Задание 1: Фононы (срок сдачи — 25.10.2026)

Примечание: В задачах Ф1 и Ф2 речь идёт про самые основы фононной теории, и утверждения, которые там требуется доказать, могут быть вам уже хорошо знакомы. Тем не менее, тут обсуждается, как именно эта теория строится. Поэтому всё нужно обосновывать, исходя из свойств динамической матрицы и уравнений движения.

Задача Ф1. (5 баллов) Доказать, что:
а) Динамическая матрица $\hat{\mathcal{D}}_{\gamma\gamma'}(\mathbf{k})$ эрмитова.
б) $\hat{\mathcal{D}}(-\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{D}}^T(\mathbf{k})$.
в) $\omega(-\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})$.
г) Свойство в) напрямую следует из уравнений движения и симметрии относительно обращения времени.
д) Собственные векторы динамической матрицы можно выбрать такими, что $e_\gamma(-\mathbf{k}) = e^*_\gamma(\mathbf{k})$.

Задача Ф2. (5 баллов) Показать, что при малых $\mathbf{k}$ акустические ветви фононного спектра (т.е. такие, в которых все атомы одной элементарной ячейки колеблются в фазе) имеют линейный закон дисперсии и этих ветвей 3 штуки (в трёхмерном кристалле).

Задача Ф3. (5 баллов) Рассмотрим простейший ионный кристалл кубической симметрии с двумя ионами в элементарной ячейке, такой как NaCl (массы и заряды ионов равны m_1, q и m_2, $-q$ соответственно). Из-за симметрии в этом случае тензор диэлектрической проницаемости сводится к скаляру (т.е. пропорционален $\delta_{\alpha\beta}$). Пусть волна распространяется в одном из симметричных направлений (поэтому является или чисто продольной, или чисто поперечной). Взаимодействие между ионами может быть произвольным (в том смысле, что взаимодействовать могут не только ближайшие соседи). Найдите $\varepsilon(\omega)$ в этом случае.

Задача Ф4. (5 баллов) Написать интеграл столкновений $I_{\text{ст/сл.}}$ для процессов слияния в полной и в линеаризованной форме.

Задача Ф5. (5 баллов) Пусть $\tau_N \to 0$, а $\tau_U, \tau_i \to \infty$, тогда функция распределения мгновенно релаксирует к локальному равновесию, характеризуемому двумя параметрами — средней скоростью $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и температурой $T(t, \mathbf{r})$. В случае слабого отклонения от

равновесия из гидродинамических уравнений получите уравнения на эти две величины. Из полученных уравнений найдите скорость второго звука.