Задание 1: Фононы

Задача Ф1. (5 баллов) Доказать, что:

а) Динамическая матрица $\hat{\mathcal{D}}_{\gamma\gamma'}(\mathbf{k})$ эрмитова.

б) $\hat{\mathcal{D}}(-\mathbf{k}) = \hat{\mathcal{D}}^T(\mathbf{k})$.

в) $\omega(-\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})$.

г) Свойство в) является следствием симметрии относительно обращения времени.

д) Собственные векторы динамической матрицы можно выбрать такими, что $e_\gamma(-\mathbf{k}) = e_\gamma^*(\mathbf{k})$.

Задача Ф2. (5 баллов) Показать, что при малых $\mathbf{k}$ акустические ветви фононного спектра (т.е. такие, в которых все атомы одной элементарной ячейки колеблются в фазе) имеют линейный закон дисперсии и этих ветвей 3 штуки (в трёхмерном кристалле).

Задача Ф3. (5 баллов) Рассмотрим простейший двухатомный кубический ионный кристалл (массы и заряды ионов равны m_1, q и m_2, $-q$ соответственно). Из-за симметрии в этом случае тензор диэлектрической проницаемости сводится к скаляру (т.е. пропорционален $\delta_{\alpha\beta}$). Пусть волна распространяется в одном из симметричных направлений (поэтому является или чисто продольной, или чисто поперечной). Взаимодействие между ионами может быть произвольным (в том смысле, что взаимодействовать могут не только ближайшие соседи). Найдите $\varepsilon(\omega)$ в этом случае.

Задача Ф4. (5 баллов) Написать интеграл столкновений $I_{\text{ст/сл.}}$ для процессов слияния в полной и в линеаризованной форме.

Задача Ф5. (5 баллов) Пусть $\tau_N \to 0$, а $\tau_U, \tau_i \to \infty$, тогда функция распределения мгновенно релаксирует к локальному равновесию, характеризуемому двумя параметрами — средней скоростью $\mathbf{u}(t, \mathbf{r})$ и температурой $T(t, \mathbf{r})$. В случае слабого отклонения от равновесия из гидродинамических уравнений получите уравнения на эти две величины. Из полученных уравнений найдите скорость второго звука.