, $u(0, x)$ – начальное значение поля.

Если $u(0, x)$ является монотонно растущей функцией x , то эволюция, которая описывается (3.3), заключается в неограниченном ‘растягивании’ поля u вдоль оси X , без изменения значений этого поля. Таким образом, локально поле u становится все более похожим на линейный профиль, а наклон этого профиля уменьшается со временем. Легко установить закон этого убывания. Для этого найдем уравнение на производную $s = \partial u / \partial x$, которое получается из уравнения Хопфа (3.1) после дифференцирования:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = -s^2. \quad (3.4)$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение $ds/dt = -s^2$, решение которого имеет вид $s = (1/s_0 + t)^{-1}$, где s_0 – значение производной s при $t = 0$. Если $s_0 > 0$ (что соответствует монотонно растущей функции u), то на больших временах $s \approx t^{-1}$, то есть наклон на всех характеристиках становится одинаковым. Это и означает формирование линейного профиля.

Отметим, что методом характеристик можно решить и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (3.5)$$

которое отличается от уравнения Хопфа (3.1) дополнительным членом в правой части, ‘накачкой’ f , которая может быть произвольной функцией времени t и пространственной координаты x . Тогда вместо системы (3.2) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (3.6)$$

Однако динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле u . Они связаны с теми участками в начальном профиле, где наклон $u(0, x)$ отрицателен. Эволюцию этого наклона можно найти при помощи того же уравнения (3.4), которое приводит к $s = (1/s_0 + t)^{-1}$. Если $s_0 < 0$, то значение s обращается в бесконечность при $t = -1/s_0$. Таким образом, если в начальном профиле $s(0, x)$ имеются участки с отрицательными значениями s , то за конечное время производная $s = \partial_x u$ обращается в бесконечность. Быстрее всего это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения s , которое определяется условием $\partial s / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$. Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим y_0 , впервые обращается в бесконечность s .

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки y_0 . Раскладывая функцию $u(0, y)$ в ряд Тейлора вблизи точки y_0 , мы находим

$$u(0, y) \approx -c_1(y - y_0) + c_2(y - y_0)^3,$$

где c_1 и c_2 — положительные константы. Положительность c_1 означает отрицательность s вблизи точки y_0 , а положительность c_2 означает, что значение s максимально по абсолютной величине в точке y_0 . Далее, решая уравнения (3.3), мы находим

$$u = u_0 - c_1(x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2(x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3,$$

где мы ввели обозначение $x_0 = y_0 + u_0/c_1$. В этом случае в момент времени $t = 1/c_1$, который и является моментом, когда s обращается в бесконечность в точке x_0 , приведенное соотношение сводится к

$$c_2(u - u_0)^3 = -c_1^4(x - x_0),$$

где мы опустили линейное по $x - x_0$ слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при малых $x - x_0$. Таким образом, мы приходим к профилю $u - u_0$, который пропорционален $(x - x_0)^{1/3}$, то есть является сингулярным в точке $x = x_0$. Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой s обращается в бесконечность.

Таким образом, даже если нелинейность слаба, она за конечное время приводит к образованию особенности в поле u . При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая производная от u , и потому для анализа дальнейшей эволюции уравнение Хопфа следует модифицировать. Именно на этом пути возникает уравнение Бюргерса.

Задача 3.1.1. Решение уравнения Хопфа (3.1) с начальными условиями $u = -c_1x + c_2x^3$, полученное с помощью метода характеристик, можно формально продолжить u на времена $t > c_1^{-1}$, что приводит к неоднозначному решению $u(x)$. Найти область существования этой неоднозначности и значения функции u в этой области.

Задача 3.1.2. Найти решение уравнения Хопфа (3.1) с начальными условиями $u = -c_1x + c_2x^2$.

Задача 3.1.3. Найти решение уравнения (3.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой f_0 на интервале $-x_0 < x < x_0$ и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака f_0 ?

Задача 3.1.4. Найти решение уравнения (3.5) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна h_0x на интервале $-x_0 < x < x_0$ и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака h_0 ?

3.1.2 Уравнение Бюргерса

Уравнение Бюргерса (Burgers) отличается от уравнения Хопфа (3.1) введением дополнительного члена, который описывает диссипацию, связанную с вязкостью, и потому пропорционального второй производной. В безразмерных переменных мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

которое и называется уравнением Бюргерса. Подчеркнем, что область применимости уравнения Бюргерса отнюдь не ограничивается акустикой, оно возникает во многих физических задачах.

На самых больших временах любое решение уравнения (3.7), стремящееся к нулю на $\pm\infty$ по x , стремится к нулю, $u \rightarrow 0$. Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \frac{u^2}{2} = - \int dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (3.8)$$

Таким образом, положительно определенная величина $\int dx u^2$ убывает со временем и, при достаточно большом t , становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса u , которое стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда при больших t значение u становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (3.7). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$u \propto \frac{1}{t^{1/2}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{4t} \right],$$

$$u \propto \frac{x - x_0}{t^{3/2}} \exp \left[-\frac{(x - x_0)^2}{4t} \right],$$

вторая асимптотика реализуется при условии $\int dx u = 0$.

В случае сильной нелинейности, который реализуется, если для начальных условий $UL \gg 1$, где L — характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния $u(0, x)$, а U — характерное значение поля $u(0, x)$. В этом случае начальная эволюция поля u

может быть описана в пренебрежение второй производной в уравнении (3.7), когда оно сводится к уравнению Хопфа (3.1), которое, однако, ведет к сингулярности.

Уравнение Бюргера позволяет проанализировать структуру, которая возникает после возникновения сингулярности в уравнении Хопфа. После некоторого переходного процесса формируется специальное решение, которое движется со скоростью u_0 , то есть $\partial u/\partial t = -u_0 \partial u/\partial x$. Подставляя это соотношение в уравнение Бюргера (3.7), мы находим затем его первый интеграл $(u - u_0)^2 - 2\partial u/\partial x = \text{const}$. Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a \tanh[a(x - x_0)], \quad (3.9)$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины a^{-1} поле u испытывает скачок $4a$. Решение (3.9) дает универсальную форму шок, которые формируются при условии $UL \gg 1$, тогда $a \sim U$. Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении u к нулю на больших временах, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, в то время как выражение (3.9) этому условию не удовлетворяет.

Поясним общую структуру поля u , которая возникает при эволюции некоторого характеризующегося сильной нелинейностью начального условия. За конечное время из участков u с отрицательным наклоном формируются шоки, а из участков с положительным наклоном формируются промежутки между шоками. В дальнейшем поле в этих промежутках стремится к линейному профилю, поскольку его эволюция управляется уравнением Хопфа. Как следует из выражения (3.9), шок движется со скоростью u_0 , которую можно определить, как полусумму значений поля u на краях шока. Это означает, что время от времени происходят события, когда большой шок (со значительной амплитудой a) догоняет меньший шок. Это кончается поглощением малого шока большим. Поэтому количество шок в системе постепенно убывает.

Детали этих процессов можно проследить с помощью преобразования Коула-Хопфа (Cole-Hopf)

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h/\partial x. \quad (3.10)$$

Оно приводит уравнение Бюргера (3.7) к чисто диффузионному уравнению

$$\partial \Psi/\partial t = \partial^2 \Psi/\partial x^2, \quad (3.11)$$

которое изучалось в разделе (1.3.1). Решение уравнения (3.11) может быть выражено в виде интеграла от начального значения

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] \Psi(0, y), \quad (3.12)$$

в соответствии с (1.72).

Выражение (3.12) может быть использовано для получения ряда точных решений уравнения Бюргера. Рассмотрим в качестве примера начальное условие $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$, которое соответствует шоку (3.9) с $u_0 = x_0 = 0$. В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (3.10) преобразование

$$u = -2\partial(\ln \Psi)/\partial x. \quad (3.13)$$

Подставляя выражение $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$ в уравнение (3.12) и вычисляя интеграл по y , мы находим $\Psi(t, x) = \cosh(ax) \exp(a^2 t)$. Подставляя это выражение в соотношение (3.13), мы находим то же выражение $u = -2a \tanh(ax)$, поскольку дополнительный временной множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (3.9) дает стационарное решение уравнения Бюргера. Обратим внимание на то, что мы получили растущее со временем решение уравнения диффузии. Это связано с тем, что поле Ψ неограниченно растет при $x \rightarrow \pm\infty$.

Задача 3.1.5. Найти решение уравнения (3.11) с начальным условием $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$. Вычислить соответствующее поле u . Проследить, как большой шок "поедает" маленький, считая $b > a$ и $B \ll 1$.

Задача 3.1.6. Найти решение уравнения (3.11) с начальным условием $\Psi(0, x) = 1 - A \exp(-x^2)$. Вычислить соответствующее поле u .

3.2 Уравнение Кортвега-де-Фриза

Как мы уже отмечали, в общем случае решение уравнения Хопфа (3.1) приводит к формированию особенности в поле u за конечное время, и на больших временах эволюция поля u в рамках уравнения Хопфа исследована быть не может. В то же время уравнение Бюргера (3.7) дает решение эволюционной задачи для поля u на всех временах. Это связано с присутствием в уравнении Бюргера дополнительного (по сравнению с уравнением Хопфа) члена со второй производной, наличие которого приводит к устранению особенности в поле u (к которой приводит уравнение Хопфа). Для одномерной слабо нелинейной звуковой волны член со второй производной представляет диссипацию. В ряде задач более существенным оказывается другой эффект, связанный с дисперсией скорости звука, то есть с ее зависимостью от волнового вектора k . Этот эффект является бездиссипативным.

Будем считать, что диссипацией звука можно пренебречь, а дисперсия скорости звука существенна. В общем случае скорость звука является некоторой функцией k^2 , при достаточно малых k первая зависящая от k поправка к скорости звука пропорциональна k^2 . Это

означает, что к уравнению Хопфа (3.1) следует добавить член с третьей производной. В результате получается так называемое уравнение Кортевега де Фриза (Korteweg de Vries), каноническая форма которого записывается, как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (3.14)$$

Это уравнение сводится к уравнению Хопфа (3.1) в преенебрежение третьей производной и после перемасштабирования поля $6u \rightarrow u$.

Уравнение КдФ (Кортевега - де Фриза) имеет, в частности, локализованное решение солитонного типа

$$u(t, x) = \frac{V}{2 \cosh^2 [\kappa(x - Vt - x_0)]}, \quad (3.15)$$

где V – произвольный параметр. Как следует из (3.15), V имеет смысл скорости движения солитона. Периодические решения уравнения КдФ являются так называемыми кноидальными волнами, описываемыми интегральными соотношениями:

$$x - ct - x_0 = \int du (2\epsilon + cu^2 - 2u^3)^{-1/2} \quad (3.16)$$

где c, ϵ – параметры волны, определяющие её амплитуду и период.

Уравнение Кортевега де Фриза имеет интегралы движения вида

$$I_n = \int dx P_n(u, \partial_x u, \partial_x^2 u \dots), \quad (3.17)$$

где P_n – полиномы от функции u и её пространственных производных, в частности:

$$P_0 = u, \quad P_1 = u^2, \quad P_2 = 2u^3 - (\partial u / \partial x)^2, \\ P_3 = 5u^4 + 5u^2 \partial^2 u / \partial x^2 + (\partial^2 u / \partial x^2)^2. \quad (3.18)$$

Поскольку число интегралов движения I_n бесконечно, говорят, что уравнение КдФ (3.14) является интегрируемым.

Уравнение КдФ (3.14) может быть записано, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[\frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right], \quad (3.19)$$

где, как и для уравнения Бюргерса, $u = \partial_x h$. В силу однородности этого действия по времени и пространству оно приводит к законам сохранения энергии и импульса (смотри раздел 4.6), которые вычисляются в соответствии с выражениями (4.66, 4.68). Несложно увидеть, что плотность энергии и импульса совпадают (с точностью до множителя) с выражениями для P_2 и P_1 , соответственно, смотри (3.18). Таким образом, первый не Нётеровский интеграл движения уравнения КдФ определяется P_3 , смотри (3.18).

Уравнение КдФ (3.14) инвариантно относительно “преобразования Галилея” $u(t, x) \rightarrow v + u(t, x - 6vt)$, где v – некоторая константа. Можно проверить, что действие (3.19) инвариантно относительно соответствующего преобразования для h : $h(t, x) \rightarrow vx - 2v^2t + h(t, x - 6vt)$. Инфинитезимальное преобразование для h имеет вид $\delta h = vx - 6vt \partial_x h$. Действуя далее, как и в разделе 4.6, то есть полагая v произвольной функцией t и x , вычисляя вариацию действия (3.19) и приравнявая ее к нулю, находим закон сохранения

$$\partial_t (xu - 3tu^2) + \partial_x [3xu^2 - \partial_x u + x \partial_x^2 u - 12tu^3 - 6tu \partial_x^2 u + 3t(\partial_x u)^2] = 0.$$

Задача 3.2.1. Найдите $\partial_t P_3$, где P_3 определяется (3.18), в соответствии с уравнением КдФ (3.14) и убедитесь, что результат сводится к полной производной по x .

3.3 Уравнение синус-Гордон

Уравнением синус-Гордон называют уравнение

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0. \quad (3.20)$$

Такого сорта уравнение возникает для динамики систем, которые описываются переменной φ , которая имеет смысл фазы некоторой величины и, соответственно, однозначно определена на интервале от 0 до 2π . Удобно, однако, считать, что φ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ с тем, чтобы избежать скачков φ . При этом состояния системы, отличающиеся на $2\pi n$ (n – целое число) физически эквивалентны.

Уравнение синус-Гордон (3.20), как и КдФ, приводит к бесконечному набору законов сохранения. Поэтому оно относится к интегрируемым уравнениям.

Примером физической системы, описываемой уравнением (3.20), являются проводящие одномерные цепочки, в которых при достаточно низких температурах возникает так называемая волна зарядовой плотности. Эта волна характеризуется фазой φ , с вариациями которой связана так называемая Фрёлыховская мода, которая описывается уравнением (3.20), при подходящем выборе единиц измерения времени t и координаты x вдоль цепочки.

При небольших вариациях фазы, $|\varphi| \ll 1$, мы можем заменить в уравнении (3.20) $\sin \varphi$ на φ . В результате мы получаем линейное уравнение, которое описывает совокупность распространяющихся мод. Делая Фурье-преобразование по времени и пространству, мы приходим для данной Фурье-компоненты к соотношению $\omega^2 = q^2 + 1$, где ω – частота, а q – волновой вектор. Таким образом, частота ω не может быть меньше единицы. В то же время групповая скорость $\partial \omega / \partial q = q / \sqrt{q^2 + 1}$ стремится к нулю при уменьшении волнового вектора q .

Рассмотренные выше колебания относятся к малым вариациям около стационарного состояния $\varphi = 0$ (или

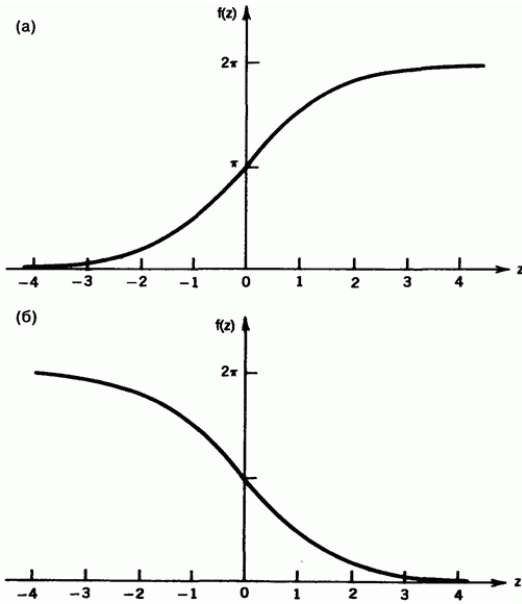


Рис. 3.1: Кинк и антикинк.

$\varphi = 2\pi n$). В то же время уравнение (3.20) имеет, очевидно, еще одно стационарное решение $\varphi = \pi$. Оно является, однако, абсолютно неустойчивым. Для доказательства этого утверждения рассмотрим малые отклонения от этого состояния, которые описываются малой фазой ϕ : $\varphi = \pi + \phi$. В линейном по ϕ приближении уравнение (3.20) дает

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi - \phi = 0. \quad (3.21)$$

Переходя теперь к Фурье-представлению, мы находим $\omega = \pm \sqrt{q^2 - 1}$. Таким образом, при $q < 1$ частота является чисто мнимой, и множитель $\exp(-i\omega t)$ экспоненциально растет со временем (для соответствующего знака квадратного корня). Это означает, что даже исходно малые возмущения стационарного состояния $\varphi = \pi$ станут со временем большими и разрушат это состояние.

Помимо тривиальных однородных стационарных решений уравнение (3.20) допускает широкий набор неоднородных стационарных решений, существование которых формально связано с неоднозначностью фазы φ . Рассмотрим простейшее такое решение, которое характеризуется предельным поведением $\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\varphi \rightarrow 2\pi$ при $x \rightarrow +\infty$. Стационарное условие $-\partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0$ имеет вид уравнения Ньютона для (перевернутого) физического маятника и имеет, очевидно, первый интеграл $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$, который в силу граничных условий надо приравнять к единице.

В результате мы приходим к уравнению $\partial_x \varphi = 2 \sin(\varphi/2)$, которое имеет решение

$$\varphi = 4 \arctan [\exp(x - x_0)], \quad (3.22)$$

где x_0 – произвольная константа. Решение (3.22) называют кинком, а x_0 является положением кинка. Из выражения (3.22) следует, что фаза φ меняется от 0 до 2π

в окрестности порядка единицы около x_0 , а вне ее экспоненциально быстро стремится к своим предельным значениям, смотри рисунок 3.1. Легко найти решение (антикинк), которое соответствует убыванию фазы φ от 2π до 0:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan [\exp(x - x_0)],$$

смотри рисунок 3.1.

Помимо простейшего решения (3.22), уравнение (3.20) допускает и более сложные стационарные решения. Например, бесконечный набор кинков. Для того, чтобы найти это решение, мы можем воспользоваться тем же первым интегралом $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$, который теперь мы приравняем к $1 + \epsilon$. Тогда мы придем к уравнению

$$\partial_x \varphi = \sqrt{2\epsilon + 4 \sin^2(\varphi/2)}, \quad (3.23)$$

которое описывает монотонно растущую при увеличении x фазу φ . Если ϵ мало, то это решение соответствует бесконечной совокупности кинков, разделенных расстоянием $\ln(1/\epsilon)$ (что справедливо, если этот логарифм является большой величиной). Если в выражении (3.23) взять отрицательный знак перед корнем, то мы получим решение с монотонно убывающей фазой.

До сих пор мы рассматривали неподвижный кинк. Но уравнение (3.20) допускает решения и в виде движущегося кинка. Чтобы найти его профиль для скорости движения v , можно подставить в уравнение (3.20) общее выражение для равномерно движущегося локализованного объекта $\varphi = f(x - vt)$ и провести те же вычисления. Однако ответ можно выписать и безо всяких вычислений, воспользовавшись тем, что уравнение (3.20) является “релятивистки инвариантным”, и потому решение для движущегося со скоростью v кинка может быть получено из выражения (3.22) преобразованием Лоренца. В результате получаем

$$\varphi = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (3.24)$$

Отсюда следует, в частности, что кинк не может двигаться со скоростью больше единицы. Аналогичным образом может быть найдено решение для движущегося антикинка:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right].$$

Уравнение синус-Гордон относится к классу уравнений, которые могут быть проанализированы в рамках метода обратной задачи рассеяния, который позволяет найти серию гораздо более сложных решений уравнения (3.20), чем приведенные выше решения для одиночных движущихся кинков и антикинков. Эти решения представляют собой системы движущихся с различными скоростями кинков и антикинков, которые в силу различных скоростей движения время от времени сталкиваются между собой. Замечательно, что после такого

столкновения кинки расходятся и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения. При этом не происходит никакого излучения волн, обсуждавшихся выше.

Приведем решение, которое называют бризером (breather)

$$\varphi = 4 \arctan \left[\tan \theta \frac{\sin(t \cos \theta)}{\cosh(x \sin \theta)} \right]. \quad (3.25)$$

Проверка выполнения уравнения (3.20) для функции (3.25) осуществляется прямым вычислением производных от выражения (3.25). Решение (3.25) соответствует связанному состоянию кинка и антикинка, расстояние между которыми осциллирует со временем. Это решение описывает поле φ , центр тяжести которого покоится. Сделав преобразование Лоренца, легко получить поле φ для бризера, движущегося с произвольной скоростью $v < 1$.

Переходя в выражении (3.25) к пределу $\theta \rightarrow \pi/2$, находим следующее решение уравнения (3.20)

$$\varphi = 4 \arctan \frac{t}{\cosh x}. \quad (3.26)$$

Решение (3.26) описывает сближение кинка и антикинка с их последующим расхождением. При $t = 0$ мы имеем $\varphi = 0$, однако скорость изменения поля $\partial_t \varphi$ нулю не равна, она сосредоточена на расстояниях порядка единицы от начала координат. При $t \gg 1$ размер решения (3.26) оценивается, как $\ln t$. Эта величина имеет смысл расстояния между кинком и антикинком. Понятно, что начало координат и начало отсчета времени могут быть выбраны произвольно, то есть (3.26) остается решением при замене $t \rightarrow t - t_0$, $x \rightarrow x - x_0$.

Уравнение (3.20) может быть получено, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 + \cos \varphi \right]. \quad (3.27)$$

Таким образом, в соответствии с разделом (4.6) мы находим следующие интегралы движения, имеющие смысл энергии и импульса системы

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x \varphi)^2 - \cos \varphi + 1 \right], \quad (3.28)$$

$$P = \int dx \partial_t \varphi \partial_x \varphi, \quad (3.29)$$

смотри (4.66, 4.68).

Уравнение (3.20) может быть переписано в терминах переменных вдоль "светового конуса" $\xi = (x + t)/2$, $\tau = (x - t)/2$:

$$\partial_\tau \partial_\xi \varphi = \sin \varphi, \quad (3.30)$$

поскольку $\partial_\xi = \partial_x + \partial_t$, $\partial_\tau = \partial_x - \partial_t$. Бесконечный набор законов сохранения удобно формулировать именно

в терминах переменных ξ и τ . Первый нетривиальный закон сохранения имеет вид

$$\partial_\tau [(\partial_\xi \varphi)^4 - 4(\partial_\xi^2 \varphi)^2] + 4\partial_\xi [(\partial_\xi \varphi)^2 \cos \varphi] = 0,$$

который легко проверяется, исходя из (3.30).

Задача 3.3.1. *Линеаризуя уравнение (3.20) на фоне какого-либо его решения φ , мы находим для возмущения ϕ уравнение $\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \phi \cos \varphi = 0$. Имеет ли это уравнение локализованные решения ϕ на фоне кинка (3.22)?*

Задача 3.3.2. *Найти энергию и импульс кинка (3.22) и решения (3.26).*

Задача 3.3.3. *Найти закон сохранения, который соответствует Лоренц-инвариантности уравнения синус-Гордон (3.20).*

Задача 3.3.4. *Записать законы сохранения энергии и импульса в терминах переменных ξ и τ . Указание: воспользоваться выражением для действия в терминах ξ и τ .*

3.4 Нелинейное уравнение Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию огибающих электромагнитных волн, плазменных колебаний, и так далее. Другими словами, НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, которые применимы в самых разных физических случаях.

Как мы уже установили в разделе (1.3.3), в линейном приближении уравнение на огибающую ψ можно свести к свободному уравнению Шрёдингера (1.86) (мы не рассматриваем возникающий иногда гиперболический случай). Теперь мы учтем нелинейность в уравнении для амплитуды ψ . Для ряда случаев эта нелинейность по физическим соображениям может быть только третьего порядка. Например, при распространении электромагнитных волн в материальных средах основным источником нелинейности является эффект Керра, то есть зависимость диэлектрической проницаемости среды от напряженности электрического поля. Диэлектрическая проницаемость раскладывается по четным степеням напряженности поля. Главным членом разложения является квадратичный, отсюда и кубическая нелинейность в уравнении на огибающую.

Нелинейность должна быть добавлена в уравнение Шрёдингера (1.86), она пропорциональна третьей степени ψ . Если система однородна по времени, то имеет дополнительное правило отбора нелинейного члена. Как следует из (1.103), сдвиг по времени эквивалентен добавлению фазы к ψ . Поэтому уравнение на ψ должно быть инвариантно относительно сдвига фазы ψ , что однозначно определяет вид нелинейного члена, который

должен быть пропорционален $|\psi|^2\psi$. Еще одним дополнительным правилом отбора является отсутствие диссипации, что фиксирует действительный коэффициент при $|\psi|^2\psi$ в уравнении.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемых НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad (3.31)$$

и

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi - 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (3.32)$$

Мы видим, что оба этих уравнения имеют вид квантовомеханического уравнения Шрёдингера (1.83) с потенциалом U , равным $-2|\psi|^2$ в случае (3.31) и $+2|\psi|^2$ для (3.32). Поскольку уравнение (3.31) соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется ‘НУШ с притяжением’, и, соответственно, уравнение (3.32) – ‘НУШ с отталкиванием’. Как мы знаем из квантовой механики, волновые функции в притягивающих и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (3.31) и (3.32) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (3.31), который, к тому же, часто реализуется в оптических приложениях. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.

3.4.1 Общие свойства нелинейного уравнения Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (3.31) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум ‘действия’

$$S = \int dt dr L, \quad (3.33)$$

$$L = -i\psi^*\partial_t\psi + \nabla\psi^*\nabla\psi - |\psi|^4.$$

При вариации S удобно рассматривать поля ψ и ψ^* , как независимые динамические переменные, что возможно в силу того, что ψ имеет две степени свободы.

Уравнение (3.31) ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы ψ , а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат, смотри раздел 4.6. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованных в пространстве решений являются ‘число частиц’ N , ‘энергия’ E и ‘импульс’ \mathbf{P} , то есть $dN/dt = 0$, $dE/dt = 0$, $d\mathbf{P}/dt = 0$. Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движе-

ния

$$N = \int dr |\psi|^2, \quad (3.34)$$

$$E = \int dr (-|\nabla\psi|^2 + |\psi|^4), \quad (3.35)$$

$$\mathbf{P} = -i \int dr \psi^* \nabla\psi, \quad (3.36)$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из Лагранжиана (3.33), смотри выражения (4.66, 4.68, 4.71).

Для нелинейного уравнения Шрёдингера имеется замечательное соотношение – теорема Таланова, позволяющее сделать качественные выводы о поведении решений НУШ для широкого класса начальных условий. Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int dr r^2 |\psi|^2. \quad (3.37)$$

Для волнового пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как $I \sim NR^2$, где R – размер пакета. Для интеграла (3.37) справедливо соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int dr \left(|\nabla\psi|^2 - \frac{d}{2} |\psi|^4 \right), \quad (3.38)$$

которое является следствием уравнения (3.31). Здесь d – размерность пространства.

В двумерном случае в правой части (3.38) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = -8E, \quad d = 2. \quad (3.39)$$

Поскольку E не зависит от времени, то общее решение уравнения (3.39) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct - 4Et^2, \quad d = 2, \quad (3.40)$$

где константы C и E определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что $E > 0$. Тогда при любых конечных $I(0)$ и C наступит такой момент времени t_* , что $I(t_*) = 0$. Из явного вида $I(t)$ следует, что функция в момент $t = t_*$ сожмется в точку. Сохранение числа частиц N влечет за собой сингулярность ψ в этот момент: $|\psi|^2(\mathbf{r} \rightarrow 0, t \rightarrow t_*) \rightarrow \infty$.

Таким образом, в двух измерениях при $E > 0$ происходит коллапс – явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при $E < 0$, однако при $E > 0$ он неизбежен. Коллапс означает, что в функции ψ за конечное время возникает сингулярность в некоторой точке. Это может произойти в точке, отличной от $\mathbf{r} = 0$, в момент времени более ранний, чем $t = t_*$. То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале $t \leq t_*$ коллапс при $E > 0$ в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (3.38) для $I(t)$ приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = -8E - 4 \int dr |\psi|^4 < -8E. \quad (3.41)$$

Поэтому вместо равенства (3.40) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct - 4Et^2, \quad d = 3. \quad (3.42)$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при $E > 0$.

Чтобы уточнить момент времени, когда происходит коллапс, рассмотрим модифицированный функционал Таланова:

$$I_{\mathbf{a}}(t) = \int dr (r - \mathbf{a})^2 |\psi|^2. \quad (3.43)$$

Непосредственным дифференцированием с использованием уравнения эволюции и закона сохранения импульса находим $d^2 I_{\mathbf{a}}/dt^2 = d^2 I/dt^2$. Поэтому и для функционала $I_{\mathbf{a}}(t)$ при $E >$ также справедливо утверждение об обращении его в ноль в некоторый момент времени t_* . Сам же момент t_* обращения $I_{\mathbf{a}}(t)$ в ноль при данных начальных условиях зависит от \mathbf{a} . Место и время коллапса будут определяться таким \mathbf{a} , при котором t_* будет наименьшим. Отметим, что мы фактически показали, что такая точка пространства и момент времени, где решение становится сингулярным, существуют.

3.4.2 Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера

Качественно иная ситуация реализуется в одномерном случае. Тогда соотношение Таланова (3.38) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = -4E + 4 \int dx |\nabla\psi|^2, \quad (3.44)$$

что означает невозможность коллапса. Действительно, если размер волнового пакета $R(t)$ уменьшается, то сохранение числа частиц N требует, чтобы квадрат модуля амплитуды пакета рос как $|\psi|^2 \sim R^{-1}(t)$. При этом положительная добавка в правой части в (3.44) также растет:

$$\int dx |\nabla\psi|^2 \sim NR^{-2}.$$

При уменьшении R эта величина неизбежно становится по абсолютной величине больше отрицательного, но постоянного $-E$. Это приведет к стабилизации поля ψ . Таким образом, при достаточно большой амплитуде начального значения ψ со временем возникнут локализованные объекты, называемые солитонами.

Мы начнем с простейшего случая покоящегося солитона. Будем искать локализованное в пространстве решение уравнения (3.31) в виде

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)}g(x). \quad (3.45)$$

Уравнение на функцию $g(x)$ имеет вид $g'' + 2g^3 - \eta^2g = 0$, что является уравнением Ньютона в стационарном потенциале и поэтому его порядок может быть понижен в силу сохранения энергии. Умножая уравнение для g на g' и интегрируя по x , мы получаем

$$g' = -g\sqrt{\eta^2 - g^2}, \quad \int_g^\eta \frac{dg}{g\sqrt{\eta^2 - g^2}} = x - x_0. \quad (3.46)$$

Здесь x_0 – константа интегрирования, знак минус для корня выбран для убывания g с ростом $|x|$. Первообразная в уравнении (3.46) с помощью замены $g = \eta/y$ приводится к табличной и мы приходим к трехпараметрическому семейству решений:

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} \frac{\eta}{\cosh[\eta(x-x_0)]}. \quad (3.47)$$

Теперь заметим, что уравнение (3.31) инвариантно относительно ‘преобразования Галилея’. А именно, если $\psi(t, x)$ – решение (3.31), то и

$$\psi(t, x - 2\beta t)e^{i\beta x - i\beta^2 t} \quad (3.48)$$

будет решением НУШ. Применяя это преобразование к (3.47), мы получим семейство односолитонных решений, зависящее от четырех параметров t_0, x_0, η, β . При $x_0 = t_0 = 0$ это решение имеет вид

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\cosh[\eta(x - 2\beta t)]} \exp[i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x]. \quad (3.49)$$

В одномерном пространстве НУШ является ‘интегрируемым’. Это означает, что помимо стандартных (Нётеровских) интегралов движения, НУШ ведет к дополнительному бесконечному набору интегралов движения. Первым представителем этого набора является

$$R = \int dx \left[\partial_x \psi^* \partial_x^2 \psi - \frac{3}{2} (\psi^*)^2 \partial_x (\psi^2) \right]. \quad (3.50)$$

Интеграл (3.50) уже не связан с пространственно-временными или фазовой симметриями уравнения, его сохранение является следствием интегрируемости одномерного НУШ.

Задача 3.4.1. Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (3.34, 3.35, 3.36), исходя из уравнения (3.31).

Задача 3.4.2. Вычислить значения Нётеровских интегралов движения N, E, P в одном измерении для движущегося солитона (3.49).

Задача 3.4.3. Вывести соотношение Таланова (3.38).

Задача 3.4.4. Доказать, что

$$\frac{d}{dt}I_{\mathbf{a}} = \frac{d}{dt}I - 4\mathbf{a}P.$$

Здесь $I_{\mathbf{a}}$ – модифицированный функционал Таланова (3.43).

Задача 3.4.5. Показать, что выражение (3.50) является интегралом движения НУШ.

ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И МЕТОДЫ

При решении задач математической физики широко применяется ряд методов, которые представлены в данной главе. Она носит до некоторой степени справочный характер. Различные приложения этих методов встречаются в других главах.

4.1 δ -функция Дирака

Здесь мы рассматриваем основные свойства δ -функции Дирака $\delta(t)$. ‘Физическое’ определение δ -функции состоит в том, что она равна нулю для всех $t \neq 0$, равна бесконечности при $t = 0$, а интеграл от нее равен единице: $\int dt \delta(t) = 1$. Эту функцию можно представить себе, как предел некоторой последовательности функций, которые стремятся к указанным свойствам. Например, δ -функцию можно записать в виде предела

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2}. \quad (4.1)$$

Действительно, при любом положительном ϵ интеграл от функции в правой части (4.1) равен единице, при $t \neq 0$ правая часть (4.1) стремится к нулю, а при $t = 0$ — к бесконечности при стремлении ϵ к нулю.

Поскольку значение $\delta(t)$ отлично от нуля только при $t = 0$, то для любой непрерывной функции $f(t)$ справедливо соотношение $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$. Или, обобщая, $\delta(t-s)f(t) = \delta(t-s)f(s)$. Отсюда следует важное свойство δ -функции:

$$\int dt \delta(t-s)f(t) = f(s). \quad (4.2)$$

Важным частным случаем соотношения (4.2) является

$$\int dt \delta(t) \exp(i\omega t) = 1. \quad (4.3)$$

Это соотношение можно рассматривать, как прямое преобразование Фурье от δ -функции. Тогда обратное преобразование Фурье дает следующее интегральное представление для δ -функции

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t). \quad (4.4)$$

Беря действительную и мнимую части этого соотношения, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} \cos(\omega t) &= \delta(t), \\ \int \frac{d\omega}{2\pi} \sin(\omega t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Разложение в интеграл Фурье действует на бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$. Если же мы рассматриваем задачу на конечном интервале, то функции следует раскладывать в ряд Фурье. Соотношение (4.3) справедливо и на конечном интервале, если он включает ноль. Поэтому его можно использовать для вычисления коэффициентов разложения δ -функции в ряд Фурье в соответствии с (4.21). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp(imt), \quad (4.6)$$

где для определенности выбран интервал изменения параметра $-\pi < t < \pi$.

Из основных свойств δ -функции следует, что $\int dt \delta(t) = 1$ при интегрировании по любому интервалу, который включает точку $t = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^s dt \delta(t) &= \theta(s), \\ \theta(s) &= 0 \text{ if } s < 0, \quad \theta(s) = 1 \text{ if } s > 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Функция $\theta(t)$ называется ступенчатой функцией или функцией Хэвисайда. Таким образом, мы нашли первообразную δ -функции. Дифференцируя по s соотношение (4.7), мы находим $\theta'(t) = \delta(t)$. Можно ввести не только первообразную, но и производную от δ -функции, $\delta'(t)$. Правила обращения с этим объектом следуют из соотношения (4.2). А именно, интегрируя по частям, находим для произвольной гладкой функции f

$$\int dt \delta'(t-s)f(t) = -f'(s). \quad (4.8)$$

Подставляя в соотношение (4.8) $f(t) = (t-s)g(t)$ и сравнив результат с соотношением (4.2), мы заключаем, что $t\delta'(t) = -\delta(t)$. Раскладывая теперь $f(t)$ в ряд Тейлора (до первого порядка) вблизи точки $t = s$ и используя указанное соотношение, мы находим

$$f(t)\delta'(t-s) = f(s)\delta'(t-s) - f'(s)\delta(t-s). \quad (4.9)$$

Обратим внимание на то, что из соотношения (4.9) следует, что $f(t)\delta'(t-s) \neq f(s)\delta'(t-s)$.

До сих пор мы неявно подразумевали, что функция f и ее производная являются непрерывными функциями. Если же функция испытывает в некоторой точке скачок или излом, то надо быть аккуратным при обращении с ее производными (возникающими, в частности, при интегрировании по частям). Примером такой функции, рассмотренной выше, является разрывная функция Хэвисайда, производная которой сводится

к δ -функции. Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что если функция $f(t)$ испытывает скачок в точке s , то

$$f'(t) = [f(s+0) - f(s-0)]\delta(t-s) + g(t), \quad (4.10)$$

где функция $g(t)$ ограничена вблизи точки $t = s$. Здесь $f(s-0)$ и $f(s+0)$ – значения функции $f(t)$ слева и справа от точки разрыва, то есть $f(s+0) - f(s-0)$ – скачок функции на разрыве. Подобным же образом анализируется функция $f(t)$, испытывающая в некоторой точке излом, который соответствует скачку первой производной. Тогда δ -функциональный вклад возникает во второй производной от функции $f(t)$.

Задача 4.1.1. Доказать соотношения

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2t^2\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\epsilon} \exp\left(-\frac{t^2}{\epsilon}\right), \\ \delta'(t) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2t\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{\pi n t^2}. \end{aligned}$$

Задача 4.1.2. Получить соотношение (4.3) предельным переходом $\epsilon \rightarrow 0$ с использованием представления (4.1).

Задача 4.1.3. Выразить $t\delta''(t)$ через $\delta'(t)$.

Задача 4.1.4. Доказать соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \gamma^2\right) \exp(-\gamma|t|) = -2\gamma\delta(t).$$

Задача 4.1.5. Доказать соотношение

$$\delta[f(t)] = \sum_n \frac{1}{|f'(s_n)|} \delta(t - s_n),$$

где суммирование идет по всем точкам s_n , в которых функция $f(t)$ обращается в ноль. Указание: воспользоваться формулой для дифференцирования сложной функции и основным свойством δ -функции (4.2).

Задача 4.1.6. Доказать, что на интервале $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nt)}{\sin(t/2)} = 2\pi\delta(t).$$

Указание: найти разложение приведенной функции в ряд Фурье, воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dt \frac{\sin(kt)}{\sin(t/2)} = 2\pi,$$

справедливым для любого целого положительного k .

4.2 Преобразования функций

4.2.1 Преобразование Фурье

Любую функцию $f(\mathbf{x})$, заданную в d -мерном пространстве, и стремящуюся к нулю на бесконечности, можно разложить в интеграл Фурье:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 dq_2 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{q}), \quad (4.11)$$

где $\tilde{f}(\mathbf{q})$ называется преобразованием Фурье функции $f(\mathbf{x})$. Эту величину можно вычислить в соответствии с правилом

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

Преобразования (4.11) и (4.12) являются обратными друг другу. Из выражения (4.12) следует, что преобразование Фурье действительной функции $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет соотношению $\tilde{f}(-\mathbf{q}) = \tilde{f}^*(\mathbf{q})$, где звездочка означает комплексное сопряжение.

Приведем важное соотношение, касающееся так называемой свертки двух функций

$$h(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (4.13)$$

Подставляя выражение (4.13) в интеграл Фурье (4.12) и переходя к интегрированию по \mathbf{x} и $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, мы находим

$$\tilde{h}(\mathbf{q}) = \tilde{f}(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}). \quad (4.14)$$

Таким образом, свертке в обычном пространстве соответствует простое произведение в Фурье-представлении.

Отметим, что для δ -функции, $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_d)$, преобразованием Фурье является единица, $\tilde{\delta} = 1$. Это свойство является прямым обобщением соотношений (4.3,4.4). Отметим также обобщение на d -мерный случай соотношения (4.2)

$$f(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (4.15)$$

Используя теперь соотношения (4.13,4.14), мы возвращаемся к $\tilde{\delta} = 1$. Это объясняет эффективность вычисления Гриновских функций переходом к Фурье-представлению.

При учете зависимости функции f от времени t в преобразование Фурье можно включить также и время. Мы будем делать это следующим образом

$$\tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) = \int dt d\mathbf{x} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}), \quad (4.16)$$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\omega, \mathbf{q}), \quad (4.17)$$

где d – размерность пространства, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_d$, $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 \dots dq_d$. Обратим внимание на то, что время t входит в преобразования (4.16,4.17) с обратным по сравнению с пространственными координатами знаком.

Рассмотрим теперь двумерное пространство $d = 2$ и изучим функцию f , зависящую только от радиус-вектора $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. В этом случае \tilde{f} будет зависеть только от $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$. Переходя теперь в соотношениях (4.11, 4.12) к интегрированию по полярным координатам r, φ и q, ϕ , мы получаем

$$f(r) = \int \frac{dq q d\phi}{(2\pi)^2} \exp[iqr \cos(\varphi - \phi)] \tilde{f}(q),$$

$$\tilde{f}(q) = \int dr r d\varphi \exp[-iqr \cos(\varphi - \phi)] f(r).$$

Используя теперь соотношение (2.26), мы находим

$$f(r) = \int dq q J_0(qr) \bar{f}(q), \quad (4.18)$$

$$\bar{f}(q) = \int dr r J_0(qr) f(r). \quad (4.19)$$

где J_0 – функция Бесселя нулевого порядка, а $\bar{f} = \tilde{f}/(2\pi)$. Соотношения (4.18, 4.19) являются следствием и модификацией преобразования Фурье. Аналогичные соотношения можно получить для функций Бесселя ненулевого порядка.

Помимо разложения в интеграл Фурье (4.11), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале. Мы сосредоточимся на одномерном случае, поскольку обобщение приведенных соотношений на многомерный случай, как правило, не представляет труда. Отметим, что представление функций в виде ряда Фурье является ведущим способом, который используется при организации сложного численного моделирования.

Мы будем иметь дело с периодической функцией, период которой мы обозначим L или с функцией, заданной на конечном интервале $0 < x < L$. (Этого всегда можно добиться сдвигом начала координат.) Тогда функция $f(x)$ раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(2\pi i n x / L), \quad (4.20)$$

где n – целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (4.20) задает некоторую периодическую с периодом L функцию, которая определена при произвольных x . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале $0 < x < L$, то ряд Фурье (4.20) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на то, что это периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы в точках $x_n = nL$.

Обратное к (4.20) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^L \frac{dx}{L} \exp(-2\pi i n x / L) f(x). \quad (4.21)$$

Отсюда следует, что для действительной функции $f(x)$ коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (4.20) удовлетворяют соотношению $f_{-n} = f_n^*$. В этом случае ряд

Фурье (4.20) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_1^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n x / L) - \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n x / L)]. \quad (4.22)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших L , в ряде Фурье (4.20) существенны большие n . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по волновым векторам $q = 2\pi n / L$. Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow L \int \frac{dq}{2\pi},$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с множителем L – периодом или длиной интервала.

В дальнейшем мы полагаем $L = 2\pi$, чего всегда можно добиться соответствующим выбором единиц измерения x . Тогда соотношения (4.20, 4.21) приобретают следующий вид

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(inx), \quad (4.23)$$

$$f_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \exp(-inx) f(x). \quad (4.24)$$

Обратим внимание на то, что интегрирование в (4.24) можно вести по произвольному интервалу длиной 2π . Эта свобода позволяет из соображений удобства выбирать интервал, на котором задана функция $f(x)$. Обычно же выбирают интервал $-\pi < x < \pi$.

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то это приводит к медленному убыванию коэффициентов ряда Фурье при росте n . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье δ -функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме δ -функций, которая является периодической функцией x . Используя соотношение (4.24), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(inx). \quad (4.25)$$

В этом случае коэффициенты разложения f_n вообще не зависят от n . Для разрывной функции δ -функции возникают в ее производной по x , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от n при больших n . Для самой разрывной функции f это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально $1/n$ при больших n .

Задача 4.2.1. Найти Фурье-преобразование следующих функций: $f(\mathbf{x}) = \exp(-x^2)$ в d -мерном пространстве; $\exp(-|\mathbf{x}|)$ в трехмерном пространстве; $(x^2 + a^2)^{-1}$, где a – константа, в одномерном пространстве.

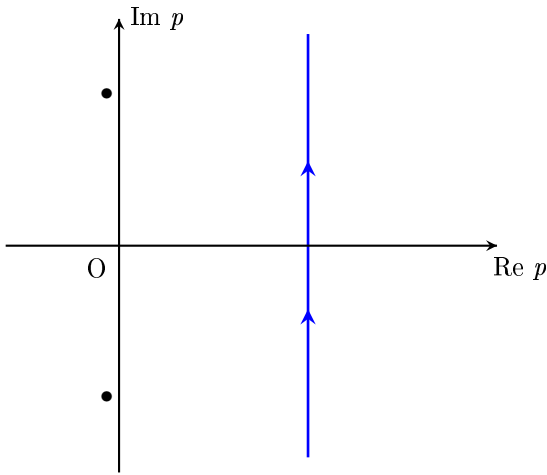


Рис. 4.1: Контур, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

Задача 4.2.2. Найти модификацию соотношений (4.18, 4.19), которая получается при подстановке в преобразование Фурье функции $f = g(r) \cos \varphi$.

Задача 4.2.3. Разложить в ряд Фурье функции $f = \exp(ax)$, задана на интервале $0 < x < 2\pi$; $f = x$, задана на интервале $-\pi < x < \pi$.

4.2.2 Преобразование Лапласа

В задачах, в которых исследуется решение линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, обычно бывает полезным преобразование Лапласа, которое определяется для функций, заданных на положительных временах t . Преобразование Лапласа функции $\Phi(t)$ определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} dt \exp(-pt) \Phi(t). \quad (4.26)$$

Мы предполагаем, что функция $\Phi(t)$ растет со временем t не быстрее, чем некоторая экспонента от t . Тогда интеграл (4.26) сходится при достаточно больших p . Более того, в этом случае $\tilde{\Phi}(p)$ стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Если же выйти в комплексную плоскость по p , то можно утверждать, что интеграл сходится при достаточно больших значениях $\operatorname{Re} p$. Другими словами, функция $\tilde{\Phi}(p)$ заведомо является аналитической в области $\operatorname{Re} p > C$, где C – некоторая константа.

Преобразование, обратное к преобразованию Лапласа, имеет следующий вид

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p), \quad (4.27)$$

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции $\tilde{\Phi}(p)$, смотри рисунок 4.1. На этом рисунке контур интегрирования обозначен синим цветом, а положения возможных

особенностей функции $\tilde{\Phi}(p)$ (полюсы, точки ветвления) обозначены жирными точками (из расположение условно).

Соотношение (4.27) можно рассматривать, как модификацию преобразования Фурье. Возможны деформации контура интегрирования в области аналитичности. Обратим внимание на то, что при отрицательных t интеграл (4.27) равен нулю, так как в этом случае оба сомножителя, $\exp(pt)$ и $\tilde{\Phi}(p)$, стремятся к нулю при увеличении $\operatorname{Re} p$. Поэтому, сдвигая контур интегрирования в большие $\operatorname{Re} p$ (и оставаясь при этом в области аналитичности), мы получим ноль. Это соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи, когда мы исследуем функцию, определенную только при положительных t . При положительных t контур интегрирования можно сдвигать только влево до тех пор, пока он не “наткнется” на особенность.

Рассмотрим определенное на положительных t уравнение

$$L(d/dt)\Phi(t) = f(t), \quad (4.28)$$

где $L(x)$ – некоторый полином (порядок которого мы будем обозначать n). Произведя преобразование Лапласа уравнения (4.28), находим $L(p)\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$. Таким образом, решение уравнения (4.28) записывается в следующем виде

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\tilde{f}(p)}{L(p)}. \quad (4.29)$$

Если $\tilde{f}(p)$ при больших положительных $\operatorname{Re} p$ стремится к нулю, то выражение (4.29) дает решение уравнения с нулевыми начальными условиями. Действительно, в этом случае для $m = 0, \dots, n-1$

$$\frac{d^m}{dt^m} \Phi(+0) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} p^m \frac{\tilde{f}(p)}{L(p)} = 0,$$

что доказывается сдвигом контура интегрирования в большие $\operatorname{Re} p$.

В таком же виде (4.29) можно записать и решение задачи Коши однородного уравнения (4.28) (с нулевой правой частью). Для этого надо использовать в качестве функции $f(t)$ линейную комбинацию $\delta(t)$ и ее производных, которая обеспечивает генерацию начальных условий из нулевой при отрицательных t функции $\Phi(t)$. Количество производных от δ -функции зависит от порядка полинома L : если этот порядок равен n , то надо брать производные до $n-1$ порядка включительно. В представлении Лапласа такая функция $\tilde{f}(p)$ представляет собой полином порядка $n-1$ по p . Отсюда следует, например, что при больших t поведение однородного решения уравнения (4.28) будет экспоненциальным, причем ведущая экспонента определяется корнем уравнения $L(p) = 0$ с наибольшей действительной частью. При решении смешанной задачи (4.28), когда помимо правой части задано начальное условие, надо брать линейную комбинацию вынужденного решения (4.29) и решения задачи Коши однородного уравнения.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерры (Volterra) первого рода с однородным ядром K :

$$\int_0^t ds K(t-s)\Phi(s) = f(t), \quad (4.30)$$

где функция $f(t)$ задана, а найти надо $\Phi(t)$. Производя преобразование Лапласа обеих частей уравнения (4.30), находим $\tilde{K}(p)\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$. Подстановка решения этого алгебраического уравнения в (4.28) дает решение уравнения (4.30) в виде интеграла по p . Аналогичным образом решается интегральное уравнение Вольтерры второго рода с однородным ядром:

$$\Phi(t) + \int_0^t ds K(t-s)\Phi(s) = f(t). \quad (4.31)$$

После перехода к представлению Лапласа мы находим алгебраическое уравнение $[1 + \tilde{K}(p)]\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$.

Задача 4.2.4. Найти преобразования Лапласа следующих функций: $\Phi = \exp(-\lambda t)$, $\Phi = t^n$, $\Phi = \cos(\nu t)$, $\Phi = \cosh(\lambda t)$, $\Phi = t^{-1/2}$.

Задача 4.2.5. Найти решение уравнения $\ddot{\Phi} + \Phi = \exp(-\lambda t)$ с начальными условиями $\Phi(0) = 1$, $\dot{\Phi}(0) = 0$.

Задача 4.2.6. Найти решение уравнения (4.30) для $K(t) = \exp(-\lambda t)$, $f(t) = t^n$.

Задача 4.2.7. Найти решение уравнения (4.30) для $K(t) = t^n$, $f(t) = \cos(\nu t)$.

Задача 4.2.8. Найти решение уравнения (4.30) для $K(t) = 1/\sqrt{t}$ и начального короткого воздействия, когда $\tilde{f}(p) = 1$.

4.2.3 Метод Лапласа

Метод Лапласа позволяет получать интегральные представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений для функции $Y(x)$, линейных по переменной x :

$$\sum_{m=0}^N (a_m + b_m x) \frac{d^m Y}{dx^m} = 0. \quad (4.32)$$

Это интегральное представление имеет вид

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt), \quad (4.33)$$

где C – некоторый контур в комплексной плоскости t . Подставляя уравнение (4.32) в представление (4.33), используя соотношение $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$ и предполагая, что в интеграле (4.33) можно произвести интегрирование по частям по t без граничных членов, мы находим уравнение

$$\frac{d}{dt}(QZ) = PZ, \quad (4.34)$$

$$P(t) = \sum_{m=0}^N a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^N b_m t^m. \quad (4.35)$$

Решением уравнения (4.34) является

$$Z = \frac{1}{Q} \exp\left(\int dt P/Q\right), \quad (4.36)$$

где в показателе экспоненты стоит первообразная от P/Q (определенная с точностью до константы). Поскольку P и Q являются полиномами по t , эту первообразную можно выразить через элементарные функции.

Выясним теперь условия, при которых возможно упомянутое выше интегрирование по частям. Для этого произведение $ZQ \exp(xt)$ должно иметь одно и то же значение на концах контура C (который может быть как замкнутым, так и незамкнутым). Наиболее естественным выбором контура C является контур, который идет вдоль одного из направлений из бесконечности, вдоль которого произведение $ZQ \exp(xt)$ стремится к нулю, и возвращается в бесконечность вдоль другого направления так, чтобы вдоль этого направления произведение $ZQ \exp(xt)$ также стремилось к нулю. Число таких направлений растет с увеличением порядка уравнения N , что и обеспечивает необходимое число независимых решений уравнения (4.32), которые получаются из выражения (4.36) при различных выборах контура интегрирования C .

Задача 4.2.9. Найти методом Лапласа решение уравнения $(d/dx + x)Y = 0$.

4.3 Собственные функции оператора

Рассмотрим функции одной переменной, заданные на конечном интервале $a < x < b$. Будем называть дифференциальный оператор \hat{L} самосопряженным, если для любых двух функций, $f(x)$ и $g(x)$, из интересующего нас класса выполняется соотношение

$$\int_a^b dx f \hat{L}g = \int_a^b dx g \hat{L}f. \quad (4.37)$$

Выполнение условия (4.37) может быть связано как со свойствами класса рассматриваемых функций, так и со свойствами оператора \hat{L} . Например, нулевые граничные условия или периодические граничные условия (когда на концах интервала одинаковы значения самой функции и одинаковы значения ее производной), наложенные на функции f и g , приводят к самосопряженности оператора $\hat{L} = d^2/dx^2 + U(x)$.

В дальнейшем нас будет интересовать обобщение соотношения (4.37)

$$\int_a^b dx \rho f \hat{L}g = \int_a^b dx \rho g \hat{L}f, \quad (4.38)$$

где $\rho(x)$ – положительная функция, которую обычно называют весовой функцией или мерой интегрирования.

Удовлетворяющий условию (4.38) оператор \hat{L} уже не является самосопряженным. В частности, им может быть оператор Штурма-Лиувилля

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q \frac{d}{dx} + U, \quad (4.39)$$

где Q и U – функции от x . Легко проверить, что при нулевых или периодических граничных условиях на функции f, g оператор (4.39) удовлетворяет условию (4.38), если

$$\frac{d}{dx} \rho = Q \rho \rightarrow \rho = \exp \left(\int dx Q \right). \quad (4.40)$$

Рассмотрим теперь собственные функции f_n оператора \hat{L} , которые удовлетворяют уравнению $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$, где λ_n – собственное значение оператора \hat{L} . Условие (4.38) приводит к соотношению

$$\int dx \rho f_n \hat{L} f_m = \lambda_m \int dx \rho f_n f_m = \lambda_n \int dx \rho f_n f_m.$$

Таким образом, при $\lambda_n \neq \lambda_m$ выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx \rho f_n f_m = 0. \quad (4.41)$$

Как следует из соотношения (4.37), собственные функции самосопряженных операторов также ортогональны, причем с весом $\rho = 1$. В качестве примера приведем $\cos(nx), \sin(nx)$, которые являются собственными функциями оператора d^2/dx^2 на интервале $(0, 2\pi)$ в классе периодических функций. Поскольку для этого оператора Штурма-Лиувилля (4.39) $Q = 0$, то в силу (4.40) $\rho = 1$, и соотношения (4.41) легко проверяются непосредственно.

Дополнительного комментария требует наличие вырождения (то есть собственных функций с совпадающими собственными значениями оператора \hat{L}). Мы будем считать, что набор собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению оператора \hat{L} , за счет линейного преобразования выбран таким образом, чтобы внутри этого набора также выполнялось условие ортогональности (4.41). Отметим, что для рассмотренного нами примера оператора d^2/dx^2 , собственные функции которого дважды вырождены (собственному значению $\lambda_n = -n^2$ соответствуют две собственные функции), условию взаимной ортогональности удовлетворяют как раз $\cos(nx), \sin(nx)$.

Если f_n является полным набором собственных функций оператора \hat{L} из интересующего нас класса, то любую функцию f того же класса можно разложить в ряд по этим собственным функциям:

$$f = \sum_n c_n f_n. \quad (4.42)$$

Коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (4.41) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx \rho f_n f, \quad A_n = \int dx \rho f_n^2. \quad (4.43)$$

Примером разложения (4.42) является разложение по уже упомянутым нами функциям $\cos(nx), \sin(nx)$, которое является не чем иным, как разложением в ряд Фурье. Подставляя выражение (4.43) для коэффициентов c_n в разложение (4.42), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \rho \sum_n \frac{f_n(x) f_n(y)}{A_n} f(y),$$

которое должно выполняться для любой функции f из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x) f_n(y) = \frac{1}{\rho(y)} \delta(x - y), \quad (4.44)$$

которое является выражением полноты системы функций f_n .

Рассмотрим теперь неоднородную задачу $\hat{L}f = \phi$. Представляя обе функции, f и ϕ , в виде ряда по собственным функциям оператора \hat{L} : $f = \sum_n c_n f_n$ и $\phi = \sum_n a_n f_n$, мы находим $c_n = a_n / \lambda_n$. Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой, если у оператора \hat{L} имеется нулевое собственное значение. (В этом случае часто говорят, что у оператора \hat{L} есть нулевые моды.) Эта проблема является неустранимой в том смысле, что если в разложении “силы” ϕ имеется ненулевой вклад с собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу, то неоднородная задача $\hat{L}f = \phi$ не может быть решена в базисе функций f_n . Поясним это утверждение на примере оператора $\hat{L} = d^2/dx^2$, который имеет собственную функцию, соответствующую нулевому собственному значению (нулевую моду), которая есть просто константа. Будем рассматривать задачу с периодическими граничными условиями. Наличие константы в разложении ϕ означает, что интеграл от ϕ по периоду не равен нулю. В то же время для периодической функции f интеграл по периоду от $d^2 f/dx^2$ равен нулю. Поэтому уравнение $d^2 f/dx^2 = \phi$ не имеет решения на классе периодических функций.

Отметим, что к изучаемому нами типу функций принадлежат полиномы Лежандра и Эрмита. Как следует из уравнения (2.64) для полиномов Эрмита, они являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (4.39) с $Q = -2x, U = 0$. В этом случае в соответствии с (4.40) $\rho = \exp(-x^2)$, а интервал интегрирования по x простирается от $-\infty$ до $+\infty$. Поскольку $\rho(x)$ быстро стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, от функций f следует требовать не слишком быстрого роста на бесконечности. Поэтому мы приходим к условиям ортогональности (4.41) для полиномов Эрмита, которые и зафиксированы соотношением (2.69).

Как следует из уравнения (2.41), которому подчиняются полиномы Лежандра, они являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (4.39) с $Q = \cot \theta$ и $U = 0$. В этом случае в соответствии с (4.40) $\rho = \sin \theta$. Интервал же интегрирования по углу θ распространяется от 0 до π . Поскольку ρ обра-

щается в ноль на концах интервала, достаточно потребовать конечности функций f на этом интервале, что определяет рассматриваемый класс функций. Условие (4.41) переписывается в виде $\int d\mu f_n f_m = 0$, где $\mu = \cos \theta$. Таким образом, в терминах переменной μ полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале $-1 < \mu < 1$, что и зафиксировано соотношением (2.55). Отметим, что соотношение ортогональности (4.41) не предполагает, что оператор \hat{L} является оператором Штурма-Лиувилля (4.39). Поэтому при доказательстве соотношений (2.55) можно исходить и непосредственно из уравнения (2.41), которое показывает, что полиномы Лежандра являются собственными функциями самосопряженного оператора, что и приводит прямо к (2.55).

4.4 Метод характеристик

Метод характеристик позволяет свести решение определенного класса уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, он применим к уравнениям, которые содержат только первые производные и линейным по этим производным. Такое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla g = f, \quad (4.45)$$

где g – искомая функция, зависящая от времени t и координат \mathbf{x} пространства произвольной размерности. “Скорость” \mathbf{V} и “накачка” f являются некоторыми функциями времени и координат, t, \mathbf{x} , а также самой искомой функции g . Тогда решение уравнения (4.45) может быть построено следующим образом. Надо найти решения уравнений

$$\frac{dg}{dt} = f, \quad (4.46)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}. \quad (4.47)$$

Траектории, описываемые уравнением (4.47), называются характеристиками системы. Чтобы найти значение функции g в момент времени t и в точке \mathbf{x} , необходимо взять характеристику, которая заканчивается в момент времени t в точке \mathbf{x} . После этого надо решить уравнение (4.46) вдоль этой характеристики, используя в качестве начального условия $g(t_0, \mathbf{x}_0)$, где t_0 – начальное время, при котором задается начальное условие на функцию g , а \mathbf{x}_0 – точка, в которой находится решение уравнения (4.47) в начальный момент времени t_0 .

Задача 4.4.1. Найти решение уравнения (4.45) для сдвигового поля $V_x = sy, V_y = 0$ с нулевыми начальными условиями и статического поля $f(x, y) = \partial_x F(x, y)$.

4.5 Асимптотические методы

4.5.1 Метод перевала и стационарной фазы

Метод перевала применим к интегралам вида

$$g(\nu) = \int_a^b dx \exp[f(x)], \quad (4.48)$$

где (действительная) функция $f(x)$ достигает на интервале (a, b) абсолютного максимума в некоторой промежуточной точке c . Тогда при больших значениях функции f основной вклад в интеграл (4.48) определяется узкой окрестностью этого максимума. Раскладывая функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = c$, мы находим $f \approx f(c) + (1/2)f''(c)(x - c)^2$. Так как точка $x = c$ соответствует максимуму функции f , то $f''(c) < 0$. Подставляя это разложение в (4.48), мы приходим к Гауссовому интегралу. При больших значениях f'' интегрирование по x в этом интеграле можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$. Вычисляя получившийся Гауссов интеграл, находим асимптотическое выражение

$$g(\nu) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(c)}} \exp[f(c)], \quad (4.49)$$

которое справедливо при $|f''(c)| \gg 1$.

Отметим, что если функция $f(x)$ достигает абсолютного максимума на одном из краев интервала (a или b), то именно окрестность этой точки определяет основной вклад в интеграл (4.48) при больших положительных f . Этот случай может быть исследован аналогично, в рамках разложения функции $f(x)$ вблизи a или b . Тогда можно ограничиться линейным членом разложения функции $f(x)$ по $x - a$ или $x - b$ (если только этот член разложения не равен нулю), что упрощает анализ.

Метод стационарной фазы работает для интегралов вида $\int dx \exp[ih(x)]$, где $h(x)$ – действительная функция, имеющая в области интегрирования стационарную точку x_0 , то есть $dh/dx(x_0) = 0$, причем $|d^2h/dx^2(x_0)| \gg 1$. В этом случае основной вклад в интеграл определяется окрестностью стационарной точки, так как именно в этой окрестности функция $\exp[ih(x)]$ осциллирует медленнее всего. В окрестности стационарной точки функцию h можно разложить в ряд по $x - x_0$. Удерживая члены до второго порядка, можно написать

$$h \approx \Theta \pm \frac{A}{2}(x - x_0)^2, \quad (4.50)$$

где линейный член отсутствует в силу стационарности фазы в точке x_0 , и $\pm A = d^2h/dx^2(x_0)$. Знак \pm перед A связан с тем, что мы полагаем $A > 0$. Далее

$$\begin{aligned} \int dx \exp[ih(x)] &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i\Theta \pm iA(x - x_0)^2/2] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \exp(i\Theta \pm i\pi/4). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Беря действительную и мнимую части соотношения (4.51), мы находим

$$\int dx \cos h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \cos(\Theta \pm \pi/4), \quad (4.52)$$

$$\int dx \sin h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sin(\Theta \pm \pi/4). \quad (4.53)$$

Методы перевала и стационарной фазы можно обобщить на случай контурных интегралов в комплексной плоскости. При этом перевальная точка (точка стационарной фазы) не обязана лежать на этом контуре.

Обобщенный метод перевала применим к контурным интегралам типа

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \quad (4.54)$$

при выполнении определенных условий на функцию $S(z)$. Прежде всего мы будем предполагать, что функция $S(z)$ аналитична вблизи пути интегрирования от a к b и, следовательно, контур интегрирования можно деформировать в области аналитичности $S(z)$. Далее, мы будем предполагать, что в области аналитичности имеется по крайней мере одна точка с нулевой производной $S'(z_0) = 0$ и что контур интегрирования можно деформировать таким образом, чтобы он проходил через z_0 , причем действительная часть $S(z)$ должна достигать в точке z_0 максимума при движении вдоль деформированного контура. Тогда точка z_0 называется седловой, поскольку для направления, перпендикулярного контуру, действительная часть $S(z)$ достигает в точке z_0 минимума.

Если в седловой точке действительная часть $S(z)$ достигает абсолютного максимума вдоль контура интегрирования, то можно надеяться, что именно окрестность седловой точки даст главный вклад в интеграл (4.54). Разложим S в ряд Тейлора вблизи седловой точки: $S \approx S_0 + S_0''(z - z_0)^2/2$, где S_0 и S_0'' – значения функции S и ее второй производной в точке $z = z_0$. Если S достаточно быстро меняется вблизи седловой точки, то главный вклад в интеграл дает узкая окрестность седловой точки $z = z_0$, и мы можем ограничиться в интеграле (4.54) этим разложением, распространив интегрирование до бесконечности в обе стороны. Тогда мы приходим к Гауссовому интегралу, который дает

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S_0''}} \exp(S_0). \quad (4.55)$$

Подчеркнем, что обе величины, S_0 и S_0'' , могут быть комплексными. Знак перед квадратным корнем в (4.55) определяется направлением, в котором контур интегрирования проходит через седловую точку. Условием применимости приближения (4.55) является значительное изменение функции $S(z)$ в области применимости приведенного разложения, то есть $|S_0''| R^2 \gg 1$, где R – радиус сходимости разложения функции $S(z)$ в ряд Тейлора около точки $z = z_0$.

В области аналитичности функции $S(z)$ может оказаться несколько седловых точек. В этом случае надо выбрать ту из них, в которой $\text{Re}S_0$ максимальна, поскольку именно окрестность этой точки дает главный вклад в интеграл (4.54). Возможно также вырождение, когда действительные части S в нескольких седловых точках одинаковы (или мало отличаются). Тогда для оценки интеграла (4.54) надо брать сумму выражений (4.55) для этих седловых точек.

Рассмотренные выше метод стационарной фазы и метод перевала могут рассматриваться, как частные случаи обобщенного метода перевала.

Задача 4.5.1. Найти значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(\alpha x^2 - x^4/2)$ при больших положительных α .

Задача 4.5.2. Найти значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(\alpha x^2/2 - x^3/3)$ при больших положительных α .

Задача 4.5.3. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^4/4) \cos(\alpha x)$$

при больших положительных α .

4.5.2 Метод WKB

Рассмотрим уравнение (1.33), где в операторе Штурма-Лиувилля (1.34) мы положим $Q = 0$:

$$\frac{d^2}{dx^2} f + U f = 0. \quad (4.56)$$

Предположим, что величина $p = \sqrt{-U}$ меняется достаточно медленно на масштабе p^{-1} , что означает выполнение неравенства $dp/dx \ll p^2$. Тогда для функции f можно построить следующее приближенное решение

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp(S) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp(-S), \quad (4.57)$$

$$S(x) = \int^x dy p(y), \quad (4.58)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы. Выражение (4.57) было получено Вентцелем (Wentzel), Крамерсом (Kramers) и Бриллюэном (Brillouin) и носит название приближения WKB, что является аббревиатурой имен этих авторов.

Подставляя выражение (4.57) в уравнение (4.56), можно убедиться, что оно является решением, если пренебречь в нем членами с $(dp/dx)^2$ и d^2p/dx^2 . Первое пренебрежение возможно в силу предполагаемого неравенства $dp/dx \ll p^2$, а второе в силу неравенства $d^2p/dx^2 \ll p dp/dx$, которое получается из предыдущего дифференцированием по x .

Фактор U в уравнении (4.56) может быть как отрицательным, так и положительным, к обоим этим случаям одинаково применим метод WKБ. В первом случае величина p является действительной, и два слагаемых в выражении (4.57) являются растущей и убывающей по x экспонентами. Во втором случае величина p является чисто мнимой, и мы имеем дело с экспонентами от мнимых величин S . Другими словами, мы имеем дело с осциллирующими функциями, если речь идет о действительных решениях. Тогда мы можем записать

$$f = \frac{C}{|p|^{1/2}} \cos(A + \varphi), \quad (4.59)$$

где $S = iA$, C – действительная константа и φ – некоторая фаза.

Приведенная схема легко обобщается на случай произвольного оператора Штурма-Лиувилля (1.34)

$$\frac{d^2}{dx^2} f + Q \frac{df}{dx} + Uf = 0.$$

В этом случае вместо (4.57,4.58) находим

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p_1}} \exp(S_1) + \frac{C_2}{\sqrt{p_2}} \exp(S_2), \quad (4.60)$$

$$S_{1,2}(x) = \int^x dy p_{1,2}(y), \quad (4.61)$$

где $p_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 + Qp + U = 0.$$

Задача 4.5.4. Установить методом WKБ асимптотическое поведение функций Эйри $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$.

4.6 Нётеровские интегралы движения

Многие эволюционные дифференциальные уравнения приводят к сохранению некоторых величин, которые называют интегралами движения. Наличие интегралов движения облегчает анализ решений соответствующего уравнения, и потому их нахождение является важной задачей. Здесь мы изложим способ нахождения интегралов движения, связанных с непрерывной симметрией уравнения, который был разработан Нётер. Поэтому соответствующие интегралы движения называются Нётеровскими.

Нётеровские интегралы возникают в том случае, если исследуемое уравнение является следствием вариационного принципа. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение для поля u , которое получается, как экстремум функционала

$$S = \int dt dr L(u, \dot{u}, \nabla u). \quad (4.62)$$

Обычно этот функционал называют действием. Условие экстремума действия дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial(\dot{u})} + \nabla \frac{\partial L}{\partial(\nabla u)} = \frac{\partial L}{\partial u}, \quad (4.63)$$

которому подчиняется поле u .

Уравнение (4.63) или действие (4.62) однородны в пространстве и времени, то есть инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени или сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала отсчета времени поле u изменяется, это изменение равно $\delta u = \tau \partial_t u$, где τ – величина сдвига. Легко проверить непосредственно, что действие (4.62) не меняется при таком преобразовании. Предположим теперь, что τ – некоторая функция пространства и времени. Тогда вариация действия S при преобразовании $\delta u = \tau \partial_t u$ уже не будет равна нулю, ее можно записать в следующем виде

$$\delta S = \int dt dr \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) \dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \nabla \tau \right], \quad (4.64)$$

где мы использовали интегрирование по частям и соотношение

$$\partial_t L = \frac{\partial L}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{\nabla} u.$$

С другой стороны, для поля u , которое подчиняется уравнению движения (4.63), вариация действия (4.63) при любой вариации поля u , в том числе и при вариации $\delta u = \tau \partial_t u$, должна быть равна нулю. Другими словами, для поля u , которое подчиняется уравнению движения (4.63), равно нулю выражение (4.64). Поскольку поле τ в выражении (4.64) является произвольной функцией времени и пространства, мы приходим к соотношению

$$\partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) + \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \right) = 0, \quad (4.65)$$

которое имеет вид локального закона сохранения. Обычно закон (4.65) называют законом сохранения энергии, а сохраняющийся вследствие этого уравнения интеграл

$$E = \int dr \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right), \quad (4.66)$$

называют энергией. Закон сохранения энергии имеет вид $\partial_t E = 0$.

С формальной точки зрения, закон сохранения энергии (4.65) следует из того, что в выражении (4.64) для вариации действия присутствуют только производные (по времени и пространству) от поля τ , но не само τ . В свою очередь, это свойство следует из инвариантности действия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, которое соответствует $\tau = \text{const}$. Поэтому при не зависящем от времени и координат поле τ вариация действия обязана обращаться в ноль, что и объясняет отсутствие членов с τ (без производных) в вариации (4.64). Понятно, что таким же образом будут получаться законы сохранения в том случае, если действие инвариантно относительно преобразования поля u , которое

характеризуется некоторым непрерывным параметром типа τ . Поэтому иногда говорят, что Нётеровские интегралы движения являются следствием непрерывной симметрии действия. Дискретная же симметрия (типа инвариантности действия относительно изменения знака поля u) законов сохранения не дает.

Рассмотрим закон сохранения, который получается из инвариантности действия относительно сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала координат поле u изменяется, это изменение равно $\delta u = \boldsymbol{\xi} \nabla u$, где $\boldsymbol{\xi}$ – величина сдвига. Считая теперь, что $\boldsymbol{\xi}$ является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (4.62) при вариации $\delta u = \boldsymbol{\xi} \partial_x u$ и приравнявая результат к нулю (что справедливо для поля u , подчиняющемся уравнению движения), находим

$$\partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (4.67)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для остальных координат. Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$\mathbf{P} = \int dr \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \nabla u, \quad (4.68)$$

которую обычно называют импульсом. Закон сохранения импульса имеет вид $\partial_t \mathbf{P} = 0$.

Чтобы проиллюстрировать возникновение Нётеровских интегралов движения, не связанных с однородностью в пространстве и времени, рассмотрим случай, когда интересующее нас поле является комплексным. Обозначим его ψ . В этом случае действие S можно записать в виде

$$S = \int dt dr L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*). \quad (4.69)$$

Мы записали зависимость L от ψ и сопряженного ему поля ψ^* отдельно, поскольку в силу того, что поле ψ имеет две компоненты (действительную и мнимую части) уравнения движения на ψ или ψ^* можно получать независимым варьированием по ψ или ψ^* .

Теперь предположим, что действие (4.69) инвариантно относительно сдвига фазы (что справедливо, например, для НУШ). Для инфинитезимального сдвига это преобразование имеет вид $\delta \psi = i\alpha \psi$, $\delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$. Инвариантность действия относительно этого преобразования означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \nabla \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \nabla \psi^* = 0.$$

Считая теперь, что α является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (4.69) при вариации $\delta \psi = i\alpha \psi$, $\delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$ и приравнявая результат к нулю (с использованием приведенного

выше выражения), находим закон сохранения

$$i \partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right) + i \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \psi - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \psi^* \right) = 0. \quad (4.70)$$

Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$N = \int dr i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right), \quad (4.71)$$

которую называют числом частиц или волновым действием. Закон сохранения имеет вид $\partial_t N = 0$.

Задача 4.6.1. Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения КдФ

$$\partial_t u + g \partial_x u + \partial_x [(df/\partial u) \partial_x^2 f] = 0,$$

где f, g – произвольные функции u . Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

Задача 4.6.2. Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения синус-Гордона

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + f(\varphi) = 0,$$

где f – периодическая функция с периодом 2π , удовлетворяющая условию $\int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi) = 0$. Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

Задача 4.6.3. Найти момент импульса поля u , динамика которого дается действием

$$S = \int dt d^3r \left[\frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u)^2 - F(u) \right],$$

где F – произвольная функция u . Указание: действие инвариантно относительно инфинитезимального поворота на угол $\boldsymbol{\theta}$, при котором поле u преобразуется следующим образом $\delta u = -\theta_i \epsilon_{ikn} r_k \partial_n u$, где ϵ_{ikn} – абсолютно антисимметричный тензор, а \mathbf{r} – радиус-вектор.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ, 1953.
- [2] Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы математической физики, в 2 т., ИЛ, Москва, 1958.
- [3] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, гл. Специальные функции, Москва, Физматгиз, 1962.
- [4] С.Бергман, Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М.: Мир, 1964.
- [5] И.Г. Араманович, В.И. Левин, Уравнения математической физики (2-е изд.). М.: Наука, 1969.
- [6] Б. Г. Коренев, Введение в теорию бесселевых функций, Наука, Москва, 1971.
- [7] Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Москва, Атомиздат, 1972.
- [8] А. Найфэ, Методы возмущений, Мир, Москва, 1976.
- [9] Ж. Адамар, Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
- [10] С.К.Годунов, Уравнения математической физики (2-е изд.). М.: Наука 1979.
- [11] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов, Москва, Наука, 1980.
- [12] М. Ф. Федорюк, Асимптотика: Интегралы и ряды, СМБ, Наука, Москва, 1987.
- [13] Г.М. Заславский, Р.З.Сагдеев, Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [14] Ф. Олвер, Асимптотика и специальные функции, Наука, Москва, 1990.
- [15] Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Лань, СП, 2001.
- [16] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Лань, СП, 2002.
- [17] В.В.Пикулин, С.И.Похожаев, Практический курс по уравнениям математической физики, МНЦМО, 2004.
- [18] Д. А. Шапиро, Конспект лекций по математическим методам физики, части 1,2, Новосибирск, НГУ, 2004.
- [19] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, Специальные функции математической физики, Долгопрудный, Интеллект, 2007.
- [20] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Лань, СП. 2008.
- [21] И. В. Колоколов и др., Задачи по математическим методам физики, Москва, Эдиториал УРСС, 2009.
- [22] Н. А. Кудряшов, Методы нелинейной математической физики, Долгопрудный, Интеллект, 2010.
- [23] В. Босс, Уравнения математической физики, Эдиториал УРСС, Москва, 2016.
- [24] А. Аксенов, Дифференциальные уравнения, Юрайт, 2016.
- [25] В. Байков, А. Жибер, Уравнения математической физики, Юрайт, 2017.