Московский Физико-Технический Институт
Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау РАН

Лекции по квантовой электродинамике

С.Н.Вергелес

2005 г.

Оглавление

Предисловие

Предлагаемый семестровый курс лекций регулярно читается автором студентам старших курсов Московского физико-технического института, изучающих теоретическую физику под руководством специалистов из Института теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН. Этот курс самодостаточен и весьма компактен. Изложение ведётся при помощи аппарата функционального интегрирования, применяется размерностный метод ультрафиолетовой регуляризации. Все вычисления проводятся весьма подробно и до конца. Курс начинается с квантования скалярного поля и заканчивается вычислением однопетлевых поправок, лэмбовского сдвига уровней и квантовых аномалий. Основной текст существенно дополняется упражнениями и задачами, приведенными в конце каждой лекции. Большинство задач достаточно просты, но часть из них, отмеченных звездочкой, потребуют при решении ощутимых усилий по причине либо технических трудностей, либо необходимости достаточно ясного понимания идеологии предмета и овладения его аппаратом. Для полноценного и минимального изучения квантовой электродинамики представляется необходимым самостоятельное решение большинства приведенных задач.

Конечно, предлагаемый курс лекций является лишь введением в круг проблем, изучаемых релятивистской квантовой теорией поля. Для углубленного овладения этой наукой необходимо систематическое и длительное изучение так называемых "толстых"учебников, немалый список которых недавно пополнился выдающейся книгой С. Вайнберга "Квантовая теория поля".

Я благодарен М.Ю. Лашкевичу, любезно предоставившему мне конспект своих лекций по квантовой электродинамике, читавшихся им ранее студентам МФТИ тех же специальностей. Я позаимствовал из лекций Лашкевича общую структуру, а также несколько задач.

2005 г. Сергей Вергелес

Часть I
ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КВАНТОВАНИЯ ПОЛЕЙ

Лекция 1
КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

1. Одномерный случай

Пусть $\mathcal{H}(p, q)$ — функция Гамильтона некой одномерной системы. Классические скобки Пуассона (СП) имеют вид

$$\{q,\, q\} = 0\,, \quad \{p,\, p\} = 0\,, \quad \{q,\, p\} = 1\,.$$

Каноническая процедура квантования заключается в сопоставлении переменным $q,\, p$ эрмитовых операторов $Q,\ P$, причём скобкам Пуассона ставятся в соответствие перестановочные соотношения:

$$\{q,\, p\} = 1 \quad \longrightarrow \quad [Q,\, P] = i \quad (\hbar = 1)\,.$$

В сложных случаях возникает проблема упорядочения операторов в гамильтониане. Решим её следующим образом. Пусть в представлении Шредингера $|q\rangle$ является собственным вектором оператора координаты Q:

$$Q\,|q\rangle = q\,|q\rangle\,, \quad \langle q'\,|q\rangle = \delta(q - q') \tag{1}$$

Так как для вещественного s имеем $[Q,\, e^{isP}] = -s\, e^{isP}$, то

$$e^{isP}|q\rangle = |q - s\rangle\,. \tag{2}$$

Рассмотрим унитарный оператор

$$u(s, t) = \exp\left(iPs + iQt\right) = u^{\dagger}(-s, -t)\,, \tag{3}$$

где s и t — вещественные числа. Воспользуемся формулой Хаусдорфа

$$e^{A+B} = e^{-(1/2)[A,\, B]}\, e^{A}\, e^{B}\,,$$

которая справедлива, если $[A,\, [A,\, B]] = [B,\, [A,\, B]] = 0$. Полагая $A = itQ,\ B = isP$, находим:

$$u(s,\, t) = e^{(i/2)st}\, e^{itQ}\, e^{isP}\,, \tag{4}$$

а также

$$\langle q''|u(s,\, t)|q'\rangle = \exp\left(i\frac{q'' + q'}{2}t\right)\, \delta(q'' - q' + s)\,. \tag{5}$$

Пусть

$$\mathcal{H}(s,\, t) = \int \mathcal{H}(p,\, q)\, e^{-isp - itq}\, \mathrm{d}\,p\, \mathrm{d}\,q = \mathcal{H}^{*}(-s,\, -t)$$

— Фурье–образ гамильтониана. Согласно Вейлю проблема упорядочения операторов в гамильтониане решается при помощи формулы

$$\hat{\mathcal{H}}(P,\, Q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \mathcal{H}(s,\, t)\, u(s,\, t)\, \mathrm{d}\,s\, \mathrm{d}\,t = \hat{\mathcal{H}}^{\dagger}(P,\, Q) \tag{6}$$

При помощи формул (1) – (6) получаем:

$$\langle q''|\hat{\mathcal{H}}|q'\rangle = \int \mathcal{H}\left(p,\, \frac{q' + q''}{2}\right)\, e^{ip(q'' - q')}\, \frac{\mathrm{d}\,p}{2\pi}\,.$$

Если $(t'' - t') \to 0$, то оператор эволюции $U(t'',\, t') \equiv \exp[-i(t'' - t')\,\hat{\mathcal{H}}] \approx 1 - i(t'' - t')\,\hat{\mathcal{H}}$. Поэтому

$$\langle q''|e^{-i(t'' - t')\,\hat{\mathcal{H}}}|q'\rangle = \int \left\{1 - i(t'' - t')\,\mathcal{H}\left(p,\, \frac{q' + q''}{2}\right)\right\}\, \exp(ip(q'' - q'))\, \frac{\mathrm{d}\,p}{2\pi} =$$

$$= \int \exp\left\{ip(q''-q') - i(t''-t')\,\mathcal{H}\left(p, \frac{q'+q''}{2}\right)\right\} \frac{\mathrm{d}\,p}{2\pi}\,. \tag{7}$$

Если интервал $(t''-t')$ конечен, то его разбивают на N равных частей так, чтобы $\Delta\, t = t_{i+1}-t_i = \frac{t''-t'}{N} \to 0$. Пусть $t' = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t''$ и $q(t_i) = q_i$, $p(t_i) = p_i$. Имеем:

$$U(t'', t') = U(t_N, t_{N-1})\, U(t_{N-1}, t_{N-2}) \ldots U(t_1, t_0)\,. \tag{8}$$

Вычислим матричные элементы произведения (8) при помощи формулы (7):

$$\langle q''|U(t'', t')|q'\rangle = \int \exp\left\{i[p_N(q_N - q_{N-1}) + \ldots + p_1(q_1 - q_0)] - \right.$$

$$\left. -i\Delta t\left[\mathcal{H}\left(p_N, \frac{q_N+q_{N-1}}{2}\right) + \ldots + \mathcal{H}\left(p_1, \frac{q_1+q_0}{2}\right)\right]\right\} \cdot \frac{\mathrm{d}\,p_N}{2\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}\,p_{N-1}\;\mathrm{d}\,q_{N-1}}{2\pi} \cdot \ldots \cdot \frac{\mathrm{d}\,p_1\;\mathrm{d}\,q_1}{2\pi}\,. \tag{9}$$

Перейдём к пределу $N \to \infty$, $\Delta t \to 0$. Число переменных интегрирования стремится к бесконечности и считается, что в пределе интегрирование происходит по $p(t)$, $q(t)$ при всех $t' < t < t''$. При этом

$$q(t') = q'\,, \qquad q(t'') = q''\,. \tag{10}$$

Тогда показатель экспоненты стремится к

$$\mathcal{S}\,(t'', t') = \int\limits_{t'}^{t''} \{p(t)\dot{q}(t) - \mathcal{H}(p(t), q(t))\}\,\mathrm{d}\,t\,, \tag{11}$$

причём все пути в (11) имеют граничные условия (10). Мера в континуальном (или функциональном) интеграле (9) записывается в виде

$$\frac{\mathrm{d}\,p''}{2\pi}\prod_t \frac{\mathrm{d}\,p(t)\;\mathrm{d}\,q(t)}{2\pi}\,.$$

При $t'' \to +\infty$ можно опустить интеграл по $\mathrm{d}\,p''$. Тогда

$$\langle q''|U(t'', t')|q'\rangle = \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t'}^{t''}(p\,\dot{q} - \mathcal{H}(p, q))\;\mathrm{d}\,t\right\}\prod_t \frac{\mathrm{d}\,p(t)\;\mathrm{d}\,q(t)}{2\pi\hbar}\,. \tag{12}$$

Здесь восстановлена правильная размерность.

Замечание. На первый взгляд формула (12) решает проблему упорядочения операторов в гамильтониане. Однако это не так, поскольку функциональный интеграл (12) не определён во внутренних терминах. Он нуждается в доопределении.

Обобщение полученных формул на случай системы со многими степенями свободы очевидно. Пусть $q = \{q^\alpha\}$, $p = \{p_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ и набор переменных $\{p_\alpha, q^\alpha\}$ образует совокупность канонических переменных. Если обозначить

$$p\,\dot{q} = \sum_\alpha p_\alpha \dot{q}^\alpha, \qquad \prod_t \frac{\mathrm{d}\,p(t)\;\mathrm{d}\,q(t)}{2\pi\hbar} = \prod_t\prod_\alpha \frac{\mathrm{d}\,p_\alpha(t)\;\mathrm{d}\,q^\alpha(t)}{2\pi\hbar}\,,$$

то амплитуда перехода для такой системы записывается в виде (12).

Мы неоднократно будем использовать следующую формулу для гауссовского интеграла:

$$\int \exp\left\{\frac{i}{2}p^t\,\mathcal{M}^{-1}p + i\xi^t p\right\}\mathrm{d}\,p = (2\pi i)^{N/2}(\det\mathcal{M})^{1/2}\,\exp\left\{-\frac{i}{2}\xi^t\mathcal{M}\xi\right\}\,. \tag{13}$$

Здесь $p = (p_1, \ldots, p_N)$, $\mathcal{M}$ — невырожденная симметричная матрица $N \times N$ и $\mathrm{d}\,p = \mathrm{d}\,p_1 \ldots \mathrm{d}\,p_N$. Везде верхний индекс t означает транспонирование, так что $\xi^t p = \sum_{\alpha=1}^N \xi_\alpha p_\alpha$. Существует простое правило для вычисления гауссовых интегралов: гауссов интеграл равен (с точностью до числового множителя, который обычно включается в общую нормировочную константу) подынтегральному выражению, вычисленному в точке экстремума показателя экспоненты, делённому на корень из определителя матрицы квадратичной формы в экспоненте.

Действительно, вычислим n-мерный интеграл

$$U(\eta) = \int \mathrm{d}^n\, x \exp\left(-\frac{1}{2}x^t\, A\, x + \eta^t\, x\right), \qquad A^t = A\,.$$

При помощи подстановки

$$x = \tilde{x} + A^{-1}\,\eta\,, \qquad \mathrm{d}^n\, x = \mathrm{d}^n\, \tilde{x}$$

этот интеграл переписывается как

$$U(\eta) = \exp\left(\frac{1}{2}\eta^t\, A^{-1}\,\eta\right) \int \mathrm{d}^n\, \tilde{x} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{x}^t\, A\, \tilde{x}\right) = \frac{1}{N}(\det A)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2}\eta^t\, A^{-1}\,\eta\right).$$

Здесь N — некий числовой множитель, не зависящий ни от переменной η, ни от матрицы A. С другой стороны, экстремум показателя экспоненты находится в точке $x_0 = A^{-1}\,\eta$, и значение показателя экспоненты в этой точке равно

$$\left(-\frac{1}{2}\, x_0^t\, A\, x_0 + \eta^t\, x_0\right) = \frac{1}{2}\eta^t\, A^{-1}\,\eta\,.$$

При помощи формулы (13) определим значение гауссова функционального интеграла:

$$\int \exp\left\{\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^{(n)}\, x\ \mathrm{d}^{(n)}\, y\, p(x)\, \mathcal{M}^{-1}(x,\, y)\, p(y) + i\int \mathrm{d}^{(n)}\, x\, \xi(x)\, p(x)\right\} \cdot \prod_x \mathrm{d}\, p(x) =$$

$$= \mathrm{const}\,(\det\, \mathcal{M})^{1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{i}{2}\int \mathrm{d}^{(n)}\, x\ \mathrm{d}^{(n)}\, y\, \xi(x) \mathcal{M}(x,\, y)\, \xi(y)\right\}. \tag{14}$$

Здесь $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{-1}$ — взаимно обратные линейные операторы, действующие на интегрируемые функции в n-мерном пространстве и константа в (14) не зависит ни от поля $\xi(x)$, ни от оператора $\mathcal{M}$. Неопределённость, которая может возникнуть при вычислении величин $\det\, \mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{-1}$, обычно устраняется, исходя из требований конкретной задачи.

Предположим, что лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^t\, \mathcal{M}\, \dot{q} + l^t \dot{q} - V(q)\,, \tag{15}$$

где $\mathcal{M}$ и l не зависят от $\dot{q}$. Тогда $p = \mathcal{M}\,\dot{q} + l$ и соответствующее действие, записанное в форме (11), имеет вид

$$\mathcal{S} = \int_{t'}^{t''} \mathrm{d}\, t \left\{-\frac{1}{2}(p-l)^t\, \mathcal{M}^{-1}(p-l) + (p-l)^t \dot{q} + l^t\, \dot{q} - V(q)\right\}. \tag{16}$$

Интеграл по $p(t)$ в (12) вычисляется как гауссов:

$$\langle q''|U(t'',\, t')|q'\rangle = \frac{1}{N}\int \left(\exp\, \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \mathcal{L}\ \mathrm{d}\, t\right) \prod_t (\det \mathcal{M}(t))^{1/2}\ \mathrm{d}\, q(t)\,.$$

Здесь $\mathcal{L}$ — лагранжиан (15), а N — нормировочная константа, не зависящая от q', q''. Пусть $\det \mathcal{M}(t)$ не зависит от $q(t)$. Тогда $\prod_t \det \mathcal{M}(t)$ можно включить в константу N. В этом случае

$$\langle q''|U(t'',\, t')|q'\rangle = \frac{1}{N}\int \left(\exp\, \frac{i}{\hbar}\int_{t'}^{t''} \mathcal{L}\ \mathrm{d}\, t\right) Dq\,, \qquad Dq = \prod_t \mathrm{d}\, q(t)\,. \tag{17}$$

Представление амплитуды перехода в форме (17) называется функциональным интегралом Фейнмана.

2. Хронологические средние

Пусть $|A\rangle$ — вектор-состояние при $t = 0$ в представлении Шредингера, $|A,\,t\rangle$ — зависящее от времени состояние в представлении Шредингера, а $|A\rangle^*$ — вектор-состояние в представлении Гейзенберга, так что

$$|A\rangle^* = |A\rangle = e^{it\mathcal{H}}\,|A,\,t\rangle\,.$$

Операторы в представлениях Гейзенберга и Шредингера связаны формулой

$$\hat{\mathcal{O}}^*(t) = e^{it\mathcal{H}}\,\hat{\mathcal{O}}\,e^{-it\mathcal{H}}\,.$$

Пусть $t'' > t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > t'$. Вычислим следующий матричный элемент:

$$^*\langle A|\,Q^*(t_n)\,Q^*(t_{n-1})\,\ldots\,Q^*(t_1)\,|B\rangle^* =$$

$$= \langle A,\,t''|\,e^{-it''\mathcal{H}}(e^{it_n\mathcal{H}}\,Q\,e^{-it_n\mathcal{H}})\,\ldots\,(e^{it_1\mathcal{H}}\,Q\,e^{-it_1\mathcal{H}})\,e^{it'\mathcal{H}}\,|B,\,t'\rangle =$$
$$= \langle A,\,t''|\,e^{-i(t''-t_n)\mathcal{H}}\,Q\,e^{-i(t_n-t_{n-1})\mathcal{H}}\,Q\,\ldots\,Q\,e^{-i(t_1-t')\mathcal{H}}\,|B,\,t'\rangle\,.$$

Так как $Q = \int \mathrm{d}\,q\cdot q|q\rangle\langle q|$, то

$$^*\langle A|\,Q^*(t_n)\,Q^*(t_{n-1})\,\ldots\,Q^*(t_1)\,|B\rangle^* =$$

$$= \frac{1}{N}\int \mathrm{d}\,q''\int \mathrm{d}\,q'\int D\,q\,\Psi_A^*(q'',\,t'')\,q(t_1)\,\ldots\,q(t_n)\left(\exp\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t'}^{t''}\mathcal{L}\,\mathrm{d}\,t\right)\Psi_B(q',\,t')\,. \tag{18}$$

Здесь $\Psi\,(q,\,t)$ — волновая функция в представлении Шредингера, зависящая от времени. Введём *операцию хронологического упорядочения* $\hat{T}$. В произведении гейзенберговых операторов под знаком хронологического упорядочения эти операторы располагаются таким образом, что по мере движения справа налево временные аргументы операторов монотонно растут. Например, $\hat{T}\,Q^*(t_1)\,Q^*(t_2) = Q^*(t_2)\,Q^*(t_1)$, если $t_2 > t_1$. Мы видим, что среднее от координат, вычисленное при помощи функционального интеграла, автоматически даёт среднее от хронологически упорядоченного произведения (хронологического произведения) операторов в представлении Гейзенберга. Далее для обозначения среднего (18) используется стандартная формула (индекс $*$ для обозначения гейзенберговых величин как правило опускается)

$$\langle A|\,T\,Q(t_1)\,\ldots\,Q(t_n)\,|B\rangle\,.$$

Заметим также, что формула (18) по сути остаётся справедливой, если в ней координатные переменные $\hat{Q}^*$ заменены полностью или частично импульсными переменными$\hat{P}^*$. Однако в этом, более общем, случае вместо (18), например, имеем:

$$^*\langle A|\,Q^*(t_n)\,P^*(t_{n-1})\,\ldots\,Q^*(t_1)\,|B\rangle^* =$$

$$= \frac{1}{N}\int \mathrm{d}\,q''\int \mathrm{d}\,q'\int D\,q\,D\,p\Psi_A^*(q'',\,t'')\,q(t_1)\,\ldots\,p(t_{n-1})\,q(t_n)\left(\exp\frac{i}{\hbar}\int\limits_{t'}^{t''}(p\,\dot{q}-\mathcal{H}(p,\,q))\,\mathrm{d}\,t\right)\Psi_B(q',\,t')\,.$$

Для вывода последней формулы следует учесть, что матричный элемент $\langle q''|\hat{P}\,U(t'',\,t')|q'\rangle$ отличается от (9) введением под интеграл в правой части (9) множителя p_N. Аналогично устанавливается тот факт, что любое среднее различных величин, вычисленных при помощи функционального интеграла, автоматически является средним от соответствующих хронологически упорядоченных операторов в гейзенберговском представлении.

3. Доопределение операторов при вычислении гауссовых функциональных интегралов в квантовой механике

Изучим гармонический осциллятор с внешним источником (внешней силой). Действие такой системы

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}\,t\,\left\{\frac{1}{2}\,\dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}q^2 + \eta\,q\right\}\,. \tag{19}$$

Вычислим амплитуду перехода (17). При этом удобно сдвинуть переменную интегрирования следующим образом:

$$
\begin{gathered}
q(t) = \overline{q}(t) + \delta\, q(t)\,, \quad \overline{q}(t) = q_0(t) + \int \mathrm{d}\, t_1\, D(t,\, t_1)\, \eta(t_1)\,, \\
\ddot{\overline{q}} + \omega^2\, \overline{q} = \eta\,, \quad \ddot{q}_0 + \omega^2\, q_0 = 0\,, \\
q_0(t') = q'\,, \quad q_0(t'') = q''\,, \quad \delta\, q(t') = \delta\, q(t'') = 0\,.
\end{gathered} \tag{20}
$$

Функциональное интегрирование идёт по переменной $\delta\, q(t)$ с нулевыми граничными условиями. Из (20) следует, что гриновская функция удовлетворяет следующим уравнениям:

$$
\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\, t^2} + \omega^2\right) D(t,\, t_1) = \delta\,(t - t_1)\,, \qquad D(t'',\, t_1) = D(t',\, t_1) = 0\,. \tag{21}
$$

Условия (21) однозначно определяют гриновскую функцию ($T = t'' - t'$):

$$
D(t_1,\, t_2) = D_c(t_1 - t_2) - \frac{1}{\sin\,\omega\, T}[D_c(t'' - t_2)\, \sin\,(\,\omega\,(t_1 - t')) + D_c(t' - t_2)\, \sin\,(\,\omega\,(t'' - t_1))]\,, \tag{22}
$$

$$
D_c(t) = \int \frac{\mathrm{d}\, k}{2\pi} \cdot \frac{e^{-ikt}}{-k^2 + \omega^2 - i\varepsilon} = \frac{i}{2\,\omega}\, e^{-i\,\omega|t|}\,, \qquad \varepsilon \to +0\,. \tag{23}
$$

Функция (23) называется причинной гриновской функцией. Она удовлетворяет первому из уравнений (21). Легко находится решение для q_0:

$$
q_0(t) = \frac{q''}{\sin\,\omega\, T}\, \sin\,(\omega\,(t - t')) + \frac{q'}{\sin\,\omega\, T}\, \sin\,(\omega\,(t'' - t))\,.
$$

Перепишем действие (19) при помощи введенных функций:

$$
\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \int\limits_{t'}^{t''} \mathrm{d}\, t\, \left(\frac{1}{2}\delta\, \dot{q}^2 - \frac{\omega^2}{2}\, \delta\, q^2\right)\,,
$$

$$
\mathcal{S}_0 = \frac{\omega}{2\,\sin\,\omega T}[(q'^2 + q''^2)\, \cos\,\omega T - 2q'q''] + \mathcal{S}(\eta)\,,
$$

$$
\mathcal{S}(\eta) = \int\limits_{t'}^{t''} \mathrm{d}\, t\, \eta(t)\, q_0(t) + \frac{1}{2}\, \int \mathrm{d}\, t_1\, \mathrm{d}\, t_2\, \eta(t_1)\, D(t_1,\, t_2)\, \eta(t_2)\,. \tag{24}
$$

Поскольку $\mathcal{S}_0$ не зависит от δq и $\delta\, q(t') = \delta\, q(t'') = 0$, то функциональное интегрирование в (17) приводит лишь к появлению множителя, зависящего от T, но не от q', q'', η. Этот временной множитель не будет использоваться, однако приведём точный ответ:

$$
\begin{gathered}
\langle q''|U(t'',\, t')|q'\rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi\, i\, \hbar\, \sin\omega T}}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0\right) = \\
= \left\{\sum_{n=0}^{\infty}[\exp(-i(n + 1/2)\omega T)]\, \psi_n(q'')\, \psi_n^*(q')\right\}\, \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}(\eta)\right)\,,
\end{gathered} \tag{25}
$$

где $\{\psi_n(q)\}$ — полный ортонормированный набор собственных функций гамильтониана свободного осциллятора.

До сих пор в этом пункте рассматривался гармонический осциллятор, или свободная (без взаимодействия) теория. Теория со взаимодействием отличается от свободной теории тем, что лагранжиан такой теории не является квадратичной формой (возможно, неоднородной) относительно канонических переменных. Например, в случае осциллятора дополнительное слагаемое вида λq^4 делает теорию взаимодействующей. Далее мы увидим, что такого вида слагаемое даёт взаимодействие между элементарными возбуждениями в скалярной теории поля. Как правило, в квантовой теории поля принимается гипотеза, что а) при $t \to \pm\infty$ взаимодействие адиабатически выключается и теория превращается в свободную и б) основное состояние при $t \to +\infty$ отличается от основного состояния при $t \to -\infty$ не более чем фазовым множителем. Это — очень сильная гипотеза. В техническом отношении эта гипотеза реализуется автоматически, если считать, что в случае осциллятора частота ω содержит бесконечно малую отрицательную мнимую часть. Иными словами, для этого необходимо во всех формулах сделать замену

$$\omega \to (1 - i\varepsilon)\,\omega\,, \qquad \varepsilon \to +0\,. \tag{26}$$

Действительно, в результате такой замены после выключения взаимодействия все слагаемые в волновой функции, отличные от основного состояния свободной теории, "вымирают"(то есть стремятся к нулю) относительно основного состояния при $t'' = T/2 \to \infty$ вследствие содержания ими дополнительного множителя $\exp(-\varepsilon n t'')$, $n > 0$. Кроме того, в рамках этой гипотезы нелинейности (или взаимодействие) учитываются при помощи теории возмущений (ТВ). В следующих лекциях будет показано, что в ТВ-разложении участвуют причинные гриновские функции $D_c(t_i - t_j)$, где t_i, t_j, и т.д. — временные аргументы операторов взаимодействия. Так как $D_c(t_i - t_j) \to 0$ при $|t_i - t_j| \to \infty$, то всё взаимодействие "скучивается"по времени в неком ограниченном временном интервале, т.е. при $|t| \to \infty$ взаимодействие выключается.

При замене (26) знаменатель в подынтегральном выражении в (23) может быть взят просто как $(-k^2 + \omega^2)$ и $D_c(\pm T/2) \to 0$ при $T \to \infty$. Поэтому согласно (22) при $T \to \infty$ гриновская функция $D\,(t_1,\,t_2) \to D_c\,(t_1 - t_2)$ и в $S(\eta)$ вместо $D\,(t_1,\,t_2)$ следует использовать причинную (или фейнмановскую) гриновскую функцию $D_c\,(t_1 - t_2)$.

Замечание. Если отсутствует требование симметрии теории относительно операции инверсии времени, то вместо причинной гриновской функции (23) можно использовать какую либо иную гриновскую функцию. Например, это могла бы быть запаздывающая гриновская функция

$$D_{ret}(t) = \frac{\theta(t)}{\omega} e^{-\varepsilon t} \sin \omega t\,,$$

которая получается при помощи интеграла (23), если оба полюса подынтегрального выражения смещены вниз от вещественной оси на бесконечно малую величину $\varepsilon > 0$ (в то время как в случае причинной гриновской функции левый полюс находится выше, а правый — ниже вещественной оси (см. рис. 1)). Действительно, в случае $T \to \infty$ функция $D_{ret}(t,\,t_1)$ удовлетворяет граничным условиям (21) и потому в этом пределе, так же как и функция $D_c(t,\,t_1)$, может использоваться вместо $D(t,\,t_1)$. Однако в теориях, обратимых по времени, эта возможность исключается, т.к. $D_{ret}(-t) \neq D_{ret}(t)$.

4. Теорема Вика

В результате замены (26) в пределе $t'' = -t' = T/2 \to \infty$ в сумме (25) "выживает"лишь основное состояние. Выпишем в этом случае амплитуду перехода из основного состояния в основное состояние за бесконечное время в присутствии источника $\eta(t)$, отличного от нуля лишь при конечных t:

$$Z\{\eta\} = \frac{1}{N} \exp\left\{\frac{i}{2\,\hbar}\int \mathrm{d}\,t_1\,\mathrm{d}\,t_2\,\eta(t_1) D_c(t_1 - t_2)\eta(t_2)\right\}\,. \tag{27}$$

Слагаемое в $S(\eta)$, пропорциональное q_0, вымирает в рассматриваемом случае. Это следует из того, что $\mathrm{Im}\,\omega = -\varepsilon \to -0$, $\varepsilon T \to \infty$. Согласно (17), (18) и (21)

$$\langle 0|T\,q(t_1)\,\ldots\,q(t_n)|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n \frac{1}{Z}\,\frac{\delta^n Z}{\delta\eta(t_1)\,\ldots\,\delta\eta(t_n)}\bigg|_{\eta=0}\,. \tag{28}$$

Например, при $n = 2$

$$\langle 0|T\,q(t_1)\,q(t_2)|0\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right) D_c(t_1 - t_2) = \frac{\hbar}{2\,\omega}\,e^{-i\omega|t_1 - t_2|}\,. \tag{29}$$

При $t_1 = t_2$ получаем известный результат: $\langle 0|\,q^2\,|0\rangle = \hbar/2\,\omega$. Очевидно, при нечётном n коррелятор (28) равен нулю. Введём обозначение

$$G_{1,2} = \langle 0|T\,q(t_1)\,q(t_2)|0\rangle\,. \tag{30}$$

Из формулы (28) находим при $n = 4$:

$$\langle 0|T\, q(t_1)\, q(t_2)\, q(t_3)\, q(t_4)|0\rangle = G_{1,2}\, G_{3,4} + G_{1,3}\, G_{2,4} + G_{1,4}\, G_{2,3}\,. \tag{31}$$

Теперь нетрудно сообразить, что справедлива

Теорема Вика. *Хронологически упорядоченное среднее относительно основного состояния от n гейзенберговых координат (или полей, играющих роль координатных переменных) с квадратичным действием равно сумме произведений всех хронологически упорядоченных парных средних (спариваний).*

5. Поворот Вика

На рис. 1 изображена комплексная плоскость переменной k, по которой идёт интегрирование в (23) вдоль вещественной оси; обход полюсов указан на рисунке.

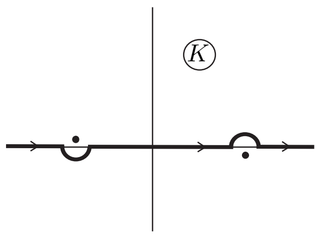


Рис. 1

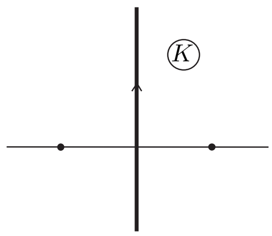


Рис. 2

Очевидно, обход полюсов допускает "гладкий"поворот контура интегрирования согласно правилу

$$k \longrightarrow e^{i\varphi}k\,, \quad t \longrightarrow e^{-i\varphi}\tau\,, \quad 0 \le \varphi \le \pi\,.$$

При $\varphi = 0$ имеем исходный контур, а при $\varphi = \pi/2$ интеграл идёт по мнимой оси так, как показано на рис. 2.

При этом $t = -i\tau$, где переменная τ — вещественная, называемая "мнимым временем". Описанный поворот контура интегрирования называется *поворотом Вика.* При виковом повороте

$$\langle q''|e^{-it\mathcal{H}}|q'\rangle = \sum_n e^{-itE_n}\,\Psi_n(q'')\,\Psi_n^*(q') \longrightarrow \sum_n e^{-\tau E_n}\,\Psi_n(q'')\,\Psi_n^*(q') = \langle q''|e^{-\tau\mathcal{H}}|q'\rangle \sim$$

$$\sim \int D\,q\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_0^\tau \mathrm{d}\,\tau' \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,\tau'}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2}\,q^2 - \eta q\right]\right\}\,, \quad q(0) = q'\,, \quad q(\tau) = q''\,. \tag{32}$$

В результате поворота Вика имеем:

$$D_c(t) \to i\,D_E(\tau)\,, \quad D_E(\tau) = \int \frac{\mathrm{d}\,k}{2\pi}\,\frac{e^{-ik\tau}}{k^2+\omega^2} = \frac{1}{2\omega}e^{-\omega\,|\tau|}\,, \quad \left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,\tau^2} + \omega^2\right) D_E(\tau) = \delta(\tau)\,. \tag{33}$$

При достаточно большом мнимом времени τ правая часть в (32) переходит в (сравни с (27))

$$Z_E\{\eta\} \sim \int D\,q\,\exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\,\tau\, \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\,q}{\mathrm{d}\,\tau}\right)^2 + \frac{\omega^2}{2}\,q^2 - \eta q\right]\right\} \sim$$

$$\sim \frac{1}{N}\exp\left\{\frac{1}{2\hbar}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\,\tau_1\,\mathrm{d}\,\tau_2\,\eta(\tau_1)\,D_E(\tau_1-\tau_2)\eta(\tau_2)\right\}\,. \tag{34}$$

Величина (34) называется (классической) статистической суммой, а правая часть равенства (32) — квантовой матрицей плотности.

Задачи

1. Доказать теорему Вика в следующих редакциях:

а) Хронологически упорядоченное вакуумное среднее в теории с квадратичным действием от n гейзенберговских координат равно сумме произведений всех спариваний (парных средних);

б) Среднее по вакууму от произведения любого числа бозонных лестничных операторов (рождения и уничтожения) $a^\dagger$, a равно сумме произведений всех возможных попарных средних (или свёрток) этих операторов. При этом в каждой свёртке множители должны стоять в той же последовательности, что и в первоначальном произведении.

2. а) Пусть $\mathcal{H}(p,\, q)$ — оператор Гамильтона. Представить квантовую статистическую сумму

$$Z(\beta) = \operatorname{tr} e^{-\beta\,\mathcal{H}}$$

в виде функционального интеграла.

б) Вычислить статистическую сумму гармонического осциллятора (с точностью до множителя, зависящего лишь от температуры) в присутствии внешнего источника. Используя эту статистическую сумму найти парный хронологический коррелятор переменной $q(\tau)$ в представлении Мацубары[1].

Указание: Действовать аналогично тому, как действовали при получении формулы (25), но в мнимом времени τ. Учесть, что в данном случае гриновская функция $D_E(\tau_1,\, \tau_2)$ периодична:

$$D_E(0,\, \tau_2) = D_E(\beta,\, \tau_2)$$

Вычислить эту гриновскую функцию в виде ряда Фурье и отсуммировать этот ряд.

[1] Согласно определению, оператор в представлении Мацубары имеет вид (ср. с представлением Гейзенберга) $\hat{\mathcal{O}}(\tau) = (\exp \tau\mathcal{H})\, \hat{\mathcal{O}}\, (\exp -\tau\mathcal{H})$, где τ — мнимое время. Парный хронологический коррелятор в представлении Мацубары определяется как

$$\langle \hat{T}_\tau\, \hat{\mathcal{O}}_1(\tau_1)\hat{\mathcal{O}}_2(\tau_2)\rangle \equiv \frac{\operatorname{tr}(\exp -\beta\mathcal{H})\, \hat{T}_\tau\, \hat{\mathcal{O}}_1(\tau_1)\hat{\mathcal{O}}_2(\tau_2)}{\operatorname{tr}(\exp -\beta\mathcal{H})}\,.$$

Лекция 2

ГОЛОМОРФНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА, S-МАТРИЦА И СКАЛЯРНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

1. Операторы рождения и уничтожения

Далее полагаем $\hbar = c = 1$.

Действие осциллятора (19 Л1) в случае нулевого источника приводит к следующему гамильтониану:

$$\mathcal{H}(p,\, q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}q^2\,. \tag{1}$$

Введём комплексные взаимно сопряжённые переменные $a,\ a^*$:

$$q = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(a + a^*)\,, \qquad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^*)\,. \tag{2}$$

В квантовой теории формулы (2) сохраняются для операторов и коммутационные соотношения

$$[Q,\, Q] = [P,\, P] = 0\,, \qquad [Q,\, P] = i \tag{3}$$

и

$$[a,\, a] = [a^\dagger,\, a^\dagger] = 0\,, \qquad [a,\, a^\dagger] = 1 \tag{4}$$

эквивалентны.

Перестановочные соотношения (4) имеют представление в пространстве аналитических и, более того, голоморфных функций $f(a^*)$ со скалярным произведением

$$\langle f_1|f_2\rangle = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*)\, e^{-a^*a}\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i}\,. \tag{5}$$

Пояснение. Можно считать, что

$$a = x + i\,y\,, \qquad (a)^* = a^* = x - i\,y\,, \qquad a^*a = x^2 + y^2\,.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial a^*}{\partial x} & \frac{\partial a^*}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} = 2\,i$$

Поэтому

$$\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} = \frac{\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y}{\pi} = \frac{\rho\,\mathrm{d}\,\rho\,\mathrm{d}\,\varphi}{\pi}\,, \tag{6}$$

где $(\rho,\, \varphi)$ — полярные координаты в плоскости $(x,\, y)$. □

Произведение (5) положительно определено. Действительно, произвольная голоморфная функция $f(a^*)$ является линейной комбинацией одночленов $\psi_n(a^*) = (a^*)^n/\sqrt{n!},\ n \geq 0$. Имеем:

$$\langle\psi_n|\psi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\int a^n (a^*)^m\, e^{-a^*a}\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\int\limits_0^\infty \rho^{m+n+1}e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\,\rho\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-m)\varphi}\,\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\pi} =$$

$$= \frac{\delta_{n,m}}{n!}\int\limits_0^\infty (\rho^2)^n e^{-\rho^2}\, 2\rho\,\mathrm{d}\,\rho = \delta_{n,m}\,. \tag{7}$$

Поэтому множество функций $\{\psi_n\},\ n = 0,\, 1,\, \ldots$ образует полный ортонормированный базис (ОНБ).

По определению, операторы $a^\dagger$ и a действуют согласно правилу

$$a^\dagger\, f(a^*) = a^* f(a^*)\,, \qquad a\, f(a^*) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a^*}f(a^*)\,. \tag{8}$$

Заметим, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a^*}a^* = 1\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a^*}a = 0\,. \tag{9}$$

Согласно определениям скалярного произведения (5) и операторов $a^\dagger$, a (8) эти операторы взаимно сопряжены. Действительно,

$$a^*\,e^{-a^*a} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a}\,e^{-a^*a}\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a}\,f(a^*) = 0\,,$$

и потому

$$\langle f_1|\,a^\dagger f_2\rangle = \int (f_1(a^*))^*\,a^* f_2(a^*)\,e^{-a^*a}\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} = -\int (f_1(a^*))^*\,f_2(a^*)\,\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a}e^{-a^*a}\right)\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} =$$

$$= \int\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a}(f_1(a^*))^*\,f_2(a^*)\right]\,e^{-a^*a}\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} = \int\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,a^*}f_1(a^*)\right]^*\,f_2(a^*)\,e^{-a^*a}\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} =$$

$$= \int [a\,f_1(a^*)]^*\,f_2(a^*)\,e^{-a^*a}\,\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i} = \langle a\,f_1|f_2\rangle\,.$$

2. Операторы общего вида

В голоморфном представлении операторы общего вида описываются при помощи ядра. Пусть A — некий оператор и

$$A_{m\,n} = \langle\psi_m|A|\psi_n\rangle \tag{10}$$

— матрица этого оператора относительно введенного выше ОНБ. Ядром оператора A называется следующая функция:

$$A(a^*,\,a) = \sum_{n,m} A_{n\,m}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\,\frac{a^m}{\sqrt{m!}} \equiv \sum_{n,m} A_{n\,m}|\psi_n\rangle\langle\psi_m|\,. \tag{11}$$

Основываясь на условии полноты $\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n| = 1$, получаем следующие очевидные формулы:

$$(A\,f)(a^*) = \int A(a^*,\,\alpha)\,f(\alpha^*)\,e^{-\alpha^*\alpha}\frac{\mathrm{d}\,\alpha^*\,\mathrm{d}\,\alpha}{2\pi i}\,,$$

$$(A_1\,A_2)(a^*,\,a) = \int A_1(a^*,\,\alpha)\,A_2(\alpha^*,\,a)\,e^{-\alpha^*\alpha}\frac{\mathrm{d}\,\alpha^*\,\mathrm{d}\,\alpha}{2\pi i}\,. \tag{12}$$

Теперь представим оператор A в виде нормально упорядоченного ряда относительно операторов рождения и уничтожения: $A = \sum_{n,m} K_{nm}\,(a^\dagger)^n\,a^m$. Функция операторов рождения и уничтожения называется нормально упорядоченной, если в этой функции все операторы рождения расположены левее всех операторов уничтожения. Сопоставим оператору A функцию

$$K(a^*,\,a) = \sum_{n,m} K_{nm}(a^*)^n(a)^m\,,$$

которая называется нормальным символом этого оператора.

Докажем, что

$$A(a^*,\,a) = e^{a^*a}\,K(a^*,\,a)\,. \tag{13}$$

Достаточно проверить (13) в частном случае $A = (a^\dagger)^k\,a^l$. Имеем:

$$A_{nm} = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\langle 0|a^n\,(a^\dagger)^k\,a^l\,(a^\dagger)^m|0\rangle\,.$$

Это выражение отлично от нуля лишь при $m \geq l$ и $n \geq k$ и $m - l = n - k$. Обозначим

$$\theta\,(m \geq l) = \begin{cases} 1\,, & \text{если} \;\; m \geq l \\ 0\,, & \text{если} \;\; m < l\,. \end{cases}$$

При $m \geq l$
$$a^l\,(a^\dagger)^m\,|0\rangle = m(m-1)\,\ldots\,(m-l+1)\,(a^\dagger)^{m-l}\,|0\rangle\,.$$
Поэтому
$$A_{n\,m} = \delta_{m-l,n-k}\,\theta\,(m \geq l)\,\theta\,(n \geq k)\frac{\sqrt{m\cdot(m-1)\,\ldots\,(m-l+1)\cdot n\cdot(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}}{\sqrt{(m-l)!\,(n-k)!}}\times$$
$$\times\langle 0|\,a^{n-k}\,(a^\dagger)^{m-l}\,|0\rangle =$$
$$= \sqrt{m\cdot(m-1)\,\ldots\,(m-l+1)}\cdot\sqrt{n\cdot(n-1)\,\ldots\,(n-k+1)}\cdot\theta\,(m \geq l)\,\theta\,(n \geq k)\cdot\delta_{m-l,n-k}\,.$$
Теперь имеем:
$$A\,(a^*,\,a) = \sum_{m,n\geq 0} A_{nm}\,\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\cdot\frac{a^m}{\sqrt{m!}} = \sum_{m\geq l}\,\sum_{n\geq k}\delta_{m-l,n-k}\frac{(a^*)^n\,a^m}{\sqrt{(n-k)!\,(m-l)!}} =$$
$$= \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}(a^*)^{k+n}\,a^{l+n} = (a^*)^k\,a^l\,e^{a^*\,a} = e^{a^*\,a}\,K\,(a^*,\,a)\,.$$
Тем самым формула (13) доказана.

3. Функциональный интеграл в голоморфном представлении

Пусть функция $h\,(a^*,\,a)$ является нормальным символом оператора Гамильтона $\mathcal{H}\,(a^\dagger,\,a)$. Тогда ядро оператора эволюции
$$U = \exp\,(-i\,\Delta t\,\mathcal{H})\,, \qquad \Delta t \to 0$$
согласно сказанному выше представляется как
$$U\,(a^*,\,a;\,\Delta t) = \exp\left\{a^*\,a - i\,h\,(a^*,\,a)\,\Delta t\right\}. \tag{14}$$
Для произвольного интервала времени $t'' - t' = N\,\Delta t$:
$$U\,(a^*,\,a;\,t'',\,t') = \int\,\exp\,\Big\{[a^*_N a_{N-1} - a^*_{N-1}a_{N-1} + \,\ldots\, - a^*_1 a_1 + a^*_1 a_0] -$$
$$-i\,\Delta t\,[h(a^*_N,\,a_{N-1}) + \,\ldots\, + h(a^*_1,\,a_0)]\Big\}\,\prod_{k=1}^{N-1}\frac{\mathrm{d}\,a^*_k\,\mathrm{d}\,a_k}{2\pi\,i}\,.$$
Мы обозначили $a_0 = a,\ a^*_N = a^*$.

Теперь перейдём к пределу $N \to \infty,\ \Delta t \to 0$:
$$U\,(a^*,\,a;\,t'',\,t') = \int\,e^{a^*(t'')\,a(t'')}\,\exp\left\{\int\limits_{t'}^{t''}\mathrm{d}\,t\,[-a^*\dot{a} - i\,h\,(a^*,\,a)]\right\}\prod_t\frac{\mathrm{d}\,a^*\,\mathrm{d}\,a}{2\pi i}\,. \tag{15}$$
Граничные условия таковы:
$$a^*(t'') = a^*\,, \qquad a(t') = a\,, \tag{16}$$
причём по переменным $a(t'')$ и $a^*(t')$ идёт интегрирование.

В случае гармонического осциллятора интеграл (15) как гауссов интеграл легко вычисляется. Так как
$$\eta\,q = \frac{\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\,(a + a^*)\,,$$
то гамильтониан гармонического осциллятора при наличии источника
$$h\,(a^*,\,a) = \omega\,(a^*\,a + 1/2) - \frac{\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\,(a + a^*)\,. \tag{17}$$

Из (16) имеем:

$$\delta\, a^*\,(t'') = \delta\, a\,(t') = 0\,. \tag{18}$$

Поэтому для вариации показателя экспоненты в континуальном интеграле (15) находим:

$$\delta\left\{a^*(t'')\,a(t'') + \int\limits_{t'}^{t''} \mathrm{d}\,t\,\left[-a^*\,\dot{a} - i\,\omega\,a^*a + \frac{i\,\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\,(a+a^*)\right]\right\} =$$

$$= a^*(t'')\,\delta a(t'') + \int\limits_{t'}^{t''} \mathrm{d}\,t\,\left[-a^*\,\delta\dot{a} + \delta a\,\left(-i\omega\,a^* + \frac{i\,\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\right) - \delta a^*\,\left(\dot{a} + i\omega a - \frac{i\,\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\right)\right] =$$

$$= \int\limits_{t'}^{t''} \mathrm{d}\,t\,\left[\delta a\,\left(\dot{a}^* - i\,\omega a^* + \frac{i\,\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\right) - \delta a^*\,\left(\dot{a} + i\,\omega a - \frac{i\,\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\right)\right]\,.$$

Отсюда следует, что точка экстремума показателя экспоненты, которая в теории поля называется массовой поверхностью, есть решение уравнений движения:

$$\dot{a} = -i\,\omega a + \frac{i\,\eta}{\sqrt{2\,\omega}}\,, \qquad \dot{a}^* = i\,\omega a^* - \frac{i\,\eta^*}{\sqrt{2\,\omega}}\,. \tag{19}$$

(Здесь для дальнейшего удобства сделана замена $(\eta/\sqrt{2\omega})(a+a^*) \to (1/\sqrt{2\omega})(\eta^* a + \eta a^*)$, хотя в рассматриваемом случае $\eta^* = \eta$.)

Заметим, что в интересных здесь задачах решения уравнений (19) не являются взаимно комплексно сопряженными. Дело в том, что в представлении $a = x + iy$, $a^* = x - iy$ переменные x и y на массовой поверхности с заданными граничными условиями не являются вещественными величинами. В этом смысле переменные интегрирования a^* и a в интеграле (15) могут рассматриваться как независимые переменные.

Рассмотрим случай $\eta = 0$, когда уравнения (19) с граничными условиями (16) тривиально решаются:

$$a\,(t) = e^{-i\omega(t-t')}a(t')\,, \qquad a^*(t) = e^{i\omega(t-t'')}a^*(t'')\,. \tag{20}$$

Далее вместо $a(t')$ и $a^*(t'')$ пишем a и a^*, соответственно. Находим экстремальное значение показателя экспоненты в интеграле (15): $a^*a\,\exp(-i\omega(t''-t'))$. Таким образом

$$U_0(a^*,\, a;\, t''-t') = \exp\left\{a^*\,a\,e^{-i\omega(t''-t')}\right\}\,. \tag{21}$$

Вследствие унитарности оператора (21) нормировочный множитель $1/N$ равен единице. Если $f\,(a^*)$ — произвольная функция, то

$$(U_0 f)(a^*) = \int \exp\left\{a^*\,\alpha\,e^{-i\omega t}\right\}\,f(\alpha^*)\,e^{-\alpha^*\alpha}\frac{\mathrm{d}\,\alpha^*\,\mathrm{d}\,\alpha}{2\pi i} = f\,\left(a^*\,e^{-i\omega t}\right)\,. \tag{22}$$

(Проверить эту формулу для $f\,(a^*) = (a^*)^n$.)

Функция (21) является ядром оператора $e^{-it\mathcal{H}_0}$, где $\mathcal{H}_0$ — гамильтониан свободного осциллятора.

Замечание. Здесь мы выбросили "нулевую"энергию из гамильтониана. В противном случае имели бы

$$U_0(a^*,\, a;\, t) = \exp\left\{a^*a\,e^{-i\omega t} - \frac{i}{2}\omega t\right\}$$

Пусть A — оператор с ядром $A\,(a^*,\, a)$. Нам понадобится обобщение формулы (22), то есть ядро оператора $e^{it''\mathcal{H}_0}\,A\,e^{-it'\mathcal{H}_0}$:

$$[U_0(-t'')\,A\,U_0(t')](a^*,\, a) = A\,\left(a^*\,e^{i\omega t''},\, a\,e^{-i\omega t'}\right)\,. \tag{23}$$

4. Определение S-матрицы

Пусть $\mathcal{H}$ — гамильтониан теории, $\mathcal{H}_0$ — свободный гамильтониан и $U\,(t'',\,t')$ — оператор эволюции взаимодействующей теории. S-матрица определяется при помощи следующей формулы:

$$S = \lim e^{it''\mathcal{H}_0}\, U(t'',\, t')\, e^{-it'\mathcal{H}_0}\,, \qquad t'' \to +\infty\,, \quad t' \to -\infty\,. \tag{24}$$

Обкладки $e^{it''\mathcal{H}_0}\ \ldots\ e^{-it'\mathcal{H}_0}$ в (24) приводят к исключению свободного движения, которое не представляет интереса. Действительно, если $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, то S-матрица (24) равна единичному оператору.

Вычислим S-матрицу гармонического осциллятора при наличии внешнего источника. Согласно определению (24) и формуле (23) теперь граничные условия (16) должны быть заменены на следующие:

$$a^*\,(t'') = a^*\, e^{i\omega t''}\,, \qquad a\,(t') = a\, e^{-i\omega t'}\,. \tag{25}$$

Легко находим решения уравнений (19) с граничными условиями (25):

$$a^*\,(t) = e^{i\,\omega t}\left[a^* + i\int\limits_t^{t''} \mathrm{d}\,s \frac{e^{-i\,\omega s}\,\eta^*\,(s)}{\sqrt{2\,\omega}}\right]\,, \quad a\,(t) = e^{-i\,\omega t}\left[a + i\int\limits_{t'}^{t} \mathrm{d}\,s \frac{e^{i\,\omega s}\,\eta\,(s)}{\sqrt{2\,\omega}}\right]\,. \tag{26}$$

Подставим решение (26) в показатель экспоненты в (15) и раздвинем пределы интегрирования ($t' \to -\infty,\ t'' \to +\infty$). Таким образом мы получим ядро S-матрицы для гармонического осциллятора в присутствии внешнего источника:

$$S_\eta(a^*,\, a) = \frac{1}{N}\,\exp\left\{a^*\,a + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\,[\eta^*(t)\,a\,e^{-i\omega t} + a^*\,e^{i\omega t}\,\eta\,(t)] + \right.$$

$$\left. + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\int\limits_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\,s\,\eta^*\,(t)\,i\frac{e^{-i\,\omega\,(t-s)}}{2\,\omega}\,\eta\,(s)\right\}\,. \tag{27}$$

При помощи (23 Л1) выражение (27) переписывается как

$$S_\eta(a^*,\, a) = \frac{1}{N}\,\exp\left\{a^*\,a + \frac{i}{\sqrt{2\omega}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\,[\eta^*(t)\,a\,e^{-i\omega t} + a^*\,e^{i\omega t}\,\eta\,(t)] + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s\,\eta^*\,(t)\,D_c(t-s)\,\eta\,(s)\right\}\,. \tag{28}$$

Подчеркнём, что в (28) используется именно причинная гриновская функция, так как уже в определении S-матрицы (24) сделано предположение, что при $|t| \to \infty$ взаимодействие выключается адиабатически и система описывается свободным гамильтонианом $\mathcal{H}_0$.

В дальнейшем нам понадобится формула (26), записанная в несколько изменённом виде:

$$q\,(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\,\omega}}[a\,(t) + a^*\,(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\,\omega}}[a\,e^{-i\,\omega\,t} + a^*\,e^{i\,\omega\,t}] + \int\limits_{t'}^{t''}\mathrm{d}\,s\,D_c\,(t-s)\,\eta\,(s)\,. \tag{26$'$}$$

5. S-матрица в скалярной теории поля

Рассмотрим скалярную теорию поля в d-мерном пространстве-времени. В свободном случае в присутствии внешнего источника действие такой теории имеет вид

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^{(d)}\, x \left\{ \frac{1}{2}\, (\partial_\mu\, \phi)^2 - \frac{1}{2}\, m^2\, \phi^2 - V(\phi) + \eta\, \phi \right\} . \tag{29}$$

Отсюда получаем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x \left\{ \frac{1}{2}\, \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\, (\nabla\, \phi)^2 - \frac{1}{2}\, m^2\, \phi^2 - V(\phi) + \eta\, \phi \right\} , \tag{30}$$

где $\dot{\phi} = \partial\, \phi\, (t,\, \mathbf{x})/\partial t$. Варьируя лагранжиан (30) относительно поля $\dot{\phi}$ находим обобщённый импульс поля ϕ:

$$\delta_{\dot{\phi}} \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x\, \pi\, \delta \dot{\phi} \quad \longrightarrow \quad \pi = \dot{\phi} \tag{31}$$

Теперь путём канонической процедуры получаем гамильтониан теории:

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x\, \pi\, \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{H} = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x \left\{ \frac{1}{2}\, \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2}\, m^2\, \phi^2 + V(\phi) - \eta\, \phi \right\} . \tag{32}$$

Выпишем лишь ненулевые одновременные коммутационные соотношения (КС):

$$[\phi\, (t,\, \mathbf{x}),\, \pi\, (t,\, \mathbf{y})] = i\, \delta^{(d-1)} (\mathbf{x} - \mathbf{y})\, . \tag{33}$$

Как правило, реализация КС (33) осуществляется согласно следующей схеме:

$$\phi\, (t,\, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\, k}{(2\, \pi)^{d-1}} \frac{1}{\sqrt{2\, \omega_k}} \left(a_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\, e^{-i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} \right) ,$$

$$\pi\, (t,\, \mathbf{x}) = -i \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\, k}{(2\, \pi)^{d-1}} \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \left(a_{\mathbf{k}}(t)\, e^{i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} - a^\dagger_{\mathbf{k}}(t)\, e^{-i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} \right) ,$$

$$[a_{\mathbf{k}}(t),\, a_{\mathbf{p}}(t)] = [a^\dagger_{\mathbf{k}}(t),\, a^\dagger_{\mathbf{p}}(t)] = 0\, , \qquad [a_{\mathbf{k}}(t),\, a^\dagger_{\mathbf{p}}(t)] = (2\, \pi)^{d-1}\, \delta^{(d-1)}\, (\mathbf{k} - \mathbf{p})\, . \tag{34}$$

Разложение (34) является естественным в случае свободной теории, когда $V(\phi) = 0$. Действительно, если

$$\omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}\, , \tag{35}$$

то гамильтониан (32) распадается на сумму гамильтонианов гармонических осцилляторов (мы здесь полагаем $\eta = 0$):

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\, k}{(2\, \pi)^{d-1}} \omega_k\, (a^\dagger_{\mathbf{k}}\, a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}\, a^\dagger_{\mathbf{k}}) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\, k}{(2\, \pi)^{d-1}} \omega_k\, a^\dagger_{\mathbf{k}}\, a_{\mathbf{k}} + \delta^{(d-1)}\, (0) \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, k\, \frac{\omega_k}{2}\, ,$$

где $(2\pi)^{d-1}\, \delta^{(d-1)}\, (0) = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x = V$ — объём пространства. Второе слагаемое в правой части последнего равенства является энергией нулевых колебаний осцилляторов. Хотя плотность этой энергии бесконечна, она как правило не играет роли и потому в обычной квантовой теории поля вычёркивается. Энергия нулевых колебаний (или энергия вакуума) является серьёзной проблемой в квантовой теории гравитации, однако эта тема лежит за рамками нашего курса лекций. Отметим лишь, что рассматриваемый далее эффект Казимира существует вследствие *реальности* энергии вакуума.

Сделаем замечание о нормировке, используемой в этих лекциях. Везде интегрирование в координатном пространстве осуществляется по правилу $\int \mathrm{d}^{(d)}\, x$, в то время как интегрирование в импульсном пространстве — по правилу $\int \mathrm{d}^{(d)}\, k/(2\pi)^d$. Это правило согласовано с правилами коммутации (33) и (34). Иными словами, единичный оператор в линейном пространстве функций в координатном представлении есть $\delta^{(d)}\, (x - y)$, а в импульсном представлении — $(2\pi)^d\, \delta^{(d)}\, (k - p)$.

Основное состояние или вакуум в теории (32)-(35) обозначается $|0\rangle$ и определяется условиями

$$a_{\mathbf{k}}\,|0\rangle = 0\,, \qquad \langle 0|0\rangle = 1\,. \tag{36}$$

Очевидно,

$$\mathcal{H}_0\,|0\rangle = 0\,. \tag{37}$$

Возбуждённые состояния строятся при помощи операторов рождения $a^\dagger_{\mathbf{k}}$. Например, одночастичное состояние имеет вид

$$|\mathbf{k}\rangle = \sqrt{2\,\omega_k}\,a^\dagger_{\mathbf{k}}\,|0\rangle\,. \tag{38}$$

Вследствие (34) и (36) скалярное произведение двух одночастичных состояний

$$\langle \mathbf{k}\,|\,\mathbf{p}\,\rangle = 2\,\omega_k\,(2\,\pi)^{d-1}\,\delta^{(d-1)}\,(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,. \tag{39}$$

Можно показать (см. задачи), что правая часть (39) лоренц-инвариантна. Нормировка состояний (38) оправдывается именно лоренц-инвариантностью скалярных произведений одночастичных состояний. Заметим также, что лоренц-инвариантная мера в пространстве одночастичных состояний равна

$$\frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{2\,\omega_k\,(2\,\pi)^{d-1}}\,. \tag{40}$$

Мера (40) согласована со скалярным произведением (39), то есть

$$\int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{2\,\omega_k\,(2\,\pi)^{d-1}}\,|\,\mathbf{k}\,\rangle\,\langle\mathbf{k}\,| = 1\,, \tag{41}$$

где единица в правой части равенства (40) обозначает единичный оператор в пространстве одночастичных состояний.

Энергия состояния (38) легко вычисляется при помощи равенства (37) и КС (34):

$$\mathcal{H}_0\,|\,\mathbf{k}\,\rangle = \omega_k\,|\,\mathbf{k}\,\rangle\,.$$

Оператор импульса в скалярной теории поля имеет вид (см. Приложение C)

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = -\int \mathrm{d}^{(d-1)}\,x\;\pi(x)\,\nabla\,\phi\,(x)\,, \tag{42}$$

что оправдывается значениями следующих коммутаторов:

$$[\phi\,(x),\,\boldsymbol{\mathcal{P}}] = -i\,\nabla\,\phi\,(x)\,, \qquad [\pi\,(x),\,\boldsymbol{\mathcal{P}}] = -i\,\nabla\,\pi\,(x)\,,$$

и так далее. Подставляя разложение (34) в (42), получаем:

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\mathbf{k}\,a^\dagger_{\mathbf{k}}\,a_{\mathbf{k}}\,.$$

Легко найти, что

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}\,|\,0\,\rangle = 0\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{P}}\,|\,\mathbf{k}\,\rangle = \mathbf{k}\,|\,\mathbf{k}\,\rangle\,.$$

Таким образом, состояние $|\,\mathbf{k}\,\rangle$ имеет определённый импульс $\mathbf{k}$.

Пусть $\{\mathbf{k}_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ — такой набор импульсов, что попарно $\mathbf{k}_i \neq \mathbf{k}_j$. Тогда многочастичное состояние представляется в виде

$$|\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots,\mathbf{k}_n\,\rangle = \prod_{i=1}^{n}\,(\sqrt{2\,\omega_{k_i}}\;a^\dagger_{\mathbf{k}_i})\,|0\rangle\,. \tag{43}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0\,|\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots,\mathbf{k}_n\,\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{n}\omega_{k_i}\right)\,|\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots,\mathbf{k}_n\,\rangle\,,\\
\boldsymbol{\mathcal{P}}\,|\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots,\mathbf{k}_n\,\rangle &= \left(\sum_{i=1}^{n}\mathbf{k}_i\right)\,|\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots,\mathbf{k}_n\,\rangle\,,
\end{aligned} \tag{44}$$

а также

$$\langle\, \mathbf{p}_1,\, \mathbf{p}_2,\, \ldots\, ,\mathbf{p}_n\, |\mathbf{k}_1,\, \mathbf{k}_2,\, \ldots\, ,\mathbf{k}_n\, \rangle = \prod_{i=1}^{n} \left[2\,\omega_{k_i}\,(2\,\pi)^{d-1}\right]$$

$$\sum_{\text{все перестановки } p_i} \delta^{(d-1)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{p}_{i_1})\,\ldots\,\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}_n - \mathbf{p}_{i_n})\,. \tag{45}$$

Естественно, существуют также состояния вида $(a^{\dagger}_{\mathbf{k}})^n\,|0\rangle$ (n частиц в одном состоянии), однако в теории S-матрицы эти состояния интереса не представляют.

Пространство состояний, построенное описанным способом, называется фоковским пространством состояний.

Пусть

$$\eta_{\mathbf{k}}\,(t) = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\,x\;\eta\,(t,\,\mathbf{x})\,e^{-i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}} = \eta^{*}_{-\mathbf{k}}\,. \tag{46}$$

Для гамильтониана (32) имеем:

$$\mathcal{H} = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}} \left\{\omega_k\, a^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t)\, a_{\mathbf{k}}(t) - \frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}}(\eta^{*}_{\mathbf{k}}(t)\, a_{\mathbf{k}}(t) + \eta_{\mathbf{k}}(t)\, a^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t))\right\}. \tag{47}$$

Отсюда видно, что в данном случае гамильтониан является суммой гамильтонианов вида (17) и потому ядро S-матрицы системы (29) получается непосредственно из ядра S-матрицы (27). Первое слагаемое в экспоненте в (27) переходит в

$$\int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\, a^{*}_{\mathbf{k}}\, a_{\mathbf{k}}\,,$$

второе — в

$$i\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\eta\,(x)\,\phi_0(x)\,,\qquad \phi_0(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}}\,(a^{*}_{\mathbf{k}}\,e^{i\,k\,x} + a_{\mathbf{k}}\,e^{-i\,k\,x})\,,$$

$$k\,x = k^0 x^0 - \mathbf{k}\,\mathbf{x}\,,\quad k^0 = \omega_k\,, \tag{48}$$

а третье — в

$$i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,t\int\limits_{-\infty}^{t}\mathrm{d}\,s\int\frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\eta^{*}_{\mathbf{k}}\,(t)\,\left[i\,\frac{e^{-i\,\omega_k\,(t-s)}}{2\,\omega_k}\right]\eta_{\mathbf{k}}\,(s) = \frac{i}{2}\int\!\!\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\mathrm{d}^{(d)}\,y\,\eta\,(x)\,D_c\,(x-y)\,\eta\,(y)\,,$$

где

$$D_c\,(x) = i\int\frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\frac{e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x} - i\,\omega_k\,|x^0|}}{2\,\omega_k} = \int\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^{d}}\,\frac{e^{-i\,k\,x}}{-k^2 + m^2 - i\varepsilon}\,,$$

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,D_c\,(x) = \delta^{(d)}\,(x)\,. \tag{49}$$

Из правой части равенства (49) очевидны лоренц-инвариантность причинной гриновской функции $D_c\,(x)$ и то, что везде $\mathrm{Im}\;\omega_k = -\varepsilon\,,\ \varepsilon \to +0$. Для ядра S-матрицы имеем:

$$S\,(a^{*},\,a) = \frac{1}{N}\,\exp\left\{\int\frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,a^{*}_{\mathbf{k}}\,a_{\mathbf{k}} + i\int\mathrm{d}^{(d)}\,x\,\eta\,(x)\,\phi_0\,(x) + \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2}\int\!\!\int\mathrm{d}^{(d)}\,x\,\mathrm{d}^{(d)}\,y\,\eta\,(x)\,D_c\,(x-y)\,\eta\,(y)\right\}. \tag{50}$$

Теперь перейдём от ядра к нормальному символу S-матрицы:

$$S\,(a^{*},\,a) = \frac{1}{N}\,\exp\left\{i\int\mathrm{d}^{(d)}\,x\,\eta\,(x)\,\phi_0\,(x) + \frac{i}{2}\int\!\!\int\mathrm{d}^{(d)}\,x\,\mathrm{d}^{(d)}\,y\,\eta\,(x)\,D_c\,(x-y)\,\eta\,(y)\right\} \equiv S_0\,(\phi_0;\,\eta)\,. \tag{51}$$

Поле (48) удовлетворяет свободному уравнению

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,\phi_0 = 0\,,$$

которое называется *уравнением Клейна–Гордона–Фока.*

Укажем, что нормальный символ S-матрицы представляется также как функциональный интеграл

$$S\,(a^*,\,a) = \frac{1}{N'}\int \exp\left\{i\int \mathrm{d}\,t\,[\mathrm{d}^{(d-1)}\,x\,\pi\,\dot\phi - \mathcal{H}]\right\} D\,\pi\,D\,\phi = \frac{1}{N}\int \exp\,(i\,\mathcal{S})\,D\,\phi\,,$$

$$D\,\pi \equiv \prod_x \mathrm{d}\,\pi(x)\,,\qquad D\,\phi \equiv \prod_x \mathrm{d}\,\phi(x)\,,$$

$$\phi\,(x)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}\phi_{\substack{out\\ in}}\,(x)\,,\qquad \phi_{\substack{out\\ in}}\,(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}}\,\left(a_{\mathbf{k}\,\substack{out\\ in}}\,e^{-i\,k\,x} + a^*_{\mathbf{k}\,\substack{out\\ in}}\,e^{i\,k\,x}\right)\,,$$

$$a_{\mathbf{k}\,in} = a_{\mathbf{k}}\,,\qquad a^*_{\mathbf{k}\,out} = a^*_{\mathbf{k}}\,,\qquad k\,x = k^0\,x^0 - \mathbf{k}\,\mathbf{x}\,,\qquad k^0 = \omega_k\,. \tag{52}$$

Действие $\mathcal{S}$ в (52) может быть как свободным действием (29), так и включающим взаимодействие (см. ниже (54)).

В справедливости представления (52) нетрудно убедиться следующим образом. В случае свободной теории с внешним источником, описывающейся действием (29), интеграл (52) как гауссов вычисляется точно. В этом случае действие в экспоненте функционального интеграла экстремально при условии $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,\phi = \eta$. Решение последнего уравнения с необходимыми граничными условиями типа (25) есть (сравни с одномерным случаем (26′))

$$\phi\,(x) = \phi_0\,(x) + \int \mathrm{d}^{(d)}\,y\,D_c\,(x-y)\,\eta\,(y)\,. \tag{53}$$

Подстановка (53) в экспоненту функционального интеграла приводит к выражению (51)[1]. Очевидно, полученный результат не случаен, поскольку, согласно лекции 1, амплитуда перехода вообще, и S-матрица в частности, представляется в виде функционального интеграла (52). Поэтому единственный остающийся вопрос при вычислении нормального символа S-матрицы — это вопрос о граничных условиях динамического поля при $|t| \to \infty$. Важность голоморфного представления функционального интеграла заключается именно в том, что это представление даёт ответ на вопрос, каковы должны быть граничные условия при вычислении нормального символа S-матрицы: положительно частотные волны в ϕ_{in} и отрицательно частотные волны в ϕ_{out} совпадают с соответствующими волнами в ϕ_0 (48). Здесь уместно ещё раз подчеркнуть, что такие граничные условия и сама теория S-матрицы существуют лишь при справедливости предположения об адиабатическом выключении взаимодействия при $|t| \to \infty$.

6. S-матрица в теории поля со взаимодействием

Рассмотрим теорию скалярного поля с самодействием, описывающуюся действием

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^{(d)}\;x\;\left\{\frac{1}{2}(\partial_\mu\,\phi)^2 - \frac{1}{2}\,m_0^2\,\phi^2 - V\,(\phi) + \eta\,\phi\right\}\,. \tag{54}$$

Наибольший интерес для нас представляет случай

$$V\,(\phi) = \frac{1}{4\,!}\,\lambda_0\,\phi^4 \tag{55}$$

Размерность полей и констант определяется исходя из того, что действие имеет размерность постоянной Планка, а в случае $\hbar = 1$ — безразмерно. Например, из безразмерности действия (54) имеем:

$$[m] = \text{см}^{-1}\,,\qquad [\phi] = \text{см}^{(1-d/2)}\,,\qquad [\lambda] = \text{см}^{\;d-4}\,.$$

Теперь континуальный интеграл не может быть вычислен точно, но существует вычислительная техника, основанная на теории возмущений (ТВ). Идея заключается в разложении S-матрицы по потенциалу взаимодействия $\left(\int \mathrm{d}^{(d)}\;x\,V\,(\phi)\right)$. Тогда в нулевом приближении мы имеем точный

[1] Следует обратить внимание на следующую тонкость, возникающую при проведении этого простого вычисления: неопределенность интеграла $\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\phi_0(x)(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\int \mathrm{d}^{(d)}\,y\,D_c(x-y)\eta(y)$ решается в пользу равенства нулю этого интеграла. Действительно, поле ϕ_0 принадлежит ядру оператора $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)$. Поэтому оператор $(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)D_c$ является проектором, обращающим в нуль упомянутое ядро.

результат (51), а при разложении по $\left(\int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, V\,(\phi)\right)$ возникают интегралы от гауссовых средних вида $\langle 0|T\,\phi_1\,\ldots\,\phi_n|0\rangle$, где $\phi_i = \phi\,(x_i)$.

Замечание. Рассмотрим интеграл

$$I\,(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\,x\, \exp\left(-\frac{1}{2}\,x^2 - \lambda\,x^4\right)\,,$$

который точно не вычисляется. Очевидно также, что функция $I\,(\lambda)$ при $\lambda = 0$ не аналитична, она имеет особенность. Тем не менее при $\lambda \ll 1$ имеет смысл разложение

$$I\,(\lambda) = \sqrt{2\,\pi} - \lambda \int \mathrm{d}\,x\,x^4\,e^{-(1/2)\,x^2} + \,\ldots\,. \tag{56}$$

Это разложение имеет смысл лишь до тех пор пока следующий член разложения меньше предыдущего. Интегралы вида

$$I_n = \int \mathrm{d}\,x\,x^n\,e^{-(1/2)\,x^2} \tag{57}$$

вычисляются при помощи формул

$$x^n\,e^{-(1/2)\,x^2} = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\eta^n}\,e^{-(1/2)\,x^2+\eta\,x}\Big|_{\eta=0}\,, \tag{58}$$

$$\int \mathrm{d}\,x\,e^{-(1/2)\,x^2+\eta\,x} = \sqrt{2\,\pi}\,e^{(1/2)\,\eta^2}\,, \tag{59}$$

$$I_n = \left[\int \mathrm{d}\,x\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\eta^n}\,e^{-(1/2)\,x^2+\eta\,x}\right]\Bigg|_{\eta=0} = \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\eta^n}\int \mathrm{d}\,x\,e^{-(1/2)\,x^2+\eta\,x}\right]\Bigg|_{\eta=0} =$$
$$= \sqrt{2\,\pi}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,\eta^n}\,e^{(1/2)\,\eta^2}\right]\Bigg|_{\eta=0}\,,$$

так что

$$I\,(\lambda) = \sqrt{2\,\pi}\,(1 - 3\,\lambda + \,\ldots\,)$$

Если $\Phi\,(x)$ — произвольная функция, то

$$\Phi\,(x) = \left[\Phi\,\left(\frac{1}{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}\right)\,e^{i\,\eta\,x}\right]\Bigg|_{\eta=0}\,.$$

Это равенство позволяет свести вычисление негауссова интеграла к следующей формуле:

$$\int \mathrm{d}\,x\,\exp\left\{i\,\left(\frac{1}{2}\,x^2 - V\,(x)\right)\right\} =$$
$$= \left[\exp\left\{-i\,V\,\left(\frac{1}{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\eta}\right)\right\}\int \mathrm{d}\,x\,\exp\left\{i\,\left(\frac{1}{2}\,x^2 + \eta\,x\right)\right\}\right]\Bigg|_{\eta=0}\,. \tag{60}$$

Интеграл в правой части (60) гауссов и потому легко вычисляется. После этого мы можем развить ТВ, разлагая правую часть (60) относительно V и пользуясь теоремой Вика.

В теории поля действуем аналогично. Имеем:

$$\phi\,(x_1)\,\ldots\,\phi\,(x_n) = \frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_1)}\,\ldots\,\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_n)}\,\exp\left\{i\int \phi\,(x)\,\eta\,(x)\;\mathrm{d}\,x\right\}\Bigg|_{\eta=0}\,.$$

Для любого функционала $\Phi\,\{\phi\,(x)\}$

$$\Phi\,\{\phi\,(x)\} = \Phi\,\left\{\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x)}\right\}\,\exp\left\{i\int \phi\,(x)\,\eta\,(x)\;\mathrm{d}\,x\right\}\Bigg|_{\eta=0}\,, \tag{61}$$

и, в частности,

$$\exp\left\{-i\int V(\phi)\,\mathrm{d}\,x\right\} = \exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x)}\right)\mathrm{d}\,x\right\}\exp\left\{i\int \phi\,(x)\,\eta\,(x)\,\mathrm{d}\,x\right\}\Big|_{\eta=0}. \qquad (62)$$

Теперь, прямолинейно обобщая одномерную формулу (60) на случай теории поля и пользуясь формулой (51) для значения гауссова интеграла в задаче об S-матрице, выпишем нормальный символ S-матрицы в скалярной теории поля со взаимодействием:

$$S\,(a^*,\,a) = S\,(\phi_0) = \frac{1}{N}\,\exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x)}\right)\mathrm{d}\,x\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{i\int \mathrm{d}\,x\,\eta\,(x)\,\phi_0(x) + \frac{i}{2}\int\!\!\int \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\,\eta\,(x)\,D_c(x-y)\,\eta\,(y)\right\}\Big|_{\eta=0}. \qquad (63)$$

Здесь и далее $D_c(x)$ задаётся согласно (49),

Разложим функционал (63) по ϕ_0 и перейдём от нормального символа оператора S-матрицы к самому оператору S-матрицы:

$$S\,(\phi_0) = \sum_n \frac{1}{n!}\int S_n\,(x_1,\,\ldots\,,\,x_n)\,:\phi_0\,(x_1)\,\ldots\,\phi_0\,(x_n):\,\mathrm{d}\,x_1\,\ldots\,\mathrm{d}\,x_n\,,$$

$$\phi_0\,(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}}\,(a_{\mathbf{k}}\,e^{-i\,k\,x} + a^\dagger_{\mathbf{k}}\,e^{i\,k\,x})\,, \qquad k^0 = \omega_k\,. \qquad (64)$$

Функции $S_n\,(x_1,\,\ldots\,,\,x_n)$ являются коэффициентами при степенях поля $\phi_0(x)$ в разложении функционала (63) по степеням этого поля и они называются коэффициентными функциями S-матрицы, а $S\,(\phi_0)$ — производящим функционалом для функций S_n. Поле ϕ_0 в (64) является свободным квантованным полем в представлении Гейзенберга. Согласно определению, размещение любого оператора, являющегося функцией операторов рождения и уничтожения, между двумя двоеточиями означает приведение оператора к нормальному виду, причём в процессе этого приведения все операторы рождения и уничтожения считаются коммутативными. Например, $:a^\dagger a:= a^\dagger a,\ :a\,a^\dagger := a^\dagger a,\ :a^m(a^\dagger)^n := (a^\dagger)^n a^m,\ :a\,a^\dagger\,a := a^\dagger a^2$, и т.д.

Задачи

1. Проверить в скалярной теории поля, что уравнения Гейзенберга $i\,\dot{\mathcal{O}} = [\mathcal{O},\,\mathcal{H}]$ совпадают по форме с лагранжевыми уравнениями.

2. Рассмотрите теорию комплексного скалярного поля с действием

$$S = \int \mathrm{d}^4\,x\,(\partial_\mu\phi^*\,\partial^\mu\phi - m^2\,\phi^*\,\phi)\,.$$

Изучите эту теорию, рассматривая в качестве базисных динамических переменных $\phi\,(x)$ и $\phi^*\,(x)$, а не вещественную и мнимую части поля $\phi\,(x)$.

а) Выписать канонически сопряжённые импульсы к $\phi\,(x)$ и $\phi^*\,(x)$ и канонические коммутационные соотношения. Показать, что гамильтониан

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}\,x\,(\pi^*\,\pi + \nabla\phi^*\,\nabla\phi + m^2\,\phi^*\,\phi)\,.$$

Выписать уравнение Гейзенберга для $\phi\,(x)$ и показать, что оно совпадает с уравнением Клейна–Гордона–Фока.

б) Диагонализуйте гамильтониан, вводя операторы рождения и уничтожения. Покажите, что теория содержит два типа частиц с массой m.

в) Докажите, что заряд

$$Q = \int \mathrm{d}^3\,x\,\frac{i}{2}\,(\phi^*\,\pi^* - \pi\,\phi)$$

сохраняется и перепишите его в терминах операторов рождения и уничтожения и вычислите заряд частиц каждого типа.

3. **а)** Доказать, что величина

$$\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}\,\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$$

лоренц-инвариантна.

б) Доказать, что мера

$$\frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}}$$

лоренц-инвариантна.

4. **а)** Пусть $\mathcal{H}\,(a^\dagger,\,a)$ — оператор Гамильтона. Представить квантовую статистическую сумму

$$Z(\beta)=\operatorname{tr}e^{-\beta\,\mathcal{H}}$$

в виде функционального интеграла в голоморфном представлении.

б) Вычислить статистическую сумму гармонического осциллятора (с точностью до множителя, зависящего лишь от температуры) в голоморфном представлении в присутствии внешнего источника. Используя эту статистическую сумму, найти хронологический коррелятор $\langle\hat{T}_\tau\,a^\dagger(\tau_1)a(\tau_2)\rangle$ в представлении Мацубары. При помощи полученной формулы найти также статистические средние $\left[\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}}a^\dagger a\right)\right]/\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}}\right)$ и $\left[\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}}a\,a^\dagger\right)\right]/\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}}\right)$.

Лекция 3
ДИАГРАММНАЯ ТЕХНИКА ФЕЙНМАНА

1. Разложение по константе связи

Рассмотрим очень интересный случай, когда потенциал самодействия задаётся согласно (55 Л2) и разложим первую экспоненту в (63 Л2) в ряд по потенциалу V. Члены этого ряда содержат произведения четырёхкратных дифференцирований по $\eta\,(x_i)$ с последующим интегрированием по x_i. Кратное применение операторов $\delta/\delta\,\eta\,(x_i)$ к $S_0\,(\phi_0;\,\eta)$ (см. (51 Л2)) и последующее обращение в нуль поля η приводит к появлению в S-матрице множителей $\phi_0\,(x_i)$ и $D_c\,(x_i - x_j)$, причём последняя функция соответствует дифференциальному оператору второго порядка $(-i)\,\delta^2/\delta\,\eta\,(x_i)\,\delta\,\eta\,(x_j)$. Изобразим графически каждый член этого разложения. Эти графики называются диаграммами Фейнмана. Члену разложения n-ого порядка, содержащему дифференциальный оператор

$$\frac{(-i)^n}{n!}\int \mathrm{d}\,x_1\,\ldots\,\mathrm{d}\,x_n\,V\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_1)}\right)\ldots\,V\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_n)}\right), \tag{1}$$

сопоставляется диаграмма, состоящая из n вершин в точках x_i, $i = 1,\,\ldots\,,\,n$, находящихся под n-кратным интегралом по пространству-времени. В рассматриваемом случае (55 Л2) из каждой вершины выходит 4 линии (в теории с потенциалом $\lambda\phi^s$ из каждой вершины выходит s линий). Эти линии могут либо замыкаться, соединяя пару вершин (такие линии называются внутренними), либо выходить из диаграммы, соответствуя полю $\phi_0\,(x_i)$ (такие линии — внешние). Каждой внутренней линии, соединяющей точки x_i и x_j, сопоставляется функция $D_c\,(x_i - x_j)$. Каждой внешней линии, выходящей из точки x_i, сопоставляется поле $\phi_0\,(x_i)$. По всем точкам $\{x_i\}$ производится пространственно-временное интегрирование. Полное выражение для $S\,(\phi_0)$ (63 Л2) получается суммированием по всем диаграммам.

Приступим к конкретным вычислениям. Представим S-матрицу в виде

$$S = 1 + i\,T\,. \tag{2}$$

Пусть начальное и конечное состояния имеют вид (43 Л2); обозначим через $|\,i\,\rangle$ и $|\,f\,\rangle$ начальное и конечное состояния, соответственно:

$$|\,i\,\rangle = |\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots\rangle\,, \qquad |\,f\,\rangle = |\mathbf{p}_1,\,\mathbf{p}_2,\,\ldots\rangle\,. \tag{3}$$

Вследствие общей трансляционной инвариантности теории справедлива формула

$$i\,T_{fi} \equiv \langle\mathbf{p}_1,\,\mathbf{p}_2,\,\ldots\,|\,i\,T\,|\,\mathbf{k}_1,\,\mathbf{k}_2,\,\ldots\rangle = (2\,\pi)^d\,\delta^{(d)}\,(P_f - P_i)\,i\,M_{fi}\,. \tag{4}$$

Здесь $P_i = k_1 + k_2 + \,\ldots$ — суммарный начальный и $P_f = p_1 + p_2 + \,\ldots$ — суммарный конечный 4-импульсы. Введенная при помощи равенства (4) величина M_{fi} называется амплитудой рассеяния. Информация о взаимодействии содержится в операторе T в (2) и в амплитуде M_{fi}, через которую выражаются сечения рассеяния, вероятности распадов частиц, и т.п. (в зависимости от постановки задачи). Из общих принципов квантовой механики следует, что эти величины квадратичны по M_{fi}.

Вычислим S-матрицу (64 Л2) с точностью до второго порядка по λ_0 и четвёртого по ϕ_0. Будем пользоваться формулами (51 Л2) и

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_i)}\,S_0\,(\phi_0;\,\eta) = :\left[\phi_0\,(x_i) + \int \mathrm{d}\,y\,D_c\,(x_i - y)\,\eta\,(y)\right]\,S_0\,(\phi_0;\,\eta) : \equiv\, : [x_i]\,S_0\,(\phi_0;\,\eta) :\,, \tag{5\,a}$$

$$\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_j)}\,[x_i] = -i\,D_c\,(x_i - x_j)\,. \tag{5\,b}$$

В первом порядке по λ_0 находим (нормировочную константу $1/N$ можно опускать, так как она всегда сокращается в окончательном результате):

$$-i\,\frac{\lambda_0}{4!}\int \mathrm{d}\,x\;:\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x)}\right)^4 S_0(\phi_0;\,\eta) : \bigg|_{\eta=0} = -i\,\frac{\lambda_0}{4!}\int \mathrm{d}\,x\;:\{-3\,D_c^2(0) - 6\,i\,D_c(0)\,\phi_0^2(x) + \phi_0^4(x)\} :\,. \tag{6}$$

Во втором порядке следует вычислить величину

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{4!}\right)^2\int \mathrm{d}\,x_1\;\mathrm{d}\,x_2\;:\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_2)}\right)^4\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_1)}\right)^4 S_0\,(\phi_0;\,\eta):\Big|_{\eta=0}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{4!}\right)^2\int \mathrm{d}\,x_1\;\mathrm{d}\,x_2\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta\,(x_2)}\right)^4 :\{-3\,D_c^2(0)-6\,i\,D_c(0)\,[x_1]^2+[x_1]^4\}\,S_0\,(\phi_0;\,\eta):\Big|_{\eta=0}.$$

Далее целесообразно использовать формулу кратного дифференцирования

$$(f\,g)''''=f''''\,g+4\,f'''\,g'+6\,f''\,g''+4\,f'\,g'''+f\,g'''',$$

подразумевая под f — фигурную скобку в последнем равенстве, а под g — оператор $S_0\,(\phi_0;\,\eta)$. Таким образом находим искомую величину:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_0}{4!}\right)^2\int \mathrm{d}\,x_1\;\mathrm{d}\,x_2\;:\{-[9\,D_c^4(0)+72\,D_c^2(0)\,D_c^2(x_1-x_2)+24\,D_c^4(x_1-x_2)]-$$

$$-i\,D_c(x_1-x_2)\,[96\,D_c^2(x_1-x_2)+144\,D_c^2(0)]\,\phi_0(x_1)\,\phi_0(x_2)-$$

$$-i\,D_c(0)\,[72\,D_c^2(x_1-x_2)+18\,D_c^2(0)]\,(\phi_0^2(x_1)+\phi_0^2(x_2))+[72\,D_c^2(x_1-x_2)+36\,D_c^2(0)]\,\phi_0^2(x_1)\,\phi_0^2(x_2)+$$

$$+48\,D_c(0)\,D_c(x_1-x_2)\,[\phi_0(x_1)\,\phi_0^3(x_2)+\phi_0^3(x_1)\,\phi_0(x_2)]+3\,D_c^2(0)\,[\phi_0^4(x_1)+\phi_0^4(x_2)]\}: \tag{7}$$

При помощи теоремы Вика (см. задачу 1 к лекции 1), а также разложения для ϕ_0 (64 Л2) и определения векторов состояния (43 Л2) находим следующие значения для элементов S-матрицы в случае перехода одночастичного состояния $|\mathbf{k}\rangle$ в одночастичное состояние $|\mathbf{p}\rangle$ (заметим, что все частоты $\omega_{\mathbf{k}}$, содержащиеся в формулах, определяющих вектора-состояния (см. (38 Л2) и 43 Л2)), и в лоренц-инвариантной мере (40 Л2), взаимно сокращаются):

В нулевом приближении по λ_0:

$$\langle\mathbf{p}|\,S\,|\mathbf{k}\rangle=2\,\omega_k\,(2\pi)^{d-1}\,\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \tag{8}$$

(нет взаимодействия).

В первом порядке по λ_0:

$$2\,\omega_k\,(2\pi)^{d-1}\,\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\left[\frac{i\,\lambda_0}{8}\,D_c^2(0)\right]+(2\pi)^d\,\delta^{(d)}(k-p)\,\left[-\frac{\lambda_0}{2}\,D_c(0)\right]. \tag{9}$$

Во втором порядке по λ_0:

$$2\,\omega_k\,(2\pi)^{d-1}\,\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\,\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,\left[-\frac{\lambda_0^2}{2^7}\,D_c^4(0)-\frac{\lambda_0^2}{2^4}\,D_c^2(0)\,D_c^2(x_1-x_2)-\frac{\lambda_0^2}{2^4\cdot 3}\,D_c^4(x_1-x_2)\right]-$$

$$-i\,\frac{\lambda_0^2}{6}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\;\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,D_c^3(x_1-x_2)\,e^{i\,p\,x_1-i\,k\,x_2}-i\,\frac{\lambda_0^2}{4}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\;\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,D_c^2(0)\,D_c(x_1-x_2)\,e^{i\,p\,x_1-i\,k\,x_2}-$$

$$-i\,\frac{\lambda_0^2}{4}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\;\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,D_c(0)\,D_c^2(x_1-x_2)\,e^{i\,(p-k)\,x_1}-i\,\frac{\lambda_0^2}{16}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\;\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,D_c^3(0)\,e^{i\,(p-k)\,x_1}. \tag{10}$$

Согласно (49 Л2)

$$D_c(x)=\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,D_c(k)\,e^{-i\,k\,x},\qquad D_c(k)=\frac{1}{-k^2+m_0^2-i\,\varepsilon},\qquad \varepsilon\to+0. \tag{11}$$

В частности,

$$D_c(0)=\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,D_c(k)\,. \tag{11$'$}$$

Преобразуем некоторые интегралы при помощи (11):

$$\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\;\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,D_c^2(x_1-x_2)=\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,D_c^2(k)\,, \tag{12$\,a$}$$

$$\int \mathrm{d}^{(d)}x_1\,\mathrm{d}^{(d)}x_2\,D_c^4(x_1-x_2)=\int \mathrm{d}^{(d)}x\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_1}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_2}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_3}{(2\pi)^d}D_c(k_1)\,D_c(k_2)\,D_c(k_3)\,D_c(k_1+k_2+k_3)\,, \tag{12b}$$

$$\int \mathrm{d}^{(d)}x_1\,\mathrm{d}^{(d)}x_2\,D_c^3(x_1-x_2)\,e^{ipx_1-ikx_2}=$$
$$=(2\pi)^d\,\delta^{(d)}(k-p)\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_1}{(2\pi)^d}\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_2}{(2\pi)^d}D_c(k_1)\,D_c(k_2)\,D_c(k-k_1-k_2)\,, \tag{12c}$$

$$\int \mathrm{d}^{(d)}x_1\,\mathrm{d}^{(d)}x_2\,D_c(x_1-x_2)\,e^{ipx_1-ikx_2}=(2\pi)^d\,\delta^{(d)}(k-p)\,D_c(k)\,, \tag{12d}$$

$$\int \mathrm{d}^{(d)}x_1\,\mathrm{d}^{(d)}x_2\,e^{i(p-k)x_1}\,D_c^2(x_1-x_2)=(2\pi)^d\,\delta^{(d)}(k-p)\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}k}{(2\pi)^d}D_c(k)\,D_c(-k)\,, \tag{12e}$$

Теперь при помощи выписанных формул вычислим вклад в амплитуду перехода $|\,\mathbf{k}\,\rangle\to|\,\mathbf{p}\,\rangle$, содержащийся в сумме членов (8)-(10), с точностью $O(\lambda_0^2)$:

$$2\,\omega_k\,(2\pi)^{d-1}\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\left\{1+\frac{i\lambda_0}{8}\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)\right)^2\int\mathrm{d}^d x-\right.$$
$$-\lambda_0^2\left[\frac{1}{2^7}\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)\right)^4\int\mathrm{d}^{(d)}x_1\int\mathrm{d}^{(d)}x_2+\frac{1}{2^4}\int\mathrm{d}^{(d)}x\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}k}{(2\pi)^d}D_c(k)\right)^2\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)\,D_c(-q)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2^4 3}\int\mathrm{d}^{(d)}x\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_1}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_2}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^{(d)}k_3}{(2\pi)^d}D_c(k_1)\,D_c(k_2)\,D_c(k_3)\,D_c(k_1+k_2+k_3)\right]\right\}+$$
$$+(2\pi)^d\delta^{(d)}(k-p)\left\{-\frac{\lambda_0}{2}\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)-i\lambda_0^2\left[\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q_1}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^{(d)}q_2}{(2\pi)^d}D_c(q_1)\,D_c(q_2)\,D_c(k-q_1-q_2)+\right.\right.$$
$$+\frac{1}{4}\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)\right)^2D_c(k)+\frac{1}{4}\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}r}{(2\pi)^d}D_c(r)\right)\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)\,D_c(-q)+$$
$$\left.\left.+\frac{1}{16}\int\mathrm{d}\,x\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}q}{(2\pi)^d}D_c(q)\right)^3\right]\right\}. \tag{13}$$

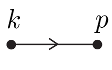
2. Диаграммы Фейнмана и правила Фейнмана

Аналитическому выражению (13) соответствует следующая сумма диаграмм Фейнмана (см. Рис. 3; диаграммы выписаны в том же порядке, в котором расположены слагаемые в (13))

На этом этапе уместно сформулировать правила Фейнмана применительно к рассматриваемой модели. Согласно правилам Фейнмана каждой диаграмме однозначно соответствует аналитическое выражение. Каждая диаграмма состоит из вершин и линий, соединяющих эти вершины (внутренние линии), отрезков, лишь один конец которых заканчивается (или начинается) в вершине (внешние линии) и отдельных отрезков (свободные линии). Каждая линия имеет направление. Внутренним и внешним линиям приписывается D-импульс, а свободным линиям — два D-импульса (по одному каждому концу), причём изменение направления линий влечёт изменение знака соответствующих D-импульсов. Внутренние линии называются пропагаторами.

Сформулируем правила Фейнмана для вычисления амплитуды перехода $i\,M$, сопоставляющие диаграммам аналитические выражения:

0. каждому свободному отрезку (см. рис. 3 a)



$=(2\pi)^{d-1}\delta^{(d-1)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})$, где k и p — d-импульсы концов отрезка;

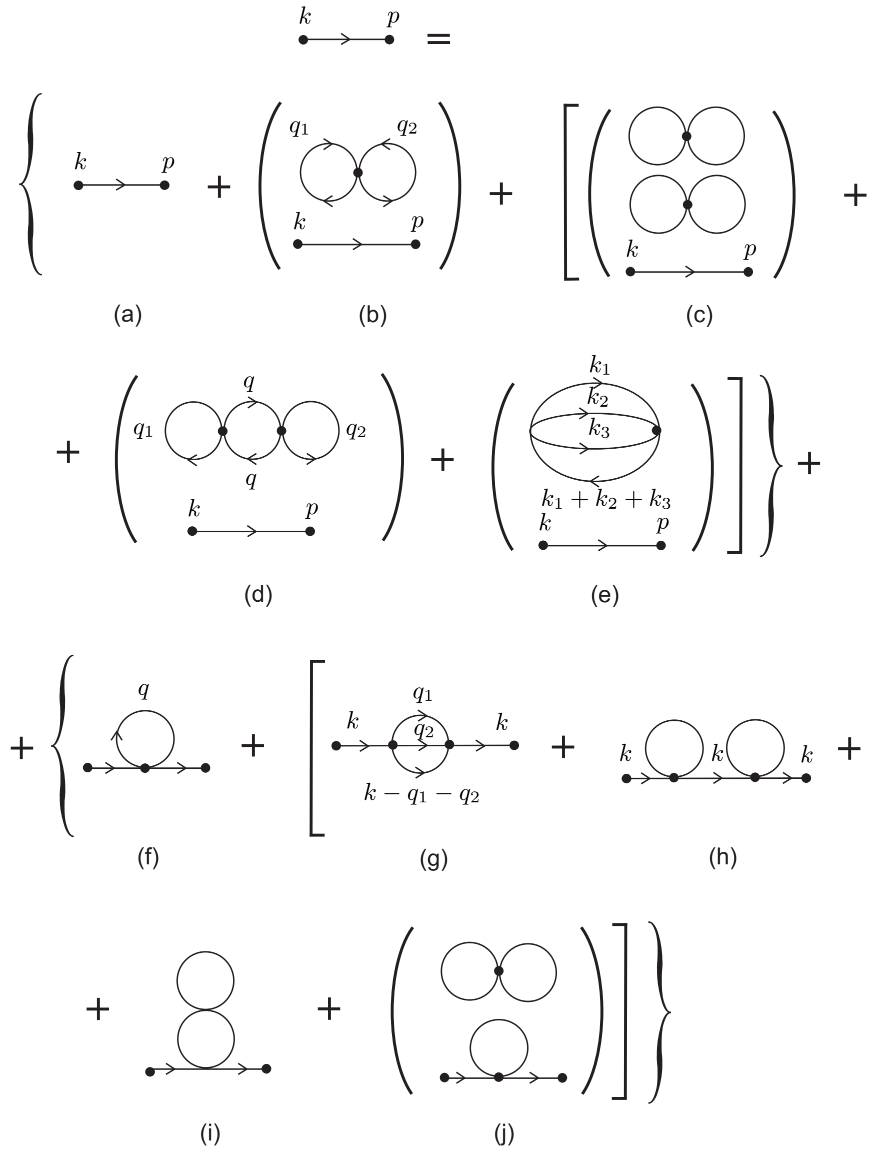
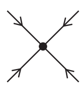


Рис. 3

1. каждому пропагатору

$\xrightarrow[k]{}$ $= -i\, D_c(k)$, где k — d-импульс пропагатора;

2. каждой вершине



$= -i\, \lambda\,;$

3. каждой внешней линии

$\longrightarrow$ $= 1$

4. потребовать выполнения закона сохранения d-импульса в каждой вершине;

5. проинтегрировать по каждому не зафиксированному законом сохранения импульсу: $\int \frac{\mathrm{d}^{(d)} p}{(2\pi)^d}$;

6. разделить на множитель D_n — порядок группы симметрии диаграммы;

7. каждый связный вакуумный пузырёк (как "восьмёрка"на рис. $3\,b$) содержит множитель $\left(\int \mathrm{d}^{(d)}\, x\right)$.

Все интегрирования интерпретируются как следствие принципа суперпозиции, согласно которому амплитуды суммируются.

Правило **0** имеет значение лишь для тривиальной части амплитуды рассеяния. Важная для физики частиц амплитуда M (см. (4)) содержится во второй фигурной скобке в (13), а также во второй фигурной скобке на на рис. 3. Правило **7** имеет значение, как мы увидим, лишь для амплитуды перехода из вакуума в вакуум.

Укажем порядки групп симметрии D_n диаграмм на рис. 3:

(b) $D_n = 8$ — по две перестановки каждого из концов двух пропагаторов и две перестановки самих пропагаторов $(2 \cdot 2 \cdot 2 = 8)$;

(c) $D_n = 2 \cdot 8 \cdot 8 = 2^7$;

(d) $D_n = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$;

(e) $D_n = 2 \cdot 4!$ — две перестановки вершин и 4! перестановки пропагаторов вакуумного пузырька;

(f) $D_n = 2$ — перестановка концов пропагатора;

(g) $D_n = 3!$ — число перестановок пропагаторов;

(h) $D_n = 2 \cdot 2 = 4$;

(i) $D_n = 2 \cdot 2 = 4$ — две перестановки пропагаторов в нижней петле и две перестановки концов пропагатора в верхней петле;

(j) $D_n = 8 \cdot 2 = D'_n \cdot 2 = 16$ — $D'_n = 8$ для вакуумного пузырька и две перестановки концов пропагатора.

В случае сомнения при вычислении D_n следует непосредственно вычислить коэффициент при диаграмме.

Нетрудно понять происхождение правил Фейнмана. Действительно, каждой вершине сопоставляется множитель $\int \mathrm{d}^{(d)}\, x(-i\lambda/4!)$ и в случае n-вершинной диаграммы имеется общий множитель $(1/n!)$ из ряда Тейлора. Но множитель $1/n!$ всегда сокращается множителем $n!$ от перестановок вершин. Кроме того, каждая вершина имеет 4 линии, приходящие из четырёх различных мест. Перестановки относительно этих мест (что делается автоматически при вычислении $(\delta/i\delta\eta(x))^4$), дают множитель 4!, сокращающий знаменатель в $(-i\lambda/4!)$. Поэтому каждой вершине сопоставляется множитель $\int \mathrm{d}^{(d)}\, x(-i\lambda)$. Если же мы имеем, например, вакуумный пузырёк с двумя вершинами такой, как на рис. 3 e, то из двух исходных множителей $1/4!$ один остаётся. Не сокращается также общий множитель $(1/2)$. Но в данном случае как раз $D_n = 2 \cdot 4!$. Действительно, при действии дифференциального оператора $[(\delta/i\delta\eta(x))^4]\,[(\delta/i\delta\eta(y))^4]$ на величину $S_0(\phi_0;\ \eta)$ та квадратная скобка, которая действует первая, не даёт множителя 4!.

Для подсчета комбинаторного коэффициента диаграммы удобно представлять вычисление так, как будто все операторы $[-i\delta/\delta\eta(x)]$ либо "спариваются"попарно, либо "спариваются"с полем ϕ_0. В первом случае каждой "спарке"$[-i\delta/\delta\eta(x_i)]$ и $[-i\delta/\delta\eta(x_j)]$ соответствует множитель $[-iD_c(x_i - x_j)]$, а во втором случае — $\phi_0(x)$. Это правило является одним из вариантов теоремы Вика.

Легко сообразить, что, например, при вычислении диаграммы на рис. 4

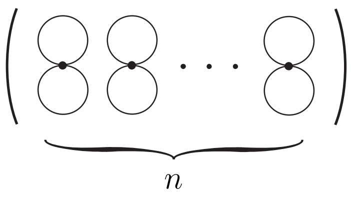


Рис. 4.

множитель $(1/n!)$ в дифференциальном операторе (1) не сокращается: каждый множитель $\left[\frac{1}{4!}\int \mathrm{d}\, x_i \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\eta(x_i)}\right)^4\right]$ даёт в амплитуде множитель, соответствующий одной диаграмме-восьмёрке. Таким образом, в случае диаграммы на рис. 4 порядок группы симметрии $D_n = n!\,(8)^n$. Аналогично, если мы имеем несвязную вакуумную диаграмму вида

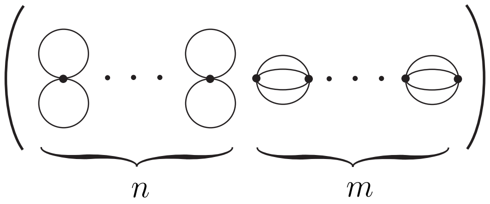


Рис. 5.

то она равна

$$\frac{1}{n!}\,\frac{1}{m!}$$

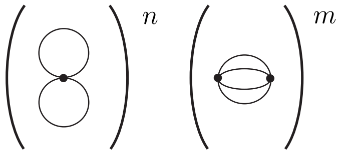


Рис. 6.

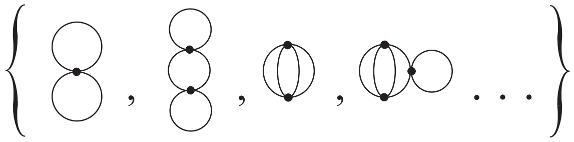
Подчеркнём исключительно важное и нетривиальное свойство диаграмм Фейнмана: общий числовой коэффициент в диаграмме не зависит от её порядка.

Поясним физический смысл диаграмм на рис. 3.

Сумма первых пяти диаграмм равна произведению амплитуды перехода $|\,\mathbf{k}\,\rangle \to |\,\mathbf{p}\,\rangle$ в нулевом приближении на сумму первых пяти вакуумных пузырьков (начиная от тривиального, равного единице).

Обозначим через V_i какой-либо из вакуумных пузырьков:

$$V_i \in$$



Из сказанного видно, что любая диаграмма, не содержащая несвязных вакуумных компонент, умножается на ряд

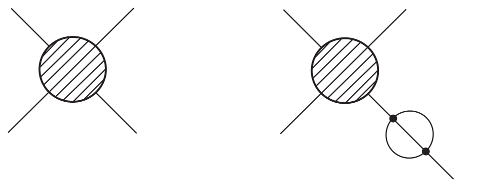
$$\sum_{\{n_i\}} \left(\prod_i \frac{1}{n_i!} V_i^{n_i} \right) = \exp\left(\sum_i V_i \right) . \tag{14}$$

Таким образом, сумма всех диаграмм с заданным числом внешних линий равна сумме всех связных диаграмм с этими же внешними линиями, умноженной на экспоненту от суммы всех разных несвязных диаграмм без внешних линий (вакуумных пузырьков). Эта экспонента интерпретируется как фаза, набегающая при переходе вакуума в вакуум за бесконечное время. Заметим, что каждая диаграмма V_i содержит множитель $\left(\int \mathrm{d}^{(d)}\, x \right)$. Эта вакуумная фаза не представляет интереса, поскольку сокращается в физических величинах. Поэтому её не учитывают.

Во второй фигурной скобке на рис. 3 диаграммы (f), (g), (h), (i) дают поправки к амплитуде распространения одной частицы в вакууме. Все эти поправки могут лишь привести к изменению (перенормировке) тех параметров частицы, которые могут изменяться непрерывно. Например, это может быть масса. Эти поправки далее рассматриваются в меру необходимости. Здесь лишь заметим, что буквальный учёт диаграмм типа рис. 3 $(f) - (i)$ затруднителен, поскольку, например, диаграммы (f) и (g) квадратично расходятся, диаграмма (h) содержит множитель

$$D_c(k) = \frac{1}{-k^2 + m_0^2 - i\varepsilon} .$$

Однако $k^2 = m_0^2$, и потому $D_c(k) = \frac{1}{0} = \infty$. Мы видим, что поправки к внешним линиям, 4-импульсы которых k_i удовлетворяют условию $k_i^2 = m^2$, где m — наблюдаемая (или физическая) масса, требуют отдельного рассмотрения. Такое рассмотрение далее проводится в более изящной теории поля — квантовой электродинамике. В скалярной теории поля квантовые поправки к внешним линиям здесь не изучаются. (Говорят, что если импульс частицы удовлетворяет условию $k_i^2 = m^2$, то её импульс находится на массовой поверхности; в этой ситуации говорят также, что частица находится на массовой поверхности.) Таким образом, из двух диаграмм



левая будет учитываться, а правая — нет. Будем говорить, что у диаграммы ноги на массовой поверхности ампутированы, если её нельзя рассечь на две несвязных диаграммы, разрезая одну внутреннюю линию, и при этом одна из двух диаграмм имеет две внешних линии на массовой поверхности.

Таким образом, при проведении вычислений по ТВ следует нарисовать все диаграммы процесса, имеющие физический смысл, с заданным числом вершим, определяемым степенью необходимой точности вычисления, сопоставить диаграммам аналитические выражения согласно правилам Фейнмана и вычислить их.

Например, рассмотрим взаимное рассеяние двух начальных частиц с импульсами $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$, в результате чего при $t \to \infty$ имеем две частицы с импульсами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Этот процесс с точностью $O\left(\lambda_0^2\right)$ описывается следующими диаграммами:

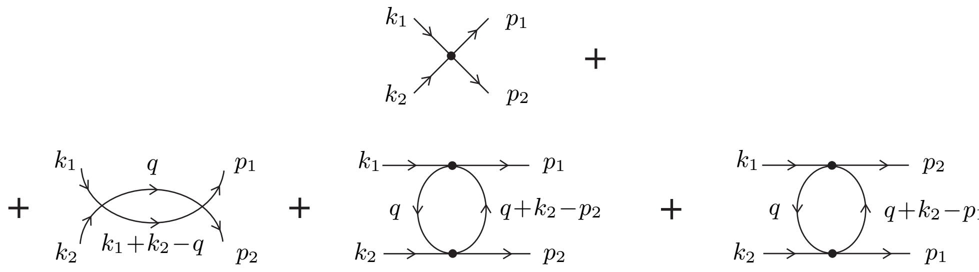


Рис. 7.

Аналитическое выражение этих диаграмм таково:

$$i\,M = -i\lambda_0 + \left\{ \frac{1}{2}\,\lambda_0^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,q}{(2\pi)^d}\, D_c(q) \Big[D_c(k_1+k_2-q) + D_c(k_2-p_2+q) + D_c(k_2-p_1+q) \Big] \right\}. \tag{15}$$

Амплитуду (15) легко также получить непосредственно при помощи выражений (6) и (7).

Диаграммы вида

и т.п. по указанным выше причинам не рассматриваются.

3. Производящий функционал гриновских функций

Если в (63 Л2) не полагать $\eta = 0$, то полученный функционал обозначим $S(\phi_0;\eta)$; он является нормальным символом S-матрицы для рассеяния взаимодействующих частиц в присутствии источника $\eta(x)$. Рассмотрим также функционал

$$Z(\eta) = \exp\!\left\{ -i \int V\!\left(\frac{1}{i}\,\frac{\delta}{\delta\eta(z)} \right) \mathrm{d}\,z \right\} \cdot \exp\!\left\{ \frac{i}{2} \int \eta(x)\, D_c(x-y)\, \eta(y)\; \mathrm{d}\,x\; \mathrm{d}\,y \right\}, \tag{16}$$

имеющий смысл амплитуды перехода из вакуума в вакуум в присутствии внешнего источника. Коэффициентные функции $G_n(x_1,\ldots,x_n)$ в разложении функционала (16) в ряд по $\eta(x)$

$$Z(\eta) = \sum_n \frac{1}{n!} \int G_n(x_1,\ldots,x_n)\, \eta(x_1)\ldots\eta(x_n)\; \mathrm{d}\,x_1\,\ldots \mathrm{d}\,x_n \tag{17}$$

определяют функции Грина, то есть вакуумные средние от хронологических произведений гейзенберговых операторов поля (см. конец лекции 1). Поэтому функционал (16) называется *производящим функционалом.*

Функционал $Z(\eta)$ содержит в себе больше информации, чем функционал $S(\phi_0)$ (63 Л2): зная $Z(\eta)$, можно восстановить $S(\phi_0)$. Чтобы получить явные формулы, введём расширенный функционал $S(\phi)$, заменив в (63 Л2) поле $\phi_0(x)$ произвольной функцией четырёх переменных $\phi(x)$. Коэффициентные расширенные функции $\tilde{S}_n$ (см. (64 Л2)) суть вариационные производные (под расширенными функциями мы понимаем коэффициентные функции для $S(\phi)$):

$$\tilde{S}_n(x_1,\ldots,x_n) = \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\right)\ldots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(x_n)}\right) S(\phi)\,\bigg|_{\phi=0} =$$

$$= \exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\right)\mathrm{d}\,z\right\}\eta(x_1)\ldots\eta(x_n)\cdot\exp\left\{\frac{i}{2}\int\eta(x)\,D_c(x-y)\,\eta(y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y\right\}. \tag{18}$$

Пусть

$$\tilde{\eta}(x) = \int \mathrm{d}\,y\,D_c(x-y)\,\eta(y) \to \eta(x) = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\,\tilde{\eta}(x)\,,$$

$$\frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}(x)} = (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)_x\,\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\,. \tag{19}$$

Очевидно

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}(x)}\right) Z(\eta) = \exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\right)\mathrm{d}\,z\right\}\eta(x)\,\exp\left\{\frac{i}{2}\int\eta(y)\,D(y-z)\,\eta(z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\right\},$$

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\tilde{\eta}(x_1)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\tilde{\eta}(x_2)}\right) Z(\eta) = \exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(z)}\right)\mathrm{d}\,z\right\}\cdot$$

$$\cdot\left[\eta(x_1)\,\eta(x_2) + \frac{1}{i}(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)_{x_2}\,\delta^{(d)}(x_2-x_1)\right]\,\exp\left\{\frac{i}{2}\int\eta(y)\,D_c(y-z)\,\eta(z)\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,z\right\}, \tag{20}$$

и т.д. Очевидно, применение оператора

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\tilde{\eta}(x_1)}\right)\ldots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\tilde{\eta}(x_n)}\right)$$

к функционалу (16) даёт функционал того же вида, что в правой части (20), где квадратная скобка заменяется на величину

$$[\eta(x_1)\ldots\eta(x_n) + \varkappa(x_1,\ldots,x_n)]\,,$$

причём

$$\int \phi_0(x_1)\ldots\phi_0(x_n)\,\varkappa(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}\,x_1\ldots\mathrm{d}\,x_n = 0\,. \tag{21}$$

Теперь при помощи (18)-(21) находим:

$$\int \mathrm{d}\,x_1\ldots\mathrm{d}\,x_n\,\phi_0(x_1)\ldots\phi_0(x_n)\left\{\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(x_1)}\right)\ldots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\phi(x_n)}\right) S(\phi)\,\bigg|_{\phi=0} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\tilde{\eta}(x_1)}\right)\ldots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\,\tilde{\eta}(x_n)}\right) Z(\eta)\right\} = 0\,. \tag{22}$$

Таким образом, для вычисления нормального символа S-матрицы нужно вычислить вариационные производные

$$\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\right)\ldots\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}\right) Z(\eta)\,\bigg|_{\eta=0}, \tag{23}$$

т.е. функции Грина $G_n(x_1,\ldots,x_n)$, подействовать на эти функции дифференциальным оператором

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\partial_\mu\partial^\mu_{x_i} + m^2\right), \tag{24}$$

умножить результат на произведение

$$\frac{1}{n!}\prod_i \phi_0(x_i)\,,$$

проинтегрировать по всем x_i и просуммировать по n.

4. О физической интерпретации пропагаторов и проблема причинности в квантовой теории поля

Пусть в нерелятивистской квантовой механике $|\mathbf{x}\rangle$ и $|\mathbf{k}\rangle$ обозначают нормированные собственные состояния операторов координаты и импульса частицы, соответственно, с собственными значениями операторов, указанными в обозначениях этих состояний. Тогда, как известно, $\langle\mathbf{x}\,|\,\mathbf{k}\rangle = e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}$. Аналогичная формула в квантовой теории поля получается при помощи формул (38 Л2) и (64 Л2):

$$\langle\, 0|\,\phi_0(x)\,|\,\mathbf{k}\,\rangle|_{x^0=0} = e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}\,. \tag{25}$$

Из этой формулы мы делаем вывод, что состояние

$$|\mathbf{x}\rangle \equiv \phi_0(x)\,|\,0\,\rangle|_{x^0=0} = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\frac{e^{-i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}}{2\,\omega_k}\,|\,\mathbf{k}\,\rangle \tag{26}$$

есть состояние в свободной релятивистской квантовой теории поля, в котором частица полностью локализована в точке $\mathbf{x}$ в момент времени $x^0=0$.

Рассмотрим хронологическое среднее от гейзенберговского поля (64 Л2):

$$\langle\, 0\,|\,T\,\phi_0(x)\,\phi_0(y)\,|\,0\,\rangle = -i\,D_c(x-y)\,. \tag{27}$$

Равенство (27) легко проверяется непосредственно. Так как величина (27) зависит лишь от разностей координат, то при $x^0 > y^0$ её можно интерпретировать как амплитуду, описывающую распространение частицы, локализованной в точке $\mathbf{y}$ в момент времени y^0, в точку $\mathbf{x}$ за промежуток времени (x^0-y^0). Действительно, величина (27) может быть представлена также как $\langle\,\mathbf{x}\,|\,e^{-i\,(x^0-y^0)\,\mathcal{H}_0}\,|\,\mathbf{y}\,\rangle$ (см. лекцию 1). Если же $x^0 < y^0$, то точки x и y меняются местами. Эта интерпретация пропагатора (27) находится в полном соответствии с правилами Фейнмана.

Нетрудно убедиться, что

$$-iD_c(x-y)|_{x^0=y^0} = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\,\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{2\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2}} \neq 0\,,$$

$$-iD_c(x-y)|_{x^0=y^0} \sim e^{-m|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|} \quad \text{если} \quad m\,|\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,| \gg 1. \tag{28}$$

Не следует ли из (28) вывод, что в построенной нами релятивистской квантовой теории поля нарушен принцип причинности? Действительно, на первый взгляд из (28) следует, что частица, рождённая в одной точке пространства, мгновенно распространяется до других точек пространства. Однако, при правильной интерпретации принципа причинности в релятивистской квантовой теории поля, каких либо противоречий не возникает. Действительно, в нашем случае необходимым требованием является условие[1]

$$[\,\phi_0(x),\,\phi_0(y)\,] = 0 \qquad \text{если} \qquad (x-y)^2 < 0\,. \tag{29}$$

Равенство (29) означает, что если точки x и y разделены пространственноподобным интервалом, то никакие измерения в этих точках не скоррелированы между собою. Иными словами, в релятивистской квантовой теории поля информация не передаётся со скоростью, превышающей скорость света.

Оценка (28) интерпретируется следующим образом. Имеет место принцип неопределенности $\Delta t\cdot\Delta\varepsilon \geq \hbar$, где Δt — время измерения энергии и $\Delta\varepsilon$ — неопределенность измеренной энергии, заключенной в тестируемом участке пространства размера r (для наглядности здесь восстановлена правильная размерность). Если тестируемая частица с массой m покоится, то по смыслу введенных величин $mc^2 \geq \Delta\varepsilon$, откуда $\Delta t \geq \hbar/mc^2$ и размер тестируемой области $r \sim c\Delta t \geq \hbar/mc$. Из

[1] Равенство (29) доказывается в более общем случае взаимодействующих полей в Лекции 5.

приведенных оценок следует вывод, что в релятивистской квантовой теории частица с массой m не может быть локализована в объеме пространства с размером меньше чем $\hbar/mc$. Величина $\hbar/mc$ называется *комптоновской длиной волны* соответствующей частицы.

Для гейзенберговских полей во взаимодействующей теории равенство (29) также имеет место и при этом оно является весьма содержательным, определяя аналитические свойства различных корреляторов (см., например, В.Н. Грибов, "Квантовая электродинамика").

Задачи

1. Вычислить среднее число частиц и среднюю энергию свободной теории Клейна-Гордона при $t \to \infty$, рождённых внешним источником. Считать, что при $t \to -\infty$ система находится в основном состоянии.

Указание. Решить сначала эту задачу в случае одномерного осциллятора.

2. Рассмотреть скалярную теорию, описываемую лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2}\,m_A^2\,\Phi^2 + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi^2 - \varkappa\,\Phi\,\phi^2\,.$$

Последнее слагаемое описывает взаимодействие, позволяющее Φ-частице распадаться на две ϕ-частицы, если $m_A > 2\,m$. Вычислить время жизни Φ-частицы в наинизшем порядке.

Указание. Воспользоваться формулой (A9) из Приложения.

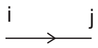
3. Рассмотрим линейную сигма–модель, описывающуюся гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^3\,x\,\left\{\frac{1}{2}(\pi^i)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi^i)^2 + V(\phi^2)\right\}$$

$$\phi^2 = \sum_{i=1}^{n}(\phi^i)^2\,, \qquad V(\phi^2) = \frac{m^2}{2}\,\phi^2 + \frac{\lambda}{4}(\phi^2)^2\,.$$

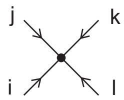
Развить диаграммную технику для этой модели. Показать, что она совпадает с диаграммной техникой скалярной теории, если в неё внесены следующие поправки:

а) пропагатор



$= -i\,\delta_{ij}\,D_c(k)$

б) вершина



$= -2i\lambda\,(\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{il}\delta^{kj} + \delta^{ik}\delta^{jl})$

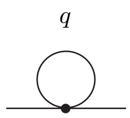
Везде $i,\,j,\,\ldots$ — сорта частиц. Таким образом начальное и конечное состояния несут наборы этих индексов.

4. Доказать прямым вычислением формулу (29).

Лекция 4
УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ РАСХОДИМОСТИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

1. Размерностная регуляризация расходимостей

Попробуем вычислить простейшую диаграмму (f) на рис. 3:



Соответствующий вклад в iM, обозначаемый $-i\Sigma$, равен

$$-i\,\Sigma^{(1)} = -\frac{\lambda_0 \mu^{4-d}}{2} \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{-(k^0)^2 + \mathbf{k}^2 + m_0^2 - i\varepsilon}\,.$$

Здесь μ — константа, имеющая размерность массы, так что λ_0 — безразмерная константа.

При интегрировании по k^0 сделаем поворот Вика (см. рис. 1, 2 в лекции 1) $k^0 = i\,k^d$:

$$-i\,\Sigma^{(1)} = -\frac{i\,\lambda_0 \mu^{4-d}}{2} \int\limits_E \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{k^2 + m_0^2}\,. \tag{1}$$

Обозначение $\int_E \mathrm{d}^{(d)}\,k$ указывает на то, что интегрирование идёт по d-мерному евклидову пространству, в котором $k^2 = (k^1)^2 + \ldots + (k^d)^2$. Интеграл (1) при $d \geq 2$ расходится, при $d < 2$ — сходится. Мы видим, что сходимость диаграмм Фейнмана существенно зависит от размерности d пространства-времени. С другой стороны, *большинство симметрий теории поля не зависят от* d. Важнейшими из таких симметрий являются лоренц- и калибровочная инвариантности. Поэтому возникла идея (Ж. 'т Хоофт, М. Вельтман) вычислять диаграммы Фейнмана при произвольной комплексной размерности пространства, устремляя в конце вычислений параметр d к нужному значению.

Для дальнейших вычислений нам понадобятся следующие формулы и интегралы.

Пусть $V_R^{(d)} = S^{(d)} R^d$ — объём шара радиуса R в d-мерном евклидовом пространстве. Вычислим $S^{(d)}$ — объём единичного шара в d-мерном пространстве. Имеем:

$$\pi^{d/2} = \int \mathrm{d}^{(d)}\,x\, e^{-(x_1^2+\ldots+x_d^2)} = \int\limits_0^\infty e^{-R^2}\,\mathrm{d}\,V_R^{(d)} = d\,S^{(d)} \int\limits_0^\infty e^{-R^2} R^{d-1}\,\mathrm{d}\,R =$$

$$= \frac{d}{2}\,S^{(d)} \int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{d/2-1}\,\mathrm{d}\,t = S^{(d)}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right).$$

Таким образом

$$S^{(d)} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\,. \tag{2}$$

Везде $\Gamma\,(z)$ — гамма-функция. При $c > 0$ и $\alpha > d/2$ имеем:

$$\int\limits_E \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(k^2+c)^\alpha} = d\,S^{(d)} \int\limits_0^\infty \frac{k^{d-1}\,\mathrm{d}\,k}{(k^2+c)^\alpha} = \left(\frac{d}{2}\right) S^{(d)} \int\limits_0^\infty \frac{t^{d/2-1}\,\mathrm{d}\,t}{(t+c)^\alpha} = \left(\frac{d}{2}\right) S^{(d)} \left[c^{d/2-\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\alpha-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\,(\alpha)}\right].$$

Теперь при помощи (2) получаем:

$$\int\limits_E \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(k^2+c)^\alpha} = \pi^{d/2}\,c^{d/2-\alpha}\,\frac{\Gamma\left(\alpha-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\,(\alpha)}\,. \tag{3}$$

Интеграл (3) был вычислен при условии $d < 2\alpha$. Однако правая часть в (3) является аналитической функцией всех параметров. Поэтому при произвольных комплексных значениях параметров d. α и c будем считать правую часть уравнения (3) определением интеграла, стоящего в левой части равенства (3).

При помощи (3) вычисляем интеграл (1):

$$-i\,\Sigma^{(1)} = -\frac{i\lambda_0\mu^{4-d}\,m_0^{d-2}}{2^{d+1}\,\pi^{d/2}}\,\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right). \tag{4}$$

Нас интересует значение $d = 4$ или значения d, близкие к числу 4. Поэтому введём обозначения

$$d = 4-\varepsilon\,, \qquad \ln\frac{\Lambda}{\mu} = \frac{1}{\varepsilon}\,, \qquad \varepsilon \to +0\,. \tag{5}$$

Как будет видно из дальнейших вычислений, параметр $\Lambda \to \infty$ играет роль максимально допустимого импульса в теории — *импульса обрезания*. Перепишем (4) в новых обозначениях:

$$-i\,\Sigma^{(1)} = -\frac{i\lambda_0\mu^{\varepsilon}\,m_0^{2-\varepsilon}}{2^{(5-\varepsilon)}\,\pi^{(2-\varepsilon/2)}}\,\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{6}$$

При помощи формул

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}\,, \qquad \Gamma(1) = 1 \tag{7}$$

находим, что величина (6)

$$-i\,\Sigma^{(1)} \quad \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} \quad \frac{i\lambda_0\,m_0^2}{2^4\pi^2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \text{const}\,, \tag{8}$$

где const — конечная величина при $\varepsilon \to 0$.

Теперь займёмся вычислением однопетлевых диаграмм на рис. 7 (n-петлевой диаграммой называется такая диаграмма, у которой имеется n нефиксированных импульсов, по которым идёт интегрирование). Каждая из этих трёх диаграмм представляется интегралом

$$I = \frac{1}{2}\,\lambda_0^2\mu^{2(4-d)}\int\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,q}{(2\pi)^d}\,D_c(q)\,D_c(p-q)\,. \tag{9}$$

Сначала оценим интеграл (9) непосредственно в 4-мерном пространстве-времени. Рассмотрим этот интеграл в ультрафиолетовой области $(q \to \infty)$. Так как внешние импульсы и масса фиксированы, то ими можно пренебречь при вычислении расходящейся части. Это можно сделать не всегда, но в данном случае, когда степень расходимости интеграла не выше логарифмической, внешними импульсами и массами можно пренебречь: учёт поправок к интегралу (9), пропорциональных m и p, приводит к сходящимся интегралам.

Сделаем поворот Вика. Тогда расходящаяся часть суммы трёх интегралов в (15 Л3) равна

$$i\,M_{div}^{(2)} = \frac{3i\,\lambda_0^2}{32\pi^4}\int\limits_E\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,q}{(q^2)^2} = \frac{3i\,\lambda_0^2}{16\pi^2}\int\limits_{\mu}^{\Lambda}\frac{\mathrm{d}\,q}{q}\,, \qquad \Lambda \to \infty\,. \tag{10}$$

Здесь Λ — *промежуточный импульс обрезания*, μ — нижний предел интегрирования, имеющий порядок физической массы частицы или внешних импульсов, который называется *точкой нормировки.*

Мы опять видим, что амплитуды перехода в квантовой теории поля содержат расходящиеся вклады.

Приведём ещё один пример.

Диаграмма (g) на рис. 3 даёт вклад в амплитуду перехода частицы в эту же частицу, аналогично диаграмме (f) на рис. 3:

$$-i\,\Sigma^{(2)} = -\frac{i\lambda_0^2}{6}\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,q_1\,\mathrm{d}^{(4)}\,q_2}{(2\pi)^8}\,D_c(q_1)\,D_c(q_2)\,D_c(k-q_1-q_2)\,. \tag{11}$$

Интеграл (11), так же как и интеграл (1), при $d = 4$ расходится квадратично.

2. Индекс расходимости диаграмм

Вычислим *индекс расходимости* произвольной диаграммы. Для этого сделаем масштабное преобразование всех импульсов в диаграмме, а также массы частицы: $k_i,\ p_f,\ q,\ m \to \alpha k_i,\ \alpha p_f,\ \alpha q,\ \alpha m$. При таком преобразовании подынтегральное выражение умножается на α^ω, где ω и есть индекс диаграммы. Очевидно, что все внутренние линии дают вклад в число ω, равный $(-2\,L_{in})$. Легко увидеть, что число d-мерных дифференциалов от внутренних независимых импульсов равно $L = [L_{in} - (n-1)]$, где n — число вершин диаграммы. Действительно, независимых внутренних импульсов в диаграмме с n вершинами имеется на $(n-1)$ меньше, чем внутренних линий, так как в каждой из n вершин имеет место закон сохранения d-импульса. Однако совокупность n законов сохранения содержит в себе один закон сохранения совокупности внешних входящих и выходящих d-импульсов. Этим объясняется уменьшение независимых d-импульсов не на n, а на $(n-1)$. Поэтому имеем для числа ω

$$\omega = d\,(L_{in} - n + 1) - 2\,L_{in}\,. \tag{12}$$

Обозначим через L_{ex} суммарное число внешних линий. Имеем:

$$L_{ex} + 2\,L_{in} = 4\,n\,. \tag{13}$$

Действительно, к каждой вершине подходит 4 линии, но каждая внутренняя линия подходит к двум вершинам. Исключим из (12) число n при помощи равенства (13):

$$\omega = \frac{1}{2}(d-4)\,L_{in} + d\left(1 - \frac{L_{ex}}{4}\right). \tag{14}$$

Диаграмма является формально сходящейся, если $\omega < 0$.

Мы рассмотрели расходимости диаграмм f и g на рис. 3 с $L_{ex} = 2$ и однопетлевые диаграммы на рис. 7 с $L_{ex} = 4$ при $d = 4$. Согласно (14) при $d = 4$ диаграммы с двумя внешними линиями расходятся квадратично, однако в них содержатся также и логарифмические расходимости. Это будет показано ниже. Диаграммы с четырьмя внешними линиями расходятся лишь логарифмически, что и было выяснено на примере однопетлевых диаграмм на рис. 7. Подчеркнём, что в рассматриваемой модели *при $d = 4$ степень расходимости диаграммы зависит не от её числа петель, а от числа внешних линий.* Фактически это свойство является следствием безразмерности константы связи λ_0, по которой идёт разложение. Действительно, лишь при $d = 4$ константа λ_0 безразмерна. При $d > 4$ её размерность такова, что степень расходимости диаграммы возрастает по мере её усложнения (см. (14)). Такие теории называются *неперенормируемыми.* При $d < 4$ теория ϕ^4 относится к так называемым *сверхперенормируемым*, поскольку в теории содержится лишь конечное число расходящихся диаграмм.

3. Диаграмма с четырьмя внешними линиями

Теперь займёмся вычислением интеграла (9) при произвольном комплексном значении параметра d. Причинные гриновские функции допускают следующее представление:

$$D_c(q) = i\int\limits_0^\infty \exp[i\alpha(q^2 - m_0^2 + i\varepsilon)]\,\mathrm{d}\,\alpha\,. \tag{15}$$

Делая поворот Вика и используя (15), переписываем (9) в виде

$$I = -i\frac{\lambda_0^2\mu^{2(4-d)}}{2(2\pi)^d}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,\alpha\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,\beta\int\limits_E \mathrm{d}^{(d)}\,q\ \exp\left\{-i\alpha(q^2+m_0^2) - i\beta[(p-q)^2+m_0^2] - \varepsilon(\alpha+\beta)\right\}.$$

Здесь интеграл по q является гауссовым и вычисляется при помощи формулы (13 Л1), где следует сделать замены $N \to d$, $\mathcal{M} \to -[2(\alpha+\beta)]^{-1}$, $\xi \to 2\beta p$. После вычисления этого интеграла возвращаемся в пространство Минковского:

$$I = -\frac{i}{2}\lambda_0^2\mu^{2(4-d)}\,(4\pi i)^{-d/2}\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,\alpha\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,\beta\,\frac{1}{(\alpha+\beta)^{d/2}}\exp\left\{i\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}p^2 - i(\alpha+\beta)(m_0^2 - i\varepsilon)\right\}. \tag{16}$$

Перепишем интеграл (16) в новых переменных интегрирования $\alpha = \lambda t$, $\beta = (1-\lambda)t$, $0 < \lambda < 1$, $0 < t < \infty$:

$$I = -\frac{i}{2}\lambda_0^2 \mu^{2(4-d)}\,(4\pi i)^{-d/2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,\lambda \int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,t\; t^{(1-d/2)}\exp\{-t[-i\lambda(1-\lambda)p^2 + im_0^2 + \varepsilon]\}\,. \tag{17}$$

Внутренний интеграл в (17) вычисляется при помощи формулы

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}\,t\; t^{z-1}e^{-kt} = k^{-z}\Gamma(z)\,, \qquad \mathrm{Re}\,k > 0\,. \tag{18}$$

В нашем случае $z = 2 - d/2$, $k = i[m_0^2 - \lambda(1-\lambda)p^2] + \varepsilon$. Поэтому имеем:

$$\frac{I}{\mu^{4-d}} = \frac{i\lambda_0^2\mu^{(4-d)}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)}{2(4\pi)^{d/2}}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,\lambda\,[m_0^2 - \lambda(1-\lambda)p^2]^{d/2-2}\,. \tag{19}$$

Разложим (с учётом (7)) правую часть (19) в ряд Лорана вблизи точки $d = 4$:

$$\frac{I}{\mu^{4-d}} = \frac{i\lambda_0^2}{(4\pi)^2(4-d)} + \frac{i\lambda_0^2[\psi(1) + \ln 4\pi]}{8(2\pi)^2} -$$

$$-\frac{i\lambda_0^2}{8(2\pi)^2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,\lambda\,\ln\frac{m_0^2 - \lambda(1-\lambda)p^2 - i\varepsilon}{\mu^2}\,, \qquad \psi(\alpha) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\alpha}\,\ln\Gamma(\alpha)\,. \tag{20}$$

Отсюда мы видим, что расходящаяся часть в $i\,M^{(2)}$ равна

$$i\,M^{(2)}_{div} = \frac{3i\lambda_0^2}{16\,\pi^2}\,\frac{1}{4-d}\,. \tag{21}$$

Сравнивая (21) и (10), мы оправдываем соотношение (5):

$$\frac{1}{4-d} = \frac{1}{\varepsilon} = \ln\frac{\Lambda}{\mu}\,. \tag{22}$$

Укажем на следующее важное обстоятельство: метод размерностной регуляризации учитывает лишь логарифмические расходимости. Действительно, если $d > 2\alpha$, то полагая $c = 0$ в (3), получаем:

$$\int\limits_E \frac{\mathrm{d}^d\,k}{(k^2)^\alpha} = 0 \qquad \text{при } d > 2\alpha\,. \tag{23}$$

Равенство (23) означает, что в методе размерностной регуляризации при $d > 2\alpha$ интеграл (23) определён и он равен нулю. Отсюда следует автоматическое устранение расходимостей степени выше логарифмической. Это же видно, в частности, из формулы (8).

4. Устранение расходимостей

Предположим, что в теории возмущений, описываемой рядом диаграмм Фейнмана, содержатся расходимости в диаграммах с ограниченным числом внешних линий. Таким примером является рассматриваемая теория ϕ^4 при $d = 4$. Более того, в этой теории расходятся лишь диаграммы с двумя и четырьмя внешними линиями, а действие содержит слагаемые, пропорциональные ϕ^2 и ϕ^4. В такой ситуации для устранения расходимостей вводится промежуточная регуляризация, смысл которой заключается в обрезании петлевых интегралов по нефиксированным импульсам неким параметром Λ, стремящимся к бесконечности, Это обрезание проводится таким образом, чтобы была сохранена Лоренц-инвариантность, а также, по возможности, все прочие симметрии, имеющиеся в теории. Размерностная регуляризация является наиболее используемым методом такой регуляризации. Оказывается, что в некоторых случаях (как в теории ϕ^4 при $d = 4$) исходные параметры теории (затравочные константы) можно выбрать такими функциями параметра обрезания Λ, что при $\Lambda \to \infty$ все расходимости в теории сокращаются. В рассматриваемой нами скалярной теории поля способ действий таков: если в неком порядке теории возмущений расходимости уже устранены, то в следующем порядке ТВ расходятся диаграммы с двумя и с четырьмя внешними линиями. В первом случае расходимость устраняется переделкой (перенормировкой) затравочной массы, а во втором случае — перенормировкой затравочной константы связи. При этом может оказаться, что затравочные константы не имеют конечного предела при устремлении промежуточного импульса обрезания к бесконечности. Но в процедуре перенормировки наблюдаемые (или физические, или перенормированные) величины (массы частиц, константы взаимодействия физических частиц, амплитуды перехода) должны стремиться к определённому пределу при устремлении промежуточного импульса обрезания к бесконечности. Затравочные константы теории разлагаются в ряд по перенормированным константам, причём коэффициенты в этом разложении являются функциями параметра обрезания.

Теории, допускающие подобную процедуру перенормировки, называются *перенормируемыми теориями*.

Продемонстрируем сказанное на примере перенормировки констант в теории ϕ^4 в четырёхмерном пространстве-времени. Мы увидим, что эта теория является перенормируемой. Пусть затравочная константа связи λ_0, входящая в исходное (затравочное) действие, разлагается в ряд по физической константе связи λ. Далее мы увидим, что физическая константа связи может быть определена через значение амплитуды перехода двух частиц в две частицы при некоторых значениях импульсов частиц. Пусть во втором порядке

$$\lambda_0 = \lambda + \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} \ln\frac{\Lambda}{\mu}, \qquad \lambda_0^2 = \lambda^2 + O(\lambda^3). \tag{24}$$

Тогда согласно (10) и (24) в сумме диаграмм на рис. 7 расходимости сокращаются по крайней мере с точностью $O(\lambda^3)$ и амплитуда $2 \to 2$ является конечным выражением, зависящим от физической безразмерной константы λ.

5. Инвариантные переменные Мандельстама

В заключение лекции дадим определение удобных лоренц-инвариантных переменных, при помощи которых удобнее всего описывать амплитуды перехода двух частиц в две частицы.

Прежде всего заметим, что построенная ТВ явно лоренц-инвариантна. Это значит, что все амплитуды перехода как функции внешних 4-импульсов являются лоренц-инвариантами, то есть они зависят лишь от лоренц-инвариантов, построенных из внешних 4-импульсов. Это замечание остаётся в силе для диаграмм Фейнмана, внешние импульсы которых не находятся на массовой поверхности.

Пусть в реакции участвует всего 4 частицы с массами $m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4$, причём при $t \to -\infty$ имелось 2 частицы и при $t \to +\infty$ имеется также 2 частицы. Обобщённый закон сохранения 4-импульса запишем в виде

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0\,. \tag{25}$$

При этом предполагается, что, если, например, идёт реакция $1 + 2 \to 3 + 4$, то

$$k_1^0 > 0\,,\ k_2^0 > 0\,,\ k_3^0 < 0\,,\ k_4^0 < 0\,, \tag{26}$$

и т.д.

Из четырёх 4-импульсов, находящихся на массовой поверхности и удовлетворяющих уравнению (25), можно составить всего 2 независимых инвариантных переменных. Действительно, в силу (25) всего три импульса независимы, например, $k_1,\ k_2,\ k_3$. Из них можно составить всего 6 инвариантов: $k_1^2 = m_1^2,\ \ k_2^2 = m_2^2,\ \ k_3^2 = m_3^2,\ \ k_1k_2,\ k_1k_3,\ k_2k_3$. Лишь последние 3 из них являются переменными. Кроме того, так как $(k_1 + k_2 + k_3)^2 = k_4^2 = m_4^2$, то независимых переменных остаётся 2.

Удобно ввести три лоренц-инвариантных переменных Мандельстама:

$$\begin{aligned} s &= (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2\,, \\ t &= (k_1 + k_3)^2 = (k_2 + k_4)^2\,, \\ u &= (k_1 + k_4)^2 = (k_2 + k_3)^2\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Легко проверить, что

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \,. \tag{28}$$

Теперь рассмотрим самый простой случай $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$ и реакцию

$$1 + 2 \longrightarrow 3 + 4 \,, \tag{29}$$

для которой переменные мандельстама принимают значения в следующих областях:

$$s \geq 4m^2 \,, \qquad t \leq 0, \quad u \leq 0 \,. \tag{30}$$

О реакции (29) говорят, что это — s-канальная реакция. Амплитуда реакции в t-канале

$$1 + 3 \longrightarrow 2 + 4 \tag{31}$$

получается аналитическим продолжением амплитуды в s-канале в область переменных

$$t \geq 4m^2 \,, \quad s \leq 0 \,, \quad u \leq 0 \,. \tag{32}$$

Это возможно, так как в теории S-матрицы амплитуды являются аналитическими функциями инвариантных переменных.

Введём обозначение

$$i\, M^{(2)}(s) = \frac{1}{2}\lambda_0^2 \int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\, D_c(q)\, D_c(k_1 + k_2 - q) \,. \tag{33}$$

Тогда амплитуда в (15 Л3) представляется симметричным образом:

$$i\, M^{(2)} = i\, \left[M^{(2)}(s) + M^{(2)}(t) + M^{(2)}(u) \right] \,. \tag{34}$$

Укажем ещё один удобный способ параметризации петлевых интегралов, отличный от параметризации (14)-(15).

Очевидно имеем:

$$\frac{1}{AB} = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}\,x}{[xA + (1-x)B]^2} = \int\limits_{x,\,y \geq 0} \frac{\mathrm{d}\,x\ \mathrm{d}\,y\, \delta(x + y - 1)}{(xA + yB)^2} \,. \tag{35}$$

Дифференцируя (35) по B, получаем

$$\frac{1}{AB^{n-1}} = \int\limits_{x,\,y \geq 0} \mathrm{d}\,x\ \mathrm{d}\,y\, \delta(x + y - 1) \frac{(n-1) y^{n-2}}{[xA + yB]^n} \,. \tag{36}$$

Задачи

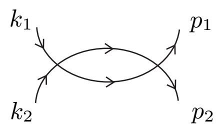
1. Доказать по индукции, что

$$\frac{1}{A_1\, A_2 \ldots A_n} = \int\limits_{x_i \geq\, 0} \mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_n\, \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1 \right) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n)^n} \,. \tag{37}$$

Переменные $\{x_i\}$ в этом интеграле называются *фейнмановскими параметрами.*

Указание. Использовать равенства (35) и (36).

2. Вычислить s-канальную однопетлевую диаграмму



при помощи параметризации Фейнмана. Указать, при каких значениях s эта диаграмма вещественна.

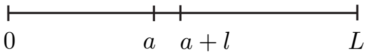
Ответ:

$$i\,M = \frac{i\,\lambda_0^2 \mu^{4-d}\Gamma(2-d/2)}{2\,(4\pi)^{d/2}} \int\limits_0^1 \mathrm{d}\,x\,[m^2 - x(1-x)s - i\,\varepsilon]^{d/2-2}\,;$$

M вещественна при $s \le 4\,m^2$.

3. **Эффект Казимира**.

Рассмотреть свободное безмассовое скалярное поле $\phi(x)$ на отрезке длины L с граничными условиями $\phi(0) = \phi(a) = \phi(a+l) = \phi(L) = 0$, где $a \sim (1/2)L$, $l \ll L$ (см. рисунок).



Вычислить силу $(-\partial\mathcal{E}_0/\partial l)$, где $\mathcal{E}_0$ — энергия нулевых колебаний вакуума.

Замечание. Рассмотренная ситуация даёт одномерную модель взаимодействия двух близко расположенных параллельных проводящих пластин, устанавливающих соответствующие граничные условия для электромагнитного поля.

Указание. Для решения задачи необходимо пройти следующие этапы:

а) На отрезке $[a,\ a+l]$ проквантовать скалярное поле с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \mathrm{d}\,x\,(\dot{\phi}^2 - (\phi')^2)$$

и граничными условиями $\phi(0) = \phi(l)$.

б) Выразить гамильтониан через бозонные операторы рождения и уничтожения и вычислить энергию вакуума $\mathcal{E}_0$.

в) Регуляризовать энергию вакуума двумя методами:

(i)

$$\mathcal{E}_{0\ (reg)} = \sum_n \frac{\omega_n}{2}\, e^{-\varepsilon\,\omega_n/2}\,, \qquad \varepsilon \to +0\,.$$

(ii) При помощи дзета-функции Римана

$$\zeta\,(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,,$$

формально полагая

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta\,(-1) = -\frac{1}{12}\,.$$

Сравнить оба метода.

г) Вычислить регуляризованную энергию системы $\mathcal{E}_{0\ (reg)}$, определённой на рис. 1, и вычислить силу

$$f = -\frac{\partial\,\mathcal{E}_{0\ (reg)}}{\partial\,l}\,.$$

Лекция 5
ОБЩАЯ СХЕМА ПЕРЕНОРМИРОВОК

1. Спектральное представление Челлена-Лемана двухточечной функции

Согласно (27 Л3) фурье-образ вакуумного среднего $\langle 0 \,|\, T\,\phi(x)\phi(0) \,|\, 0 \rangle$ для свободного квантованного поля ϕ имеет вид

$$\int \mathrm{d}\,x\, e^{ikx} \langle 0 \,|\, T\,\phi(x)\phi(0) \,|\, 0 \rangle = \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} = -i\, D_c(k)\,. \tag{1}$$

Теперь попробуем вычислить это же среднее во взаимодействующей теории. Мы будем опираться только на общие принципы теории относительности и квантовой механики; при этом вид взаимодействия, специфика ряда ТВ и другие детали не существенны. Предполагается лишь, что в теории имеются частицы с определённой массой (и, возможно, другими квантовыми числами), динамика которых лоренц-инвариантна и описывается согласно законам квантовой механики. Поэтому результаты, полученные в этой лекции, справедливы для очень широкого класса квантовых теорий поля. Предполагается также, что ультрафиолетовые расходимости устранены путем введения комплексной размерности пространства-времени. Заметим, что эта регуляризация сохраняет как трансляционную, так и Лоренцеву инвариантности.

Обозначим через $\mathcal{P}^\mu$ оператор d-импульса теории, так что $\mathcal{P}^0 = \mathcal{H}$ — гамильтониан теории, а $\mathcal{P}^i$, $i = 1, \ldots, (d-1)$ — компоненты импульса (см. Приложение С). В свободной скалярной теории оператор $\mathcal{P}^\mu$ представляется согласно (32 Л2) и (42 Л2). Согласно самому определению d-импульса для любого локального поля $\phi(x)$ имеем:

$$\phi(x) = e^{i\,\mathcal{P}x}\,\phi(0)\,e^{-i\,\mathcal{P}x}\,. \tag{2}$$

По определению основного состояния

$$\mathcal{P}^\mu \,|\, 0 \rangle = 0\,. \tag{3}$$

Согласно алгебре Пуанкаре (см. Ю. Швингер, "Частицы, источники, поля", Т.1) все компоненты d-импульса взаимно коммутируют. Поэтому можно считать, что каждое состояние имеет определённое значение d-импульса. Обозначим через $|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ какое либо из таких состояний, так что

$$\mathcal{H}\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle = E_{\mathbf{k}}(\lambda)\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle\,, \qquad \boldsymbol{\mathcal{P}}\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle = \mathbf{k}\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle\,. \tag{4}$$

Вследствие Лоренц-инвариантности

$$E_{\mathbf{k}}(\lambda) = \sqrt{m_\lambda^2 + \mathbf{k}^2} > 0\,, \tag{5}$$

где m_λ — энергия состояния в той системе отсчёта, в которой суммарный пространственный импульс равен нулю. Неравенство в (5) означает, что энергия вакуума является наименьшей энергией в теории, которая согласно (3) равна нулю. Мы часто будем выделять из совокупности состояний $\{|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle\}$ одночастичные состояния $\{|\,\mathbf{k}\rangle\}$. Тогда $|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ обозначает многочастичное состояние. Состояние $|\,\mathbf{k}\rangle$ имеет импульс $\mathbf{k}$ и энергию $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$. Подчеркнём, что в случае одночастичного состояния импульс $\mathbf{k}$ полностью определяет энергию состояния, в то время как энергия неодночастичного состояния $|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ не определяется параметром $\mathbf{k}$. Предположим, что все возбуждённые состояния принадлежат линейной оболочке одно-, двух- и т.д. частичных состояний, то есть состояния с определённым числом частиц образуют базис пространства состояний. Если в теории имеется всего один сорт частиц с массой m, то для n-частичного состояния

$$m_\lambda^2 \geq (n\,m)^2\,, \tag{6}$$

причём m_λ^2 — непрерывный параметр. Мы предполагаем также, что состояния $|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle$ нормированы лоренц-инвариантным образом (см. (43 Л2), (45 Л2)), так что разложение единичного оператора имеет вид

$$\mathbf{1} = |\,0\,\rangle\langle\,0\,| + \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{2\,E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\rangle\langle\,\lambda_{\mathbf{k}}\,|\,, \tag{7}$$

где суммирование идёт по всем многочастичным состояниям с нулевым суммарным импульсом $|\,\lambda_{\mathbf{0}}\,\rangle$. Справедливость формулы (7) очевидна, если заметить, что в одночастичном секторе, согласно (38 Л2), (39 Л2)

$$\mathbf{1} = \int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{2\,\omega_{\mathbf{k}}}\,|\,\mathbf{k}\,\rangle\,\langle\,\mathbf{k}\,|\,. \tag{8}$$

Будем считать, что $x^0 > y^0$ и вставим разложение единицы (7) между полями в среднее $\langle\,0\,|\,\phi(x)\phi(y)\,|\,0\,\rangle$. Пренебрежём постоянной величиной $\langle\,0\,|\,\phi(x)|\,0\,\rangle\,\langle\,0\,|\,\phi(y)\,|\,0\,\rangle$, которая в большинстве случаев равна нулю. Таким образом получаем:

$$\langle\,0\,|\,\phi(x)\phi(y)\,|\,0\,\rangle = \sum_{\lambda}\int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{2\,E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\langle\,0\,|\,\phi(x)\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\,\rangle\,\langle\,\lambda_{\mathbf{k}}\,|\,\phi(y)\,|\,0\,\rangle\,, \tag{9}$$

Преобразуем матричные элементы в (9) при помощи формул (2)-(4):

$$\langle\,0\,|\,\phi(x)|\,\lambda_{\mathbf{k}}\,\rangle = \langle\,0\,|\,e^{i\mathcal{P}x}\phi(0)e^{-i\mathcal{P}x}\,|\,\lambda_{\mathbf{k}}\,\rangle = \langle\,0\,|\,\phi(0)|\,\lambda_{\mathbf{k}}\,\rangle\,e^{-ikx}\,\Big|_{k^0=E_{\mathbf{k}}(\lambda)} =$$

$$= \langle\,0\,|\,\phi(0)|\,\lambda_{\mathbf{0}}\,\rangle\,e^{-ikx}\,\Big|_{k^0=E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\,. \tag{10}$$

Последнее равенство является следствием следующих соотношений:

$$|\,\lambda_{\mathbf{k}}\,\rangle = U\,|\,\lambda_{\mathbf{0}}\,\rangle\,, \qquad U^{-1}\,\phi(0)\,U = \phi(0)\,, \qquad \langle\,0\,|\,U^{-1} = \langle\,0\,|\,,$$

где унитарный оператор U генерирует соответствующее преобразование Лоренца. Такие операторы называются бустами. Подставим (10) в (9):

$$\langle\,0\,|\,\phi(x)\phi(y)\,|\,0\,\rangle = \sum_{\lambda}\int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\pi)^{d-1}}\,\frac{1}{2\,E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\,e^{-ik(x-y)}\,|\langle\,0\,|\,\phi(0)\,|\,\lambda_0\,\rangle|^2\,\Big|_{k^0=E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\,.$$

Так как $x_0 > y_0$, то можно воспользоваться формулой (23 Л1). Таким образом получаем:

$$\langle\,0\,|\,\phi(x)\phi(y)\,|\,0\,\rangle = \sum_{\lambda}\int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^{d}}\,\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m_\lambda^2 + i\varepsilon}|\langle\,0\,|\,\phi(0)\,|\,\lambda_0\,\rangle|^2\,.$$

В случае $x^0 < y^0$ имеет место аналогичная формула. Обе формулы объединяются в следующем выражении:

$$\langle\,0\,|\,T\,\phi(x)\phi(y)\,|\,0\,\rangle = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,M^2}{2\pi}\,\rho(M^2)[-iD_c(x-y;\,M^2)]\,,$$

$$D_c(x;\,M^2) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^{d}}\,\frac{e^{-ikx}}{-k^2 + M^2 - i\varepsilon}\,, \tag{11}$$

где $\rho(M^2)$ — положительная *спектральная плотность*

$$\rho(M^2) = \sum_{\lambda}(2\pi)\,\delta(M^2 - m_\lambda^2)\,|\langle\,0\,|\,\phi(0)\,|\,\lambda_0\,\rangle|^2\,. \tag{12}$$

График спектральной плотности $\rho(M^2)$ для типичной теории поля показан на рис. 8.

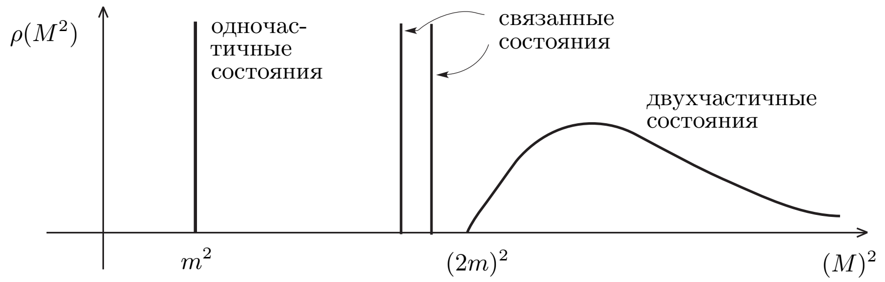


Рис. 8.

Одночастичные состояния вносят в спектральную плотность вклад в виде изолированных δ-функций:

$$\rho(M^2) = 2\,\pi\,Z\,\delta\,(M^2 - m^2) + (\text{ничего другого вплоть до } M^2 \gtrsim (2\,m)^2)\,, \tag{13}$$

где

$$Z = |\langle\, 0\,|\phi\,(0)\,|\,\mathbf{k} = 0\,\rangle|^2\,. \tag{14}$$

Константа Z называется *константой перенормировки поля* ϕ. Величина m есть физически наблюдаемая масса элементарных возбуждений поля ϕ, а m_0 в (53 Л2) является затравочной или "голой"массой, причём $m \neq m_0$. Непосредственно наблюдаемой является физическая масса m, а не затравочная масса.

С помощью (11) и (13) находим во взаимодействующей теории фурье-образ хронологического парного среднего, являющегося аналогом величины (1) в свободной теории:

$$\int \mathrm{d}\,x\; e^{ikx}\,\langle\, 0\,|\,T\,\phi(x)\phi(0)\,|\,0\,\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,M^2}{2\pi}\,\rho\,(M^2)\,\frac{i}{k^2 - M^2 + i\,\varepsilon} =$$

$$= \frac{i\,Z}{k^2 - m^2 + i\,\varepsilon} + \int\limits_{\sim 4m^2}^\infty \frac{\mathrm{d}\,M^2}{2\pi}\,\rho\,(M^2)\,\frac{i}{k^2 - M^2 + i\,\varepsilon}\,. \tag{15}$$

Аналитическая структура этой функции в комплексной k^2-плоскости показана на рис. 9.

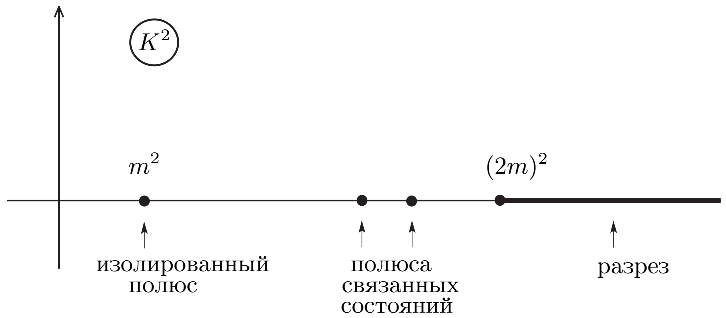


Рис. 9.

Первое слагаемое в (15) соответствует изолированному полюсу при $k^2 = m^2$, а второе — разрезу, начинающемуся в точке $4\,m^2$. Если существуют двухчастичные связанные состояния, то в (15) возникают дополнительные полюса.

Сравнивая (1) и (15) мы видим, что взаимодействующее поле, в отличие от свободного, рождает из вакуума не только одночастичное, но и многочастичные состояния. Кроме того, в первом полюсном слагаемом содержится константа перенормировки поля (14), то есть вероятность того, что $\phi\,(0)$ родит данное одночастичное состояние из вакуума.

Проводя вычисления, аналогичные приведенным выше, легко получаем также:

$$\langle\, 0\,|\,[\phi(x),\,\phi(y)]\,|\,0\,\rangle = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,M^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\;\frac{e^{-i\,k\,(x-y)} - e^{i\,k\,(x-y)}}{2\,k^0}\Bigg|_{k^0=\sqrt{M^2+\mathbf{k}^2}} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,M^2}{2\pi}\,\rho(M^2)\,\left[\frac{1}{i}\,D\,(x-y;\,M)\right]\,. \tag{16}$$

Здесь $x^0 \neq y^0$ и введена перестановочная функция Паули–Йордана

$$D\,(x;M) \equiv i\int \frac{\mathrm{d}^{(d-1)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\;\frac{e^{-i\,k\,x} - e^{i\,k\,x}}{2\,k^0}\Bigg|_{k^0=\sqrt{M^2+\mathbf{k}^2}} = i\int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^{d-1}}\,\theta\,(k^0)\,\delta\,(k^2 - M^2)\,\left(e^{-i\,k\,x} - e^{i\,k\,x}\right)\,,$$

которая Лоренц-инвариантна, равна нулю вне светового конуса[1] и удовлетворяет однородному уравнению Клейна–Гордона

$$(\partial_\mu \partial^\mu + M^2)\, D\,(x;\, M) = 0\,,$$

а также соотношению

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\, D\,(x;\, M)\big|_{x^0=0} = \delta^{(3)}(\mathbf{x})\,.$$

Поэтому из (16) находим, что

$$\langle\, 0\,|\,[\phi(x),\, \dot\phi(y)]\,|\,0\,\rangle\big|_{x^0=y^0} = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, M^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, [i\, \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]\,.$$

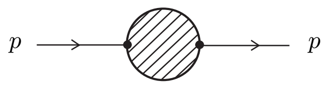
С другой стороны, левая часть этого равенства по определению равна $[i\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})]$, и потому

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}\, M^2}{2\pi}\, \rho(M^2) = 1 \longrightarrow 0 < Z < 1\,. \tag{17}$$

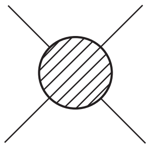
Последние неравенства получаются при учёте представления (13).

2. Перенормировки

Теперь опишем индуктивную процедуру, при помощи которой из расходящихся диаграмм выделяются различные физические величины, остающиеся конечными в пределе $\Lambda \to \infty$. Будем пользоваться размерностной регуляризацией, которая выделяет лишь логарифмические расходимости. Кроме того, вакуумные пузырьки, как ненаблюдаемые поправки, мы не рассматриваем. Таким образом, расходящимися являются лишь два типа диаграмм:



$\sim [\alpha m_0^2 + \beta\,(p^2 - m^2)]\, \ln\Lambda +$ конечные слагаемые



$\sim (\gamma)\ln\Lambda +$ конечные слагаемые

Здесь $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — безразмерные ряды по λ. Мы не предполагаем, что импульсы внешних концов диаграмм лежат на массовой поверхности. Очевидно, степень расходимости диаграмм не зависит от значений внешних импульсов.

Рассмотрим сначала n-точечную корреляционную функцию

$$G\,(x_1,\, \dots\,,\, x_n) = \langle\, 0\,|\, T\,\phi\,(x_1)\, \dots\, \phi\,(x_n)\,|\,0\,\rangle\,. \tag{19}$$

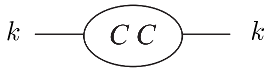
Любая диаграмма, дающая вклад в коррелятор (19), содержит расходящиеся поддиаграммы указанных двух типов. Для устранения расходимостей действуют последовательно. этот процесс начинается с однопетлевых диаграмм. Так, согласно (8 Л4) в $\Sigma^{(1)}$ имеется расходящаяся часть. Она устраняется путём введения в затравочную массу соответствующей добавки:

$$m_0^2 = m^2 + \delta_m\,, \qquad \delta_m + \Sigma^{(1)} = 0\,. \tag{20}$$

Здесь m_0^2 — квадрат затравочной массы в однопетлевом приближении. Легче всего это установить следующим образом.

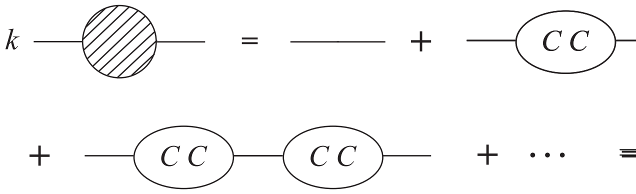
[1]Действительно, если $x_\mu x^\mu < 0$, то существует система отсчета, в которой $x^\mu = (0,\, x^i)$. В этой системе отсчета обращение в нуль функции Паули–Йордана очевидно. Этот результат имеет большое значение, так как отсюда вытекает причинность релятивистской квантовой теории поля (см. конец Лекции 3).

Назовём диаграмму *сильно связной*, если её нельзя разделить на две отдельные диаграммы путём разрезания всего лишь одной внутренней линии. Обозначим через



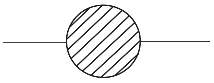
$$= -i \sum(k^2) \tag{21}$$

сумму всех сильно связных вставок в двухточечную корреляционную функцию (13) или сумму всех сильно связных диаграмм с двумя внешними линиями и ампутированными ногами. Тогда полная функция (13) определяется геометрической прогрессией



$$= \frac{i}{k^2 - m_0^2 - \Sigma\,(k^2)}\,. \tag{22}$$

В первом порядке по λ величина Σ задаётся согласно (6 Л4). Поэтому с учётом (20) в этом приближении



$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\,\varepsilon}\,, \tag{23}$$

и полюс корреляционной функции (13) находится при $k^2 = m^2$, то есть там, где и должен быть.

Устранение логарифмической расходимости в однопетлевом приближении из четырёхточечного коррелятора было проведено в предыдущей лекции (см. (24 Л4)).

Предположим, что во всех s-петлевых диаграммах при описанном способе действий устранены ультрафиолетовые расходимости. Покажем, что действуя так же, можно устранить расходимости в $(s{+}1)$-петлевых диаграммах. Действительно, по предположению в любой $(s{+}1)$-петлевой диаграмме все s-петлевые поддиаграммы уже конечны. Поэтому $(s{+}1)$-петлевые диаграммы с двумя и четырьмя внешними линиями расходятся лишь в той области интегрирования, где все $(s+1)$ промежуточных импульсов стремятся к бесконечности. Эти новые расходимости можно устранить и сделать диаграммы конечными путём соответствующего подбора величин $\delta_m^{(s+1)}(\lambda)$, $\lambda_0^{(s+1)}(\lambda)$ и константы перенормировки поля $Z^{(s+1)}(\lambda)$, являющихся полиномами относительно физической константы связи λ. Очевидно, что $\delta_m^{(s+1)}(\lambda)$ $(\lambda_0^{(s+1)}(\lambda),\ Z^{(s+1)}(\lambda))$ отличается от $\delta_m^{(s)}(\lambda)$ $(\lambda_0^{(s)}(\lambda),\ Z^{(s)}(\lambda))$ лишь более высокими степенями константы λ, чем степень полинома $\delta_m^{(s)}(\lambda)$ $(\lambda_0^{(s)}(\lambda),\ Z^{(s)}(\lambda))$. Действительно, диаграммы с четырьмя внешними концами расходятся лишь логарифмически и притом $(s+1)$-петлевые расходимости набегают в области, где все импульсы интегрирования стремятся к бесконечности. Поэтому расходящиеся части таких диаграмм являются числами, не зависящими от внешних импульсов и их можно поглотить за счёт подбора $\lambda_0^{(s+1)}(\lambda)$. Аналогично (см. первую диаграмму в (18)), для устранения $(s+1)$-петлевых расходимостей диаграмм с двумя внешними концами достаточно подобрать соответствующим образом константы $m_0^2(\lambda)$ и $Z(\lambda)$ в нужном порядке по физической константе связи, причём второе слагаемое в первой диаграмме в (18) вносит вклад в константу перенормировки поля. Оказывается, что n-точечный коррелятор полей (19) равен $Z^{n/2} \times$ (конечная часть) (см. ниже). Таким образом устраняются расходимости во всех $(s+1)$-петлевых диаграммах.

Замечание. Если бы оказалось, что в теории ϕ^4 имеются расходящиеся диаграммы, например, с шестью внешними линиями, то такие расходимости было бы невозможно устранить путём переопределения массы и константы связи. Для устранения таких расходимостей потребовалось бы введение в теорию членов нового типа, пропорциональных ϕ^6. Это означало бы, что теория неперенормируема.

Можно показать, что имеет место соотношение

$$\prod_{i=1}^{n} \int \mathrm{d}^4\, x_i\, e^{i\, p_i\, x_i} \prod_{j=1}^{m} \int \mathrm{d}^4\, y_j\, e^{-i\, k_j\, y_j} \langle\, 0\, |T\phi\,(x_1)\ldots\phi\,(x_n)\,\phi\,(y_1)\ldots\phi\,(y_m)\,|0\,\rangle \sim$$

$$\sim \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{i\sqrt{Z}}{p_i^2 - m^2 + i\,\varepsilon}\right) \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{i\sqrt{Z}}{k_j^2 - m^2 + i\,\varepsilon}\right) \langle\, \mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_n \,|\, S \,|\mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_m \,\rangle \tag{24}$$

Здесь в обоих частях равенства $k_j^0,\ p_i^0 \to \omega_k,\ \omega_p\ (\omega_k = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2})$, Z — константа перенормировки поля. Знак $\sim$ в (24) означает, что обе части равенства ведут себя одинаково вблизи полюсов. Формула (24) называется *редукционной формулой Лемана–Симанчика–Циммермана.*

Описанную процедуру перенормировки можно технически упростить и работать непосредственно с перенормированными физическими величинами. Начнём рассуждение с записи затравочного лагранжиана:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\,m_0^2\,\phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\,\phi^4\,. \tag{25}$$

Устраним множитель Z в значении вычета в полюсе хронологического парного среднего поля ϕ (см. (17)). Для этого введём перенормированное поле ϕ_r согласно равенству

$$\phi = \sqrt{Z}\,\phi_r\,. \tag{26}$$

Корреляторы, построенные из полей ϕ_r, содержат столько дополнительных (по сравнению с аналогичными корреляторами полей ϕ) множителей $Z^{-1/2}$, сколько полей стоит под знаком коррелятора. Теперь лагранжиан (25) принимает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,Z\,(\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}\,m_0^2\,Z\,\phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!}\,Z^2\,\phi_r^4\,. \tag{27}$$

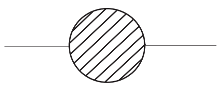
Определим константы

$$\delta_Z = Z - 1\,, \qquad \delta_m = m_0^2\,Z - m^2\,, \qquad \delta_\lambda = \lambda_0\,Z^2 - \lambda\,, \tag{28}$$

где m и λ — физические константы. При помощи введенных констант лагранжиан переписывается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}\,m^2\,\phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!}\,\phi_r^4\right] + \left[\frac{1}{2}\,\delta_Z\,(\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}\,\delta_m\,\phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!}\,\phi_r^4\right]. \tag{29}$$

Первая квадратная скобка в правой части (29) теперь выглядит как стандартный лагранжиан в теории ϕ^4, но записанный через перенормированные величины и поля. Слагаемые во второй квадратной скобке называются ***контрчленами***, они поглощают расходимости в ТВ. Всё что было сделано — это проведено разбиение затравочного действия (25) так, чтобы было удобно проводить дальнейшие вычисления. Мы имеем следующие условия перенормировки



r

$$\equiv \int \mathrm{d}\,x\; e^{ikx} \langle 0|T\,\phi_r(x)\,\phi_r(0)|0\rangle = \frac{i}{k^2 - m^2 - \Sigma(k^2)} =$$

$$= \frac{i}{k^2 - m^2 + i\,\varepsilon} + (\text{слагаемые, регулярные при } \ k^2 = m^2)\,.$$

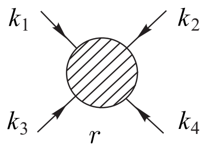
Последнее равенство означает, что

$$\Sigma\,(k^2)\big|_{k^2=m^2} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k^2}\,\Sigma\,(k^2)\bigg|_{k^2=m^2} = 0\,. \tag{30$\,a$}$$

Индекс r на диаграммах указывает на то, что эти величины — перенормированные. Однако этот факт далее как правило не отмечается, что не ведёт к недоразумениям. Условия $(30\,a)$ означают, что на каждом следующем шаге индуктивной вычислительной процедуры следует сделать замену (провести вычитание)

$$\Sigma\,(k^2) \longrightarrow \Sigma\,(k^2) - \Sigma\,(m^2) - (k^2 - m^2)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k^2}\Sigma\,(k^2)\big|_{k^2=m^2}\right).$$

Имеет место также условие, фиксирующее константу связи:



$$\Big|_{\text{ампутированная}} = -i\,\lambda\big|_{\text{при } s=4\,m^2,\ t=u=0}\,. \tag{30 b}$$

Описываемая процедура перенормировки называется *перенормировкой на ходу*.

Продемонстрируем эту процедуру перенормировки при вычислении $i\,M^{(2)}$. Согласно (20 Л4), (31 Л4) и (34 Л4) без учёта контрчленов в (29)

$$i\,\tilde{M}^{(2)}(s,\,t,\,u) = \mathrm{const} - i\,\frac{\lambda^2}{32\,\pi^2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,x\,\left\{\ln\frac{m^2 - x(1-x)\,s - i\,\varepsilon}{\mu^2} + \ln\frac{m^2 - x(1-x)\,t - i\,\varepsilon}{\mu^2} + \right.$$

$$\left. + \ln\frac{m^2 - x(1-x)\,u - i\,\varepsilon}{\mu^2}\right\}. \tag{31}$$

Здесь const — расходящаяся константа, не зависящая от переменных Мандельстама. Для выполнения условия нормировки (30 b) следует провести одно вычитание:

$$i\,M^{(2)}(s,\,t,\,u) = i\,[\tilde{M}^{(2)}(s,\,t,\,u) - \tilde{M}^{(2)}(4\,m^2,\,0,\,0)] =$$

$$= -i\,\frac{\lambda^2}{32\,\pi^2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,x\,\left\{\ln\frac{m^2 - x(1-x)\,s - i\,\varepsilon}{m^2\,[1 - 4\,x\,(1-x) - i\,\varepsilon]} + \ln\frac{m^2 - x(1-x)\,t - i\,\varepsilon}{m^2} + \ln\frac{m^2 - x(1-x)\,u - i\,\varepsilon}{m^2}\right\}. \tag{32}$$

3. Условие унитарности

Согласно (2 Л3), S-матрица представляется как $S = 1 + i\,T$. Из условия унитарности $S^\dagger S = 1$ следуют важные соотношения для амплитуд. Имеем:

$$(T - T^\dagger) = i\,T^\dagger T\,. \tag{33}$$

Пусть бра-вектор $\langle\, f\,|$ — конечное, а кет-вектор $|\,i\,\rangle$ — начальное состояние. Поместим равенство (33) в обкладки $\langle\, f\,|\ldots|\,i\,\rangle$ и между операторами $T^\dagger$ и T в правой части (33) вставим единичный оператор в форме (7). Кроме того, перейдём к амплитуде $M_{f\,i}$ согласно (4 Л3). Таким образом получим:

$$M_{f\,i} - M^*_{i\,f} = (2\,\pi)^4\,i\sum_\lambda\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3\,2\,E_{\mathbf{k}}(\lambda)}\delta^{(4)}(P_f - k)\,M^*_{\lambda_{\mathbf{k}}\,f}\,M_{\lambda_{\mathbf{k}}\,i}\,. \tag{34}$$

Множитель $\delta^{(4)}(P_f - P_i)$ в обеих частях равенства (34) сокращается.

Равенство (34) полезно переписать также в виде

$$M_{f\,i} - M^*_{i\,f} = (2\,\pi)^4\,i\sum_n\sum_s\frac{1}{D}\prod_{\alpha=1}^n\left(\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k_\alpha}{(2\,\pi)^3\,2\,\omega^{(\alpha)}_{k_\alpha}}\right)\delta^{(4)}\left(P_f - \sum_{\alpha=1}^n k_\alpha\right)M^*_{\lambda_{\mathbf{k}}\,f}\,M_{\lambda_{\mathbf{k}}\,i}\,, \tag{34'}$$

где n — число частиц в состоянии $|\,\lambda_{\mathbf{k}}\,\rangle$, k_α — 4-импульс, $\omega^{(\alpha)}_{k_\alpha} = k^0_\alpha$ — частота частицы с номером α, $\sum_s$ — сумма по спинам промежуточных частиц и D — множитель, учитывающий тождественность частиц. Например, если промежуточное состояние содержит всего две тождественные частицы, то $D = 2$.

Рассмотрим важный частный случай, когда промежуточное состояние является одночастичным с массой M. Тогда суммирование $\sum_\lambda$ в (34) ограничивается суммой по спинам промежуточной частицы $\sum_s$, $E_{\mathbf{k}}(\lambda) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + M^2}$ и

$$\frac{\mathrm{d}^3\,k}{2\,E_{\mathbf{k}}(\lambda)} = \theta\,(k^0)\,\delta\,(k_\mu k^\mu - M^2)\,\mathrm{d}^4\,k\,. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34) и интегрируя по $\mathrm{d}^4 k$, находим:

$$M_{fi} - M^*_{if} = 2\pi i\, \delta(p^2 - M^2) \sum_s M^*_{(ps)f}\, M_{(ps)i}\,, \tag{36}$$

где $|\, ps\, \rangle$ — состояние частицы с массой M, спином s и импульсом $p = P_i = P_f$.

Предположим, что теория T- и P-инвариантна. Тогда $M_{if} = M_{f'i'}$, где штрихованные состояния могут отличаться от соответствующих нештрихованных не более чем ориентацией спина. Если начальное и конечное состояния усреднены по спину, то $M_{if} = M_{fi}$, и равенство (36) означает:

$$\mathrm{Im}\, M_{fi} = \pi\, \delta(p^2 - M^2) \sum_s M^*_{(ps)f}\, M_{(ps)i}\,. \tag{37}$$

Отсюда следует, что при $p^2 \to M^2$

$$iM_{fi} \to \sum_s \left(iM^*_{(ps)f}\right) \frac{-i}{-p^2 + M^2 - i\varepsilon} \left(iM_{(ps)i}\right)\,. \tag{38}$$

В этом случае говорят, что при переходе из состояния $|\, i\, \rangle$ в состояние $|\, f\, \rangle$ процесс идёт через промежуточную виртуальную частицу с массой M.

Задачи

1. Вычислить в безмассовой теории ϕ^4 при $d \to 4$ оператор собственной энергии $-i\,\Sigma(k^2)$ (21) в двухпетлевом приближении.

Указание. В безмассовом случае $(m^2 = 0)$ вместо условий нормировки (30) при $k^2 = 0$, которые оказываются бессмысленными, используют следующие нормировочные условия:

$$\Sigma\,(k^2)\,\Big|_{k^2=0} = 0 \quad (\text{отсутствие массы})\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k^2}\,\Sigma\,(k^2)\,\Big|_{k^2=-M^2} = 0\,.$$

Применить параметризацию Фейнмана.

2. Вычислить при помощи условия унитарности мнимую часть амплитуды рассеяния $2 \to 2$ при $s > 4\,m^2$ в однопетлевом приближении.

Лекция 6
РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА

1. Вильсоновский подход к теории перенормировок

Вильсоновский метод основан на описании теории поля с помощью функционального интеграла, в котором степени свободы квантового поля являются переменными интегрирования. При этом подходе происходит разделение переменных интегрирования на длинноволновые и коротковолновые. Предполагается, что длинноволновые флуктуации описывают реальные физические процессы, а учёт коротковолновых флуктуаций (то есть интегрирование по коротковолновым степеням свободы) даёт эффективное действие для описания длинноволновой физики.

Такая идеология возникла из понятия перенормируемости в квантовой теории поля. Мы видели, что суть перенормируемой квантовой теории в том, что в ней на процессы с энергией $\sim M$ степени свободы с энергией $\sim \Lambda \gg M$ влияют лишь косвенно: через перенормировку констант теории. В канонической квантовой теории поля импульс обрезания Λ является конечным лишь в промежуточных вычислениях и в конце вычислений он устремляется к бесконечности. Вильсоновский анализ основан на противоположной точке зрения, согласно которой любая квантовая теория на фундаментальном уровне определена с обрезанием Λ, которое имеет некоторое физическое значение. В приложениях к статистической механике этот масштаб импульсов равен обратному межатомному расстоянию. В КЭД и других фундаментальных квантовых теориях поля обрезание может быть связано с фундаментальной зернистостью пространства-времени, природа которой, по-видимому, может быть изучена лишь вместе с построением квантовой теории гравитации. Во всяком случае этот элементарный масштаб очень далёк от масштабов, экспериментально достижимых в настоящее время.

Продемонстрируем вильсоновский подход на примере теории ϕ^4 в евклидовом d-мерном пространстве, поскольку в пространстве Минковского ограниченное значение квадрата d-импульса не означает ограниченности его компонент, если d-импульс изотропен, что внесло бы дополнительные усложнения.

Разложим вещественное скалярное поле в интеграл Фурье:

$$\phi\,(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\phi\,(k)\,e^{i\,k\,x}\,. \tag{1}$$

Равенство

$$\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\;\phi_1(x)\,\phi_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\phi_1^*\,(k)\,\phi_2\,(k) \tag{2}$$

показывает, что преобразование Фурье является унитарным в пространстве полей с метрикой (2). Поэтому функциональные меры $\prod_x \mathrm{d}\;\phi\,(x)$ и $\prod_k \mathrm{d}\;\phi\,(k)$ можно считать равными. Это даёт возможность определения регуляризованной функциональной меры:

$$[D\,\phi]_\Lambda = \prod_{|k|<\Lambda} \mathrm{d}\,\phi\,(k)\,. \tag{3}$$

Регуляризованная статистическая сумма скалярного поля (сравни с (34 Л1)) представляется интегралом

$$Z = \int [D\,\phi]_\Lambda\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\,\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\,\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4\right]\right\}\,. \tag{4}$$

Здесь мы положили внешний источник равным нулю. В (4) m и λ являются голыми параметрами или параметрами на масштабе Λ.

Разделим в (4) переменные интегрирования на две группы. Пусть $0 < b < 1$ и

$$\hat{\phi}\,(k) = \begin{cases} \phi\,(k), & \text{для} \;\; b\,\Lambda \le |k| < \Lambda \\ 0, & \text{для} \;\; |k| < b\,\Lambda, \end{cases}$$

$$\phi\,(k)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & \text{для} \;\; b\,\Lambda\le|k|<\Lambda \\ \phi\,(k), & \text{для} \;\; |k|<b\,\Lambda\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Тогда в (4) следует заменить $\phi\,(k)$ на $(\phi\,(k)+\hat\phi\,(k))$:

$$Z=\int[D\,\phi]_{b\,\Lambda}\int D\,\hat\phi\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi+\partial_\mu\hat\phi)^2+\frac{m^2}{2}(\phi+\hat\phi)^2+\frac{\lambda}{4!}(\phi+\hat\phi)^4\right]\right\}=$$

$$=\int[D\,\phi]_{b\,\Lambda}\,e^{-\int\mathcal{L}(\phi)}\int D\,\hat\phi\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\hat\phi)^2+\frac{m^2}{2}(\hat\phi)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda\left(\frac{1}{6}\phi^3\hat\phi+\frac{1}{4}\phi^2\hat\phi^2+\frac{1}{6}\phi\,\hat\phi^3+\frac{1}{4!}\hat\phi^4\right)\right]\right\}\,. \tag{6}$$

В (6) лагранжиан $\mathcal{L}(\phi)$ зависит лишь от поля ϕ и он имеет тот же вид, что и в (4). Квадратичные слагаемые вида $\phi\,\hat\phi$ исчезают в (6) вследствие равенства (2) и определения полей ϕ и $\hat\phi$ согласно (5).

Проинтегрируем (6) по полю $\hat\phi$:

$$Z=\int[D\,\phi]_{b\,\Lambda}\,\exp\left\{-\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\mathcal{L}_{eff}(\phi)\right\}\,. \tag{7}$$

Здесь $\mathcal{L}_{eff}(\phi)$ содержит только те фурье-компоненты $\phi\,(k)$, для которых $|k|<b\,\Lambda$. Если вычислять интеграл по $\hat\phi$ при помощи ТВ, разлагая по константе λ, то окажется, что $\mathcal{L}_{eff}(\phi)$ отличается от $\mathcal{L}\,(\phi)$ на поправки, пропорциональные степеням λ и ϕ и их производным. Эти поправочные члены компенсируют отсутствующие фурье-компоненты $\hat\phi$.

Поправки в $\mathcal{L}_{eff}$ могут быть представлены в диаграммной форме. Все слагаемые в (6), пропорциональные степеням λ, рассматриваются как возмущение. Поскольку предполагается, что $m^2\ll\Lambda^2$, то слагаемое $(1/2)m^2\,\hat\phi^2$ также считается возмущением. Тогда слагаемое старшего порядка в последней экспоненте в (6) имеет вид

$$\int\hat{\mathcal{L}}_0=\frac{1}{2}\int\limits_{b\,\Lambda<|k|<\Lambda}\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,\hat\phi^*(k)\,k^2\,\hat\phi(k)\,. \tag{8}$$

Это слагаемое приводит к пропагатору

$$\langle\,\hat\phi\,(k)\,\hat\phi\,(p)\,\rangle=\frac{\int D\hat\phi\,e^{-\int\hat{\mathcal{L}}_0}\,\hat\phi\,(k)\,\hat\phi\,(p)}{\int D\hat\phi\,e^{-\int\hat{\mathcal{L}}_0}}=\frac{1}{k^2}\,(2\,\pi)^d\,\delta^{(d)}(k+p)\,\theta\,(k)\,,$$

$$\theta\,(k)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{если} \;\; b\,\Lambda<|k|<\Lambda \\ 0, & \text{если} \;\; |k|<b\,\Lambda\,. \end{array}\right. \tag{9}$$

Оставшиеся в (6) $\hat\phi$-слагаемые рассматриваются как возмущения и их учёт осуществляется путём разложения и использования теоремы Вика (см. конец лекции 1). При этом правильная нормировка достигается, когда интеграл по полю $\hat\phi$ в (6) заменяется на

$$1+\text{поправки}\,. \tag{10}$$

Разложим сначала (6) относительно $\phi^2\,\hat\phi^2$ и учтём, что

$$\langle\,\hat\phi(x)\,\hat\phi(y)\rangle=\int\limits_{b\,\Lambda<|k|<\Lambda}\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,\frac{e^{i\,k\,(x-y)}}{k^2}\,. \tag{11}$$

При помощи (11) легко находим эту поправку:

$$-\frac{\lambda}{4}\int\mathrm{d}^{(d)}\,x\,\phi^2\,\langle\hat\phi^2\rangle=-\frac{1}{2}\,\delta\,m^2\int\mathrm{d}^{(d)}\,x\,\phi^2\,, \tag{12}$$

$$\delta\,m^2=\frac{\lambda}{2}\int\limits_{b\,\Lambda<|k|<\Lambda}\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{k^2}=\frac{\lambda\,\Lambda^{d-2}}{(4\,\pi)^{d/2}\,\Gamma\,(d/2)}\,\frac{1-b^{d-2}}{d-2}\,. \tag{13}$$

Представим пропагатор (9) двойной линией. Поля ϕ представим как одинарные внешние линии.

Тогда вклад (12) изображается следующей диаграммой:

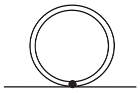


Рис.10

Второй порядок относительно $\phi^2\,\hat{\phi}^2$ даёт вклад, соответствующий двум диаграммам:

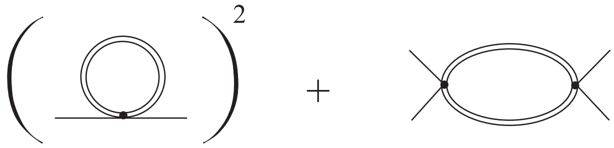


Рис.11

Первое слагаемое на рис. 11 равно $(1/2)\,(\text{величина }(12))^2$, причём множитель $(1/2)$ — комбинаторного происхождения. Если учесть все степени величины (12), возникающие во всех порядках, то окажется, что все эти слагаемые соберутся в экспоненту. Аналогичное утверждение справедливо в отношении любой связной диаграммы. Поэтому имеем следующий результат:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m^2}{2}\,\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\,\phi^4 + (\text{сумма связных диаграмм})\,. \tag{14}$$

Вычислим вторую диаграмму на рис. 11. При помощи теоремы Вика находим:

$$\frac{\lambda^2}{16}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x_1\;\mathrm{d}^{(d)}\,x_2\,\phi^2(x_1)\left[\int\limits_{b\Lambda<|k|<\Lambda}\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\frac{e^{i\,k\,(x_1-x_2)}}{k^2}\right]^2\phi^2(x_2)\,. \tag{15}$$

Введём новые переменные

$$x_1 = x + \frac{y}{2}\,, \qquad x_2 = x - \frac{y}{2}\,, \tag{16}$$

в которых (15) принимает вид

$$\frac{\lambda^2}{16}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\;\mathrm{d}^{(d)}\,y\,\phi^2\left(x+\frac{y}{2}\right)\left[\int\limits_{b\Lambda<|k|<\Lambda}\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\frac{e^{i\,k\,y}}{k^2}\right]^2\phi^2\left(x-\frac{y}{2}\right)\,. \tag{17}$$

Рассмотрим предельный случай, когда импульсы, переносимые полем ϕ, исчезающе малы по сравнению с $(b\,\Lambda)$. Тогда (17) переходит в

$$-\frac{\Delta\lambda}{4!}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\phi^4\,, \tag{18}$$

$$\Delta\lambda = -4!\,\frac{\lambda^2}{16}\int\limits_{b\Lambda<|k|<\Lambda}\frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\frac{1}{(k^2)^2} = -\frac{3\,\lambda^2\,\Lambda^{d-4}(1-b^{d-4})}{(4\,\pi)^{d/2}\,\Gamma\,(d/2)\,(d-4)} \;\xrightarrow[d\to 4]{}\; -\frac{3\,\lambda^2}{16\,\pi^2}\,\ln\frac{1}{b}\,. \tag{19}$$

Описанная диаграммная теория возмущений генерирует не только вклады в $\mathcal{L}_{eff}$, пропорциональные ϕ^2 и ϕ^4, но и вклады высших степеней ϕ, а также вклады от производных поля ϕ. Например, в (17) содержится слагаемое, пропорциональное

$$\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\phi^2\,(\partial_\mu\phi)^2. \tag{20}$$

Вклад, пропорциональный $(\frac{\lambda}{\Lambda})^2 \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \phi^6$, получается из диаграммы 

Вообще говоря, вильсоновская процедура генерирует все возможные взаимодействия поля ϕ и их производных.

При помощи формулы (6) легко увидеть, что поправки с точностью $O(\lambda)$ дают при $d = 4$:

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{(\tilde{m})^2}{2}\,\phi^2 + \frac{\tilde{\lambda}}{4!}\,\phi^4, \qquad \tilde{m}^2 = m^2 + \frac{\lambda\,(1-b^2)\,\Lambda^2}{32\,\pi^2}, \qquad \tilde{\lambda} = \lambda - \frac{3\,\lambda^2}{16\,\pi^2}\,\ln\frac{1}{b}. \tag{21}$$

(Последнее равенство в (21) сравни с (24 Л4).)

Для более детального сравнения нового интеграла (7) с исходным интегралом (4) изменим в (7) масштаб расстояний и импульсов по следующему правилу:

$$x' = b\,x\,, \qquad k' = \frac{k}{b}\,, \qquad |k'| < \Lambda\,. \tag{22}$$

Теперь импульсы в (7) изменяются в тех же пределах, что и в (4). Имеем (сравни с (29 Л5)):

$$\int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \mathcal{L}_{eff} =$$

$$= \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \left[\frac{1}{2}\,(1+\Delta\, Z)(\partial_\mu\,\phi)^2 + \frac{1}{2}\,(m^2+\Delta m^2)\,\phi^2 + \frac{1}{4!}\,(\lambda+\Delta\lambda)\,\phi^4 + \Delta B\,(\partial_\mu\,\phi)^4 + \Delta C\,\phi^6 + \ldots\right] =$$

$$= \int \mathrm{d}^{(d)}\, x'\, b^{-d}\, \left[\frac{1}{2}\,(1+\Delta\, Z)\,b^2(\partial'_\mu\,\phi)^2 + \frac{1}{2}\,(m^2+\Delta m^2)\,\phi^2 + \frac{1}{4!}\,(\lambda+\Delta\lambda)\,\phi^4 + \right.$$

$$\left. + \Delta B\, b^4\,(\partial'_\mu\,\phi)^4 + \Delta C\,\phi^6 + \ldots\right]\,. \tag{23}$$

Чтобы в новом функциональном интеграле пропагатор сохранил прежний вид (9), изменим масштаб поля ϕ по правилу

$$\phi' = \left[b^{2-d}(1+\Delta Z)\right]^{1/2}\,\phi\,, \tag{24}$$

после чего эффективное действие приобретает первоначальную форму

$$\int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \mathcal{L}_{eff} = \int \mathrm{d}^{(d)}\, x'\, \left[\frac{1}{2}\,(\partial'_\mu\,\phi')^2 + \frac{1}{2}\,m'^2\,\phi'^2 + \frac{1}{4!}\,\lambda'\,\phi'^4 + B'\,(\partial'_\mu\,\phi')^4 + C'\,\phi'^6 + \ldots\right] \tag{25}$$

с новыми параметрами

$$\begin{aligned} m'^2 &= (m^2+\Delta m^2)(1+\Delta Z)^{-1} b^{-2}\,, \\ \lambda' &= (\lambda+\Delta\lambda)(1+\Delta Z)^{-2} b^{d-4}\,, \\ B' &= (B+\Delta B)(1+\Delta Z)^{-2} b^{d}\,, \\ C' &= (C+\Delta C)(1+\Delta Z)^{-3} b^{2d-6}\,, \end{aligned} \tag{26}$$

и т.д. Заметим, что в исходном лагранжиане $B = C = 0$, но если бы эти константы отличались от нуля, то мы имели бы формулы (26).

Теперь повторим ещё и ещё раз описанную процедуру интегрирования по коротковолновым флуктуациям с последующими масштабными преобразованиями (22)-(26). Получаемые таким образом преобразования лагранжиана называются преобразованиями под действием *ренормализационной группы* (сокращённо — ренормгруппы). Это не есть группа в математическом смысле, поскольку при усреднении по коротковолновым флуктуациям теряется информация, эта процедура необратима.

Рассмотрим сначала с этой точки зрения простейший пример свободной теории, когда в затравочном лагранжиане $m^2 = \lambda = B = C = \ldots = 0$ и все возмущения исчезают. Тогда на всех этапах описанной рекурсионной процедуры Вильсона эффективный лагранжиан остаётся свободным. Поэтому говорят, что свободный лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi)^2 \tag{27}$$

является фиксированной точкой преобразований ренормгруппы.

Если мы находимся в непосредственной близости фиксированной точки, то можно отбросить в итерационных формулах Δm^2, $\Delta\lambda$, и т.д. Тогда при помощи (26) получаем:

$$m'^2 = m^2 b^{-2}\,, \qquad \lambda' = \lambda\, b^{d-4}\,, \qquad B' = B\, b^d\,, \qquad C' = C\, b^{2d-6}\,, \tag{28}$$

и т.д. Так как $b < 1$, то параметры, которые умножаются на отрицательные степени b, растут, и наоборот. Если лагранжиан содержит растущие коэффициенты, они уводят его от точки $\mathcal{L}_0$.

Отдельные слагаемые в квадратной скобке в (25) называются локальными операторами. Операторы, коэффициенты которых растут (вымирают) при рекурсионной процедуре, называются *существенными* (*несущественными*). Если коэффициент оператора умножается на b^0 (например, оператор ϕ^4 при $d = 4$), мы называем его *маргинальным.* Для выяснения того, растёт ли или уменьшается его коэффициент, требуется вычисление высших поправок.

Из (26) и (28) видно, что массовый оператор ϕ^2 является существенным, а два последних слагаемых в (25) при $d = 4$ являются несущественными операторами. Этим и объясняется, что теория ϕ^4 является перенормируемой при $d = 4$, так как фактически и при вильсоновской процедуре перенормировок эта теория восстанавливает свой исходный вид. Это же утверждение справедливо в отношении любой перенормируемой теории.

Так как в порядке $O(\lambda)$ $\Delta Z = 0$, то при помощи (26) и (21) находим, что с точностью $O(\lambda^2)$ при $d = 4$

$$\lambda' = \lambda - \frac{3\,\lambda^2}{16\,\pi^2}\,\ln\frac{1}{b}\,. \tag{29}$$

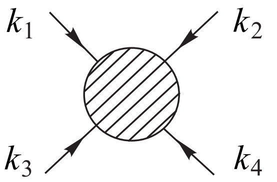
Отсюда видно, что коэффициент при маргинальном операторе ϕ^4 уменьшается, то есть константа связи уменьшается по логарифмическому закону. Соотношение (29) является аналогом соотношения (24 Л4), разница лишь в том, что в (29) и (24 Л4) представлены взаимно обратные функции. Из сказанного следует, что при $d = 4$ теория ϕ^4 в результате вильсоновской процедуры перенормировок стремится к свободной теории. Эта картина справедлива, конечно, лишь до тех пор, пока массовый оператор не становится преобладающим.

2. Уравнение Каллана–Симанчика

На языке Вильсона перенормируемая квантовая теория поля с произвольно большим обрезанием отвечает эффективной теории, испытавшей большое число ренормгрупповых операций Вильсона и которая проэволюционировала до большой величины массового параметра. Такая траектория должна пройти произвольно близко от фиксированной точки. В результате этой эволюции несущественные операторы в первоначальном лагранжиане вымирают и остаются только существенные и маргинальные операторы. Коэффициенты при оставшихся операторах находятся во взаимно однозначном соответствии с наблюдаемыми параметрами, а информация об эволюции несущественных операторов утрачивается полностью в перенормируемой теории поля. Информацию же об эволюции параметров при существенных и маргинальных операторах можно восстановить, изучая их зависимость от нормировочного масштаба.

Для конкретности рассмотрим теорию ϕ^4 в четырёхмерном пространстве Минковского, изученную нами, и ограничимся случаем $m^2 = 0$. Поскольку физический размерностный оператор отсутствует, то для проведения программы перенормировок необходимо ввести размерностный параметр $\mu^2 > 0$. Поскольку условия перенормировки (30 Л5) приводят к сингулярностям при $m^2 \to 0$ (см. (32 Л5)), то наложим эти же условия перенормировки, но при пространственноподобных значениях импульсов $p^2 = -\mu^2$:

$$\Sigma\,(k^2)\big|_{k^2=0} = 0\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k^2}\,\Sigma\,(k^2)\Big|_{k^2=-\mu^2} = 0\,,$$



$$\Bigg|_{\substack{\text{ампутированная}\\ (k_1+k_2)^2 = (k_1+k_3)^2 = (k_1+k_4)^2 = -\mu^2}} = -i\,\lambda \tag{30}$$

Заметим, что в (30) импульсы k_a не предполагаются находящимися на массовой поверхности и потому условия (30) совместны. Таким образом, теория определена на масштабе μ^2.

Обозначим через $\phi_0(x)$ и $\phi(x)$ — затравочное и перенормированное поля, соответственно, и пусть $G_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ — связная корреляционная функция (хронологическое среднее) неперенормированных полей, определяемая согласно (19 Л5), а

$$G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \langle 0|T\,\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)|0\rangle \tag{31}$$

— связный коррелятор перенормированных полей (для удобства мы сменили обозначения, сделав замены $\phi \to \phi_0$, $\phi_r \to \phi$). Так как согласно (26 Л5) $\phi_0 = \sqrt{Z}\,\phi$, то

$$Z^{n/2}\,G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n;\, \mu, \lambda(\mu)) = G_0^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)\,. \tag{32}$$

Обозначение $G^{(n)}(x_1, \ldots, x_n;\, \mu, \lambda(\mu))$ подчёркивает, что этот коррелятор зависит от точки нормировки μ и перенормированной константы связи $\lambda(\mu)$.

Теперь изменим точку нормировки $\mu \to \mu'$, константу связи λ и константу перенормировки Z, но оставим неизменными импульс обрезания Λ, а также затравочные константы. Это означает, что мы продвинулись вдоль траектории ренормгруппы. Ясно, что при этом "голые"(неперенормированные) гриновские функции (32) остаются неизменными, поскольку они зависят лишь от затравочных параметров и импульса обрезания Λ. Поэтому производная по параметру μ от обоих частей равенства (32) равна нулю:

$$\left[\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(\lambda)\,\frac{\partial}{\partial\lambda} + n\,\gamma(\lambda)\right] G^{(n)}(\{x_i\};\, \mu, \lambda) = 0\,. \tag{33}$$

Здесь

$$\beta(\lambda) \equiv \mu\,\frac{\partial\lambda}{\partial\mu}\,, \qquad \gamma(\lambda) \equiv \frac{1}{2Z}\,\mu\,\frac{\partial}{\partial\mu}\,Z\,. \tag{34}$$

Функции $\beta(\lambda)$ и $\gamma(\lambda)$ — одни и те же для всех корреляторов в теории и они не могут зависеть от импульса обрезания, поскольку перенормированные корреляторы не зависят от обрезания. Следовательно, по размерным соображениям, они не могут зависеть и от μ. Поэтому функции (34) могут зависеть лишь от перенормированной константы связи λ.

Уравнение (33) называется уравнением Каллана–Симанчика.

Вычислим функцию β в наинизшем неисчезающем приближении при $d = 4$. Так как $Z = 1 + O(\lambda^2)$, то с точностью $O(\lambda^2)$ перенормированный четырёхточечный коррелятор в импульсном представлении (см. рис. 7 и (20 Л4)) равен

$$G^{(4)}(k_1, \ldots, k_4) = \left[-i\,\lambda - \frac{i\,\lambda^2}{32\,\pi^2}\left(\ln\frac{-s-i\varepsilon}{\mu^2} + \ln\frac{-t-i\varepsilon}{\mu^2} + \ln\frac{-u-i\varepsilon}{\mu^2}\right)\right]\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{k_i^2}\,. \tag{35}$$

Так как $\gamma = O(\lambda^2)$, то в порядке $O(\lambda^2)$ функция γ выпадает из уравнения Каллана–Симанчика. Поэтому, подставляя (35) в (33), получаем:

$$\beta(\lambda) = \frac{3\,\lambda^2}{16\,\pi^2} + O(\lambda^3)\,. \tag{36}$$

3. Эволюция бегущей константы связи

Сопоставим уравнения (34) и (34):

$$\frac{\mathrm{d}\,\lambda}{\mathrm{d}\,\ln\,\mu} = \beta(\lambda) = \frac{3\,\lambda^2}{16\,\pi^2}\,. \tag{37}$$

Здесь первое равенство является точным по определению, а второе — приближённое. Проинтегрируем явно второе равенство в (37):

$$\lambda(\mu) = \frac{\lambda(m)}{1 - \frac{3\,\lambda(m)}{16\,\pi^2}\,\ln\frac{\mu}{m}}\,. \tag{38}$$

Будем считать, что m — некий масштаб порядка физической массы. Тогда следует считать, что $\mu \ggg m$, так что на масштабах $\sim \mu$ теория фактически безмассовая и уравнения (34)–(37) справедливы. Тогда уравнение (38) показывает, что эффективная константа связи растёт при возрастании импульса согласно формуле (38). При этом $\lambda\,(m)$ — константа связи при импульсах, стремящихся к нулю.

Мы видим, что квантовая теория поля приводит к новому понятию: *бегущей константе связи.* При этом в теории ϕ^4 при $d = 4$ бегущая (эффективная) константа связи уменьшается, если нас интересуют всё меньшие и меньшие энергии взаимодействия (вплоть до масштаба физической массы частиц). Мы увидим, что константа взаимодействия в электродинамике (электрический заряд) также уменьшается при понижении энергии взаимодействия. Такие теории называются нульзарядными и в них β-функции положительны. Однако существуют такие теории (например, теория Янга–Миллса и построенная на её основе теория сильного взаимодействия — квантовая хромодинамика), в которых эффективная константа связи растёт при уменьшении энергии взаимодействующих частиц. Такие теории называются асимптотически свободными, β-функции в этих теориях отрицательны.

β-функция в уравнениях (33), (34) называется *функцией Гелл-мана и Лоу.*

Напоследок сделаем следующую оценку. Рассмотрим двухточечный коррелятор при высоких энергиях, когда можно пренебречь массой. Согласно сказанному выше имеем:

$$G\,(k) \sim \frac{Z\,(k^2)}{k^2}\,. \tag{39}$$

Но при помощи (34) находим, что

$$Z\,(k^2) \sim \left(\frac{k^2}{m^2}\right)^{\gamma}\,, \tag{40}$$

если $\gamma\,(k^2)$ изменяется медленно. Комбинируя (39) и (40), получаем:

$$G\,(k) \sim \frac{1}{(m^2)^{\gamma}\,(k^2)^{1-\gamma}}\,, \tag{41}$$

откуда

$$G\,(x) \sim \int \mathrm{d}^{(d)}\,k\, e^{i\,k\,x}\, G\,(k) \sim \frac{1}{|x|^{d-2+2\gamma}}\,. \tag{42}$$

Таким образом, функции γ ответственны за появление аномальных размерностей полей.

Задачи

1. Показать, что при $d < 4$ в теории ϕ^4 имеется фиксированная точка ренормгруппы с ненулевой константой связи λ_0 и найти это значение константы связи в однопетлевом приближении.

Ответ:

$$\lambda_0 = \frac{(4-d)\,(4\,\pi)^{d/2}\,\Gamma(d/2)}{3}\,(\Lambda\, b)^{4-d}$$

2. Используя уравнение Каллана–Симанчика, вычислить в безмассовой теории ϕ^4 при $d = 4$ функцию $\gamma(\lambda)$ в наинизшем приближении.

3. Вычислить β-функцию в первом неисчезающем порядке в теории с лагранжианом (см. задачу 3 к лекции 3)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \partial_\mu \phi^i\, \partial^\mu \phi^i - \frac{\lambda}{4}\left(\sum_{i=1}^{n} (\phi^i)^2\right)^2\,.$$

Часть II
КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Лекция 7
КВАНТОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. Континуальный интеграл для вырожденных систем

Рассмотрим многомерную динамическую систему, гамильтониан которой зависит от n пар канонически сопряжённых переменных $\{p_\alpha, q^\alpha\}$ и в которой имеется $m < n$ связей первого рода $\varphi_i(p, q)$, а связи второго рода отсутствуют. Связи первого рода — это такие связи между динамическими переменными

$$\varphi_i(p, q) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{1}$$

что

$$[\varphi_i, \varphi_j] = c_{ij}^k\, \varphi_k\,, \qquad [\varphi_i, \mathcal{H}] = b_i^j \varphi_j\,. \tag{2}$$

В этом пункте $[\ldots, \ldots]$ обозначает классическую скобку Пуассона (СП), а $\mathcal{H}$, как и везде — гамильтониан. При вычислении всех СП связи игнорируются. В рассматриваемом случае полный гамильтониан системы $\mathcal{H}_T = \mathcal{H} + \sum_{i=1}^m v_i \varphi_i$ зависит от m произвольных функций времени v_i. Действительно, уравнения Гамильтона для связей

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi_i}{\mathrm{d}\,t} = [\varphi_i, \mathcal{H}_T] = 0 \quad (mod\ \varphi_j)$$

показывают, что при любых значениях множителей Лагранжа $\{v_i\}$ равенства (1) совместны с динамикой системы.

Рассмотрим динамическое изменение какой либо величины $F(p, q)$ за бесконечно малый промежуток времени δt в двух случаях, отличающихся значениями коэффициентов v_i, и найдём разность этих изменений. Так как динамическое изменение $\delta F = [F, \mathcal{H}_T]\delta t$, то искомая разность изменений величины F в этих двух случаях

$$\Delta\delta F = [F, \varphi_i]\Delta v_i \cdot \delta t\,.$$

Величины $(F + \delta F)$ и $(F + \delta F + \Delta\delta F)$ являются физически эквивалентными, а сама разность $\Delta\delta F$ называется калибровочным преобразованием величины F. Калибровочно инвариантной называется такая величина, которая удовлетворяет условиям $[F, \varphi_i] = 0$. В такого рода теориях экспериментально могут наблюдаться лишь калибровочно инвариантные величины.

Обозначим через Γ^{2n} фазовое $2n$-мерное пространство с координатами $\{p_\alpha, q^\alpha\}$.

На классическом уровне рассматриваемая обобщённая гамильтонова система эквивалентна обычной гамильтоновой системе с $(n - m)$ степенями свободы. Фазовое пространство $\Gamma^{*\,2(n-m)}$ последней системы реализуем следующим образом. Рассмотрим m дополнительных условий

$$\chi^j(p, q) = 0\,, \tag{3}$$

фиксирующих калибровку, для которых выполняются требования

$$\det \|[\varphi_i, \chi^j]\| \neq 0\,, \qquad [\chi^i, \chi^j] = 0\,. \tag{4}$$

Фиксация калибровки означает определённый выбор набора функций $\{v_i\}$ (см. ниже (11)). Подпространство в Γ^{2n}, определяемое равенствами

$$\chi^i(p, q) = 0\,, \qquad \varphi_i(p, q) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, m\,, \tag{5}$$

является пространством $\Gamma^{*\,2(n-m)}$. Вследствие (4) можно выбрать в Γ^{2n} канонические переменные так, чтобы первые m координатных переменных $q^1, \ldots, q^m$ совпали с величинами $\chi^1, \ldots, \chi^m$:

$$q = \{\chi^1, \ldots, \chi^m, q^*\}\,. \tag{6}$$

Здесь q^* — остальные $(n-m)$ координатных переменных. Записывая лагранжиан в переменных (6), находим соответствующие канонически сопряжённые импульсные переменные. Обозначим их через
$$p = \{p_1,\, \ldots\,,\, p_m,\, p^*\}\,. \tag{7}$$
В новых переменных условия (4) принимают вид
$$\det \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} \right\| \neq 0\,. \tag{8}$$
Отсюда следует, что уравнения связей (1) можно разрешить относительно p_i с $i = 1,\, \ldots\,,\, m$. Эти решения обозначим $p_i(p^*,\, q^*)$. В результате подпространство $\Gamma^{*\,2(n-m)}$ задаётся уравнениями
$$\chi^i \equiv q^i = 0\,, \qquad p_i = p_i(p^*,\, q^*)\,, \qquad i = 1,\, \ldots\,,\, m\,. \tag{9}$$
Переменные $\{p^*,\, q^*\}$ являются каноническими, и гамильтонианом системы является функция
$$\mathcal{H}^*(p^*,\, q^*) \equiv \mathcal{H}(p,\, q)\big|_{\varphi=0,\, \chi=0}\,. \tag{10}$$

Обозначим исходную систему с гамильтонианом $\mathcal{H}_T$ и фазовым пространством Γ^{2n} и новую систему с гамильтонианом $\mathcal{H}^*$ и фазовым пространством $\Gamma^{*\,2(n-m)}$ через Γ и Γ^*, соответственно.

Системы Γ и Γ^* эквивалентны и эквивалентность означает следующее.

Выберем в $\mathcal{H}_T$ лагранжевы множители v_i так, чтобы выполнялись равенства
$$\dot{q}^j = [\chi^j,\, \mathcal{H}_T] = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} + \sum_i v_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = 0\,, \qquad j = 1,\, \ldots\,,\, m\,. \tag{11}$$
Вследствие (4) эта задача имеет однозначное решение. При этом уравнения Гамильтона $\dot{g} = [g,\, \mathcal{H}_T]$ и связей (1), (9) совпадают с уравнениями Гамильтона для системы Γ^*. Для проверки этого утверждения следует убедиться, что правые части уравнений
$$\dot{p}^* = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^*} + \sum_j v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q^*} \right)$$
и
$$\dot{p}^* = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial q^*} = -\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q^*} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q^*} \right)$$
совпадают (соответствующие уравнения для переменных q^* не выписываются), то есть имеют место равенства
$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q^*} + \sum_j v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q^*} = 0\,.$$
При помощи уравнений (11) последние равенства переписываются следующим образом:
$$\sum_j v_j \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial q^*} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial q^*} \right) = 0\,. \tag{12}$$
Равенства (12), в свою очередь, являются следствием тождеств
$$\varphi_i(p\,(p^*,\, q^*),\, p^*,\, q^*) \equiv 0\,, \qquad i = 1,\, \ldots\,,\, m\,.$$
Таким образом утверждение об эквивалентности систем Γ и Γ^* доказано.

Система Γ может быть проквантована в переменных $\{p^*,\, q^*\}$, в которых она является невырожденной. В этих переменных квантовый оператор эволюции задаётся континуальным интегралом (см. (12 Л1))
$$\langle q^{*\,\prime\prime} | U^*(t'',\, t') | q^{*\,\prime} \rangle = \int \exp\left\{ i \int\limits_{t'}^{t''} (p^*\, \dot{q}^* - \mathcal{H}^*(p^*,\, q^*))\, \mathrm{d}\, t \right\} \prod_t \frac{\mathrm{d}\, p^*(t)\ \mathrm{d}\, q^*(t)}{2\pi}\,. \tag{13}$$

Чаще всего (как в электродинамике и многих других калибровочных теориях) нецелесообразно разрешать связи явно. Напротив, оператор эволюции полезно представить непосредственно в терминах переменных обобщённой системы Г. Покажем, что континуальный интеграл

$$\int \exp\left\{ i \int\limits_{t'}^{t''} [p\,\dot q - (\mathcal{H}\,(p,\,q) + v_i\,\varphi_i(p,\,q))]\;\mathrm{d}\,t \right\} \prod_t \prod_i \delta(\chi^i)\;\det \|[\varphi_k,\,\chi^j]\| \prod_\alpha \frac{\mathrm{d}\,p_\alpha(t)\;\mathrm{d}\,q^\alpha(t)}{2\pi}\,\frac{\mathrm{d}\,v_i(t)}{2\,\pi} \tag{14}$$

совпадает с интегралом (13). Для этого проинтегрируем (14) по лагранжеву множителю v, в результате чего он принимает вид

$$\int \exp\left\{ i \int\limits_{t'}^{t''} [p\,\dot q - \mathcal{H}\,(p,\,q)]\;\mathrm{d}\,t \right\} \prod_t \prod_i \delta(\chi^i)\,\delta(\varphi_i)\;\det \|[\varphi_k,\,\chi^j]\| \prod_\alpha \frac{\mathrm{d}\,p_\alpha(t)\;\mathrm{d}\,q^\alpha(t)}{2\pi}\,. \tag{15}$$

Мера в интеграле (15) инвариантна относительно канонических преобразований переменных интегрирования. Будем считать, что он вычисляется в переменных (6), (7), в которых

$$\prod_t \prod_i \delta(\chi^i)\,\delta(\varphi_i)\;\det \|[\varphi_k,\,\chi^j]\| = \prod_t \prod_i \delta(q^i)\,\delta(\varphi_i)\;\det \left\| \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_j} \right\| = \prod_t \prod_i \delta(q^i)\,\delta[p_i - p_i(p^*,\,q^*)]\,.$$

Теперь очевидно, что после интегрирования по переменным $\{p_i,\,q^i\}$ с $i = 1,\,\dots\,,\,m$ интеграл (15) сводится к (13).

Заметим, что выражение в круглой скобке в экспоненте в (14) является полным гамильтонианом $\mathcal{H}_T$.

2. Электромагнитное поле как динамическая система

Свободное электромагнитное поле описывается действием

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{16\,\pi} \int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{16}$$

Электрическое и магнитное поля равны соответственно

$$E^i = F^{i0} = -\partial_i A^0 - \dot A^i\,, \qquad H^i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}F^{jk}\,. \tag{17}$$

Выпишем лагранжиан системы:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\,\pi} \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,(F^{io})^2 - \frac{1}{16\,\pi} \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,F_{ij}^2\,. \tag{18}$$

Проварьируем лагранжиан (18) относительно $\dot A^\mu$:

$$\delta_{\dot A}\mathcal{L} = -\frac{1}{4\,\pi} \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,F^{io}\,\delta\,\dot A^i = -\frac{1}{4\,\pi} \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,E^i\,\delta\,\dot A^i\,. \tag{19}$$

Отсюда видно, что если поле A^μ рассматривается как совокупность координатных переменных, то соответствующие импульсные переменные π_μ равны

$$\pi_i(x) = -\frac{1}{4\,\pi}\,E^i(x)\,, \tag{20}$$

$$\pi_0(x) = 0\,. \tag{21}$$

При помощи формул (17)-(21) находим гамильтониан:

$$\mathcal{H}_T \equiv \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\pi_i \dot A^i - \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\left\{ \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\,\pi} - \frac{1}{4\,\pi}\,A^0\,\nabla\,\mathbf{E} \right\}\,. \tag{22}$$

Канонические одновременные СП имеют вид (выписаны лишь ненулевые СП):

$$[E^i(\mathbf{x}),\, A^j(\mathbf{y})] = 4\,\pi\,\delta^{ij}\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,, \qquad [\pi^0(\mathbf{x}),\, A^0(\mathbf{y})] = -\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{23}$$

Мы имеем множество первичных связей (21). Вычислим их СП с гамильтонианом:

$$[\pi^0(\mathbf{x}),\, \mathcal{H}] = \frac{1}{4\,\pi}\,\nabla\,\mathbf{E}\,(\mathbf{x})\,. \tag{24}$$

Чтобы связи (21) сохранялись, необходимо наложить множество новых связей:

$$\varphi\,(\mathbf{x}) \equiv \nabla\,\mathbf{E}\,(\mathbf{x}) = 0\,. \tag{25}$$

При помощи (23) находим:

$$\left[A^i(\mathbf{x}),\, \frac{1}{4\,\pi}\int \mathrm{d}^3\,y\,A^0(\mathbf{y})\,\nabla\,\mathbf{E}(\mathbf{y})\right] = \partial_i A^0(\mathbf{x})\,. \tag{26}$$

Таким образом, связи (25) генерируют калибровочные преобразования. Нетрудно проверить, что положительная часть гамильтониана

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\frac{\mathbf{E}^2+\mathbf{H}^2}{8\,\pi} \tag{27}$$

калибровочно инвариантен:

$$[\nabla\,\mathbf{E}(\mathbf{x}),\, \mathcal{H}] = 0\,. \tag{28}$$

Кроме того, все взаимные СП связей (21), (25) обращаются в ноль. Поэтому все связи — первого рода и поле A^0 играет роль лагранжевого множителя, принимающего произвольные значения и гамильтониан (22) является полным гамильтонианом.

Равенство (26) показывает, что естественными дополнительными условиями, аналогичными (3), в рассматриваемом случае являются условия, фиксирующие калибровку:

$$\chi\,(x) \equiv \nabla\,\mathbf{A}\,(x) = 0\,. \tag{29}$$

Вычислим одновременные СП связей (25) и (29). При помощи СП (23) находим:

$$[\varphi\,(\mathbf{x}),\, \chi\,(\mathbf{y})] = [\nabla\,\mathbf{E}\,(\mathbf{x}),\, \nabla\,\mathbf{A}\,(\mathbf{y})] = -4\,\pi\,\nabla^2\,\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{30}$$

Таким образом, $\det\|[\varphi\,(\mathbf{x}),\, \chi\,(\mathbf{y})]\| = \mathrm{const}$, то есть этот определитель является величиной, не зависящей от динамических переменных, которая включается в общий нормировочный множитель. (В более сложных калибровочных теориях, как теория Янга–Миллса, аналог оператора (30) зависит от полей и соответствующий определитель должен быть явно учтён.)

Обозначим через $\mathbf{A}^{\perp}\,(x)$ поперечное векторнозначное поле, удовлетворяющее условию

$$\nabla\,\mathbf{A}^{\perp} = 0\,. \tag{31}$$

В нашем случае система Γ описывается переменными $\{\mathbf{E},\, \pi^0,\, A^\mu\}$, а система Γ^* — переменными $\{\mathbf{E}^\perp,\, \mathbf{A}^\perp\}$. Однако удобнее взять в качестве исходной системы Γ несколько сокращённую систему с фазовым пространством, точками которого являются поля $\{\mathbf{E},\, \mathbf{A}\}$, связями (25) и условиями (29), фиксирующими калибровку. При таком подходе роль лагранжевых множителей $\{v_i\}$ из предыдущего пункта берёт на себя поле, обозначаемое A^0.

При квантовании переменные системы Γ^* удовлетворяют следующим одновременным КС (сравни с (23)):

$$[E^{\perp\,i}(\mathbf{x}),\, A^{\perp\,j}(\mathbf{y})] = 4\,\pi\,i\int\frac{d^{(3)}k}{(2\,\pi)^3}\,\left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}\right)\,e^{i\,\mathbf{k}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,. \tag{32}$$

Последние КС реализуются, если полевые переменные разлагаются согласно (сравни с (34 Л2))

$$\mathbf{A}^\perp\,(x) = \sum_{\alpha=1,2}\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\sqrt{\frac{2\,\pi}{|\mathbf{k}|}}\,\left(c_{\mathbf{k}\,\alpha}\,\mathbf{e}^\perp_{\mathbf{k}\,\alpha}\,e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}} + c^\dagger_{\mathbf{k}\,\alpha}\,\mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\,\alpha}\,e^{-i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}\right)\,,$$

$$\mathbf{E}^{\perp}(x) = i \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^{(3)} k}{(2\pi)^3} \sqrt{2\pi |\mathbf{k}|} \left(c_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} \mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\alpha} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \right),$$

$$[c_{\mathbf{k}\alpha},\, c^{\dagger}_{\mathbf{p}\beta}] = (2\pi)^3 \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p}), \qquad \alpha,\,\beta = 1, 2,$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\alpha} = 0, \qquad \mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\alpha}\cdot\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\beta} = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \sum_{\alpha=1,2} e^{\perp\,i}_{\mathbf{k}\alpha} e^{\perp\,*\,j}_{\mathbf{k}\alpha} = \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} \right). \tag{33}$$

Если в (27) подставить переменные (33), то мы получим гамильтониан Γ^*-системы:

$$\mathcal{H}^*_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^{(3)} k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}| \left(c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha} + c_{\mathbf{k}\alpha} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} \right). \tag{34}$$

Фотонный вакуум определяется условиями

$$c_{\mathbf{k}\alpha} |\, 0\, \rangle = 0. \tag{35}$$

Однофотонное состояние с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией α в релятивистской нормировке представляется как (сравни с (38 Л2))

$$|\, \mathbf{k},\, \alpha\, \rangle = \sqrt{2|\mathbf{k}|}\, c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} |\, 0\, \rangle. \tag{36}$$

Двух- и т.д. фотонные состояния строятся из вакуумного очевидным образом при помощи операторов рождения $c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}$. Приведём гамильтониан (34) к нормальному виду (далее индекс *, отмечающую принадлежность к Γ^*-системе, не выписываем):

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^{(3)} k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}|\, c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha} + \mathcal{E}_0, \tag{37}$$

$$\mathcal{E}_0 = V \int \frac{\mathrm{d}^{(3)} k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}|. \tag{38}$$

Здесь V — объём пространства. Величина (38) является энергией нулевых колебаний или энергией вакуума. Также как и в скалярной теории, в электродинамике она положительна и её плотность бесконечна. Существуют экспериментальные методы "тестирования"энергии вакуума (эффект Казимира, см. задачу к этой лекции).

Как известно, плотность импульса электромагнитного поля равна (см. Приложение C) $(1/4\pi)\,[\mathbf{E},\,\mathbf{H}]$. Поэтому оператор импульса электромагнитного поля (сравни с (42 Л2))

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^{(3)} x\, [\mathbf{E},\,\mathbf{H}] = \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{\mathrm{d}^{(3)} k}{(2\pi)^3} \mathbf{k}\, c^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha} c_{\mathbf{k}\alpha}.$$

Из данных определений следует, что (энергия вакуума вычеркнута из гамильтониана)

$$\mathcal{H} |\, 0\, \rangle = \boldsymbol{\mathcal{P}} |\, 0\, \rangle = 0, \qquad \mathcal{H} |\, \mathbf{k},\, \alpha\, \rangle = |\mathbf{k}|\, |\, \mathbf{k},\, \alpha\, \rangle, \qquad \boldsymbol{\mathcal{P}} |\, \mathbf{k},\, \alpha\, \rangle = \mathbf{k}\, |\, \mathbf{k},\, \alpha\, \rangle.$$

Таким образом, фотон является безмассовой частицей, распространяющейся со скоростью света.

Теперь при помощи формул из предыдущего пункта и лекции 2 мы можем, минуя детальные вычисления, выписать нормальный символ S-матрицы в фотодинамике в терминах переменных исходной Γ-системы (сравни с (52 Л2)):

$$S(c^*,\, c) = \frac{1}{N} \int \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^{(4)} x \left[-\frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E}\,\dot{\mathbf{A}} - A^0\, \nabla\mathbf{E} \right) - \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \right] \right\} \times$$

$$\times \prod_x \prod_{i=1}^{3} \delta\left(\nabla\,\mathbf{A}(x) \right) \mathrm{d}\, E^i(x)\, \mathrm{d}\, A^i(x)\, \mathrm{d}\, A^0(x). \tag{39}$$

Граничные условия в интеграле (39) таковы:

$$\mathbf{A}^{\perp}(x)\xrightarrow[t\to\pm\infty]{}\mathbf{A}^{\perp}_{\substack{out\\in}}(x)\,,\qquad \mathbf{A}^{\perp}_{\substack{out\\in}}(x)=\sum_{\alpha=1,2}\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}}\left(c_{\mathbf{k}\alpha\,\substack{out\\in}}\,\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\alpha}\,e^{-ikx}+c^{*}_{\mathbf{k}\alpha\,\substack{out\\in}}\,\mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\alpha}\,e^{ikx}\right),$$

$$c_{\mathbf{k}\alpha\;in}=c_{\mathbf{k}\alpha}\,,\qquad c^{*}_{\mathbf{k}\alpha\;out}=c^{*}_{\mathbf{k}\alpha}\,,\qquad k\,x=k^0x^0-\mathbf{k}\,\mathbf{x}\,,\qquad k^0=|\mathbf{k}|\,. \tag{40}$$

Обратим внимание на то, что граничные условия (40) имеют место лишь для физических степеней свободы, описываемых поперечной частью поля $\mathbf{A}^{\perp}(x)$ (31). Проинтегрируем в (39) по импульсным переменным $\mathbf{E}(x)$ и введём в теорию внешний источник. Это интегрирование проводится однозначно при помощи правила вычисления гауссовых интегралов, поскольку проблема граничных условий при этом интегрировании отсутствует. С учётом (16)-(18) получаем:

$$S_J(c^*,\,c)=\frac{1}{N}\int\exp\left\{i\int\mathrm{d}^{(4)}x\left[-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+J^{\mu}A_{\mu}\right]\right\}\prod_x\delta\left(\partial_iA^i(x)\right)D\,A_{\mu}\,,$$

$$D\,A_{\mu}\equiv\prod_x\prod_{\mu}\mathrm{d}\,A_{\mu}(x)\,. \tag{41}$$

Интеграл (41) вычисляется с граничными условиями (40).

Из континуального интеграла (41) видно, что интегрирование идёт не по всем полям, а лишь по поперечным физическим полям $\mathbf{A}^{\perp}$.

Для вычисления пропагатора электромагнитного поля преобразуем интеграл (41) следующим образом:

$$S_J(c^*,\,c)=\frac{1}{N}\int\exp\left\{i\int\mathrm{d}^{(4)}x\left[-\frac{1}{16\pi}\left(\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}\right)^2+J^{\mu}A_{\mu}+\lambda\,\partial_iA_i\right]\right\}\prod_x\mathrm{d}\,\lambda(x)\,D\,A_{\mu}\,. \tag{42}$$

Гауссов интеграл вычисляется нахождением экстремума показателя экспоненты в (42) относительно переменных $\{\lambda,\,A_{\mu}\}$. Этот экстремум находится при помощи системы уравнений

$$\partial_iA_i=0\,,\qquad \Delta\,A^0=4\,\pi\,J^0\,,\qquad \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^i+\partial_i\dot{A}_0=4\,\pi\left(\partial_i\lambda-J^i\right). \tag{43}$$

Естественно считать, что источник удовлетворяет условию поперечности:

$$\partial_iJ^i=0\,. \tag{44}$$

Вычисляя дивергенцию последнего из уравнений (43) и учитывая первые два, находим:

$$\Delta\,\lambda=\partial_0J^0\,. \tag{45}$$

В результате система уравнений (43)-(44) сводится к уравнению (45), а также уравнениям

$$\Delta\,A^0=4\,\pi\,J^0\,,\qquad \partial_{\mu}\partial^{\mu}\,\mathbf{A}^{\perp}=-4\,\pi\,\mathbf{J}^{\perp}\,. \tag{46}$$

Теперь аналогично (53 Л2) мы можем представить электромагнитное поле, для которого действие в (42) экстремально:

$$A^{\mu}(x)=A^{\mu}_0(x)+\int\mathrm{d}^{(4)}y\,D^{\mu\nu}_C(x-y)\,J_{\nu}(y)\,,$$

$$A^0_0=0\,,\qquad \mathbf{A}_0(x)=\sum_{\alpha=1,2}\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}}\left(c_{\mathbf{k}\alpha}\,\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\alpha}\,e^{-ikx}+c^{*}_{\mathbf{k}\alpha}\,\mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\alpha}\,e^{ikx}\right),\qquad k^0=|\mathbf{k}| \tag{47}$$

$$D^{ij}_C(x)=-4\,\pi\int\frac{d^{(4)}k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ikx}}{k^2+i\,\varepsilon}\left(\delta^{ij}-\frac{k^i\,k^j}{\mathbf{k}^2}\right),\qquad D^{0i}_C=0\,,\qquad D^{00}_C(x)=-4\,\pi\int\frac{d^{(4)}k}{(2\pi)^4}\,\frac{e^{-ikx}}{\mathbf{k}^2}\,. \tag{48}$$

Явное выражение для $D^{\mu\nu}_C(x)$ показывает, что распространяются во времени только трёхмерно поперечные составляющие поля A_{μ}.

Преимуществом изложенного подхода является очевидная унитарность полученного выражения для S-матрицы, поскольку формула для S-матрицы была получена путём перехода к невырожденной динамической системе. Недостатком диаграммной техники, развитой при помощи пропагатора (48), является отсутствие явной релятивистской инвариантности.

3. Ковариантные правила квантования и трюк Фаддеева–Попова

Чтобы восстановить явную релятивистскую инвариантность, поступим следующим образом. Обозначим через $a\,(x)$ некое скалярное поле и через A_μ^ω — калибровочно преобразованное электромагнитное поле:

$$A_\mu^\omega = A_\mu + \partial_\mu\,\omega\,. \tag{49}$$

Определим величину Δ_L при помощи равенства

$$\Delta_L \int \prod_x \delta\,[\partial^\mu\,A_\mu^\omega - a\,(x)]\;\mathrm{d}\,\omega\,(x) = 1\,. \tag{50}$$

Очевидно, Δ_L не зависит от полей A_μ и $a\,(x)$: $\Delta_L = \det\,\partial^2$. Теперь вставим левую часть (50) в интеграл (41), что не изменит его значения:

$$S_J(c^*,\,c) = \frac{1}{N}\int \exp\left\{i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\left[-\frac{1}{16\,\pi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu\right]\right\}\times$$
$$\times\prod_x \delta\,(\partial_i A^i(x))\Delta_L\,\delta\,[\partial^\mu\,A_\mu^\omega - a\,(x)]\;\mathrm{d}\,\omega\,(x)\,D\,A_\mu\,. \tag{51}$$

Теперь в интеграле (51) сделаем калибровочное преобразование, обратное к (49), и учтём, что мера $D\,A_\mu$ и плотность действия $F_{\mu\nu}^2$ при этом не изменяются, являясь калибровочными инвариантами. В результате интеграл (51) принимает вид

$$S_J(c^*,\,c) = \frac{1}{N}\int \exp\left\{i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\left[-\frac{1}{16\,\pi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu - J^\mu\partial_\mu\omega\right]\right\}\times$$
$$\times\prod_x \delta\,(\partial_i A_i^{\omega^{-1}}(x))\Delta_L\,\delta\,[\partial^\mu\,A_\mu - a\,(x)]\;\mathrm{d}\,\omega\,(x)\,D\,A_\mu\,.$$

За слагаемым вида $J^\mu\partial_\mu\omega$ в экспоненте нет смысла следить потому что асимптотическое поле (47) определено с точностью до слагаемого $\partial_\mu\omega$, где поле ω, так же как и в рассматриваемых функциональных интегралах — произвольное, удовлетворяющее уравнению д$'$Аламбера[1] (см. ниже ур. (57)). Так как интеграл

$$\int \prod_x \delta\,[\partial_i\,A_i^{\omega^{-1}}(x)]\;\mathrm{d}\,\omega\,(x) = \det\,\Delta^{-1}$$

также не зависит от от вектор-потенциала, то его можно выбросить. Таким образом

$$S_J(c^*,\,c) = \frac{1}{N}\int \exp\left\{i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\left[-\frac{1}{16\,\pi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu\right]\right\}\prod_x \delta\,[\partial^\mu\,A_\mu - a\,(x)]\,D\,A_\mu\,.$$

Поскольку здесь левая часть не зависит от поля $a\,(x)$, мы можем проинтегрировать последнее выражение с весом

$$\exp\left\{-\frac{i}{8\,\pi\,\alpha}\int a^2(x)\,\mathrm{d}^{(4)}\,x\right\}\,,$$

что влияет лишь на нормировочный множитель:

$$S_J(c^*,\,c) = \frac{1}{N}\int \exp\left\{i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\left[-\frac{1}{16\,\pi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8\,\pi\,\alpha}\,a^2(x) + J^\mu A_\mu\right]\right\}\times$$
$$\times\prod_x \delta\,[\partial^\mu\,A_\mu - a\,(x)]\;\mathrm{d}\,a\,(x)\,D\,A_\mu =$$
$$= \frac{1}{N}\int \exp\left\{i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\left[-\frac{1}{16\,\pi}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{8\,\pi\,\alpha}\,(\partial_\mu A^\mu)^2 + J^\mu A_\mu\right]\right\}\,D\,A_\mu\,. \tag{52}$$

[1]Согласно (50) $\partial_\mu\partial^\mu\omega = a - \partial^\mu A_\mu = 0$. Последнее равенство вытекает из следующей формулы для S-матрицы.

Находя пропагатор таким же образом, как это было сделано выше, находим, что континуальный интеграл (52) приводит к ковариантному пропагатору

$$D^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = 4\,\pi \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\,k}{(2\,\pi)^4}\,\frac{e^{-i\,k\,x}}{k^2 + i\,\varepsilon}\left[\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\alpha)\,k_\mu k_\nu}{k^2 + i\,\varepsilon}\right], \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1,\,-1,\,-1,\,-1)\,. \tag{53}$$

Калибровка, в которой пропагатор имеет вид (53), называется α-калибровкой. Частный случай этой калибровки $\alpha = 1$ называется *калибровкой Фейнмана*, а частный случай $\alpha = 0$ — *калибровкой Ландау*.

Правильность задания обхода полюсов в (53) легче всего устанавливается следующим образом. Пропагатор (48), конечно, как пропагатор, описывающий распространение реальных частиц в рамках теории S-матрицы, позволяет сделать поворот Вика в евклидово пространство. Иными словами, при вычислении S-матрицы можно использовать интеграл вида (41) в евклидовом пространстве, и лишь после вывода правил Фейнмана перейти в пространство Минковского. В евклидовом пространстве можно перейти к α-калибровке (52) при помощи описанного трюка Фаддеева–Попова и получить соответствующий евклидовский пропагатор. После этого обратный поворот Вика в пространство Минковского приводит к пропагатору (53) с указанным обходом полюсов.

Теперь мы можем выписать нормальный символ S-матрицы для свободного электромагнитного поля при наличии внешнего источника (сравни с (51 Л2). Значение экстремального значения электромагнитного поля задаётся формулой (см. (47))

$$A^\mu(x) = A^\mu_0(x) + \int \mathrm{d}^{(4)}\,y\,D^{\alpha\;\mu\nu}(x-y)\,J_\nu(y)\,,$$

а нормальный символ S-матрицы имеет вид

$$S_J(c^*,\,c) = \frac{1}{N}\,\exp\left\{i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,J^\mu A_{0\,\mu} + \frac{i}{2}\int\!\!\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,\mathrm{d}^{(4)}\,y\,J^\mu(x)\,D^{\alpha}_{\mu\nu}(x-y)\,J^\nu(y)\right\}. \tag{54}$$

Поскольку выписанное выражение для S-матрицы получено путём тождественных преобразований из выражения для унитарной S-матрицы, то это выражение также является унитарным.

Последнее замечание касается вопроса об однозначности определения векторов поляризации фотонов $\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\,\alpha}$. Введём 4-вектор поляризации фотона $e^\mu_{\mathbf{k}\,\alpha} = (0,\,\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\,\alpha})$. Если $k^\mu = (|\mathbf{k}|,\,\mathbf{k})$ — 4-импульс фотона, то согласно (33)

$$k_\mu\,e^\mu_{\mathbf{k}\,\alpha} = 0\,, \qquad \eta_{\mu\nu}\,e^\mu_{\mathbf{k}\,\alpha}\,e^{\nu\,*}_{\mathbf{k}\,\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\,. \tag{55}$$

Очевидно, что оба свойства (55) сохраняются, если сделать преобразование вектора поляризации согласно правилу

$$e^\mu_{\mathbf{k}\,\alpha} \to e^\mu_{\mathbf{k}\,\alpha} + f\,(\mathbf{k})\,k^\mu\,, \tag{56}$$

где $f\,(\mathbf{k})$ — любая функция. Поэтому вектор поляризации фотона определён неоднозначно с точностью до преобразования (56), изменяющего четырёхмерно продольную часть фотона. Поэтому и асимптотическое поле (47) определено с точностью до произвольного калибровочного преобразования вида

$$A_{0\,\mu} \longrightarrow A_{0\,\mu} + \partial_\mu\omega\,, \qquad \partial_\mu\partial^\mu\omega = 0\,. \tag{57}$$

В то же время, как мы увидим ниже, все физические величины инвариантны относительно преобразований (56). Эта инвариантность является следствием калибровочной инвариантности теории. Отсюда очевидно также, что преобразования Лоренца по сути не изменяют поля A^μ_0 в (54). Действительно, преобразованные вектора поляризации $e^\mu_{\mathbf{k}\,\alpha}$ всегда можно привести к стандартному виду $(0,\,\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\,\alpha})$ при помощи калибровочных преобразований вида (56).

Задачи

1. Трёхмерный эффект Казимира[1].

[1] Последние экспериментальные данные подтверждают эффект Казимира с точностью $\sim 10\%$.

а) В трёхмерном пространстве на расстоянии l друг от друга расположены две бесконечные плоские параллельные металлические пластины. Считая, что на пластинах обращаются в ноль тангенциальные компоненты электрического поля $\mathbf{E}$ и разность потенциалов между пластинами равна нулю, проквантовать фотонное поле и выразить его гамильтониан через лестничные операторы.

б) Вычислить силу на единицу площади пластин, с которой взаимодействуют эти пластины вследствие искажений нулевых колебаний фотонного поля и сдвига энергии вакуума.

Указание. При регуляризации интеграла типа (38), формально задающего энергию вакуума, использовать формулу размерностной регуляризации (3 Л4), а при регуляризации расходящихся сумм степеней целых чисел использовать аналитическое продолжение ζ-функции Римана.

2. Вычислить явно в координатном представлении в четырёхмерном пространстве фотонный пропагатор в α-калибровке.

3*[1]. Сделаем замену $ieA_\mu \to A_\mu$ и определим оператор ковариантной производной $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + A_\mu$. Очевидно $A_\mu^* = -A_\mu$ и напряженность $F_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ отличается от стандартного значения (16) лишь множителем ie. Поэтому в данном случае действие электромагнитного поля имеет вид

$$\mathcal{S} = \frac{1}{16\pi e^2} \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, F_{\mu\nu}^2.$$

Обобщим это действие на неабелев случай.

Пусть $t^a = -\left(t^a\right)^\dagger$, $a = 1, \ldots, N$ — образующие некой алгебры Ли в матричном представлении, причём

$$\mathrm{tr}\; t^a t^b = -\frac{1}{2}\delta^{ab}, \qquad [t^a, t^b] = f_{abc} t^c,$$

и структурные константы f_{abc} вещественны. Определим неабелево калибровочное вещественное многокомпонентное поле A_μ^a, или неабелево калибровочное антиэрмитово поле $A_\mu \equiv A_\mu^a t^a = -A_\mu^\dagger$. Ковариантная производная имеет прежний вид $\nabla_\mu \equiv \partial_\mu + A_\mu$, а напряжённость поля и его действие

$$F_{\mu\nu}(A) = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu].$$

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2e^2} \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\; \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}^2.$$

Определим калибровочное преобразование как

$$A_\mu^\omega = \Omega^{-1} \nabla_\mu \Omega = \Omega^{-1} A_\mu \Omega + \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega,$$

где

$$\Omega = \exp(\omega) = \left(\Omega^{-1}\right)^\dagger, \qquad \omega = \omega^a t^a = -\omega^\dagger.$$

Определённая таким образом теория называется *теорией Янга–Миллса.*

а) Проверить, что

$$F_{\mu\nu}(A^\omega) = \Omega^{-1} F_{\mu\nu}(A) \Omega.$$

Таким образом, действие Янга–Миллса калибровочно инвариантна.

б) Проквантовать теорию Янга–Миллса и выписать выражение для производящего функционала $\mathcal{S}$-матрицы в теории Янга–Миллса.

Ответ:

$$S = \frac{1}{N} \int \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, \mathrm{tr} \left[\frac{1}{2e^2}\, F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{\alpha\, e^2} (\partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{c} \partial_\mu \nabla_\mu c - 2 J_\mu A_\mu \right] \right\} D\, A_\mu D\bar{c} Dc.$$

Здесь $\bar{c} \equiv \bar{c}^a t^a$ и $c \equiv c^a t^a$ — поля *духов*, независимые друг от друга и антикоммутирующие как между собой, так и с прочими фермионными полями (см. следующие лекции).

[1]Эта задача может быть решена лишь при использовании техники, изложенной в Лекции 9.

Лекция 8
УРАВНЕНИЕ ДИРАКА. КАНОНИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ ДИРАКОВСКОГО ПОЛЯ

1. Уравнение Дирака

В этой лекции рассмотрение идёт в четырёхмерном пространстве Минковского, $\mu, \nu, \ldots = 0,1,2,3$, $i, j, \ldots = 1,2,3$.

Рассмотрим операторы

$$J^i = -i\,\varepsilon_{ijk}\,x^j\,\partial_k + \frac{1}{2}\,\sigma^i\,, \tag{1}$$

где

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

— сигма-матрицы Паули. Легко проверить, что

$$[J^i,\, J^j] = i\,\varepsilon_{ijk}\,J^k\,. \tag{3}$$

Таким образом, оператор $\mathbf{J}$ является оператором полного момента импульса, включая спин частицы, который в рассмотренном случае равен (1/2). Как известно, операторы полного момента $\mathbf{J}$ являются генераторами вращений в 3-мерном пространстве, что выражается формулами

$$(1 + i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J})\,\mathbf{x}\,(1 - i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J}) = \mathbf{x} + [\boldsymbol{\omega},\,\mathbf{x}]\,, \qquad (1 + i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J})\,\boldsymbol{\sigma}\,(1 - i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J}) = \boldsymbol{\sigma} + [\boldsymbol{\omega},\,\boldsymbol{\sigma}]\,,$$

$$(1 + i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J})\,\boldsymbol{\partial}\,(1 - i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J}) = \boldsymbol{\partial} + [\boldsymbol{\omega},\,\boldsymbol{\partial}]\,, \qquad (1 + i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J})\,\boldsymbol{\sigma\partial}\,(1 - i\,\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{J}) = \boldsymbol{\sigma\partial}\,, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — бесконечно малый вектор угла поворота и $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1,\, \sigma^2,\, \sigma^3)$.

Задача заключается в обобщении формул (1)-(4) на случай четырёхмерного пространства Минковского. На этом пути строится релятивистская теория частиц со спином (1/2).

Введём четыре комплексные матрицы γ^μ четвёртого порядка со следующими свойствами (сравни с соотношениями $\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\,\delta^{ij}$):

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu + \gamma^\nu\,\gamma^\mu = 2\,\eta^{\mu\nu}\,. \tag{5}$$

Чаще всего используются

а) спинорное представление $(\gamma^\mu = (\gamma^0,\, \gamma^i))$:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \tag{6}$$

б) стандартное представление:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}; \tag{7}$$

Из (5)-(7) вытекает, что

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0\,, \qquad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i\,, \qquad \gamma^0\,(\gamma^i)^\dagger\,\gamma^0 = \gamma^i\,. \tag{8}$$

Последние соотношения имеют место в любом представлении, поскольку γ-матрицы в разных представлениях различаются унитарным преобразованием.

Введенные матрицы (5) называются γ-матрицами Дирака.

Пусть $\gamma^5 \equiv -i\,\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$. Из этого определения имеем:

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5\,, \qquad \gamma^5\,\gamma^\mu + \gamma^\mu\,\gamma^5 = 0\,, \qquad (\gamma^5)^2 = 1\,. \tag{9}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} --- \text{спинорное представление;}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} --- \text{стандаотное представление}\,.$$

Введём набор из шести матриц:

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4}\,[\gamma^\mu,\,\gamma^\nu] = -\sigma^{\nu\mu}\,. \tag{10}$$

Вследствие (8)

$$\gamma^0\,(\sigma^{\mu\nu})^\dagger\,\gamma^0 = -\sigma^{\mu\nu}\,. \tag{11}$$

Используя лишь алгебру (5), находим:

$$[\sigma^{\mu\nu},\,\gamma^\lambda] = \eta^{\nu\lambda}\,\gamma^\mu - \eta^{\mu\lambda}\,\gamma^\nu\,, \qquad [\sigma^{\mu\nu},\,\sigma^{\lambda\rho}] = \eta^{\mu\rho}\,\sigma^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}\,\sigma^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\,\sigma^{\nu\rho} + \eta^{\nu\lambda}\,\sigma^{\mu\rho}\,. \tag{12}$$

Генераторы четырёхмерных вращений $l_{\mu\nu} = x_\mu\,\partial_\nu - x_\nu\,\partial_\mu$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и матрицы $\sigma^{\mu\nu}$. Поэтому для $J_{\mu\nu} = l_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$ имеем:

$$[J_{\mu\nu},\,J_{\lambda\rho}] = \eta_{\mu\rho}\,J_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\rho}\,J_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\,J_{\nu\rho} + \eta_{\nu\lambda}\,J_{\mu\rho}\,. \tag{13}$$

Мы видим, что матрицы $\sigma^{\mu\nu}$ являются обобщением нерелятивистских спиновых матриц $(1/2)\,\sigma^i$ на релятивистский случай.

Пусть поле

$$\psi\,(x) = \begin{pmatrix} \psi_1\,(x) \\ \psi_2\,(x) \\ \psi_3\,(x) \\ \psi_4\,(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi\,(x) \\ \chi\,(x) \end{pmatrix} \tag{14}$$

является матрицей-столбцом, состоящим из четырёх комплексных полей ψ_a, $a = 1,\,2,\,3,\,4$ и

$$\overline{\psi}\,(x) = \psi^\dagger\,(x)\,\gamma^0 \tag{15}$$

— матрица-строка. Поля φ и χ в (14) являются двухрядными матрицами-столбцами, задающими верхнюю и нижнюю половины поля (14), соответственно. Поля ψ и $\overline{\psi}$ в (14) и (15) взаимно сопряжены (в смысле Дирака).

Уравнение Дирака во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$(i\,\hbar\,\gamma^\mu\,\nabla_\mu - m\,c)\,\psi\,(x) = 0\,, \qquad \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial\,x^\mu} + i\,\frac{e}{\hbar\,c}\,A_\mu\,(x)\,. \tag{16}$$

Далее, как обычно, полагаем $\hbar = c = 1$. Здесь считается, что $e < 0$.

Прежде всего установим факт лоренц-инвариантности уравнения Дирака. Пусть $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ — шесть вещественных параметров преобразования Лоренца и

$$(\Omega_\omega)^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \omega^\mu{}_\nu + \frac{1}{2!}\,\omega^\mu{}_\lambda\,\omega^\lambda{}_\nu + \,\ldots\,, \qquad \Lambda_\omega = \exp\left[\frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,J^{\mu\nu}\right]\,. \tag{17}$$

Путём прямого вычисления находим:

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda_\omega^{-1}\,x^\mu\,\Lambda_\omega = (\Omega_\omega)^\mu{}_\nu\,x^\nu\,, \tag{18 a}$$

$$\Lambda_\omega\,\frac{\partial}{\partial\,x^\mu}\,\Lambda_\omega^{-1} = (\Omega_\omega)^\nu{}_\mu\,\frac{\partial}{\partial\,x^\nu}\,, \tag{18 b}$$

$$\Lambda_\omega^{-1}\,\gamma^\mu\,\Lambda_\omega = (\Omega_\omega)^\mu{}_\nu\,\gamma^\nu\,. \tag{18 c}$$

Равенство (18 a) коротко можно записать в виде $\tilde{x} = \Omega_\omega\,x$. Из (18 b) и (18 c) следует, что

$$\Lambda_\omega\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\Lambda_\omega^{-1} = \gamma^\mu\,\partial_\mu\,. \tag{19}$$

Определим лоренц-преобразованное дираковское поле как

$$\tilde{\psi}\,(x) \equiv \Lambda_\omega\,\psi\,(x) = \left(\exp\,\frac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,\sigma^{\mu\nu}\right)\,\psi\,(\Omega_\omega^{-1}x)\,. \tag{20}$$

Здесь второе равенство получено при помощи (18 *a*). Комбинируя (19) и (20), находим:

$$i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\psi\,(x) = i\,\Lambda_\omega^{-1}\,(\Lambda_\omega\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\Lambda_\omega^{-1})(\Lambda_\omega\,\psi\,(x)) = \Lambda_\omega^{-1}\,[i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\tilde\psi\,(x)]\,. \tag{21}$$

Поэтому

$$(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m)\,\psi\,(x) = \Lambda_\omega^{-1}\,[(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m)\,\tilde\psi\,(x)]\,, \tag{22}$$

откуда следует лоренц-инвариантность свободного уравнения Дирака. Уравнение Дирака во внешнем калибровочном поле также лоренц-инвариантно, поскольку наряду с (19) имеет место равенство

$$\Lambda_\omega\,\gamma^\mu\,\nabla_\mu\,\Lambda_\omega^{-1} = \gamma^\mu\,\tilde\nabla_\mu = \gamma^\mu(\partial_\mu + ie\tilde A_\mu)\,, \tag{23}$$

если оператор лоренц-преобразования Λ_ω преобразует электромагнитное поле согласно формуле (18 *b*), так что $\tilde A_\mu(x) = (\Omega_\omega)^\nu{}_\mu\,A_\nu(\Omega_\omega^{-1}x)$.

Умножим тождество (20) на оператор Λ_ω^{-1} и сделаем затем дираково сопряжение:

$$\overline{\psi}\,(x) = \tilde\psi^\dagger(x)\,\gamma^0\,(\gamma^0\,\Lambda_\omega^{-1\,\dagger}\,\gamma^0)\,. \tag{24}$$

Поскольку вследствие (11)

$$\gamma^0\,\Lambda_\omega^{-1\,\dagger}\,\gamma^0 = \Lambda_\omega\,, \tag{25}$$

то (24) означает, что

$$\overline{\psi}\,(x) = \tilde{\overline{\psi}}\,(x)\,\Lambda_\omega\,. \tag{26}$$

Уравнение Дирака (16) может быть получено путём вариации фермионного действия

$$\mathcal{S}_\psi = \int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,\overline{\psi}\,(i\,\gamma^\mu\,\nabla_\mu - m)\,\psi\,, \tag{27}$$

в котором комплексные поля $\overline{\psi}$, ψ следует рассматривать как независимые динамические переменные. При помощи формул (22) и (26) устанавливается, что действие (27) лоренц-инвариантно. Вещественность действия (27) устанавливается при помощи равенств (8) и (15).

По определению, вариация действия материи относительно электромагнитного поля даёт электромагнитный ток материи J^μ. В нашем случае имеем:

$$\delta_A\,\mathcal{S}_\psi \equiv -e\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,J^\mu\,\delta\,A_\mu\,, \qquad J^\mu = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\,.$$

2. Нерелятивистский предел

Перейдём к нерелятивистскому пределу в уравнении Дирака (16). Для этого подействуем на уравнение (16) оператором $(i\,\gamma^\mu\,\nabla_\mu + m)$ и учтём, что согласно уравнениям (5) и (10) $\gamma^\mu\,\gamma^\nu = \eta^{\mu\nu} + 2\,\sigma^{\mu\nu}$. Таким образом получим:

$$\{\nabla_\mu\,\nabla^\mu + \sigma^{\mu\nu}\,[\nabla_\mu,\,\nabla_\nu] + m^2\}\,\psi = 0\,.$$

Но $[\nabla_\mu,\,\nabla_\nu] = i\,e\,F_{\mu\nu}$. При переходе к нерелятивистскому пределу следует сделать замену

$$\psi \to e^{-i\,m\,t}\psi\,, \qquad \nabla_0 = \frac{\partial}{\partial\,t} + i\,e\,A_0 \to \frac{\partial}{\partial\,t} + i\,e\,A_0 - i\,m\,, \qquad (\nabla_0)^2 \to -m^2 - 2\,i\,m\left(\frac{\partial}{\partial\,t} + i\,e\,A_0\right).$$

Членами, не содержащими m (точнее — $m\,c^2$), мы вправе пренебречь в нерелятивистском пределе. С учётом этого последнее уравнение для дираковского поля принимает вид

$$i\,\dot\psi = \left\{-\frac{1}{2\,m}\,\nabla_i^2 + \frac{i\,e}{2\,m}\,\sigma^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu} + e\,A_0\right\}\psi = \left\{-\frac{1}{2\,m}\,\nabla_i^2 - \frac{e}{m}\left(\frac{i}{2}\,\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk}\right)H^i + \frac{i\,e}{m}\,\sigma^{0i}E^i + e\,A_0\right\}\psi\,. \tag{28}$$

Здесь учтено, что согласно определению электрическое $\mathbf{E}$ и магнитное $\mathbf{H}$ поля связаны с тензором электромагнитного поля следующими формулами: $E^i = F^{io}$, $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}H^k$. Далее работаем в стандартном представлении (7), в котором

$$\sigma^{ij} = -\frac{i}{2}\,\varepsilon_{ijk}\begin{pmatrix}\sigma^k & 0\\ 0 & \sigma^k\end{pmatrix}, \qquad \sigma^{0i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & \sigma^i\\ \sigma^i & 0\end{pmatrix}. \tag{29}$$

Рассмотрим плоскую волну

$$\psi_k = e^{-i\,m\,t - i\,k\,x} u_k\,, \qquad u_k = \mathrm{const}\;.$$

Для покоящейся частицы $(k^\mu = 0)$ свободное уравнение Дирака принимает вид

$$(\gamma^0 - 1)\,u = 0\,,$$

то есть $\chi = 0$ (см. (14)). Нетрудно проследить, что при малых k вследствие уравнения Дирака имеет место оценка $\chi_k \sim (|\mathbf{k}|/m)\,\varphi_k$, и потому в нерелятивистском пределе χ следует положить равным нулю. Поэтому из (28) для верхней компоненты φ следует уравнение Паули:

$$i\,\frac{\partial}{\partial\,t}\,\varphi = \left\{-\frac{1}{2\,m}\,\nabla_i^2 - \frac{e}{m}\,\left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right)\,\mathbf{H} + e\,A_0\right\}\,\varphi\,. \tag{30}$$

Так как оператор спина электрона $\mathbf{s} = (1/2)\,\boldsymbol{\sigma}$ (см. задачу **2**. в)), то уравнение Паули показывает, что в рассмотренном приближении магнитный момент электрона

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m}\,\mathbf{s}\,. \tag{31}$$

3. Квантование дираковского поля

Пусть $\dot\psi = (\partial/\partial\,t)\,\psi$. Определим стандартным образом обобщённый импульс дираковского поля:

$$\delta_{\dot\psi}\mathcal{S}_\psi = \int \mathrm{d}\,t \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\pi_\psi\,\delta\dot\psi\,.$$

Отсюда и из (27) имеем:

$$\pi_\psi = i\,\overline{\psi}\,\gamma^0 = i\,\psi^\dagger\,. \tag{32}$$

Дираковский гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_\psi = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\pi_\psi\dot\psi - \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\psi^\dagger(-i\,\alpha^i\,\nabla_i + m\,\gamma^0 + e\,A_0)\,\psi\,, \qquad \alpha^i \equiv \gamma^0\,\gamma^i\,, \qquad (\alpha^i)^\dagger = \alpha^i\,. \tag{33}$$

Оператор в круглых скобках в (33) — эрмитовский. Поэтому имеет смысл задача о собственных функциях этого оператора. Рассмотрим эту задачу для случая свободного дираковского поля, когда $A_\mu = 0$, что предполагается до конца этого пункта.

Уравнение для собственных функций оператора Гамильтона–Дирака в свободной теории имеет вид

$$(-i\,\alpha^i\,\partial_i + m\,\gamma^0)\,\psi_{\mathbf{k}} = \epsilon_{\mathbf{k}}\,\psi_{\mathbf{k}}\,. \tag{34}$$

Решение этого уравнения ищется в виде бегущих волн $\psi_{\mathbf{k}}(x) = u_{\mathbf{k}}\,e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}$, амплитуды которых удовлетворяют уравнениям

$$(\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{k} + m\,\gamma^0 - \epsilon_{\mathbf{k}})\,u_{\mathbf{k}} = 0\,. \tag{35}$$

Умножая последнее уравнение на $(\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{k} + m\,\gamma^0 + \epsilon_{\mathbf{k}})$ и учитывая, что

$$\gamma^0\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\alpha}\,\gamma^0 = 0\,, \qquad \alpha^i\,\alpha^j + \alpha^j\,\alpha^i = 2\,\delta^{ij}\,, \tag{36}$$

получаем

$$(\epsilon_{\mathbf{k}}^2 - m^2 - \mathbf{k}^2)\,u_{\mathbf{k}} = 0\,.$$

Отсюда видно, что при $\epsilon_{\mathbf{k}} = \pm\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2}$ уравнение (35) имеет решение. Если $u_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет уравнению (35), то $\tilde u_{\mathbf{k}} = \gamma^0\,\gamma^5\,u_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет уравнению

$$(\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{k} + m\,\gamma^0 + \epsilon_{\mathbf{k}})\,\tilde u_{\mathbf{k}} = 0\,. \tag{37}$$

Поэтому имеется два независимых решения уравнения (35) с $\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} = \omega_k$ и два независимых решения с $\epsilon_{\mathbf{k}} = -\sqrt{m^2 + \mathbf{k}^2} = -\omega_k$. Эти решения называются положительно и отрицательно частотными. Далее положительно частотные решения с амплитудой $u_{\mathbf{k}}$ обозначается u_k, а отрицательно частотные решения с амплитудой $u_{(-\mathbf{k})}$ обозначается u_{-k}. Для любого 4-вектора p^μ введём обозначение $\gamma^\mu p_\mu \equiv \not{p}$. Тогда уравнение (35) для положительно и отрицательно частотных мод записывается как

$$(\not{k} - m)\, u_k = 0\,, \tag{38 a}$$

$$(\not{k} + m)\, u_{-k} = 0\,, \tag{38 b}$$

где $k^\mu = (\omega_k,\ \mathbf{k})$. Заметим, что если ψ_1 и ψ_2 — дираковские спиноры, то $\overline{\psi}_1\psi_2$ есть лоренц-инвариант, а $\overline{\psi}_1\gamma^\mu\psi_2$ — 4-вектор. Поэтому мы примем лоренц-инвариантные условия нормировки:

$$\overline{u}_k\, u_k = 2\,m\,, \qquad \overline{u}_{-k}\, u_{-k} = -2\,m\,. \tag{39}$$

При этом предполагается, что спиноры $u_{\pm k}$ получаются (с точностью до фазового множителя) из спиноров в системе покоя частицы при помощи соответствующего преобразования Лоренца. Равенства (39) согласованы с равенствами

$$\overline{u}_k\, \gamma^\mu\, u_k = \overline{u}_{-k}\, \gamma^\mu\, u_{-k} = 2\, k^\mu\,. \tag{40}$$

Для проверки равенств (39)-(40) заметим, что в системе покоя частицы, где $k^\mu = (m,\, \mathbf{0})$, уравнения (38) принимают вид $\gamma^0 u_{\pm k} = \pm u_{\pm k}$, из которых непосредственно вытекают следующие соотношения:

$$u^\dagger_{\pm k} = \pm \overline{u}_{\pm k}\,, \qquad \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}\, u_{\pm k} = \mp \boldsymbol{\gamma}\, u_{\pm k}\,.$$

Умножая скалярно соответственно левые и правые части последних уравнений, получаем:

$$\overline{u}_{\pm k}\boldsymbol{\gamma}\, u_{\pm k} = -\overline{u}_{\pm k}\boldsymbol{\gamma}\, u_{\pm k} = 0\,.$$

Таким образом в системе покоя частицы

$$\overline{u}_{\pm k}\gamma^\mu u_{\pm k} = (u^\dagger_{\pm k} u_{\pm k},\, 0,\, 0,\, 0)\,.$$

Так как $u^\dagger_{\pm k} u_{\pm k} > 0$, то примем нормировку $u^\dagger_{\pm k} u_{\pm k} = 2m$. Тогда равенства (40) в любой системе отсчёта получаются путём преобразования Лоренца. Теперь умножим равенства (38) на $\overline{u}_{\pm k}$ соответственно и учтём (40):

$$m\, \overline{u}_{\pm k}\, u_{\pm k} = \pm \overline{u}_{\pm k}\, \gamma^\mu\, u_{\pm k}\, k_\mu = \pm 2\, m^2\,.$$

Полученные равенства равносильны равенствам (39).

При помощи явных вычислений легко найти, что в стандартном представлении (7) решения уравнений (38) имеют вид

$$u_k = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_k + m}\, w \\ \sqrt{\omega_k - m}\, (\mathbf{n}\,\boldsymbol{\sigma})\, w \end{pmatrix}, \qquad u_{-k} = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_k - m}\, (\mathbf{n}\,\boldsymbol{\sigma})\, w' \\ \sqrt{\omega_k + m}\, w' \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\,, \qquad w^\dagger w = 1\,, \qquad w'^\dagger w' = 1\,. \tag{41}$$

В системе покоя $(\omega_k = m)$ имеем:

$$u_k = \sqrt{2\,m} \begin{pmatrix} w \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_{-k} = \sqrt{2\,m} \begin{pmatrix} 0 \\ w' \end{pmatrix}, \tag{42}$$

то есть w (w') представляет собой тот двухкомпонентный спинор в трёхмерном пространстве, к которому сводится в нерелятивистском пределе амплитуда волны. Сопрягая (41), получаем:

$$\overline{u}_k = (\sqrt{\omega_k + m}\, w^\dagger,\ -\sqrt{\omega_k - m}\, w^\dagger\, (\mathbf{n}\,\boldsymbol{\sigma}))\,, \qquad \overline{u}_{-k} = (\sqrt{\omega_k - m}\, w'^\dagger\, (\mathbf{n}\,\boldsymbol{\sigma}),\ -\sqrt{\omega_k + m}\, w'^\dagger)\,. \tag{43}$$

При помощи формул (41) и (43) равенства (39) и (40) получаются непосредственно. Ортонормированный базис в спинорном пространстве $\{w\}$ $(\{w'\})$ состоит из двух элементов, которые выбираются ортонормированными:

$$w^\alpha = \sum_{s=1,2} a_s\, w^\alpha_{(s)}\,, \qquad \alpha = 1, 2\,, \qquad \sum_{\alpha=1,2} w^{\alpha\,*}_{(s)}\, w^\alpha_{(s')} = \delta_{s\,s'}\,, \qquad \sum_{s=1,2} w^\alpha_{(s)}\, w^{\beta\,*}_{(s)} = \delta_{\alpha\beta}\,. \tag{44}$$

Везде $\alpha,\ \beta, \ldots$ — спинорные индексы, а индексы $s,\ s', \ldots$ нумеруют спиноры. Аналогичные формулы имеют место для штрихованных спиноров. Обозначим через $u_{\pm k\, s}$, $s = 1, 2$ дираковские спиноры (41), в которых сделаны подстановки $w \to w_{(s)}$, $w' \to w'_{(s)}$. Тогда при помощи (40) и (41) получаем:

$$u^\dagger_{k\, s} u_{k\, s'} = 2\, \omega_k\, \delta_{s\, s'}\,, \qquad u^\dagger_{-k\, s} u_{-k\, s'} = 2\, \omega_k\, \delta_{s\, s'}\,, \qquad u^\dagger_{k\, s} u_{-p\, s'} = 0 \ \text{ если } \mathbf{p} = -\,\mathbf{k}\,. \tag{45}$$

Последнее равенство в (45) является следствием того, что $u^\dagger_{k\, s}$ и $u_{-p\, s'}$ при $\mathbf{p} = -\,\mathbf{k}$ являются собственными векторами эрмитовой матрицы (35) с разными собственными значениями.

Теперь мы можем выписать квантованное дираковское поле:

$$\psi\,(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\, \omega_k}} \sum_{s=1,2} \Big[a_{\mathbf{k}\, s}\, u_{k\, s}\, e^{i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} + b^\dagger_{\mathbf{k}\, s}\, u_{-k\, s}\, e^{-i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} \Big]\,,$$

$$\overline{\psi}\,(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\, \omega_k}} \sum_{s=1,2} \Big[b_{\mathbf{k}\, s}\, \overline{u}_{-k\, s}\, e^{i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} + a^\dagger_{\mathbf{k}\, s}\, \overline{u}_{k\, s}\, e^{-i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}} \Big]\,. \tag{46}$$

Далее показывается, что множество величин $\{a_{\mathbf{k}\, s},\ b_{\mathbf{k}\, s},\ a^\dagger_{\mathbf{k}\, s},\ b^\dagger_{\mathbf{k}\, s}\}$ являются фермиевскими операторами уничтожения и рождения. При помощи соотношений (38) и (45) вычисляем значение свободного гамильтониана (33) на полях (46):

$$\mathcal{H}_{0\, \psi} = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \omega_k \sum_{s=1,2} (a^\dagger_{\mathbf{k}\, s} a_{\mathbf{k}\, s} - b_{\mathbf{k}\, s} b^\dagger_{\mathbf{k}\, s})\,. \tag{47}$$

Находим также оператор электрического заряда:

$$Q = e \int \mathrm{d}^{(3)}\, x\, J^0 = e \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3} \sum_{s=1,2} (a^\dagger_{\mathbf{k}\, s} a_{\mathbf{k}\, s} + b_{\mathbf{k}\, s} b^\dagger_{\mathbf{k}\, s})\,. \tag{48}$$

Обратим внимание на то, что условия квантования, определяющие фермионный вакуум, должны иметь вид

$$a_{\mathbf{k}\, s}\, |\, 0\, \rangle = 0\,, \qquad b_{\mathbf{k}\, s}\, |\, 0\, \rangle = 0\,. \tag{49}$$

Действительно, пусть $x^0 > y^0$ и рассмотрим величину

$$\langle\, 0\, |\, \psi\,(x)\, \overline{\psi}\,(y)\, |\, 0\, \rangle\,, \tag{50}$$

где $\psi\,(x)$ и $\overline{\psi}\,(y)$ — дираковские поля в представлении Гейзенберга. Гейзенберговские поля представляются согласно (46) с той лишь поправкой, что в (46) производятся замены $\exp\,(\pm i\, \mathbf{k}\, \mathbf{x}) \to \exp\,(\mp i\, k\, x)$, где $k\, x = \omega_k\, x^0 - \mathbf{k}\, \mathbf{x}$. Действительно, вследствие (38) в результате этой замены экспонент поля (46) удовлетворяют свободному уравнению Дирака. Поэтому величина (50) равна, как и в скалярной теории, амплитуде распространения частицы, рождённой в точке y и распространяющейся в точку x. Вследствие условий (49) эта амплитуда является суперпозицией амплитуд с импульсом $\mathbf{k}$, содержащих множитель $\exp\,[-i\, \omega_k\, (x^0 - y^0)]$, то есть суперпозицией положительночастотных волн. Такая зависимость от времени означает, что распространяется частица с положительной энергией. Амплитуда распространения скалярной частицы из точки y в точку x (см. лекцию 2) $\langle\, 0\, |\, \phi\,(x)\, \phi\,(y)\, |\, 0\, \rangle$ содержит такую же зависимость от времени. Условия квантования, отличные от (49), нарушили бы эту закономерность. Проведенное рассмотрение подтверждает правильность условий квантования (49).

Так как $\pi_\psi = i\, \psi^\dagger$, то одновременные перестановочные соотношения дираковских полей должны иметь вид либо

$$[\psi_a(x),\ \psi^\dagger_b(y)] = \delta_{a\, b}\, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,, \tag{51}$$

либо

$$\{\psi_a(x),\ \psi^\dagger_b(y)\} \equiv \psi_a(x)\, \psi^\dagger_b(y) + \psi^\dagger_b(y)\, \psi_a(x) = \delta_{a\, b}\, \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})\,. \tag{52}$$

Вариант (51) реализуется, если (выписываются лишь ненулевые (анти)коммутаторы)

$$[a_{\mathbf{k}\, s},\ a^\dagger_{\mathbf{p}\, s'}] = [b^\dagger_{\mathbf{k}\, s},\ b_{\mathbf{p}\, s'}] = (2\,\pi)^3\, \delta_{s\, s'}\, \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p})\,, \tag{53}$$

а вариант (52) — если

$$\{a_{\mathbf{k}\,s},\, a^\dagger_{\mathbf{p}\,s'}\} = \{b_{\mathbf{k}\,s},\, b^\dagger_{\mathbf{p}\,s'}\} = (2\,\pi)^3\,\delta_{s\,s'}\,\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{p})\,. \tag{54}$$

Действительно, для (51) при помощи (53) и для (52) при помощи (54) получаем:

$$\int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\frac{1}{2\,\omega_k}\,\sum_{s=1,2}\Big[e^{i\,\mathbf{k}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,u_{k\,s}\,\overline{u}_{k\,s} + e^{-i\,\mathbf{k}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,u_{-k\,s}\,\overline{u}_{-k\,s}\Big]\,\gamma^0\,. \tag{55}$$

Теперь учтём, что

$$\sum_{s=1,2} u_{\pm k\,s}\,\overline{u}_{\pm k\,s} = \not k \pm m\,. \tag{56}$$

Соотношения (56) следуют из равенств

$$\overline{u}_{\pm k\,s}\,u_{\pm k\,s'} = \pm 2\,m\,\delta_{s\,s'}\,, \qquad \overline{u}_{k\,s}\,u_{-k\,s'} = 0\,, \tag{57}$$

уточняющих условия нормировки (39), и уравнений (38). Последнее из равенств (57) легко проверяется в системе отсчёта, в которой $\mathbf{k}=0$. При помощи (38) и (57) немедленно устанавливается, что все матричные элементы вида $\overline{u}_{\pm k\,s'}\,\ldots\,u_{\pm k\,s''}$ 4×4 матриц в левых и правых частях равенств (56) совпадают. При помощи (56) выражение (55) преобразуется к виду

$$\int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\frac{1}{2\,\omega_k}\,\sum_{s=1,2}\Big[e^{i\,\mathbf{k}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,(\omega_k\,\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{k} + m) + e^{-i\,\mathbf{k}\,(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\,(\omega_k\,\gamma^0 - \boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{k} - m)\Big]\,\gamma^0 = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,,$$

что и требовалось.

Теперь покажем, что коммутационные соотношения (53) неприемлемы с физической точки зрения. Действительно, с учётом условий квантования (49) КС (53) приводят к индефинитной метрике в пространстве состояний. Например, если $|\,\mathbf{k}\,s\rangle = b^\dagger_{\mathbf{k}\,s}\,|\,0\,\rangle$, то $\langle\mathbf{k}\,s\,|\,\mathbf{k}\,s\rangle < 0$. Поэтому остаётся единственная возможность (52), (54). Выпишем дополняющие (52), (54) одновременные антикоммутационные соотношения:

$$\{\psi_a(x),\,\psi_b(y)\} = \{\overline{\psi}_a(x),\,\overline{\psi}_b(y)\} = 0\,,$$

$$\{a_{\mathbf{k}\,s},\,a_{\mathbf{p}\,s'}\} = \{b_{\mathbf{k}\,s},\,b_{\mathbf{p}\,s'}\} = \{a^\dagger_{\mathbf{k}\,s},\,a^\dagger_{\mathbf{p}\,s'}\} = \{b^\dagger_{\mathbf{k}\,s},\,b^\dagger_{\mathbf{p}\,s'}\} = \{a_{\mathbf{k}\,s},\,b_{\mathbf{p}\,s'}\} = \{a_{\mathbf{k}\,s},\,b^\dagger_{\mathbf{p}\,s'}\} = 0\,. \tag{58}$$

Приведём оператор Гамильтона–Дирака (47) к нормальному виду при помощи (54) (сравни с (38 Л7)):

$$\mathcal{H}_{0\,\psi} = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\omega_k\,\sum_{s=1,2}(a^\dagger_{\mathbf{k}\,s}a_{\mathbf{k}\,s} + b^\dagger_{\mathbf{k}\,s}b_{\mathbf{k}\,s}) + \mathcal{E}_{0\,D}\,, \qquad \mathcal{E}_{0\,D} = -2\,V\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\omega_k\,, \tag{59}$$

где V — объём пространства. Аналогично для электрического заряда (48) получаем:

$$Q = e\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\sum_{s=1,2}(a^\dagger_{\mathbf{k}\,s}a_{\mathbf{k}\,s} - b^\dagger_{\mathbf{k}\,s}b_{\mathbf{k}\,s}) + Q_{0\,D}\,, \qquad Q_{0\,D} = 2\,e\,V\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,. \tag{60}$$

Из (59) и (60) мы видим, что плотность энергии и заряда в теории Дирака равны $(-\infty)$ (поскольку $e<0$). Если эти постоянные значения $\mathcal{E}_{0\,D}$ и $Q_{0\,D}$ вычеркнуть, то энергия любого фермионного состояния (за исключением вакуумного с нулевой энергией) положительна, а заряд равен $e\times$(число частиц $-$ число античастиц). Считается, что частицы порождаются операторами $a^\dagger$, а античастицы — операторами $b^\dagger$. Первые называются электронами, а вторые — позитронами. Например, одноэлектронное состояние

$$|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = \sqrt{2\,\omega_p}\,a^\dagger_{\mathbf{p}\,s}\,|\,0\,\rangle\,, \qquad \langle\,\mathbf{q}\,s'\,|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = (2\,\pi)^3\,2\,\omega_p\,\delta_{s\,s'}\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\,,$$

а однопозитронное состояние

$$|(+)\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = \sqrt{2\,\omega_p}\,b^\dagger_{\mathbf{p}\,s}\,|\,0\,\rangle\,.$$

Оператор импульса дираковского поля (см. Приложение C)

$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{0\,\psi} = -i\int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\psi^\dagger \boldsymbol{\nabla}\,\psi = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\,\mathbf{k}\sum_{s=1,2}(a^\dagger_{\mathbf{k}\,s}a_{\mathbf{k}\,s} + b^\dagger_{\mathbf{k}\,s}b_{\mathbf{k}\,s})\,.$$

Имеем:

$$\mathcal{H}_{0\,\psi}\,|\,0\,\rangle = \boldsymbol{\mathcal{P}}_{0\,\psi}\,|\,0\,\rangle = 0\,,$$
$$\mathcal{H}_{0\,\psi}\,|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = \omega_p\,|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle\,,\qquad \mathcal{H}_{0\,\psi}\,|(+)\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = \omega_p\,|(+)\,\mathbf{p}\,s\,\rangle\,,$$
$$\boldsymbol{\mathcal{P}}_{0\,\psi}\,|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = \mathbf{p}\,\,|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle\,,\qquad \boldsymbol{\mathcal{P}}_{0\,\psi}\,|(+)\,\mathbf{p}\,s\,\rangle = \mathbf{p}\,\,|(+)\,\mathbf{p}\,s\,\rangle\,.$$

Таким образом, операторы рождения порождают состояния с теми импульсами, которые содержатся в обозначениях этих операторов. Из (58) следует, что $(a_{\mathbf{k}\,s})^2 = (b_{\mathbf{k}\,s})^2 = 0$. Последние равенства означают, что в фермионной системе в одном состоянии не может находиться более одной частицы. Таким образом, имеется фундаментальное различие между бозонными и фермионными системами.

Описанная ситуация в теории Дирака интерпретируется следующим образом. В теории имеется равное число состояний с положительной и отрицательной энергией. Вакуумное состояние — это такое состояние, в котором все состояния с отрицательной энергией заполнены, а все состояния с положительной энергией — пустые. Электронные состояния получаются путём заполнения положительноэнергетических уровней, а позитронные — путём освобождения (создания дырок) некоторых заселённых отрицательночастотных состояний. При этом энергия и заряд относительно основного состояния возрастают (помните, что $e < 0$). Поэтому энергия и заряд позитронов положительны. Заметим, что антикоммутационные соотношения симметричны относительно перестановок операторов рождения и уничтожения. Таким образои ответ на вопрос, какие операторы являются операторами рождения, а какие — операторами уничтожения, а также как заполняется вакуум, определяется общим знаком перед гамильтонианом.

Обозначим через $|f;\,0\rangle$ ложный вакуум, то есть такое состояние, в котором и положительно- и отрицательночастотные состояния не заполнены. Такое состояние удовлетворяет условиям $a_{\mathbf{k}\,s}\,|f;\,0\rangle = 0$, $b^\dagger_{\mathbf{k}\,s}\,|f;\,0\rangle = 0$. Это — действительно не заполненное состояние, поскольку оно обращает в нуль операторы Гамильтона (47) и заряда (48). Кроме того, $\psi\,|f;\,0\rangle = 0$. В теории с таким вакуумом следовало бы сделать переобозначение $b^\dagger_{\mathbf{k}\,s} \longleftrightarrow b_{\mathbf{k}\,s}$. Мы видим, что с физической точки зрения такая теория неудовлетворительна, поскольку в ней существуют и распространяются во времени состояния с отрицательной энергией.

4. Алгебра матриц Дирака

Из соотношений (5) вытекает ряд соотношений между γ-матрицами, необходимыми при конкретных вычислениях. Напрмер,

$$\eta_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu \equiv \gamma_\mu\gamma^\mu = 4\,, \tag{61}$$

где $\gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Далее:

$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = -2\,\gamma^\nu\,,\qquad \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\mu = 4\,\eta^{\lambda\nu}\,,\qquad \gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = -2\,\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\,,$$
$$\gamma_\mu\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu = 2\,(\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu\gamma^\rho + \gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma)\,. \tag{62}$$

Введём обозначение

$$T^{\mu_1\,\mu_2\,\cdots\,\mu_n} = \frac{1}{4}\,\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\,\ldots\,\gamma^{\mu_n})\,. \tag{63}$$

Очевидно

$$4\,T^\mu = \mathrm{tr}\,\gamma^\mu = 0\,, \tag{64}$$

так как из (18 c) следует, что $\mathrm{tr}\,\gamma^\mu = (\Omega_\omega)^\mu{}_\nu\,\mathrm{tr}\,\gamma^\nu$. Из (5) находим, что

$$T^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} \tag{65}$$

(след единичной 4×4-матрицы равен 4). Протаскивая в $T^{\lambda\mu\nu\rho}$ матрицу γ^λ под знаком следа слева направо и пользуясь при этом (5) и (65), получаем

$$T^{\lambda\mu\nu\rho} = \eta^{\lambda\mu}\eta^{\nu\rho} - \eta^{\lambda\nu}\eta^{\mu\rho} + \eta^{\lambda\rho}\eta^{\mu\nu}\,. \tag{66}$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{tr}\,\gamma^5 = 0\,. \tag{67}$$

Имеем также:

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\lambda\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = i\,\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,. \tag{68}$$

Отметим, что след от любого нечётного числа γ-матриц равен нулю.

5. Дискретные симметрии уравнения Дирака

А. *Пространственная инверсия* (P-*чётность*).

В результате этой инверсии пространственные компоненты 4-векторов изменяют знак, а временные компоненты остаются неизменными. Пусть штрих сверху отмечает преобразованные величины. Тогда

$$x'^{\,0} = x^0\,, \qquad \mathbf{x}' = -\mathbf{x}\,, \qquad J'^{\,0}(x^0,\mathbf{x}) = J^0(x^0,-\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{J}'(x^0,\mathbf{x}) = -\mathbf{J}\,(x^0,-\mathbf{x})\,. \tag{69}$$

Кроме того мы потребуем, чтобы преобразованное дираковское поле так же, как и исходное поле, удовлетворяло уравнению Дирака.

Легко проверить, что если

$$\psi'\,(x^0,\mathbf{x}) \equiv \psi_P(x^0,\mathbf{x}) = \gamma^0\,\psi\,(x^0,-\mathbf{x})\,, \tag{70}$$

то все перечисленные требования удовлетворяются.

Действительно, для $J'^{\mu}\,(x) = \overline{\psi}\,'\,(x)\gamma^\mu\,\psi'\,(x)$ имеем соотношения (69) вследствие свойств γ-матриц (5) и (8). Кроме того, из уравнения Дирака вытекает уравнение

$$(i\,\gamma^\mu\,\nabla_\mu - m)\,\psi_P(x^0,\mathbf{x}) = 0\,, \tag{71}$$

Наоборот, из последнего уравнения следует уравнение Дирака для поля $\psi\,(x)$. Аналогично показывается, что

$$(\overline{\psi}\,\psi)'\,(x^0,\mathbf{x}) = (\overline{\psi}\,\psi)\,(x^0,-\mathbf{x})\,,$$

то есть величина $(\overline{\psi}\,\psi)$ является скалярной относительно преобразования чётности.

Повторное применение преобразования чётности приводит к тождественному преобразованию.

Б. *Обращение времени* (T-*чётность*).

При обращении времени имеем:

$$x'^{\,0} = -x^0\,, \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x}\,, \qquad J'^{\,0}(x^0,\mathbf{x}) = J^0(-x^0,\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{J}'(x^0,\mathbf{x}) = -\mathbf{J}\,(-x^0,\mathbf{x})\,,$$

$$A'^{\,0}(x^0,\mathbf{x}) = A^0(-x^0,\mathbf{x})\,, \qquad \mathbf{A}'(x^0,\mathbf{x}) = -\mathbf{A}\,(-x^0,\mathbf{x})\,. \tag{72}$$

Уравнение Дирака может сохранять свой вид лишь если дираковское поле сопрягается комплексно, что следует из уравнения Паули, в которое переходит уравнение Дирака в нерелятивистском пределе. О необходимости в данном случае эрмитовского сопряжения состояний и операторов говорит также тот факт, что при обращении времени начальное и конечное состояния меняются местами, но в амплитуды перехода первые входят в бра-представлении, а вторые — в кет-представлении.

Всем этим требованиям удовлетворяет преобразование дираковского поля вида

$$\psi'(x^0,\mathbf{x}) \equiv \psi_T(x^0,\mathbf{x}) = U_T\overline{\psi}^{\,t}(-x^0,\mathbf{x})\,, \qquad \overline{\psi}_T(x^0,\mathbf{x}) = -\psi^t(-x^0,\mathbf{x})\,U_T\,, \tag{73}$$

где в спинорном и стандартном представлениях

$$U_T = \gamma^3\gamma^1\gamma^0\,, \qquad U_T^2 = -1\,. \tag{74}$$

Имеем

$$U_T\gamma^{0\,t} = \gamma^0\,U_T\,, \qquad U_T\boldsymbol{\gamma}^t = -\boldsymbol{\gamma}\,U_T\,. \tag{75}$$

Поскольку при обращении времени переставляются начальное и конечное состояния, то формулы преобразования (72)-(75) должны быть дополнены правилом, согласно которому всякое произведение операторов преобразуется в произведение преобразованных операторов в обратном порядке.

При помощи формул (73)-(75) устанавливаем, что поле ψ_T удовлетворяет уравнению Дирака, если поле $\overline{\psi}$ удовлетворяет сопряжённому уравнению Дирака, и наоборот. Кроме того, согласно (73)-(75) и указанному правилу

$$(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)_T(x^0,\,\mathbf{x}) = -(\psi^t U_T\gamma^\mu U_T\overline{\psi}^{\,t})^t(-x^0,\,\mathbf{x}) = \eta_{\mu\mu}(\psi^t\gamma^{\mu\,t}\overline{\psi}^{\,t})^t(-x^0,\,\mathbf{x}) = \eta_{\mu\mu}(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)\,(-x^0,\,\mathbf{x})\,. \quad (76)$$

Здесь отсутствует суммирование по индексу μ.

B. *Зарядовое сопряжение* (*C-чётность*).

Из (46) и (49) видно, что поля ψ и $\overline{\psi}$ уничтожают частицу и античастицу, соответственно, которые имеют взаимно противоположные заряды. Поэтому операция зарядового сопряжения должна сопровождаться операцией дираковского сопряжения полей. При этом векторный ток должен менять знак:

$$J'^\mu(x) \equiv J_C(x) = -J^\mu(x)\,. \quad (77)$$

Следует также считать, что при зарядовом сопряжении изменяет знак либо электрический заряд, либо 4-потенциал. Кроме того, исходные и зарядово-сопряжённые поля должны одновременно удовлетворять уравнению Дирака.

Все указанные требования выполнены, если

$$\psi'(x) \equiv \psi_C(x) = U_C\overline{\psi}^{\,t}(x)\,, \qquad \overline{\psi}_C = -\psi^t(x)\,U_C^{-1}\,, \quad (78)$$

причём в спинорном и стандартном представлениях

$$U_C = i\,\gamma^2\gamma^0\,, \qquad U_C^{-1}\gamma^\mu U_C = -\gamma^{\mu\,t}\,, \qquad U_C^{-1}\gamma^5 U_C = \gamma^{5\,t}\,, \qquad U_C^{-1}\sigma^{\mu\nu}U_C = -\sigma^{\mu\nu\,t}\,. \quad (79)$$

При помощи (79) легко проверить, что после преобразования (78) и изменения знака 4-потенциала уравнение Дирака переходит в уравнение Дирака для зарядово сопряжённого поля. Кроме того,

$$J'^\mu = -\psi^t U_C^{-1}\gamma^\mu U_C\overline{\psi}^{\,t} = \psi^t\gamma^{\mu\,t}\overline{\psi}^{\,t}\,.$$

Отсюда и из свойства антикоммутативности (52) следует равенство (77).

Повторное применение операции зарядового сопряжения приводят к тождественному преобразованию.

Сформулируем понятие "вещественности"дираковского поля. "Вещественное"дираковское поле называется *майорановским* полем.

Определение. Дираковское поле называется майорановским, если операция зарядового сопряжения (78) не изменяет это поле, то есть если

$$\psi\,(x) = U_C\overline{\psi}^{\,t}(x) = i\,\gamma^2\psi^{\dagger\,t}(x)\,. \quad (80)$$

Формула (80) имеет смысл в спинорном и стандартном представлениях.

Так как уравнение Дирака инвариантно относительно зарядового сопряжения, то майорановское поле может быть решением уравнения Дирака: если поле ψ удовлетворяет уравнению Дирака, то и поле $U_C\overline{\psi}^{\,t}$ также удовлетворяет уравнению Дирака. Поэтому и майорановское поле $(\psi + U_C\overline{\psi}^{\,t})$ удовлетворяет уравнению Дирака.

6. Уравнение Вейля

Пусть поле ψ удовлетворяет уравнению Дирака с нулевой массой $(m = 0)$. Тогда этому же уравнению удовлетворяет и поле $\gamma^5\psi$, а также поля

$$\psi_\pm = \frac{1}{2}\,(1 \mp \gamma^5)\,\psi\,. \quad (81)$$

Два поля (81) называются *правым* и *левым вейлевскими полями*, соответственно.

В спинорном представлении (6)

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \psi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (82)$$

и уравнения Дирака для вейлевских полей имеют вид

$$i\,(\partial_0 + \sigma^i\,\partial_i)\,\varphi = 0\,, \qquad i\,(\partial_0 - \sigma^i\,\partial_i)\,\chi = 0\,. \tag{83}$$

Уравнения (83) называются *уравнениями Вейля.*

Так как генераторы преобразования Лоренца $\sigma^{\mu\nu}$ (10) коммутируют с проекционными операторами $(1/2)(1 \pm \gamma^5)$, то уравнения Вейля Лоренц-инвариантны.

7. Точное решение уравнения Дирака в кулоновом потенциале

Рассмотрим стационарное уравнение Гамильтона-Дирака в кулоновом потенциале (см. (33), (34)):

$$\left(-i\,\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\,\gamma^0 - \frac{Z\,\alpha}{r}\right)\psi = \frac{\epsilon}{\hbar c}\,\psi\,, \qquad \alpha = \frac{e^2}{\hbar\,c}\,. \tag{84}$$

Безразмерная величина α называется *постоянной тонкой структуры.*

Для решения уравнения Дирака (84) в центрально симметричном поле следует пользоваться нерелятивистскими двухкомпонентными спинорными состояниями $\Omega_{j\,l\,M}$, имеющими определённые значения квадрата орбитального момента $l_i = -i\,\varepsilon_{ijk}\,x^j\partial_k$, квадрата полного момента (1) и его проекции M, Из нерелятивистской квантовой механики известно, что

$$\Omega_{l+1/2,\,l,\,M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+M}{2\,j}}\,Y_{l,\,M-1/2} \\ \sqrt{\frac{j-M}{2\,j}}\,Y_{l,\,M+1/2} \end{pmatrix}, \qquad \Omega_{l-1/2,\,l,\,M} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+1-M}{2\,j+2}}\,Y_{l,\,M-1/2} \\ -\sqrt{\frac{j+1+M}{2\,j+2}}\,Y_{l,\,M+1/2} \end{pmatrix},$$

$$\int \Omega^\dagger_{j\,l\,M}\Omega_{j'\,l'\,M'}\,\mathrm{d}\,o = \delta_{j\,j'}\,\delta_{l\,l'}\,\delta_{M\,M'}\,. \tag{85}$$

Так как

$$[\mathbf{j}\,,\,(\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\partial})] = [\mathbf{j}\,,\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n})] = 0\,, \qquad \mathbf{n} = \mathbf{x}\,/r\,, \tag{86}$$

то спиноры

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\partial})\,\Omega_{j\,l\,M}\,, \qquad (\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n})\,\Omega_{j\,l\,M} \tag{87}$$

имеют прежние значения чисел j и M. Однако числа орбитальных моментов спиноров (87) изменяются, поскольку чётности спинора $\Omega_{j\,l\,M}$ и спиноров (87) относительно преобразования $\mathbf{x} \to -\,\mathbf{x}$ противоположны. Так как при заданном значении j для l имеется всего две возможности $l = j \pm (1/2)$, то ясно, что спиноры (87) пропорциональны друг другу:

$$(\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\partial})\,\Omega_{j\,l\,M} = -\left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}\right]\frac{1}{r}\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n})\,\Omega_{j\,l\,M}\,. \tag{88}$$

Коэффициент в равенстве (88) проверяется путём умножения этого равенства слева на $(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n})$.

Будем решать уравнение (84) в стандартном представлении (7) при помощи подстановки

$$\psi = \begin{pmatrix} f\,(r)\,\Omega_{j\,l\,M}(\theta,\,\phi) \\ -i\,g\,(r)\,(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n})\,\Omega_{j\,l\,M}(\theta,\,\phi) \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Спинор (89) имеет определённую чётность относительно операции пространственного сопряжения: согласно (7), (69) и (70) имеем для спинора (89) $\psi_P = (-1)^l\psi$. Так как оператор Дирака–Гамильтона в левой части уравнения (84) коммутирует с оператором P-чётности (см. (70)), то диагонализовать следует одновременно эти два оператора. Подставляя (89) в уравнение (84), пользуясь равенством (88), в результате несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} f' + \frac{1+\varkappa}{r}\,f - \left(m + \epsilon + \frac{Z\,\alpha}{r}\right)\,g = 0\,, \\[2ex] g' + \frac{1-\varkappa}{r}\,g - \left(m - \epsilon - \frac{Z\,\alpha}{r}\right)\,f = 0\,, \end{cases} \tag{90}$$

$$\varkappa = \begin{cases} -(j+1/2) = -(l+1)\,, & \text{если } \ j = l + 1/2 \\ (j+1/2) = l\,, & \text{если } \ j = l - 1/2 \end{cases}\,. \tag{91}$$

Штрих сверху означает производную по r.

Исследуем поведение решений системы уравнений (90) при $r \to 0$ и $r \to \infty$.

При $r \to 0$ система (90) переходит в систему

$$\left\{ \begin{array}{l} r\, f' + (1+\varkappa)\, f - Z\,\alpha\, g = 0\,, \\ r\, g' + (1-\varkappa)\, g + Z\,\alpha\, f = 0\,, \end{array} \right. \tag{92}$$

решение которой ищется в виде $f = a_0 r^\gamma$, $g = b_0 r^\gamma$. Подстановка такого вида f и g в (92) приводит к уравнению

$$\begin{pmatrix} \gamma + 1 + \varkappa & -Z\,\alpha \\ Z\,\alpha & \gamma + 1 - \varkappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0\,. \tag{93}$$

Для существования ненулевого и нормируемого решения уравнения (93) необходимо и достаточно, чтобы

$$\gamma = -1 + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2}\,. \tag{94}$$

Соответствующее ненулевое решение с точностью до общего множителя имеет вид

$$a_0 = Z\,\alpha\,, \qquad b_0 = (\varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2}\,)\,. \tag{95}$$

При $r \to \infty$ система (90) переходит в систему

$$\left\{ \begin{array}{l} f' - (m+\epsilon)\, g = 0\,, \\ g' - (m-\epsilon)\, f = 0\,, \end{array} \right. \tag{96}$$

Мы будем интересоваться лишь дискретными уровнями, для которых $m^2 - \epsilon^2 > 0$. Тогда система уравнений (96) приводит к следующему поведению f и g нормируемых состояний при $r \to \infty$:

$$f \sim e^{-\lambda\, r}\,, \qquad g \sim e^{-\lambda\, r}\,, \qquad \lambda = \sqrt{m^2 - \epsilon^2}\,. \tag{97}$$

Из проведенного рассмотрения видно, что решение системы уравнений (90) в случае дискретных уровней энергии следует искать в виде

$$f = e^{-\lambda\, r} \sum_{s=0}^{\infty} a_s r^{\gamma+s}\,, \qquad g = e^{-\lambda\, r} \sum_{s=0}^{\infty} b_s r^{\gamma+s}\,. \tag{98}$$

В (98) константы γ и λ задаются согласно (94) и (97) соответственно, а коэффициенты a_0 и b_0 — согласно (95).

Подставим анзац (98) в систему (90) и приравняем нулю по отдельности коэффициенты при одинаковых степенях r. Таким образом получается следующая система рекурсионных уравнений:

$$A_s u_{s+1} = B\, u_s\,, \qquad s = 0,\, 1,\, \ldots\,, \qquad u_s = \begin{pmatrix} a_s \\ b_s \end{pmatrix} \qquad u_0 = \begin{pmatrix} Z\,\alpha \\ \varkappa + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2} \end{pmatrix}\,, \tag{99}$$

$$A_s = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2} + s + \varkappa & -Z\,\alpha \\ Z\,\alpha & 1 + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2} + s - \varkappa \end{pmatrix}\,, \qquad B = \begin{pmatrix} \lambda & m+\epsilon \\ m-\epsilon & \lambda \end{pmatrix}\,.$$

Заметим, что самое первое соотношение при степени r^{-1}, связывающее лишь значения a_0 и b_0 между собой, удовлетворяется автоматически вследствие специального выбора u_0 в соответствии с (95).

Так как

$$\det\, A_s = (1+s)\,(1 + s + 2\sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2}) \neq 0\,, \tag{100}$$

то уравнение (99) переписывается в виде

$$u_{s+1} = A_s^{-1} \cdot B \cdot u_s\,, \qquad A_s^{-1} = (\det A_s)^{-1} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2} + s - \varkappa & Z\,\alpha \\ -Z\,\alpha & 1 + \sqrt{\varkappa^2 - (Z\,\alpha)^2} + s + \varkappa \end{pmatrix}\,. \tag{101}$$

Собственные значения матрицы B равны нулю и $2\,\lambda$ и пусть v_1 и v_2 обозначают соответствующие собственные векторы:

$$B\, v_1 = 0\,, \qquad v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{m+\epsilon} \\ -\sqrt{m-\epsilon} \end{pmatrix}\,, \qquad B\, v_2 = 2\,\lambda\, v_2\,, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{m+\epsilon} \\ \sqrt{m-\epsilon} \end{pmatrix}\,. \tag{102}$$

Согласно (100) и (101) при $s \to \infty$

$$A_s^{-1} \to \frac{1}{s}\,. \tag{103}$$

Поэтому, если при достаточно больших s

$$u_s = p\,v_1 + q\,v_2\,, \qquad q \neq 0\,, \tag{104}$$

где p и q — некие числа, то согласно (98), (102) и (103) при $r \to \infty$ функции f и g ведут себя как $e^{\lambda\, r}$. Волновые функции с таким поведением ненормируемы и потому неприемлемы. Чтобы избежать этой ситуации, для некого s мы должны иметь

$$A_s^{-1}\,v_2 = t\,v_1\,. \tag{105}$$

Здесь t — некое число. Действительно, для вектора общего вида (104) $B\,u_s = 2\,\lambda\,q\,v_2$. Если имеет место равенство (105) для некого числа t, то вследствие (102) $u_{s+2} = 0$, рекурсионная цепочка обрывается и волновая функция оказывается нормируемой. При помощи (102) уравнение (105) переписывается как

$$B \cdot A_s^{-1} \cdot v_2 = 0\,, \qquad s = 0,\,1,\,\ldots\,. \tag{106}$$

Ещё одна возможность обрыва рекурсионной цепочки (101), не учтённая в (106), реализуется при $\varkappa < 0$ в случае $u_0 = t\,v_1$ для некого числа t. Действительно, при $\varkappa < 0$ компоненты вектора u_0 разного знака (при $\varkappa > 0$ — одного знака) и уравнение $u_0 = t\,v_1$ может быть реализовано соответствующим подбором параметров ϵ и t. Следовательно, уравнение

$$B\,u_0 = 0 \qquad \text{при} \qquad \varkappa < 0 \tag{107}$$

также является условием квантования энергии.

Поскольку B — вырожденная матрица 2×2, то каждое из уравнений (106) и (107) содержит лишь одно независимое алгебраическое уравнение, решение совокупности которых приводит к следующим значениям уровней энергии связанных состояний:

$$\epsilon = m\,c^2\left[1 + \frac{(Z\,\alpha)^2}{(n_r + \sqrt{(j+1/2)^2 - (Z\,\alpha)^2}\;)^2}\right]^{-1/2}, \qquad n_r = \begin{cases} 0,\,1,\,2,\,\ldots\,, & \text{если}\ \ j = l + 1/2 \\ \quad 1,\,2,\,\ldots\,, & \text{если}\ \ j = l - 1/2 \end{cases}\,. \tag{108}$$

При получении формулы (108) было использовано соотношение (91). Энергия основного состояния получается из формулы (108), если в ней положить $l = 0$, $j = 1/2$, $n_r = 0$:

$$\epsilon_0 = m\,c^2\,\sqrt{1 - (Z\,\alpha)^2}\,. \tag{109}$$

Формулы (108), (109) являются точными и они остаются справедливыми при всех значениях заряда ядра, удовлетворяющих условию $(Z\,\alpha) < 1$. Поскольку $|\varkappa| = j + 1/2$, то согласно (108) имеет место двукратное вырождение (не считая вырождения относительно проекции полного момента M) уровней: энергии при $l = j \pm 1/2$ совпадают, что является точным результатом.

При малых зарядах ядра, когда $(Z\,\alpha) \ll 1$, представляет интерес разложение формулы (108) относительно $(Z\,\alpha)$. Поскольку $\alpha = e^2/\hbar\,c$, то это разложение можно трактовать как учёт релятивистских поправок. Имеем:

$$\epsilon = m\,c^2 - \frac{(Z\,\alpha)^2 m\,c^2}{2\,n^2}\left\{1 + \frac{(Z\,\alpha)^2}{n}\left[\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4\,n}\right]\right\} + O((Z\,\alpha)^6)\,, \qquad n = n_r + j + \frac{1}{2} = 1,\,2,\,\ldots\,. \tag{110}$$

Учёт поправок порядка $O((Z\,\alpha)^6)$ не имеет смысла, поскольку они перекрываются радиационными поправками, имеющими порядок $O(\alpha\,(Z\,\alpha)^4)$ (см. лекцию 13). Формула (110) может быть также получена при помощи ТВ в рамках нерелятивистской квантовой механики, когда спин-орбитальное взаимодействие и релятивистская поправка к кинетической энергии электрона воспринимаются как возмущение (см. задачу (5)).

Задачи

1. Выписать уравнение Дирака для сопряжённого поля $\overline{\psi}$.

2. а) Показать, что векторный ток $J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ сохраняется в силу уравнения Дирака (во внешнем электромагнитном поле), то есть $\partial_\mu J^\mu = 0$.

б) Доказать, что аксиально-векторный ток $J^{5\,\mu} \equiv \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ веществен и в силу уравнения Дирака

$$\partial_\mu J^{5\,\mu} = 2\,i\,m\,\overline{\psi}\gamma^5\psi\,.$$

Это означает, что в безмассовой теории сохраняется также и аксиально-векторный ток (в классической теории).

в) Показать, что полный 4-момент

$$M^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\psi^\dagger i J^{\mu\nu}\psi$$

сохраняется, если поле ψ удовлетворяет свободному уравнению Дирака. Проверить, что в стандартном представлении

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M^{jk} = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\psi^\dagger J^i\psi\,,$$

где J^i совпадает с оператором полного 3-момента (1), если в (1) сделать замену

$$\frac{1}{2}\sigma^i \longrightarrow \Sigma^i \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\alpha^i\gamma^5\,. \tag{111}$$

Таким образом, в нерелятивистском пределе оператор $\mathbf{s} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$ является оператором спина электрона.

3. Используя закон преобразования дираковских полей при Лоренц–преобразованиях показать, что векторный и аксиально-векторный токи являются 4-векторами.

4. Показать, что уравнение Дирака инвариантно относительно калибровочных преобразований:

$$\psi\,(x) \to e^{i\,e\,\alpha\,(x)}\psi\,(x)\,, \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) - \partial_\mu\alpha\,(x)\,,$$

где $\alpha\,(x)$ — произвольная вещественная функция.

5. Продолжить разложение уравнения Дирака до членов $\sim 1/c^2$ и получить соответствующий гамильтониан для шредингеровской двухкомпонентной волновой функции. Считать, что имеется только электрическое центрально-симметричное внешнее поле $(\mathbf{A} = 0,\ eA_0 = \Phi(r))$. Получить выражение для спин-орбитальной связи в случае атома водорода.

Ответ:

$$H = \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \Phi(r)\right) + \left\{-\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}(\Delta\Phi) + \frac{\hbar^2}{2m^2c^2r}\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,r}(\mathbf{l}\mathbf{s})\right\}\,.$$

6. а) Доказать, что при преобразовании P-чётности

$$J'^{\,5\,\mu}(x^0,\,\mathbf{x}) = -\eta_{\mu\mu}\,J^{\,5\,\mu}(x^0,\,-\mathbf{x})\,, \qquad (\overline{\psi}\gamma^5\psi)'(x^0,\,\mathbf{x}) = -(\overline{\psi}\gamma^5\psi)(x^0,\,-\mathbf{x})\,.$$

Здесь нет суммирования по индексу μ.

б) Показать, что при T- и C-преобразованиях уравнение Дирака сохраняет свой вид.

в) Пусть ψ_{CPT} обозначает поле, возникающее из дираковского поля ψ при последовательном проведении операций обращения времени, затем пространственной инверсии и, наконец, зарядового сопряжения. Выразить ψ_{CPT} через ψ.

г) Показать, что векторный ток майорановского поля тождественно равен нулю.

7. Показать, что уравнения Вейля инвариантны относительно обращения времени и комбинированного CP-преобразования. Существуют ли вейлевско-майорановские (т.е. одновременно вейлевские и майорановские) поля?

Лекция 9

КВАНТОВАНИЕ ФЕРМИОНОВ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА. S-МАТРИЦА И ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА В КЭД

1. Фермионный осциллятор

Рассмотрим гармонический фермионный осциллятор, динамика которого описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \omega\, a^{\dagger}\, a\,, \tag{1}$$

где $a^{\dagger}$ и a — взаимно сопряжённые фермионные операторы рождения и уничтожения:

$$\{a,\, a^{\dagger}\} = 1\,, \qquad a^2 = 0\,, \qquad (a^{\dagger})^2 = 0\,. \tag{2}$$

Основное состояние $|\,0\,\rangle$ определяется условиями

$$a\,|\,0\,\rangle = 0\,, \qquad \langle\,0\,|\,0\,\rangle = 1\,. \tag{3}$$

Очевидно, что в теории имеется ещё лишь одно состояние, ортогональное к основному:

$$|\,1\,\rangle = a^{\dagger}\,|\,0\,\rangle\,, \qquad \langle\,1\,|\,0\,\rangle = \langle\,0\,|\,a\,|\,0\,\rangle = 0\,, \qquad \langle\,1\,|\,1\,\rangle = \langle\,0\,|\,a\,a^{\dagger}\,|\,0\,\rangle = \langle\,0\,|\,0\,\rangle = 1\,. \tag{4}$$

Кроме того, в силу (1)-(3)

$$\mathcal{H}\,|\,0\,\rangle = 0\,, \qquad \mathcal{H}\,|\,1\,\rangle = \omega\,|\,1\,\rangle\,. \tag{5}$$

Простейшая фермионная система (1)-(5) интересна тем, что дираковская система (59 Л8) является суммой простейших ферми-систем.

Обратим внимание на следующий факт. Если бы гамильтониан был равен $\mathcal{H} = -\omega\,\alpha^{\dagger}\,\alpha$, где фермионные операторы $\alpha^{\dagger}$ и α удовлетворяют соотношениям (2), а основное состояние $|f;\,0\rangle$ удовлетворяет условию $\alpha\,|f;\,0\,\rangle = 0$ и $|f;\,1\,\rangle = \alpha^{\dagger}\,|f;\,0\rangle$, то $\mathcal{H}\,|f;\,0\rangle = 0$, $\mathcal{H}\,|f;\,1\,\rangle = -\omega\,|f;\,1\rangle$.

В этом случае энергия возбуждённого состояния меньше энергии основного. Однако путём переопределения $a = \alpha^{\dagger}$, $a^{\dagger} = \alpha$, $|\,0\,\rangle = |f;\,1\,\rangle$, $|\,1\,\rangle = |f;\,0\,\rangle$ мы приходим к ситуации, описанной формулами (1)-(5) с той лишь разницей, что $\mathcal{H} = \omega\,a^{\dagger}\,a - \omega$.

Здесь последнее слагаемое в гамильтониане соответствует энергии вакуума $\mathcal{E}_0$ (59 Л8). Таким образом, после переопределения новое основное состояние совпадает с исходным возбуждённым или заполненным состоянием. Описанная процедура переопределения называется операцией заполнения состояний с отрицательной энергией. В результате, хотя основное состояние имеет отрицательную энергию, все возбуждённые состояния имеют энергию бо́льшую, чем энергия основного состояния. Мы видели, что в квантовой теории Дирака все состояния с отрицательной энергией заполнены. На рис. 12 изображено основное состояние в теории Дирака. Заштрихованная область спектра с энергиями меньше $(-m)$ полностью заполнена.

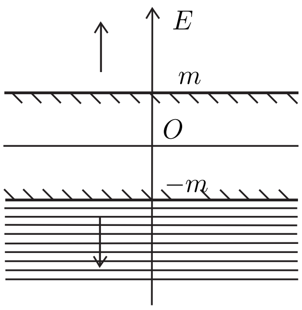


Рис. 12

2. Представление фермионных амплитуд при помощи функциональных интегралов

Для решения этой задачи необходимо использование основ математического анализа над грассмановой алгеброй.

Пусть $\{a_{\alpha},\, a^{*}_{\alpha}\}$ — образующие алгебры Грассмана над комплексными числами, $\alpha = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n$, причём

$$(a_{\alpha})^{*} = a^{*}_{\alpha}\,, \qquad (a^{*}_{\alpha})^{*} = a_{\alpha}\,. \tag{6}$$

По определению

$$a_{\alpha}\, a_{\beta} + a_{\beta}\, a_{\alpha} = a^{*}_{\alpha}\, a^{*}_{\beta} + a^{*}_{\beta}\, a^{*}_{\alpha} = a_{\alpha}\, a^{*}_{\beta} + a^{*}_{\beta}\, a_{\alpha} = 0\,, \qquad c\, a_{\alpha} = a_{\alpha}\, c\,, \qquad c\, a^{*}_{\alpha} = a^{*}_{\alpha}\, c\,, \tag{7}$$

где c — комплексное число. Других соотношений, кроме (7), между образующими грассмановой алгебры нет. Из (7) следует, что

$$a_1^2 = a_2^2 = \ \ldots\ = a_n^2 = (a_1^*)^2 = (a_2^*)^2 = \ \ldots\ = (a_n^*)^2 = 0\,. \tag{8}$$

Отсюда видно, что общий элемент грассмановой алгебры представляется в виде

$$f\,(a,\,a^*) = f = f_{0|0} + \sum_{\alpha_1} f_{\alpha_1|0} a_{\alpha_1} + \sum_{\alpha_1} f_{0|\alpha_1} a^*_{\alpha_1} + \sum_{\alpha_1\alpha_2} f_{\alpha_1|\alpha_2} a_{\alpha_1} a^*_{\alpha_2} + \ \ldots\ +$$

$$+ f_{12\,\ldots\,n|n(n-1)\,\ldots\,1} a_1 a_2\ \ldots\ a_n a^*_n a^*_{n-1}\ \ldots\ a^*_1\,, \tag{9}$$

где коэффициенты $f_{0|0},\ f_{\alpha_1|0}$ и т. д. — комплексные числа. Определим производные на грассмановой алгебре при помощи следующих формул:

$$\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\, a_\beta = \delta_{\alpha\,\beta}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, a^*_\alpha}\, a^*_\beta = \delta_{\alpha\,\beta}\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\, a^*_\beta = 0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, a^*_\alpha}\, a_\beta = 0\,. \tag{10}$$

Представим элемент (9) в двух следующих видах:

$$f = f_0 + a_\alpha\, f_\alpha = \overline{f}_0 + a^*_\alpha\, \overline{f}_\alpha\,, \tag{11}$$

где f_0 и f_α не зависят от a_α, а $\overline{f}_0$ и $\overline{f}_\alpha$ не зависят от a^*_α. (В (11) нет суммирования по α.) Вследствие (7) коэффициенты $f_0,\ f_\alpha,\ \overline{f}_0,\ \overline{f}_\alpha$ определены однозначно элементом (9). Согласно определению (10)

$$\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\, f = f_\alpha\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, a^*_\alpha}\, f = \overline{f}_\alpha\,. \tag{12}$$

Из сказанного следует, что

$$\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\, a_\beta} = -\frac{\partial}{\partial\, a_\beta}\,\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, a^*_\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\, a^*_\beta} = -\frac{\partial}{\partial\, a^*_\beta}\,\frac{\partial}{\partial\, a^*_\alpha}\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\, a^*_\beta} = -\frac{\partial}{\partial\, a^*_\beta}\,\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\,. \tag{13}$$

Интегрирование на алгебре Грассмана определяется с помощью правил

$$\int \mathrm{d}\, a_\alpha\, f = f_\alpha\,, \qquad \int \mathrm{d}\, a^*_\alpha\, f = \overline{f}_\alpha\,. \tag{14}$$

Кратный интеграл понимается как повторный. Например,

$$\int \mathrm{d}\, a^*_\alpha\ \mathrm{d}\, a_\beta\, f \equiv \int \mathrm{d}\, a^*_\alpha \left(\int \mathrm{d}\, a_\beta\, f \right) = \int \mathrm{d}\, a^*_\alpha\, f_\beta\,. \tag{15}$$

Введенное правило интегрирования оправдывается тем, что интеграл от полной производной равен нулю:

$$\int \mathrm{d}\, a_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\, a_\alpha}\, f \right) = 0\,, \qquad \int \mathrm{d}\, a^*_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial\, a^*_\alpha}\, f \right) = 0\,. \tag{16}$$

Из данных определений видно, что дифференциалы грассмановых образующих антиперестановочны:

$$\mathrm{d}\, a_\alpha\ \mathrm{d}\, a_\beta = -\,\mathrm{d}\, a_\beta\ \mathrm{d}\, a_\alpha\,, \qquad \mathrm{d}\, a^*_\alpha\ \mathrm{d}\, a^*_\beta = -\,\mathrm{d}\, a^*_\beta\ \mathrm{d}\, a^*_\alpha\,, \qquad \mathrm{d}\, a_\alpha\ \mathrm{d}\, a^*_\beta = -\,\mathrm{d}\, a^*_\beta\ \mathrm{d}\, a_\alpha\,. \tag{17}$$

Обозначим через

$$\mathrm{d}\, a^*\ \mathrm{d}\, a \equiv \mathrm{d}\, a^*_1\ \mathrm{d}\, a^*_2\ \ldots\ \mathrm{d}\, a^*_n\ \mathrm{d}\, a_n\ \mathrm{d}\, a_{n-1}\ \ldots\ \mathrm{d}\, a_1\,. \tag{18}$$

Имеем:

$$\int \mathrm{d}\, a^*\ \mathrm{d}\, a\, f\,(a,\,a^*) = f_{12\,\ldots\,n|n(n-1)\,\ldots\,1}\,. \tag{19}$$

Пусть полное множество образующих грассмановой алгебры состоит из двух множеств $\{a_\alpha,\ a^*_\alpha\}$ и $\{\eta_\alpha,\ \eta^*_\alpha\}$. Будем называть чётными (нечётными) элементами грассмановой алгебры те элементы, которые разлагаются по чётным (нечётным) суммарным степеням образующих грассмановой алгебры. Суммарная степень (или просто степень) произведения образующих алгебры Грассмана называется чётной (нечётной), если произведение составлено из чётного (нечётного) числа образующих. Таким образом, все образующие грассмановой алгебры являются нечётными элементами.

Пусть
$$\tilde{a}_\alpha = a_\alpha + q_\alpha\,, \qquad \tilde{a}^*_\alpha = a^*_\alpha + p^*_\alpha\,, \tag{20}$$
где $q_\alpha,\ p^*_\alpha$ — нечётные элементы, разлагающиеся лишь по образующим $\{\eta_\alpha,\ \eta^*_\alpha\}$. Согласно данным определениям (сравни с (19))
$$\int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\, f\,(\tilde{a},\, \tilde{a}^*) = f_{12\,\ldots\, n|n(n-1)\,\ldots\,1} = \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\, f\,(a,\, a^*)\,, \tag{21}$$
то есть сдвиг переменных интегрирования согласно равенствам (20) не изменяет значения интеграла.

Сделаем линейную однородную замену образующих грассмановой алгебры:
$$a_\alpha = U_{\alpha\beta} b_\beta\,, \qquad a^*_\alpha = U^*_{\alpha\beta} b^*_\beta\,, \tag{22}$$
или, сокращённо
$$a = U\,b\,, \qquad a^{*\,t} = b^{*\,t}\,U^\dagger\,. \tag{22$'$}$$
Для интеграла (19) имеем:
$$f_{12\,\ldots\, n|n(n-1)\,\ldots\,1} = \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\, f\,(a,\, a^*) = \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\, f\,(U\,b,\, b^{*\,t}\,U^\dagger) =$$
$$= \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\, f_{12\,\ldots\, n|n(n-1)\,\ldots\,1}\,(U_{1\alpha_1} b_{\alpha_1})\ \ldots\ (U_{n\alpha_n} b_{\alpha_n})(U^*_{n\beta_n} b^*_{\beta_n})\ \ldots\ (U^*_{1\beta_1} b^*_{\beta_1}) =$$
$$= f_{12\,\ldots\, n|n(n-1)\,\ldots\,1}\,|\det U|^2 \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\, b_1\ \ldots\ b_n\, b^*_n\ \ldots\ b^*_1\,,$$
то есть
$$\int |\det U|^2\,\mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\ b_1\ \ldots\ b_n\, b^*_n\ \ldots\ b^*_1 = 1\,.$$
Отсюда следует заключение, что (!)
$$|\det U|^2\,\mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a = \mathrm{d}\,b^*\ \mathrm{d}\,b\,. \tag{23}$$
Подчеркнём, что при замене переменных (22) в случае коммутирующих переменных мы имели бы $\mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a = |\det U|^2\,\mathrm{d}\,b^*\ \mathrm{d}\,b$.

Рассмотрим гауссов интграл
$$I = \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\ \ \exp\,(a^*_\alpha A_{\alpha\beta} a_\beta)\,. \tag{24}$$
Будем считать, что все элементы $A_{\alpha\beta}$ — чётные. Имеем:
$$\exp\,(a^*_\alpha A_{\alpha\beta} a_\beta) = 1 + \ \ldots\ + \frac{1}{n!}\,(a^*_\alpha A_{\alpha\beta} a_\beta)^n\,.$$
Нас интересует лишь последнее слагаемое, которое равно
$$(a^*_{\alpha_1} A_{\alpha_1\beta_1} a_{\beta_1})\ \ldots\ (a^*_{\alpha_n} A_{\alpha_n\beta_n} a_{\beta_n}) = n!\,(\det A)\,a^*_1\ \ldots\ a^*_n\,a_n\ \ldots\ a_1 = (-1)^n n!\,(\det A)\,a_1\ \ldots\ a_n\,a^*_n\ \ldots\ a^*_1\,. \tag{25}$$
Поэтому в соответствии с (19) (общий знак здесь нас не интересует)
$$I = (\det A)\,. \tag{26}$$

Рассмотрим теперь интеграл
$$I\,(\eta,\, \eta^*) = \int \mathrm{d}\,a^*\ \mathrm{d}\,a\ \ \exp\,(a^*_\alpha A_{\alpha\beta} a_\beta + i\,\eta^*_\alpha a_\alpha + i\,a^*_\alpha \eta_\alpha)\,, \tag{27}$$

где $\{\eta_\alpha,\, \eta^*_\alpha\}$ — образующие алгебры Грассмана, независимые от образующих $\{a_\alpha,\, a^*_\alpha\}$. Если сдвинуть переменные интегрирования в (27) согласно (20) с $q_\alpha = -i\, A^{-1}_{\alpha\beta}\eta_\beta,\ p^*_\alpha = -i\, \eta^*_\beta A^{-1}_{\beta\alpha}$, то интеграл (27) переписывается как

$$I\,(\eta,\, \eta^*) = \int \mathrm{d}\, a^*\ \mathrm{d}\, a\ \exp\left(a^*_\alpha A_{\alpha\beta} a_\beta\right)\, \exp\left(\eta^*_\alpha A^{-1}_{\alpha\beta}\eta_\beta\right).$$

С учётом (26) окончательно получаем:

$$I\,(\eta,\, \eta^*) = \int \mathrm{d}\, a^*\ \mathrm{d}\, a\ \exp\left(a^*_\alpha A_{\alpha\beta} a_\beta + i\, \eta^*_\alpha a_\alpha + i\, a^*_\alpha \eta_\alpha\right) = (\det A)\, \exp\left(\eta^*_\alpha A^{-1}_{\alpha\beta}\eta_\beta\right). \tag{28}$$

Далее мы будем использовать тот факт, что показатель экспоненты в правой части (28) равен экстремуму показателя экспоненты в левой части (28) относительно переменных интегрирования $\{a_\alpha,\, a^*_\alpha\}$, рассматриваемых как независимые переменные. Действительно, дифференцируя показатель экспоненты в левой части (28) и приравнивая результат нулю, находим экстремальные значения переменных:

$$a^{(cl)}_\alpha = -i\, A^{-1}_{\alpha\beta}\eta_\beta\,, \qquad a^{*\,(cl)}_\alpha = -i\, \eta^*_\beta A^{-1}_{\beta\alpha}\,. \tag{29}$$

Подставляя значения (29) в показатель экспоненты в левой части (28) мы получаем показатель экспоненты в правой части (28). В этом отношении фермионные гауссовы интегралы аналогичны бозонным.

Теперь разработаем аппарат для фермионных операторов и фермионных фоковских пространств в голоморфном представлении. Для простоты ограничимся одной степенью свободы. Обобщение на многомерный случай очевидно.

Голоморфными функциями назовём элементы грассмановой алгебры, зависящие только от a^*:

$$f\,(a^*) = f_0 + f_1\, a^*\,. \tag{30}$$

Множество таких функций образует двумерное пространство, и мы используем их для представления векторов состояний системы (1)-(5). Скалярное произведение в пространстве голоморфных функций определяется формулой

$$\langle\, f\,|\, g\,\rangle = \int \mathrm{d}\, a^*\ \mathrm{d}\, a\, (f\,(a^*))^*\, g\,(a^*)\, e^{-a^* a}\,, \qquad (f\,(a^*))^* = f^*_0 + f^*_1\, a\,. \tag{31}$$

Легко проверить, что

$$\langle\, f\,|\, g\,\rangle = f^*_0 g_0 + f^*_1 g_1 = \langle\, g\,|\, f\,\rangle^*\,. \tag{32}$$

Таким образом, комплексное линейное пространство функций (30) образует двумерное комплексное евклидово (или эрмитово) пространство с ортонормированным базисом ($\psi_0 = 1,\ \psi_1 = a^*$). Согласно (32)

$$\langle\, \psi_0\,|\, \psi_0\,\rangle = \langle\, \psi_1\,|\, \psi_1\,\rangle = 1\,, \qquad \langle\, \psi_0\,|\, \psi_1\,\rangle = 0\,.$$

Операторы $a^\dagger$ и a действуют в пространстве (30) следующим образом:

$$a^\dagger\, f\,(a^*) = a^*\, f\,(a^*)\,, \qquad a\, f\,(a^*) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, a^*}\, f\,(a^*)\,. \tag{33}$$

Если введенный базис представить базисными векторами в двумерном эрмитовом пространстве как

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{34}$$

то операторы $a^\dagger$ и a в этом базисе представляются матрицами

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

откуда очевидна их взаимная сопряжённость, а также правила антикоммутации (2).

Опишем способы задания операторов в голоморфном представлении. Запишем оператор общего вида:

$$A = K_{00} + K_{10}\, a^\dagger + K_{01}\, a + K_{11}\, a^\dagger a\,. \tag{36}$$

Оператору (36) сопоставим его нормальный символ

$$K\,(a^*,\,a) = K_{00} + K_{10}\,a^* + K_{01}\,a + K_{11}\,a^*\,a \tag{37}$$

и ядро

$$A\,(a^*,\,a) = A_{00} + A_{10}\,a^* + A_{01}\,a + A_{11}\,a^*\,a\,. \tag{38}$$

По определению действие оператора (36) задаётся в гломорфном представлении согласно правилу (сравни с (10 Л2))

$$(A\,f)\,(a^*) \equiv \int A\,(a^*,\,\alpha)\,f\,(\alpha^*)\,e^{-\alpha^*\alpha}\,\mathrm{d}\,\alpha^*\,\mathrm{d}\,\alpha\,. \tag{39}$$

Отсюда находим:

$$A\,\psi_0 = A_{00}\,\psi_0 + A_{10}\,\psi_1\,, \qquad A\,\psi_1 = A_{01}\,\psi_0 + A_{11}\,\psi_1\,,$$

откуда видно, что матрица ядра и матрица оператора

$$A_{m\,n} = \langle\, m\,|\,A\,|\,n\,\rangle\,, \qquad m,\;n = 0,1 \tag{40}$$

совпадают (сравни с (11 Л2) и (12 Л2)). Произведение операторов в голоморфном представлении задаётся формулой

$$(A_1 A_2)\,(a^*,\,a) = \int A_1\,(a^*,\,\alpha)\,A_2\,(\alpha^*,\,a)\,e^{-\alpha^*\alpha}\,\mathrm{d}\,\alpha^*\,\mathrm{d}\,\alpha\,. \tag{41}$$

Для записи (39) и (41) необходимо было ввести две новые образующие грассмановой алгебры $(\alpha^*,\;\alpha)$, которые и далее будут вводиться по мере необходимости.

Подставляя оператор (36) в (40), находим:

$$A_{00} = K_{00}\,, \qquad A_{10} = K_{10}\,, \qquad A_{01} = K_{01}\,, \qquad A_{11} = K_{00} + K_{11}\,.$$

Отсюда видно, что связь между ядром оператора и его нормальным символом такова (сравни с (13 Л2)):

$$A\,(a^*,\,a) = e^{a^*a}\,K\,(a^*,\,a)\,. \tag{42}$$

Поскольку ядро S-матрицы для одномерного бозонного осциллятора (28 Л2) было получено при помощи лишь двух формул (12 Л2) и (13 Л2), аналоги которых в фермионном случае (41) и (42) имеют точно такой же вид, то выражение для S-матрицы фермионного гармонического осциллятора с внешним антикоммутирующим источником η и гамильтонианом

$$h = \omega\,a^*\,a - \frac{1}{\sqrt{2\,\omega}}\,(\eta^*\,a + a^*\,\eta) \tag{43}$$

может быть выписано при помощи справедливых также и в фермионном случае формул (15 Л2) и (26 Л2). Однако в фермионном случае следует учитывать антикоммутативность образующих грассмановой алгебры и правило вычисления гауссовых функциональных интегралов (28). В результате в фермионном случае мы получим следующее выражение для оператора S-матрицы:

$$S_\eta(a^\dagger,\,a) = \frac{1}{N} : \exp\left\{ \frac{i}{\sqrt{2\,\omega}} \int \mathrm{d}\,t\,[\eta^*(t)\,a\,e^{-i\,\omega\,t} + a^\dagger\,\eta\,(t)\,e^{i\,\omega\,t}] + i \iint\limits_{s<t} \mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,s\;\eta^*(t)\,\frac{i\,e^{-i\,\omega\,(t-s)}}{2\,\omega}\,\eta\,(s) \right\} : \tag{44}$$

Выражение (44) формально совпадает с оператором S-матрицы, следующим из формулы (27 Л2).

Заметим, что в фермиевском случае операция нормального упорядочения : ... : приводит произведение фермиевских операторов к нормальному виду с учётом их антикоммутативности. Например, $:a_1 a_2^\dagger a_3: = -a_2^\dagger a_1 a_3$.

3. Функциональный интеграл в теории Дирака

В теории Дирака аналогом одночастичного гамильтониана (43) является гамильтониан (см. (33 Л8))

$$\mathcal{H}_\psi = \int \mathrm{d}^{(3)}\, x\, \{\overline{\psi}\,(-i\,\gamma^i\,\partial_i + m)\,\psi - (\overline{\psi}\,\eta + \overline{\eta}\,\psi)\}\,, \tag{45}$$

в котором дираковские поля представляются согласно (46 Л8) и фермиевские операторы рождения и уничтожения удовлетворяют антикоммутационным соотношениям (54 Л8), (58 Л8), поля $\eta\,(x)$ $\overline{\eta}\,(x)$ — антикоммутирующие. Согласно (59 Л8) выражение (45) переписывается в виде

$$\mathcal{H}_\psi = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3} \left\{\omega_k \sum_{s=1,2} (a^\dagger_{\mathbf{k}\,s} a_{\mathbf{k}\,s} + b^\dagger_{\mathbf{k}\,s} b_{\mathbf{k}\,s}) - \frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}}\,[\gamma_{k\,s}\, a_{\mathbf{k}\,s} + a^\dagger_{\mathbf{k}\,s}\,\delta_{k\,s} - \delta_{-k\,s}\, b_{\mathbf{k}\,s} - b^\dagger_{\mathbf{k}\,s}\,\gamma_{-k\,s}]\right\},$$

$$\gamma_{\pm k\,s}(t) = \tilde{\overline{\eta}}_{\pm\mathbf{k}}(t)\, u_{\pm k\,s}\,, \qquad \delta_{\pm k\,s}(t) = \overline{u}_{\pm k\,s}\tilde{\eta}_{\pm\mathbf{k}}(t)\,,$$

$$\tilde{\eta}_{\mathbf{k}}(t) = \int \mathrm{d}^{(3)}\, x\, \eta\,(x)\, e^{-i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}\,, \qquad \tilde{\overline{\eta}}_{\mathbf{k}}(t) = \int \mathrm{d}^{(3)}\, x\, \overline{\eta}\,(x)\, e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}}\,, \tag{46}$$

Представление (46) показывает, что дираковский гамильтониан (45) распадается на сумму одночастичных гамильтонианов вида (43). Поэтому оператор S-матрицы равен

$$S_\eta\,(a^\dagger,\, a) = \frac{1}{N} : \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, (\overline{\eta}\,\psi_0 + \overline{\psi}_0\,\eta) + \right.$$

$$\left. + i \iint\limits_{s<t} \mathrm{d}\, t\, \mathrm{d}\, s \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{i\, e^{-i\,\omega_k (t-s)}}{2\,\omega_k} \sum_{s=1,\,2} [\gamma_{k\,s}(t)\,\delta_{k\,s}(s) - \gamma_{-k\,s}(s)\,\delta_{-k\,s}(t)] \right\} : . \tag{47}$$

При помощи формул (56 Л8) преобразуем суммы в экспоненте следующим образом:

$$\sum_{s=1,\,2} \gamma_{k\,s}(t)\,\delta_{k\,s}(s) = \tilde{\overline{\eta}}_{\mathbf{k}}(t)\,(\not{k} + m)\,\tilde{\eta}_{\mathbf{k}}(s)\,, \qquad - \sum_{s=1,\,2} \gamma_{-k\,s}(s)\,\delta_{-k\,s}(t) = \tilde{\overline{\eta}}_{-\mathbf{k}}(s)\,(-\not{k} + m)\,\tilde{\eta}_{-\mathbf{k}}(t)\,,$$

где $k = (\omega_k,\, \mathbf{k})$. Последние равенства позволяют преобразовать второе слагаемое в экспоненте в (47) сначала к виду

$$i \iint \mathrm{d}\, x^0\, \mathrm{d}\, y^0 \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\, k}{(2\,\pi)^4}\, \frac{e^{-i\,k^0\,(x^0 - y^0)}}{-k^2 + m^2 - i\,\varepsilon}\, \tilde{\overline{\eta}}_{\mathbf{k}}(x^0)\,(\not{k} + m)\,\tilde{\eta}_{\mathbf{k}}(y^0)\,,$$

и затем к

$$i \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, \mathrm{d}^{(4)}\, y\, \overline{\eta}\,(x)\,(i\,\gamma^\mu \partial_\mu + m)\, D_c(x-y)\,\eta\,(y)\,, \tag{48}$$

где $D_c(x-y)$ определена согласно (49 Л2). Определим дираковский пропагатор как

$$S_c(x-y) = -(i\,\gamma^\mu \partial_\mu + m)\, D_c(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\, k}{(2\,\pi)^4}\, \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\,\varepsilon}\, e^{-ik\,(x-y)} = \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\, k}{(2\,\pi)^4}\, S_c(k)\, e^{-ik\,(x-y)}\,,$$

$$S_c(k) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2 + i\,\varepsilon} = (\not{k} - m + i\,\varepsilon)^{-1}\,, \qquad (i\,\gamma^\mu \partial_\mu - m)\, S_c(x-y) = \delta^{(4)}\,(x-y)\,. \tag{49}$$

Таким образом

$$S_\eta\,(a^\dagger,\, b^\dagger,\, a,\, b) = \frac{1}{N} : \exp\left\{ i \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, (\overline{\eta}\,\psi_0 + \overline{\psi}_0\,\eta) - i \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, \mathrm{d}^{(4)}\, y\, \overline{\eta}\,(x)\, S_c(x-y)\,\eta\,(y) \right\} :,$$

$$\psi_0(x) = \psi_0^{(+)}(x) + \psi_0^{(-)}(x)\,, \qquad \overline{\psi}_0(x) = \overline{\psi}\,{}_0^{(+)}(x) + \overline{\psi}\,{}_0^{(-)}(x)\,,$$

$$\psi_0^{(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}} \sum_{s=1,2} a_{\mathbf{k}\,s} u_{k\,s} e^{-i\,k\,x}\,, \qquad \psi_0^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}} \sum_{s=1,2} b^\dagger_{\mathbf{k}\,s} u_{-k\,s} e^{i\,k\,x}\,,$$

$$\overline{\psi}\,{}_0^{(+)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}} \sum_{s=1,2} b_{\mathbf{k}\,s} \overline{u}_{-k\,s} e^{-i\,k\,x}\,, \qquad \overline{\psi}\,{}_0^{(-)}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3}\, \frac{1}{\sqrt{2\,\omega_k}} \sum_{s=1,2} a^\dagger_{\mathbf{k}\,s} \overline{u}_{k\,s} e^{i\,k\,x}\,, \tag{50}$$

где $k = (\omega_k,\ \mathbf{k})$.

Укажем, что правая часть уравнения (50) может быть получена также при помощи формулы (28) путём прямого вычисления фермионного функционального интеграла (сравни с (44 Л7))

$$\int D\,\psi\, D\,\overline{\psi}\ \exp\left\{ i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,[\overline{\psi}\,(\,i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m)\,\psi+\overline{\eta}\,\psi+\overline{\psi}\,\eta]\right\} \tag{51}$$

с граничными условиями, фиксирующими при $t\to-\infty$ положительночастотные составляющие полей $\psi_0^{(+)}(x)$ и $\overline{\psi}{}_0^{(+)}(x)$ и при $t\to+\infty$ — отрицательночастотные составляющие полей $\psi_0^{(-)}(x)$ и $\overline{\psi}{}_0^{(-)}(x)$ согласно (50). В (51) дираковская функциональная мера

$$D\,\psi\, D\,\overline{\psi}\equiv\prod_x\prod_a \mathrm{d}\,\overline{\psi}_a(x)\ \mathrm{d}\,\psi_a(x)=\mathrm{const}\cdot\prod_t\prod_{\mathbf{k}}\prod_s \mathrm{d}\,a^{*}_{\mathbf{k}\,s}(t)\,\mathrm{d}\,a_{\mathbf{k}\,s}(t)\,\mathrm{d}\,b^{*}_{\mathbf{k}\,s}(t)\,\mathrm{d}\,b_{\mathbf{k}\,s}(t)\,. \tag{52}$$

Это утверждение легко проверяется, если учесть, что экстремальное значение показателя экспоненты в (51) при указанных граничных условиях достигается на полях (сравни с (53 Л2))

$$\psi_{(cl)}(x)=\psi_0(x)-\int \mathrm{d}^{(4)}\,y\,S_c(x-y)\,\eta\,(y)\,,\qquad \overline{\psi}_{(cl)}(x)=\overline{\psi}_0(x)-\int \mathrm{d}^{(4)}\,y\,\overline{\eta}\,(y)\,S_c(y-x)\,. \tag{53}$$

Подстановка полей (53) в экспоненту в (51) опять приводит к (50).

Второе равенство в (52) легко получается из соотношения для интегралов от квадратичных форм дифференциалов фермионных переменных:

$$\int \mathrm{d}^{(3)}\,x\ \mathrm{d}\,\overline{\psi}(x)\,\mathrm{d}\,\psi(x)=\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3}\sum_{s=1,2}\frac{m}{\omega_k}\,(\mathrm{d}\,a^{*}_{\mathbf{k}\,s}\ \mathrm{d}\,a_{\mathbf{k}\,s}+\mathrm{d}\,b^{*}_{\mathbf{k}\,s}\ \mathrm{d}\,b_{\mathbf{k}\,s})\,. \tag{54}$$

При выводе (54) фермионные операторы $\{a_{\mathbf{k}\,s},\ b_{\mathbf{k}\,s},\ a^{\dagger}_{\mathbf{k}\,s},\ b^{\dagger}_{\mathbf{k}\,s}\}$ в выражениях для дираковских полей (46 Л8) заменяются на соответствующие грассмановы переменные и используются формулы (57 Л8).

4. Общая формула для S-матрицы в КЭД и простейшие амплитуды

Мы можем, наконец, собрать все формулы вместе и выписать общее выражение для S-матрицы в КЭД при помощи континуального интеграла по бозонным и фермионным полям:

$$\begin{aligned} S_{J,\eta,\overline{\eta}}=\frac{1}{N}\int\exp\Big\{ i\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\Big[-\frac{1}{16\pi}F^2_{\mu\nu}-\frac{1}{8\pi\alpha}\,(\partial_{\mu}A^{\mu})^2\,+\\ +\,\overline{\psi}(i\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}-m)\psi+J^{\mu}A_{\mu}+\overline{\eta}\,\psi+\overline{\psi}\,\eta\Big]\Big\}\,DA_{\mu}\,D\,\overline{\psi}\ D\psi\,. \end{aligned} \tag{55}$$

Граничные условия для полей при $|t|\to\infty$ указаны в лекции 7 и предыдущем пункте. Как обычно, для развития ТВ действие в экспоненте в (55) разбивается на квадратичную (линейную) и нелинейную части. Последняя описывает взаимодействие:

$$S=S_0\{\,A,\,\overline{\psi},\,\psi;\,J,\,\overline{\eta},\,\eta\,\}+S_{int}\,,\qquad iS_{int}=-ie\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,A_{\mu}\ \overline{\psi}_a\,\gamma^{\mu}_{ab}\psi_b\,. \tag{56}$$

Представим S_{int} в виде дифференциального оператора

$$i\hat{S}_{int}=-e\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\frac{\delta}{\delta J^{\mu}}\,\frac{\delta}{\delta\eta_a}\,\gamma^{\mu}_{ab}\,\frac{\delta}{\delta\,\overline{\eta}_b}\,, \tag{57}$$

который может находиться как под знаком функционального интеграла, так и вне его. Это позволяет переписать выражение (55) в виде

$$S=\frac{1}{N}\ \exp\left\{-e\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,\frac{\delta}{\delta J^{\mu}(x)}\,\frac{\delta}{\delta\eta_a(x)}\,\gamma^{\mu}_{ab}\,\frac{\delta}{\delta\,\overline{\eta}_b(x)}\right\}:\exp\left\{ i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\,(-\,\mathbf{J}\ \mathbf{A}_0+\overline{\eta}\ \psi_0+\overline{\psi}_0\ \eta)+\right.$$

$$+i\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\;\mathrm{d}^{(4)}\,y\;\left[\frac{1}{2}\,J^{\mu}(x)\,D^{\alpha}_{\mu\nu}(x-y)\,J^{\nu}(y)-\overline{\eta}(x)\,S_c(x-y)\,\eta(y)\right]\Bigg\}:\Bigg|_{J,\,\overline{\eta},\,\eta=0}, \tag{58}$$

где пропагаторы $D^{\alpha}_{\mu\nu}$ и S_c задаются формулами (53 Л7) и (49), соответственно. Асимптотические поля $\mathbf{A}_0,\ \overline{\psi}_0,\ \psi_0$ разлагаются согласно (см. (47 Л7) и (46 Л8))

$$\mathbf{A}_0(x)=\sum_{\alpha=1,2}\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{2\pi}{|\,\mathbf{k}\,|}}\,(c_{\mathbf{k}\,\alpha}\;\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha}\;e^{-ikx}+c^{\dagger}_{\mathbf{k}\,\alpha}\;\mathbf{e}^{*}_{\mathbf{k}\,\alpha}\;e^{ikx})\,,$$

$$\psi_0(x)=\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_{s=1,\,2}(a_{\mathbf{k}\,s}u_{ks}e^{-ikx}+b^{\dagger}_{ks}u_{-ks}e^{ikx})\,,$$

$$\overline{\psi}_0(x)=\int\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\sum_{s=1,\,2}(b_{\mathbf{k}\,s}\overline{u}_{-ks}e^{-ikx}+a^{\dagger}_{ks}\overline{u}_{ks}e^{ikx})\,. \tag{59}$$

Здесь вектора поляризации фотонов $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha}$ удовлетворяют условиям (55 Л7), а спиноры $u_{ks},\ u_{-ks}$ — уравнениям (38 Л8) и условиям (57 Л8). Коммутационные или антикоммутационные соотношения операторов рождения и уничтожения имеют вид (33 Л7) и (54 Л8), (58 Л8). Вакуумное состояние определяется условиями

$$a_{\mathbf{k}\,s}\,|\,0\,\rangle=b_{\mathbf{k}\,s}\,|\,0\,\rangle=c_{\mathbf{k}\,\alpha}\,|\,0\,\rangle=0\,,$$

а, например, состояние электрона с импульсом $\mathbf{p}$ и спином s и позитрона с импульсом $\mathbf{q}$ и спином s' и фотона с импульсом $\mathbf{k}$ и поляризацией α имеет вид

$$|\;\mathbf{p}\,s,\,\mathbf{q}s',\,\mathbf{k}\,\alpha\,\rangle=\sqrt{2\omega_p\,2\omega_q\,2|\,\mathbf{k}\,|}\,a^{\dagger}_{\mathbf{p}\,s}\,b^{\dagger}_{\mathbf{q}s'}\,c^{\dagger}_{\mathbf{k}\,\alpha}\,|\,0\,\rangle\,,$$

и т.д.

Из выражения (58) получаем также амплитуду перехода из вакуума в вакуум в присутствии внешних источников:

$$Z(J,\,\eta,\,\overline{\eta})=\frac{1}{N}\,\exp\left\{-e\int\mathrm{d}^{(4)}\,x\,\frac{\delta}{\delta J^{\mu}}\,\frac{\delta}{\delta\eta_a}\,\gamma^{\mu}_{ab}\frac{\delta}{\delta\,\overline{\eta}_b}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{i\int\mathrm{d}^{(4)}\,x\;\mathrm{d}^{(4)}\,y\;\left[\frac{1}{2}\,J^{\mu}(x)\,D^{\alpha}_{\mu\nu}(x-y)\,J^{\nu}(y)-\overline{\eta}(x)\,S_c(x-y)\,\eta(y)\right]\right\}. \tag{60}$$

Укажем здесь, что при комплексном значении параметра размерности пространства d базовое соотношение для матриц Дирака (5 Л8) остаётся в силе, в то время как ряд других принимают следующий вид:

$$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=d\,,\qquad\gamma_{\mu}\gamma^{\mu}=d\,,\qquad\mathrm{tr}\,\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=2^{d/2}\eta^{\mu\nu}\,. \tag{61}$$

Поэтому если в (63 Л8) определить

$$2^{d/2}\,T^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_n}=\mathrm{tr}(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\ldots\gamma^{\mu_n})\,,$$

то все формулы для этой величины, полученные в лекции 8, сохраняются. Парадоксы возникают при комплексном d лишь при работе с γ^5-матрицей, однако с этим парадоксом нам придётся столкнуться лишь в лекции, посвящённой аксиальной аномалии.

При комплексном значении размерности пространства d выражения для S-матрицы (58) и производящего функционала (60) регуляризованы. При этом сохранена калибровочная инвариантность теории, поскольку эта симметрия имеет место при любом d.

Рассмотрим простейший процесс рассеяния двух электронов в два электрона. Для этого следует выражение для оператора S-матрицы (58) поместить в обкладки между бра-состоянием $\langle\,0\,|\,a_{\mathbf{p}'_1\,s'_1}\,a_{\mathbf{p}'_2\,s'_2}$ и кет-состоянием $a^{\dagger}_{\mathbf{p}_2\,s_2}\,a^{\dagger}_{\mathbf{p}_1\,s_1}\,|\,0\,\rangle$. Здесь $\mathbf{p}_i,\,s_i$ и $p'_i,\,s'_i$, $i=1,\,2$ — импульсы и спины начальных и конечных электронов. Чтобы сократить запись формул, мы будем писать u_1 вместо $u_{p_1s_1}$ и $\overline{u}'_2$ вместо $\overline{u}_{\mathbf{p}'_2\,s'_2}$, u_{-1} вместо $u_{-p_1s_1}$, и т.д. Наинизший порядок, в котором амплитуда этого процесса отличается от нуля, получается при разложении первой экспоненты в (58) до второго порядка, что даёт вклад в S-матрицу

$$\frac{ie^2}{2!}\;:\int\mathrm{d}^{(4)}\,x\;\mathrm{d}^{(4)}\,y\,[\overline{\psi}_0(x)\gamma^{\mu}\psi_0(x)]\,[\overline{\psi}_0(y)\gamma^{\nu}\psi_0(y)]:\;D^{\alpha}_{\mu\nu}(x-y)\,. \tag{62}$$

Поскольку поле ψ_0 удовлетворяет уравнению Дирака, то $\partial_\mu[\overline{\psi}_0(x)\gamma^\mu\psi_0(x)] = 0$, и потому продольная часть фотонного пропагатора в (62) выпадает, в качестве фотонного пропагатора можно взять $D^1_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu}$. Мы видим, что физические величины не зависят от калибровки. Это утверждение имеет место во всех порядках теории возмущений. Помещая выражение (62) в указанные выше обкладки, в результате простых вычислений получаем для амплитуды iM:

$$iM = 4\pi i\, e^2 \left\{ \frac{1}{t}(\overline{u}'_2\gamma^\mu u_2)\,(\overline{u}'_1\gamma_\mu u_1) - \frac{1}{u}(\overline{u}'_2\gamma^\mu u_1)\,(\overline{u}'_1\gamma_\mu u_2) \right\}, \tag{63}$$

где используются введенные согласно (27 Л4) инварианты

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p'_1)^2, \quad u = (p_1 - p'_2)^2,$$

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu\,. \tag{64}$$

Формула для сечения рассеяния σ двух частиц в две частицы в системе центра инерции содержится в Приложении (см. (A19)). Пусть $\varepsilon = p_1^0 + p_2^0$ — полная энергия, $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 \equiv \mathbf{p}'$ — начальный и конечный импульсы. Тогда в нашем случае

$$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{|M|^2}{64\pi^2\varepsilon^2}\,\mathrm{d}\,o'\,, \tag{65}$$

где $\mathrm{d}\,o'$ — дифференциал телесного угла конечного импульса $\mathbf{p}'$. В системе центра инерции

$$t = -(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = -4\,\mathbf{p}^2 \sin^2\frac{\theta}{2}\,, \qquad u = -4\,\mathbf{p}^2\cos^2\frac{\theta}{2}\,, \qquad -\mathrm{d}\,t = 2\,\mathbf{p}^2\,|\,\mathrm{d}\cos\theta| = \frac{\mathbf{p}^2}{\pi}\,\mathrm{d}\,o'\,, \tag{66}$$

где θ — угол рассеяния.

Рассмотрим это сечение в нерелятивистском пределе, когда согласно (42 Л8)

$$\overline{u}'\gamma^\mu u = 2m\,w'^\dagger w\,\delta_0^\mu\,. \tag{67}$$

Подставим (63) с учётом (67) в (65) и усредним по начальным спинам электронов (то есть заменим везде $w_\alpha w^*_\beta \to \frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}$ для начальных частиц):

$$\mathrm{d}\,\sigma = e^4 m^2 \left\{ \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{4u^2} - 2\frac{(u_1'^\dagger u_2)^2}{4tu} \right\}\mathrm{d}\,o'\,. \tag{68}$$

Теперь просуммируем независимо по спинам конечных частиц. В результате получим:

$$\mathrm{d}\,\sigma = e^4 m^2 \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{tu} \right)\mathrm{d}\,o' = \left(\frac{e^2}{mv^2}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} \right)\mathrm{d}\,o'\,, \tag{69}$$

где $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{p}\,/m$ — относительная скорость электронов. Сечение (69) совпадает с известным результатом в нерелятивистской теории.

Графически амплитуда (63) представляется в виде суммы двух следующих диаграмм Фейнмана:

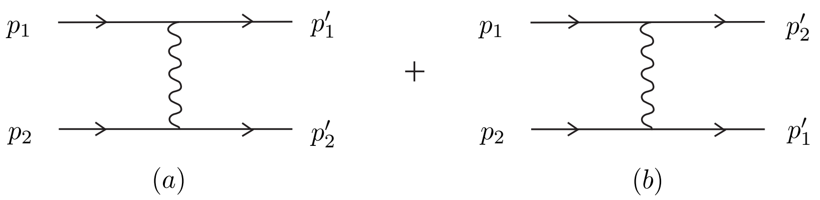


Рис.13

Укажем, что в используемой системе единиц

$$\frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,04}\,. \tag{70}$$

Вычислим теперь в наинизшем порядке упругую амплитуду рассеяния электрона на позитроне. Для этого следует вычислить выражение (62) в обкладках $\langle 0 \,|\, a_{\mathbf{p}'_1\, s'_1}\, b_{\mathbf{p}'_2\, s'_2}$ и $b^\dagger_{\mathbf{p}_2\, s_2}\, a^\dagger_{\mathbf{p}_1\, s_1} \,|\, 0 \rangle$:

$$iM = 4\pi i\, e^2 \left\{ \frac{1}{s} (\overline{u}'_1 \gamma^\mu u'_{-2})\, (\overline{u}_{-2} \gamma_\mu u_1) - \frac{1}{t} (\overline{u}_{-2} \gamma^\mu u'_{-2})\, (\overline{u}'_1 \gamma_\mu u_1) \right\}, \tag{71}$$

где s, t и u задаются согласно (64). Амплитуда (71) представляется двумя диаграммами:

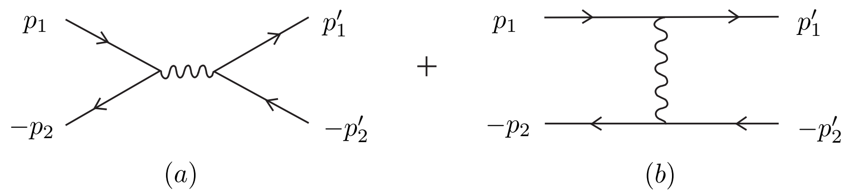


Рис. 14

Легко увидеть, что амплитуда (71) получается из амплитуды (63) (и наоборот) путём замены $p_2 \to -p'_2$, $p'_2 \to -p_2$, При этом происходят замены $t \leftrightarrow t$, $u \leftrightarrow s$, диаграмма (a) на рис. 13 переходит в диаграмму (b) на рис. 14, диаграмма (b) на рис. 13 переходит в диаграмму (a) на рис. 14.

5. Правила Фейнмана для КЭД

Рассмотренные два примера для амплитуд (63) и (71) помогают понять правила Фейнмана для диаграммной техники при вычислении амплитуды рассеяния iM (в импульсном представлении). Эти правила выводятся при помощи выражения для S-матрицы (58).

1. Приближению n-ого порядка ТВ отвечают диаграммы с n вершинами, в каждой из которых сходятся одна входящая и одна выходящая электронные (сплошные) и одна фотонная (волнистая) линии. В амплитуду процесса рассеяния входят все диаграммы, имеющие свободные концы (внешние линии) в числе, равном числу начальных и конечных частиц.

2. Каждой внешней входящей сплошной линии сопоставляется амплитуда начального электрона u_p или конечного позитрона u_{-p} (p — 4-импульс частицы). Каждой выходящей сплошной линии сопоставляется амплитуда конечного электрона $\overline{u}_p$ или начального позитрона $\overline{u}_{-p}$.

3. Каждой вершине сопоставляется 4-вектор $(-ie\gamma^\mu)$.

4. Каждой внешней входящей волнистой линии сопоставляется амплитуда начального фотона $\sqrt{4\pi}\, e^\mu$, а выходящей линии — амплитуда $\sqrt{4\pi}\, e^*_\mu$ конечного фотона (e — 4-вектор поляризации фотона). Векторный индекс μ совпадает с индексом матрицы γ^μ в соответствующей вершине (так что возникает скалярное произведение $\gamma^\mu e_\mu$ или $\gamma^\mu e^*_\mu$).

5. Каждой внутренней сплошной линии сопоставляется множитель $iS_c(p) = i\,(\not{p} - m + i\varepsilon)^{-1}$, а внутренней волнистой линии — множитель $(-iD^\alpha_{\mu\nu}(p)) = (-i)\frac{4\,\pi}{p^2+i\varepsilon}\left[\eta_{\mu\nu} - \frac{(1-\alpha)p_\mu p_\nu}{p^2+i\varepsilon}\right]$. Тензорные индексы $\mu\,\nu$ совпадают с индексами матриц γ^μ, γ^ν в вершинах, соединяемых волнистой линией.

6. Вдоль каждой непрерывной последовательности электронных линий стрелки имеют неизменное направление, а расположение биспинорных индексов вдоль них соответствует записи матриц слева направо при движении против стрелок. Замкнутой электронной петле отвечает след произведения расположенных вдоль неё матриц.

7. В каждой вершине 4-импульсы пересекающихся в ней линий удовлетворяют закону сохранения, то есть сумма импульсов входящих линий равна сумме импульсов выходящих линий. Импульсы свободных концов — заданные (с соблюдением общего закона сохранения 4-импульса) величины, причём позитронной линии приписывается 4-импульс $(-p)$. По импульсам внутренних линий, остающимся нефиксированными после учёта законов сохранения во всех вершинах, производится интегрирование (по $\mathrm{d}^{(4)}\, p/(2\pi)^4$).

8. Входящему свободному концу, отвечающему внешнему электромагнитному полю, сопоставляется множитель $A^{(e)}(k) = \int \mathrm{d}^{(4)}\, x\, e^{ikx}\, A^{(e)}(x)$; 4-вектор q связан с 4-импульсами сплошных электрон-позитронных линий в этой же вершине законом сохранения. Если поле не зависит от времени, свободному концу сопоставляется множитель $A^{(e)}(\mathbf{q}) = \int \mathrm{d}^{(3)}\, x\, e^{-i\mathbf{q}\,\mathbf{x}}\, A^{(e)}(\mathbf{x})$, а по остающимся нефиксированными трёхмерным импульсам внутренних линий производится интегрирование по $\mathrm{d}^{(3)}\, p/(2\pi)^3$.

9. Дополнительный множитель (-1) привносится в выражение для iM каждой замкнутой электронной петлёй и каждой парой позитронных внешних концов, если эти концы — начало и конец одной последовательности сплошных линий. Если среди начальных или среди конечных частиц имеется несколько электронов или позитронов, то относительный знак диаграмм, различающихся нечётным числом перестановок пар тождественных частиц (т. е. соответствующих им внешних концов), должен быть противоположным.

Последнее правило означает, в частности, что одинаковыми знаками должны обладать диаграммы с одинаковыми сплошными линиями, т. е. диаграммы, которые оказались бы тождественными после снятия с них всех фотонных линий. Укажем также, что при наличии тождественных фермионов общий знак амплитуды условен. Однонаправленность стрелок вдоль фермионных линий (правило 6) очевидно из того, что любая фермионная линия даёт в диаграмму множитель вида

$$\ldots\,\gamma^\mu\,S_c(x-y)\,\gamma^\nu\,S_c(y-z)\,\gamma^\lambda\,S_c(z-u)\,\ldots$$

Если определить направление стрелки фермионногой линии совпадающим с направлением распространения электрона, то в пропагаторе $iS_c(x-y)$ стрелка направлена от точки y к точке x. Действительно, согласно задаче 1.в) при $x^0>y^0$ величина $iS_c(x-y)$ является амплитудой распространения электрона из точки y к точке x и при $x^0<y^0$ — амплитудой распространения позитрона от точки x к точке y. Так как направление стрелки пропагатора не зависит от значения его аргументов, то мы видим, что вдоль стрелок электрон-позитронной линии распространяется электрон, а против стрелок —позитрон.

Задачи

1. Определим хронологически упорядоченное произведение от любого числа дираковских полей в представлении Гейзенберга

$$(T\,\psi_{a_1}(x_1)\,\ldots\,\psi_{a_l}(x_l)\,\overline{\psi}_{a_{l+1}}(x_{l+1})\,\ldots\,\overline{\psi}_{a_m}(x_m)\,)$$

как произведение всех этих операторов, расположенных справа налево в порядке возрастания их временных аргументов, причём знак этого произведения определяется чётностью перестановки, которую нужно произвести, чтобы получить этот порядок из порядка, указанного под знаком T-произведения.

а) Показать, что

$$\langle\,0\,|\,(T\,\psi_{a_1}(x_1)\,\ldots\,\psi_{a_l}(x_l)\,\overline{\psi}_{a_{l+1}}(x_{l+1})\,\ldots\,\overline{\psi}_{a_m}(x_m)\,)\,|\,0\,\rangle=$$
$$=\frac{1}{Z}\,\left(\frac{1}{i}\right)^m\,(-1)^{m-l}\,\frac{\delta}{\delta\,\overline{\eta}_{a_1}(x_1)}\,\cdots\,\frac{\delta}{\delta\,\overline{\eta}_{a_l}(x_l)}\,\frac{\delta}{\delta\,\eta_{a_{l+1}}(x_{l+1})}\,\cdots\,\frac{\delta}{\delta\,\eta_{a_m}(x_m)}\,Z\,\Bigg|_{J,\,\overline{\eta},\,\eta=0}\,.$$

б) Показать, что этот коррелятор не равен нулю лишь если $m=2l$.

Указание. В функциональном интеграле (55) (под знаком которого имеются усредняемые поля) сделать глобальное преобразование полей

$$\psi\to e^{i\,\alpha}\psi\,,\qquad\overline{\psi}\to e^{-i\,\alpha}\,\overline{\psi}\,,\qquad\eta\to e^{i\,\alpha}\eta\,,\qquad\overline{\eta}\to e^{-i\,\alpha}\,\overline{\eta}$$

и учесть, что при этом мера $D\,\overline{\psi}\,D\,\psi$ инвариантна.

в) Показать, что в свободной теории

$$i\,S_c(x-y)=\langle\,0\,|\,T\,\psi\,(x)\,\overline{\psi}\,(y)\,|\,0\,\rangle$$

2. Сформулировать и доказать теорему Вика для фермиевских операторов рождения и уничтожения.

3*. Вычислить сечение рассеяния фотона на электроне (*эффект Комптона*) в наинизшем приближении, считая начальные частицы неполяризованными и не фиксируя спины конечных частиц. Используя формулу (A22) выписать ответ через инвариантные переменные Мандельстама и затем перейти в систему отсчёта покоя электрона. Рассмотреть случай $\omega \ll m$ (здесь ω — энергия начального фотона, m — энергия покоя электрона) и сравнить ответ с классической нерелятивистской формулой Томсона.

Ответ:

$$\mathrm{d}\,\sigma = 8\pi\left(\frac{e^2}{m}\right)^2 \frac{m^2\,\mathrm{d}\,t}{(s-m^2)^2}\left\{\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)^2+\left(\frac{m^2}{s-m^2}+\frac{m^2}{u-m^2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{s-m^2}{u-m^2}+\frac{u-m^2}{s-m^2}\right)\right\}.$$

4. Используя ответ предыдущей задачи, получить ответ для дифференциального сечения процесса аннигиляции электрон-позитронной пары в два фотона. Считать начальные частицы неполяризованными и спины конечных частиц нефиксированными.

5. **а)** Пусть $\mathcal{H}\,(a^\dagger,\, a)$ — оператор Гамильтона фермионной системы. Представить квантовую статистическую сумму

$$Z(\beta) = \operatorname{tr} e^{-\beta\,\mathcal{H}}$$

в виде функционального интеграла в голоморфном представлении.

б) Вычислить статистическую сумму гармонического осциллятора (с точностью до множителя, зависящего лишь от температуры) в голоморфном представлении в присутствии внешнего источника. Используя эту статистическую сумму, найти хронологический коррелятор $\langle \hat{T}_\tau\, a^\dagger(\tau_1) a(\tau_2)\rangle$ в представлении Мацубары. При помощи полученной формулы найти также статистические средние $\left[\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}} a^\dagger a\right)\right] / \operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}}\right)$ и $\left[\operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}} a\, a^\dagger\right)\right] / \operatorname{tr}\left(e^{-\beta\,\mathcal{H}}\right)$.

Лекция 10

ТЕОРЕМА ФАРРИ, ТОЖДЕСТВО УОРДА-ТАКАХАШИ И УСЛОВИЯ ПЕРЕНОРМИРОВКИ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В этой лекции предполагается, что функциональный интеграл (**??**) вычисляется при $d = 4 - \varepsilon$ и, таким образом, является регуляризованным.

1. Теорема Фарри

Докажем *теорему Фарри*, утверждающую, что диаграммы, содержащие хотя бы один нечётный замкнутый спинорный цикл (петлю), взаимно аннулируются. Рассмотрим некую фермионную петлю, изображённую на рис. 15.

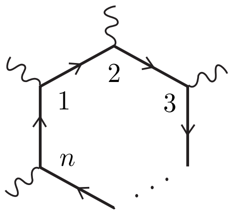


Рис.15

Пусть при обходе петли в направлении стрелок индекс j следует за индексом i и k_{ji} есть 4-импульс линии, соединяющей вершины i и j и направленный от вершины i к вершине j. Кроме петли на рис. 15, содержащейся в некой диаграмме, обозначаемой L_+, имеется диаграмма L_-, отличающаяся от L_+ лишь тем, что она содержит такую же петлю с обращёнными стрелками. Сумма этих двух диаграмм (а точнее — самих петель) равна нулю при нечётном числе n вершин этих петель.

Множитель в диаграмме L_+, соответствующий петле на рис. 15 (до проведения интегрирования по импульсам), равен

$$l_+ = (-1)\ \mathrm{tr}\big[\gamma\, S_c(k_{n\,(n-1)}) \ldots \gamma\, S_c(k_{21})\, \gamma\, S_c(k_{1n})\big]\,. \tag{1}$$

Воспользуемся тем, что ни один результат теории Дирака не изменяется при замене (см. (79 Л8))

$$\gamma^\mu \to -\gamma^{\mu\,T} = U_C^{-1}\gamma^\mu U_C\,. \tag{2}$$

Действительно, при замене (2) остаются инвариантными как фундаментальные соотношения γ-матриц (5 Л8), так и вся алгебра матриц Дирака, включая значения следов произведения матриц Дирака, Поэтому в результате замены (2) находим:

$$l_+ = -(-1)^n\ \mathrm{tr}\big[\gamma^T\, S_c^T(k_{(n-1)\,n}) \ldots \gamma^T\, S_c^T(k_{12})\, \gamma^T\, S_c^T(k_{n1})\big] =$$

$$= -(-1)^n\ \mathrm{tr}\big[\gamma\, S_c(k_{n1})\, \gamma\, S_c(k_{12}) \ldots \gamma\, S_c(k_{(n-1)\,n})\big] = (-1)^n\, l_-\,,$$

где l_- — соответствующая петля в диаграмме L_-. Отсюда видно, что при нечётном n $l_+ + l_- = 0 \longrightarrow L_+ + L_- = 0$, что и требовалось доказать.

2. Тождество Уорда-Такахаши

Сделаем в функциональном интеграле (55 Л9) замену переменных

$$\psi(x) = e^{i\alpha(x)}\, \psi'(x), \qquad \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}\,'(x)\, e^{-i\alpha(x)} \tag{3}$$

и будем считать поле $\alpha(x)$ бесконечно малым. Учитывая вклад в интеграл лишь первого порядка относительно поля α и тот факт, что $D\overline{\psi}\, D\psi = D\overline{\psi}\,'\, D\psi'$ [1], получаем следующее равенство

$$\frac{1}{N}\int\bigl(\exp i\, S\{A,\psi,\overline{\psi};\, J,\eta,\overline{\eta}\}\bigr)\, DA\, D\overline{\psi}\, D\psi =$$

$$= \frac{1}{N}\int\bigl(\exp i\, S\{A,\psi',\overline{\psi}\,';\, J,\eta,\overline{\eta}\}\bigr)\left\{1 + i\int \mathrm{d}^{(d)}x\,\alpha[\partial_\mu J'^\mu + i(\overline{\eta}\,\psi' - \overline{\psi}\,'\eta)]\right\} DA\, D\overline{\psi}\,'\, D\psi'\,. \qquad (4)$$

Здесь $S\{A,\psi',\overline{\psi}';\, J,\eta,\overline{\eta}\}$ — действие в экспоненте в интеграле (55 Л9), $J'^\mu = \overline{\psi}\,'\gamma^\mu\psi'$, а нормировочный множитель N — такой же функциональный интеграл, как в (4), но с нулевыми источниками. Сравнивая обе части последнего равенства, мы видим, что равна нулю та величина, которая пропорциональна полю $\alpha(x)$. Так как поле $\alpha(x)$ — произвольно, то мы имеем в каждой точке x следующее равенство:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\langle\, J^\mu(x)\,\rangle = -i\,\overline{\eta}(x)\langle\,\psi(x)\,\rangle + i\langle\,\overline{\psi}(x)\,\rangle\,\eta(x)\,. \qquad (5)$$

Теперь вычислим повторные функциональные производные $\bigl(\delta/\delta\,\overline{\eta}(x_1)\bigr)\bigl(\delta/\delta\eta(x_2)\bigr)$ от равенства (5), затем положим источники равными нулю. При этом следует учесть, что обе части равенства (5) являются рядами по источникам, коэффициентные функции при степенях которых есть хронологически упорядоченные средние, и операторы частных производных $\partial/\partial x^\mu$, $\delta/\delta\eta(x_1)$, $\delta/\delta\,\overline{\eta}(x_2)$ взаимно (анти)коммутируют. В результате находим:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\langle\, 0\,|\, T\, J^\mu(x)\,\psi(x_1)\;\overline{\psi}(x_2)\,|\, 0\,\rangle =$$

$$= -\delta^{(d)}(x-x_1)\,\langle\, 0\,|\, T\,\psi(x_1)\;\overline{\psi}(x_2)\,|\,0\,\rangle + \delta^{(d)}(x-x_2)\,\langle\, 0\,|\, T\,\psi(x_1)\;\overline{\psi}(x_2)\,|\,0\,\rangle\,. \qquad (6)$$

Заметим, что вследствие трансляционной инвариантности все корреляторы зависят лишь от разностей координат. Поэтому

$$\langle\, 0\,|\, T\, J^\mu(x)\,\psi(x_1)\;\overline{\psi}(x_2)\,|\,0\,\rangle \equiv$$

$$\equiv \int \mathrm{d}^{(d)}y_1\;\mathrm{d}^{(d)}y_2\,\bigl[i\,\mathfrak{S}(x_1-y_1)\bigr]\,\Gamma^\mu(y_1-x,\, x-y_2)\,\bigl[i\,\mathfrak{S}(y_2-x_2)\bigr]\,, \qquad (7)$$

где

$$\mathfrak{S}(x-y) = -i\,\langle\, 0\,|\, T\,\psi(x)\;\overline{\psi}(y)\,|\,0\,\rangle \qquad (8)$$

— *точный электрон-позитронный пропагатор*, а $\Gamma^\mu(y_1-x, x-y_2)$ — *вершинный оператор* (в координатном пространстве).

Приведём все диаграммы вершинного оператора с точностью до величин пятого порядка:

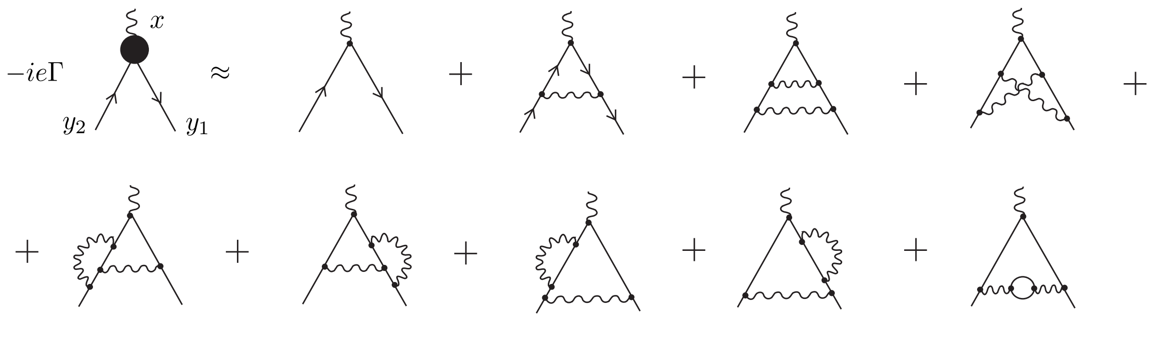


Рис.16

Из определения вершинного оператора (7) видно, что первое слагаемое справа на рис. 16 равно $-i\,e\,\gamma^\mu\,\delta^{(d)}(y_1-x)\,\delta^{(d)}(x-y_2)$. Таким образом, вершинный оператор есть сумма всех диаграмм с двумя фермионными и одной фотонной внешними ампутированными линиями.

[1] Вопрос об инвариантности дираковской функциональной меры в регуляризованной теории обсуждается также в Лекции 14.

Выразим обе части уравнения (6) при помощи формул (7) и (8) и затем проинтегрируем с весом $\int \mathrm{d}^{(4)}\, x_1\; \mathrm{d}^{(4)}\, x_2\, \exp[i(p+k)x_1 - ipx_2]$. С учётом того, что

$$\mathfrak{S}(k) = \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\; \mathfrak{S}(x) e^{ikx}\,, \qquad \Gamma^\mu(q,p) \equiv \int \mathrm{d}^{(d)}\, x_1\; \mathrm{d}^{(d)}\, x_2\, e^{iqx_1+ipx_2}\Gamma^\mu(x_1,\, x_2)\,, \tag{9}$$

(так что в наинизшем порядке $\Gamma^\mu(q,p) = \gamma^\mu$) находим соотношение

$$\mathfrak{S}(p) - \mathfrak{S}(p+k) = \mathfrak{S}(p+k)\,[k_\mu \Gamma^\mu(p+k,\, p)]\; \mathfrak{S}(p)\,,$$

откуда получается равенство

$$k_\mu \Gamma^\mu(p+k,p) = \mathfrak{S}^{-1}(p+k) - \mathfrak{S}^{-1}(p)\,. \tag{10}$$

При $k \to 0$ из (10) получаем также:

$$\frac{\partial\, \mathfrak{S}^{-1}(p)}{\partial p_\mu} = \Gamma^\mu(p,p)\,. \tag{11}$$

3. Индекс расходимости диаграмм

Для произвольной диаграммы введём следующие обозначения:
L_e — число внешних электронных линий;
L_γ — число внешних фотонных линий;
N_e — число внутренних электронных линий;
N_γ — число внутренних фотонных линий;
n — число вершин;
l — число петель.
Тогда индекс расходимости диаграммы

$$\omega = d\, l - N_e - 2N_\gamma\,. \tag{12}$$

Для числа петель имеем:

$$l = N_e + N_\gamma - n + 1\,, \tag{13}$$

так как каждому пропагатору соответствует интегрирование (по своему d-импульсу), но каждая вершина содержит δ-функцию по входящим импульсам, однако одна δ-функция даёт общий закон сохранения. Для числа вершин имеем:

$$n = L_\gamma + 2N_\gamma = \frac{1}{2}(L_e + 2N_e)\,. \tag{14}$$

Теперь подставим l из (13) в (12) и при помощи уравнений (14) исключим N_γ и N_e. Таким образом получим:

$$\omega = \frac{n}{2}(d-4) + d - \frac{d-1}{2}L_e - \frac{d-2}{2}L_\gamma\,. \tag{15}$$

Отсюда видно, что при $d > 4$ теория заведомо неперенормируема, а при $d = 4$

$$\omega = 4 - L_\gamma - \frac{3}{2}L_e\,, \tag{16}$$

то есть формальная расходимость диаграммы зависит лишь от числа внешних концов. Диаграмма расходится при $\omega \geq 0$. Подчеркнём, что импульсы внешних концов диаграмм не предполагаются находящимися на массовой поверхности.

Укажем сразу, что суммы диаграмм при фиксированном порядке по e с нечётным числом L_γ и $L_e = 0$ согласно теореме Фарри равны нулю. Действительно, в таких диаграммах полное число вершин нечётно (см. (14)), и потому имеется хотя бы одна фермионная петля с нечётным числом вершин. Вакуумные пузырьки $(L_\gamma = L_e = 0)$ нет смысла рассматривать, так как они дают ненаблюдаемый сдвиг энергии вакуумного состояния. Поэтому имеется всего 4 расходящихся диаграммы:

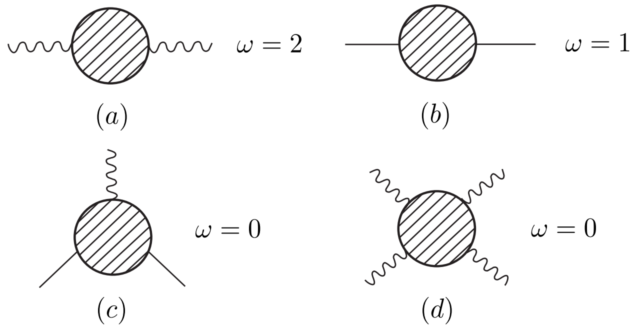


Рис.17

Покажем, что диаграмма (d) на рис. 17 конечна.

Прежде всего заметим, что имеют место равенства

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,\langle\, 0\,|\, T\, J^\mu(x) J^{\mu_1}(x_1)\ldots J^{\mu_n}(x_n)\,|\, 0\,\rangle = 0\,. \tag{17}$$

Действительно, если бы мы рассмотрели вместо интеграла (55 Л9) этот же интеграл со вставкой под функциональный интеграл выражения $\big(J^{\mu_1}(x_1)\ldots J^{\mu_n}(x_n)\big)$ и проделали бы манипуляции, приводящие к (5), то мы получили бы вместо (5) равенство, отличающееся лишь вставкой во все средние выражения $\big(J^{\mu_1}(x_1)\ldots J^{\mu_n}(x_n)\big)$. Таким образом после зануления внешних источников получается равенство (17). В импульсном пространстве равенство (17) означает, что

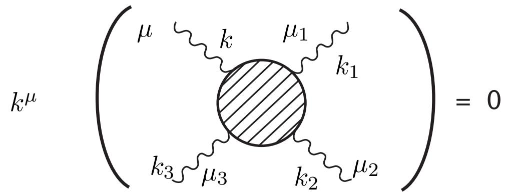
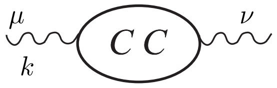


Рис.18

Равенство, изображённое на рис. 18, возможно, лишь если диаграмма в круглых скобках на рис. 18 пропорциональна структуре вида $(\eta^{\mu\mu_1}k^{\mu_2} - \eta^{\mu\mu_2}k^{\mu_1})$. Аналогичные множители содержатся в остальных трёх вершинах. Каждый из указанных множителей линеен и однороден относительно импульсов, которые "вытягиваются"из пропагаторов внутренних линий. Поэтому некоторым внутренним линиям соответствуют множители, убывающие быстрее при возрастании импульсов, чем при формальном подсчёте. В результате оказывается, что степень расходимости диаграммы (d) на рис. 17 $\omega = -4$ и она конечна.

Подчеркнём, что внешние импульсы входят в расходящиеся части диаграмм лишь в неотрицательных степенях, поскольку по их отношениям к большим промежуточным импульсам интегрирования производится разложение.

Рассмотрим диаграммы вида (a) на рис. 17. Обозначим через $i\mathcal{P}^{\mu\nu}/4\pi$ сумму всех сильно связанных диаграмм вида (a) на рис. 17. Функция $\mathcal{P}_{\mu\nu}(k)$ называется *поляризационным оператором.* Рассуждения, аналогичные применённым при рассмотрении диаграмм вида (d) на рис. 17, показывают, что



$$= i\,\frac{\mathcal{P}^{\mu\nu}(k)}{4\pi} = i\,\frac{\mathcal{P}(k)}{4\pi}\,(k^2\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\,, \tag{18}$$

где оператор $\mathcal{P}(k^2)$ расходится лишь логарифмически. Обозначим точный фотонный пропагатор

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}\,(x-y) = i\,\langle\, 0\,|\, T\, A_\mu(x) A_\nu(y)\,|\, 0\,\rangle \tag{19}$$

жирной волнистой линией. Тогда на диаграммном языке имеем:

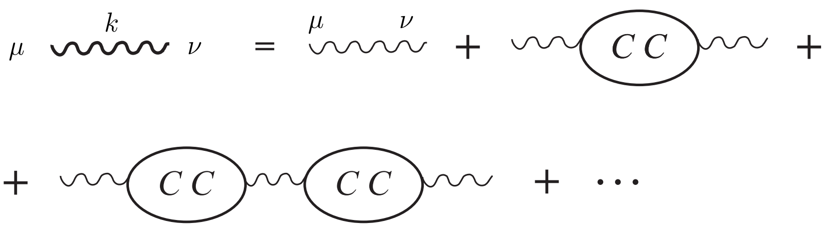


Рис.19

а аналитически (в импульсном пространстве)

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\mu\nu}(k) = D^{\alpha}_{\mu\nu}(k) + D^{\alpha}_{\mu\mu_1}(k)\frac{\mathcal{P}^{\mu_1\mu_2}(k)}{4\pi}\, D^{\alpha}_{\mu_2\mu}(k) + \ldots$$

При помощи формул (53 Л7) и (18) эта геометрическая прогрессия легко суммируется:

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2(1-\mathcal{P}(k))}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + \frac{4\pi\alpha\, k_\mu k_\nu}{(k^2)^2}\,. \tag{20}$$

Обозначим через $(-i\mathcal{M})$ сумму всех сильно связанных диаграмм вида (b) на рис. 17 и назовём эту функцию *массовым оператором.* Для точного фермионного пропагатора (8) имеет место разложение, аналогичное разложению точного фотонного пропагатора:

$$\mathfrak{S}(k) = S_c(k) + S_c(k)\,\mathcal{M}(k)\,S_c(k) + \ldots = S_c(k)\left(1 + \mathcal{M}(k)\ \mathfrak{S}(k)\right) = \frac{1}{\not k - m_0 - \mathcal{M}(k)}\,, \tag{21}$$

где m_0 — затравочная масса.

Общий вид массового оператора таков:

$$\mathcal{M}(k) = a_0\, m_0 + a_1 \not k + m(k)\,, \tag{22}$$

где $m(k)$ — конечная функция. Из размерностных соображений очевидно, что константы a_0 и a_1 расходятся логарифмически. Важно, что в правой части (22) не может быть слагаемого a_2, не обращающегося в нуль при $m_0 = 0$ и $k^\mu = 0$ и потому расходящегося линейно. Согласно (21) такое слагаемое a_2 давало бы ненулевую массу фермионам даже в случае $m_0 = 0$ и потому нарушало бы глобальную γ^5-симметрию

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma^5}\psi\,, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}\ e^{i\alpha\gamma^5}\,, \quad \alpha = \text{const}\ . \tag{23}$$

При $m_0 = 0$ имеет место глобальная γ^5-симметрия (23) и она не может быть нарушена квантовыми поправками, т.е. точный фермионный пропагатор антикоммутирует с γ^5:

$$\gamma^5\mathfrak{S}(k) + \mathfrak{S}(k)\,\gamma^5 = 0 \longleftrightarrow \gamma^5\mathcal{M}(k) + \mathcal{M}(k)\,\gamma^5 = 0\,.$$

Действительно, любая диаграмма, дающая вклад в точный пропагатор, представляется как одна сплошная фермионная линия с внешними концами и некоторое количество фермионных петель, соединённых между собою фотонными пропагаторами. Так как каждая фермионная петля находится под знаком спинорного следа, то спинорная структура всей диаграммы определяется произведением свободных пропагаторов S_c и γ-матриц вдоль единственной фермионной линии с внешними концами. Очевидно, что спинорная структура этой линии определяется произведением

$$S_c(k)[\gamma^{\mu_1}S_c(p_1)]\,\ldots\,[\gamma^{\mu_n}S_c(p_n)]\,[\gamma^{\mu}S_c(k)]\,, \qquad n = 1,\,2,\,\ldots\,,$$

которое антикоммутирует с γ^5 в случае $m_0 = 0$. Отсюда видно, что в случае $m_0 = 0$ упомянутого слагаемого a_2 не может появиться при учёте квантовых поправок.

Мы видим, что в квантовой электродинамике имеются лишь логарифмические расходимости, которые, как мы покажем, могут быть устранены при помощи перенормировки полей и затравочных констант m_0 и e_0.

Пусть исходный (затравочный) лагранжиан КЭД равен

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\, F_{\mu\nu}^2 + \overline{\psi}(i\, \not{\partial} - m_0)\psi - e_0\, \overline{\psi}\, \gamma^\mu \psi\, A_\mu\,. \tag{24}$$

Вычислим с помощью этого лагранжиана в размерности $d = 4 - \varepsilon$ точные электронный (8) и фотонный (19) пропагаторы, которые вблизи полюсов ведут себя как

$$\mathfrak{S}(k) = \frac{Z_2}{\not{k} - m} + s(k)\,, \tag{25}$$

$$\mathcal{D}^{\perp}_{\mu\nu}(k) = \frac{4\pi\, Z_3}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) + d_{\mu\nu}(k)\,. \tag{26}$$

В (25) и (26) операторы $s(k)$ и $d_{\mu\nu}(k)$ конечны при стремлении $k^2 \to m^2$ и $k^2 \to 0$, соответственно.

4. Условия перенормировки

Займёмся перенормировкой внешних линий. Рассмотрим выходящую внешнюю линию электрона с импульсом p и спиновым состоянием s. Пусть эта линия является единственной выходящей линией амплитуды $M_{(ps)i}$, изображённой на рис. 20.

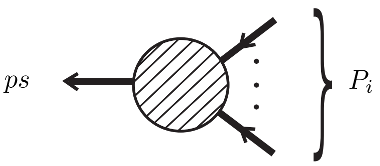


Рис. 20

Здесь все входящие и выходящие линии — жирные, которым соответствуют точные величины с учётом всех радиационных поправок. В КЭД все 4-импульсы входящих линий в амплитуде на рис. 20 не могут находиться на массовой поверхности, если выходящий электрон — реальный с $p^2 = m^2$, поскольку законы сохранения 4-импульса и заряда не допускают этого. Однако именно случай $p^2 = m^2$ нас интересует, поэтому входящие линии амплитуды $M_{(ps)i}$ не соответствуют, вообще говоря, реальным частицам. Такая ситуация может быть получена путём аналитического продолжения некоторой амплитуды с массовой поверхности в нужную область её переменных. Множитель в $M_{(ps)i}$, соответствующий выходящему электрону и обозначаемый $\overline{\mathfrak{U}}_{ps}$, получается так же, как точный электронный пропагатор с той лишь разницей, что в разложении (21) во всех слагаемых самый левый пропагатор S_c заменяется на биспинор $\overline{u}_p$, который содержится в разложении затравочного дираковского поля в (24) и удовлетворяет условиям нормировки (20 Л8), (56 Л8) и (57 Л8):

$$\overline{\mathfrak{U}}_p = \overline{u}_p\left(1 + \mathcal{M}\ \mathfrak{S}\right). \tag{27}$$

Таким образом имеем:

$$M_{(ps)\,i} = \overline{\mathfrak{U}}_{ps}\, M'_{pi}\,, \tag{28}$$

где M'_{pi} является дираковским спинором — 4-рядной матрицей-столбцом. Сопрягая комплексно равенство (28) и заменяя состояние $|\, i\,\rangle$ на $|\, f\,\rangle$, получаем:

$$M^*_{(ps)f} = \overline{M}'_{pf}\ \mathfrak{U}_{ps}\ . \tag{29}$$

Теперь воспользуемся формулой (38 Л5) для значения амплитуды M_{fi} при $P_i^2 = P_f^2 = p^2 \to m^2$, которая была получена из общего требования унитарности теории:

$$i\, M_{fi} = -\overline{M}'_{pf}\, \frac{i \sum_s \mathfrak{U}_{ps}\ \overline{\mathfrak{U}}_{ps}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\, M'_{pi}\,. \tag{30}$$

Амплитуда (30) является аналитическим выражением процесса, изображённого на рис. 21:

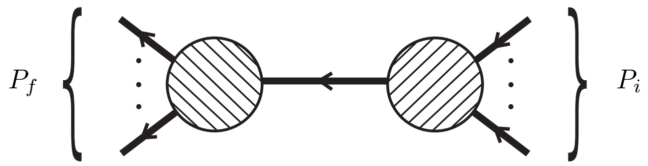


Рис. 21

В силу Лоренц-инвариантности для биспиноров $\mathfrak{U}_{ps}$ имеют место те же соотношения, что и для затравочных биспиноров u_{ps}, кроме нормировки. Следовательно (сравни с (56 Л8)):

$$\sum_s \mathfrak{U}_{ps}\,\overline{\mathfrak{U}}_{ps} = Z'(\not p + m)\,,$$

и потому при $p^2 \to m^2$

$$i\,M_{fi} = -\overline{M}'_{pf}\,\frac{i\,Z'(\not p + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}\,M'_{pi}\,. \tag{31}$$

С другой стороны, вычисление этой же амплитуды непосредственно по диаграмме на рис. 21 даёт (учтём, что в рассматриваемой области переменных у амплитуды $M_{f(ps)}$ нет реальных промежуточных состояний, и потому согласно (36 Л5) имеем $M_{f(ps)} = M^*_{(ps)f} = \overline{M}'_{pf}\,\mathfrak{U}_{ps}$; следовательно, левой части амплитуды на рис. 21 сопоставляется амплитуда $\big(i\,\overline{M}'_{pf}\big)$, пропагатору — $\big(i\;\mathfrak{S}(p)\big)$, а правой части — $(i\,M'_{pi})$)

$$i\,M_{fi} = \big(i\,\overline{M}'_{pf}\big)\,\big(i\;\mathfrak{S}(p)\big)\,i\,M'_{pi}\,. \tag{32}$$

Сопоставляя формулы (31), (32) и (25), находим $Z' = Z_2$. Поэтому

$$\mathfrak{U}_{ps} = \sqrt{Z_2}\,u_{ps}\,, \tag{33}$$

где u_{ps} — дираковский биспинор, удовлетворяющий всем соотношениям, приведенным в лекции 8.

Аналогичные вычисления показывают, что точный вектор поляризации фотона $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}\,\alpha}$ связан с нормированным согласно (55 Л7) вектором поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha}$ формулой

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}\,\alpha} = \sqrt{Z_3}\;\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha}\,. \tag{34}$$

Теперь введём перенормированные поля при помощи формул

$$\psi = \sqrt{Z_2}\,\psi_r\,, \qquad A^\mu = \sqrt{Z_3}\,A^\mu_r\,. \tag{35}$$

В результате этой замены лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi}\,Z_3(F^{\mu\nu}_r)^2 + Z_2\;\overline{\psi}_r(i\not\partial - m_0)\,\psi_r - e_0\,Z_2\,\sqrt{Z_3}\;\overline{\psi}_r\,\gamma^\mu\psi_r\,A_{r\mu}\,. \tag{36}$$

Константа m в (25) является физической массой. Пусть e обозначает физический заряд, измеряемый на больших расстояниях. Определим масштабный множитель Z_1 как

$$e_0\,Z_2\sqrt{Z_3} = e\,Z_1\,. \tag{37}$$

Теперь разобьём лагранжиан (36) на две части:

$$\mathcal{L} = \left[-\frac{1}{16\pi}\,(F^{\mu\nu}_r)^2 + \overline{\psi}_r(i\not\partial - m)\,\psi_r - e\;\overline{\psi}_r\,\gamma^\mu\psi_r\,A_{r\mu}\right] +$$

$$+\left[-\frac{1}{16\pi}\,\delta_3(F^{\mu\nu}_r)^2 + \overline{\psi}_r(i\,\delta_2\not\partial - \delta_m)\,\psi_r - e\,\delta_1\;\overline{\psi}_r\,\gamma^\mu\psi_r\,A_{r\mu}\right],$$

$$\delta_3 = Z_3 - 1\,,\quad \delta_2 = Z_2 - 1\,,\quad \delta_m = Z_2\,m_0 - m\,,\quad \delta_1 = Z_1 - 1 = \left(\frac{e_0}{e}\right) Z_2\sqrt{Z_3} - 1\,. \tag{38}$$

Здесь первое слагаемое в лагранжиане даёт правила Фейнмана, описанные в лекции 9, а слагаемое в квадратной скобке — контрчлены.

Перепишем равенство (7) для перенормированных полей:

$$\langle\, 0\,|\,T\,J^\mu(x)\psi(x_1)\;\overline{\psi}(x_2)\,|\,0\,\rangle = Z_2^2\,\langle\, 0\,|\,T\,J^\mu_r(x)\psi_r(x_1)\,\overline{\psi}_r(x_2)\,|\,0\,\rangle =$$

$$= Z_2^2\int \mathrm{d}^{(4)}\,y_1\;\mathrm{d}^{(4)}\,y_2\,\big[i\;\mathfrak{S}_r(x_1 - y_1)\big]\,\Gamma^\mu_r(y_1 - x, x - y_2)\big[i\;\mathfrak{S}_r(y_2 - x_2)\big]\,,$$

где $\mathfrak{S}_r(x)$ — точный перенормированный фермионный пропагатор, построенный из перенормированных ферми-полей при помощи формулы (8), а Γ^μ_r — перенормированный вершинный оператор. Так как $Z_2\,\mathfrak{S}_r = \mathfrak{S}$, то из сравнения последнего равенства с равенством (7) мы видим, что $\Gamma^\mu_r = \Gamma^\mu$.

Теперь точный электронный (8) и точный фотонный (19) пропагаторы вблизи полюсов ведут себя как

$$\mathfrak{S}_r(k) = \frac{1}{\not{k} - m - \mathcal{M}_r(k)} \approx \frac{1}{\not{k} - m}\,,$$

$$\mathfrak{D}^{\perp}_{r\,\mu\nu}(k) = \frac{4\pi}{k^2(1-\mathcal{P}_r(k^2))}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) \approx \frac{4\pi}{k^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \tag{39}$$

Отсюда вытекают следующие условия нормировки:

$$\mathcal{M}_r(k) = (\not{k} - m)\, g(k)\, (\not{k} - m)\,, \tag{40a}$$

$$\mathcal{P}_r(k^2 = 0) = 0\,. \tag{40b}$$

При помощи (39), (40) и (38 *a* Л8) получаем:

$$\overline{u}_p \left[\frac{\partial}{\partial p_\mu}\ \mathfrak{S}^{-1}(p)\right] u_p\Big|_{p^2=m^2} = \overline{u}_p \frac{\partial}{\partial p_\mu}\left[Z_2^{-1}\ \mathfrak{S}_r^{-1}(p)\right] u_p\Big|_{p^2=m^2} = Z_2^{-1}\,\overline{u}_p\gamma^\mu u_p\,. \tag{41}$$

Обратим внимание на то что требование, наложенное на вид массового оператора (40 a), является минимальным для того чтобы имело место равенство (41). Равенство (41) заменяет собою условие поведения дираковского пропагатора вблизи полюса. Именно равенство (41) используется ниже при получении условий нормировки.

Так как тождества Уорда (11) имеют место для неперенормированных величин, то при помощи (41) находим тождество Уорда для перенормированных величин:

$$\overline{u}_p\,\Gamma^\mu(p,\,p)\,u_p\Big|_{p^2=m^2} = Z_2^{-1}\,\overline{u}_p\gamma^\mu u_p\,. \tag{42}$$

Рассмотрим диаграмму

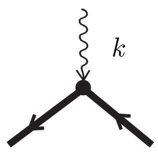


Рис. 22

описывающую рассеяние электрона во внешнем поле $\mathcal{A}^{(e)}(k)$ (в первом порядке по полю) с учётом всех радиационных поправок. В пределе $k \to 0$, $p_2 \to p_1 \equiv p$ этой диаграмме соответствует амплитуда

$$i\,M_{fi} = -ie_0\,\overline{\mathfrak{U}}_p\,\Gamma^\mu(p,\,p)\,\big|_{p^2=m^2}\ \mathfrak{U}_p\ \mathcal{A}^{(e)}_\mu(k\to 0) =$$

$$= -ie_0\,Z_2 Z_3^{1/2}\,\overline{u}_p\,\Gamma^\mu(p,\,p)\,\big|_{p^2=m^2}\ u_p\,\mathcal{A}^{(e)}_{r\mu}(k\to 0) = -i\,Z_1 Z_2^{-1}\,e\,\overline{u}_p\gamma^\mu u_p\,\mathcal{A}^{(e)}_{r\mu}(k\to 0)\,. \tag{43}$$

Переписывая амплитуду (43) в терминах перенормированных величин, мы воспользовались определением (37) и тождеством Уорда (42). Подчеркнём, что формула (43) возникла как результат вычислений в рассматриваемой модели квантовой электродинамики. С другой стороны, естественно определить физически наблюдаемый заряд e на больших масштабах так чтобы эта же амплитуда имела вид

$$i\,M_{fi} = -ie\,\overline{u}_p\gamma^\mu u_p\,A^{(e)}_{r\,\mu}(k\to 0)\,. \tag{44}$$

Таким образом, равенство (44) является тем звеном в условиях нормировки, которое связывает экспериментально наблюдаемый заряд в процессе рассеяния реального электрона в слабом медленно меняющемся классическом электромагнитном поле с формулами квантовой теории поля. Заметим, что вид формулы (44) вытекает лишь из общих требований Лоренц-инвариантности и определения экспериментально наблюдаемого электрического заряда. Из сравнения формул (43) и (44) находим:

$$Z_1 = Z_2\,, \qquad e = \sqrt{Z_3}\, e_0\,. \tag{45}$$

Воспользуемся неопределённостью, возникающей из-за расходимостей, содержащихся в Γ, и потребуем, чтобы имело место равенство

$$\Gamma^\mu(p,\,p)\,\big|_{\not p = m} = \gamma^\mu\,, \tag{46}$$

то есть $Z_1 = Z_2 = 1$. Подразумевается, что равенство (46) имеет место в обкладках $\overline{u}_p \ldots u_p$, когда $\not p = m$. Удобство этого определения состоит в том, что отпадает необходимость введения поправок во внешние электронные линии, так как теперь (см (33)) $\mathfrak{U}_{ps} = u_{ps}$, и перенормированный фермионный пропагатор совпадает с неперенормированным. Кроме того, в силу (34) и (45) $e\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha} = e_0\,\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}\,\alpha}$, а также $[e^2\,\mathfrak{D}_{r\,\mu\nu}] = e_0^2\;\mathfrak{D}_{\mu\nu}$ (здесь справа стоят неперенормированные величины). Поэтому, хотя в неперенормированной теории используется затравочный заряд e_0, внешней фотонной линии соответствует вектор поляризации $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}\,\alpha}$, а в качестве точного фотонного пропагатора используется функция $\mathfrak{D}_{\mu\nu}$, вместо них можно использовать физический заряд e, стандартные вектора поляризации (см. лекцию 7) $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha}$ и перенормированные пропагаторы $\mathfrak{D}_{r\,\mu\nu}$. В результате такой замены значения амплитуд не изменяются.

Таким образом, если в диаграммной технике используется физический заряд, физическая масса и перенормированные величины с условиями нормировки (40), (46), то внешним линиям сопоставляются стандартные биспиноры $u_{\pm ps}$, $\overline{u}_{\pm ps}$ и вектора поляризации $\sqrt{4\pi}\,\mathbf{e}_{\mathbf{k}\,\alpha}$, удовлетворяющие естественным условиям нормировки, данным в лекциях 7 и 8. Указанное правило предполагает, что если какая либо внешняя линия диаграммы находится на массовой поверхности, то соответствующая "нога"ампутирована (поскольку все радиационные поправки уже учтены). Асимптотические состояния нормированы обычным способом. Например, для одноэлектронного состояния $|\,\mathbf{p}\,s\,\rangle$ имеем $\langle\,\mathbf{q}s'\,|\,\mathbf{p}\,s\rangle = (2\pi)^3\,\omega_{\mathbf{p}}\,\delta_{ss'}\,\delta^{(3)}(\mathbf{q}-\mathbf{p})$.

Далее индекс r у перенормированных величин опускается.

Задачи

1. а) Сформулировать теорию Дираковских спиноров в двумерном пространстве-времени Минковского.

Указание. Исходить из необходимости реализации алгебры Дирака $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,\eta^{\mu\nu}$ в двумерном пространстве Минковского.

б) Рассмотреть в двумерном пространстве Минковского модель Тирринга с действием

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^{(2)}\,x\,\left\{\overline{\psi}(i\,\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \frac{g}{2}(\overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi)\,(\overline{\psi}\,\gamma_\mu\psi)\right\}\,.$$

Здесь g — константа связи. Сформулировать правила диаграммной техники Фейнмана для модели Тирринга. Исследовать модель на предмет перенормируемости.

2. Доказать, что

$$(\partial/\partial x^\mu)\langle\,0\,|T\,J^\mu(x)\,J^{\mu_1}(x_1)\,\ldots\,J^{\mu_m}(x_m)\,J^{5\,\nu_1}(y_1)\,\ldots\,J^{5\,\nu_n}(y_n)$$

$$(\overline{\psi}\,\psi)(z_1)\,\ldots\,(\overline{\psi}\,\psi)(z_l)\,|\,0\,\rangle = 0\,.$$

Лекция 11

I. ОДНОПЕТЛЕВАЯ СТРУКТУРА КЭД. ЭЛЕКТРОННЫЙ И ФОТОННЫЙ ПРОПАГАТОРЫ

1. Массовый оператор

В наинизшем приближении массовый оператор $-i\,\mathcal{M}(p)$ определяется диаграммой

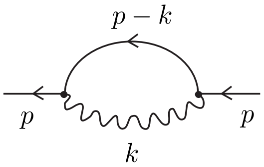


Рис. 23

аналитическое выражение которой даётся выражением

$$-i\,\mathcal{M}(p) = (-i\,e)^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,\gamma^\mu\, i\,S_c(p-k)\gamma^\nu\big(-iD^\alpha_{\mu\nu}(k)\big)\,.$$

Проще всего вычисление проводится в калибровке Фейнмана $\alpha = 1$, в которой

$$-i\,\mathcal{M}(p) = -4\pi\,e^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\pi)^d}\,\frac{\gamma^\mu[(\not p - \not k) + m]\gamma_\mu}{(p-k)^2 - m^2}\,\frac{1}{k^2-\lambda^2}\,.$$

Мы ввели массу фотона $\lambda^2 \ll m^2$, необходимую (см. ниже) для удовлетворения условий нормировки. Разумеется, масса фотона выпадает из физически наблюдаемых величин (см. лекцию 13). Пусть $d = 4-\varepsilon$. Тогда $\gamma^\mu\,\not p\,\gamma_\mu = -(2-\varepsilon)\,\not p$, $\gamma^\mu\gamma_\mu = d = 4-\varepsilon$, и

$$\mathcal{M}(p) = -\frac{4\pi i e^2}{(2\pi)^d}\int \mathrm{d}^{(d)}\,k\,\frac{(4-\varepsilon)m - (2-\varepsilon)(\not p - \not k)}{[(p-k)^2 - m^2](k^2-\lambda^2)}\,.$$

Воспользуемся формулой (35 Л4), положив $A = (p-k)^2 - m^2$, $B = k^2 - \lambda^2$:

$$\mathcal{M}(p) = -\frac{4\pi i e^2}{(2\pi)^d}\int \mathrm{d}^{(d)}\,k \int_0^1 \mathrm{d}\,x\,\frac{(4-\varepsilon)m - (2-\varepsilon)(\not p - \not k)}{[(k-xp)^2 - a^2]^2}\,,$$

$$a^2 = -x(1-x)p^2 + xm^2 + (1-x)\lambda^2\,.$$

После сдвига переменной интегрирования $k \to k + xp$ интеграл переписывается как

$$\mathcal{M}(p) = -\frac{4\pi i e^2}{(2\pi)^d}\int_0^1 \mathrm{d}\,x \int \mathrm{d}^{(d)}\,k\,\frac{(4-\varepsilon)m - (2-\varepsilon)(1-x)\,\not p}{(k^2-a^2)^2}\,,$$

причём линейное относительно $\not k$ слагаемое в числителе теперь может быть опущено, так как интегрирование по углам обращает его в нуль. Интеграл в импульсном пространстве берётся при помощи поворота Вика и формулы (3 Л4):

$$\mathcal{M}(p) = \frac{e^2\,\Gamma\,(\varepsilon/2)}{(4\pi)^{1-\varepsilon/2}}\int_0^1 \mathrm{d}\,x\,[(4-\varepsilon)m - (2-\varepsilon)(1-x)\,\not p]\cdot[-x(1-x)p^2 + xm^2 + (1-x)\lambda^2]^{-\varepsilon/2}$$

Последнее выражение разложим по ε с точностью $O(\varepsilon^0)$:

$$\mathcal{M}(p) = \frac{e^2}{2\pi\varepsilon}(4m - \not p) + \frac{e^2}{2\pi}\,\left[\frac{1}{2}(\ln 4\pi + \psi(1))(4m - \not p) + \left(-m + \frac{1}{2}\,\not p\right)\right] -$$

$$-\frac{e^2}{2\pi}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,x\,\big[(1+x)m-(1-x)(\not p-m)\big]\cdot\ln\big[-x(1-x)p^2+xm^2+(1-x)\lambda^2\big]\,. \tag{1}$$

Обратим внимание на то, что в точках нормировки оператор $\mathcal{M}$ используется в обкладках $\overline{u}_p\mathcal{M}u_p$, причём $p^2=m^2$ и $\not p\,u_p=mu_p$, $\overline{u}_p\,\not p=m\overline{u}_p$ (см. (41 Л10) и (42 Л10)). Поэтому для приведения оператора $\mathcal{M}$ к виду (40 *a* Л10) следует, во первых, сделать вычитание

$$\mathcal{M}(\not p)\longrightarrow\mathcal{M}(\not p)-\mathcal{M}(\not p)\,\big|_{\not p=m,\,p^2=m^2}\equiv(\not p-m)\,\mathcal{M}'(\not p)\,. \tag{2}$$

Затем операцию вычитания следует повторить для величины $\mathcal{M}'$ [1]. В результате двух таких вычитаний первые два слагаемых в (1) исчезают. Последнее слагаемое в (1) переписываем как

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2\,,$$

$$\mathcal{M}_1=\frac{e^2}{2\pi}(\not p-m)\int\limits_0^1\mathrm{d}\,x\,(1-x)\,\ln\big[m^2(1-\rho)(x-x_1)(x-x_2)\big]\,,$$

$$\mathcal{M}_2=-\frac{e^2m}{2\pi}\int\limits_0^1\mathrm{d}\,x\,(1+x)\,\ln\big[m^2(1-\rho)(x-x_1)(x-x_2)\big]\,, \tag{3}$$

где введены параметры

$$\rho=\frac{m^2-p^2}{m^2}\,,\qquad \beta=\frac{\lambda^2}{m^2}\,,\qquad x_{1,\,2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{\rho-\beta}{1-\rho}\pm\sqrt{\left(\frac{\rho-\beta}{1-\rho}\right)^2-\frac{4\,\beta}{1-\rho}}\,\right]. \tag{4}$$

Вычисления проводятся в предположении

$$\rho>0,\longrightarrow\;x_{1,\,2}<0\,. \tag{5}$$

Напомним, что m^2 имеет бесконечно малую **отрицательную** мнимую часть. Поэтому

$$\lim_{\rho\to+0}x_{1,\,2}\equiv\tilde{x}_{1,\,2}=\frac{1}{2}\beta\mp i\sqrt{\beta}\,. \tag{6}$$

Проведём одно вычитание (2) для $\mathcal{M}_2$:

$$\mathcal{M}_2=-\frac{e^2m}{2\pi}\int\limits_0^1\mathrm{d}\,x\,(1+x)\,\ln\frac{(1-\rho)(x-x_1)(x-x_2)}{(x-\tilde{x}_1)(x-\tilde{x}_2)}=$$

$$=\frac{e^2m}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1\mathrm{d}\,x\,(x^2+2x)\left[\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}-\frac{1}{x-\tilde{x}_1}-\frac{1}{x-\tilde{x}_2}\right]. \tag{7}$$

При преобразовании интеграла (7) было учтено, что

$$(1-\rho)(1-x_1)(1-x_2)=1\longrightarrow(1-\tilde{x}_1)(1-\tilde{x}_2)=1\,.$$

Последний интеграл вычисляется при помощи формулы

$$\frac{x^2+ax}{x-x_i}=x+(x_i+a)+\frac{x_i(x_i+a)}{x-x_i}\,. \tag{8}$$

Имеем:

$$\mathcal{M}_2=\frac{e^2m}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(-\rho)\left\{\frac{1-\beta}{1-\rho}-\frac{1}{\rho}\sum_{i=1,\,2}\left[x_i(x_i+2)\,\ln\frac{1-x_i}{-x_i}-\tilde{x}_i(\tilde{x}_i+2)\,\ln\frac{1-\tilde{x}_i}{-\tilde{x}_i}\right]\right\}. \tag{9}$$

[1] Заметим, что согласно данным определениям $1-\mathcal{M}'(\not p)|_{p^2=m^2,\,\not p=m}=Z_2^{-1}$

Так как
$$-\rho = \frac{1}{m^2}(\not p - m)(\not p + m)\,, \tag{10}$$
то
$$\mathcal{M}_2'(\not p) = (\not p + m)\,\mathcal{M}_2''(\rho)\,,$$
$$\mathcal{M}_2''(\rho) = \frac{e^2}{2\pi}\,\frac{1}{2m}\left\{\frac{1-\beta}{1-\rho} - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1,\,2}\left[x_i(x_i+2)\,\ln\frac{1-x_i}{-x_i} - \tilde{x}_i(\tilde{x}_i+2)\,\ln\frac{1-\tilde{x}_i}{-\,\tilde{x}_i}\right]\right\}. \tag{11}$$
Для приведения вклада в $\mathcal{M}$ от $\mathcal{M}_2$ к окончательному виду следует вместо $\mathcal{M}_2'(\not p)$ использовать величину
$$(\not p + m)\,\mathcal{M}_2''(\rho) - (2m)\,\mathcal{M}_2''(0) + 2m\,\mathcal{M}_2''(\rho) - 2m\,\mathcal{M}_2''(\rho) = (\not p - m)\,\mathcal{M}_2''(\rho) + 2m\rho\left\{\frac{1}{\rho}[\mathcal{M}_2''(\rho) - \mathcal{M}_2''(0)]\right\}. \tag{12}$$
Заметим, что в пределе $\lambda^2 \to 0$, $\rho > 0$
$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = -\frac{\rho}{1-\rho}\,, \qquad \mathcal{M}_2''(\rho) = \frac{e^2}{2\pi}\,\frac{1}{2m(1-\rho)}\left[1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho}\,\ln\rho\right]. \tag{13}$$

Поэтому первое слагаемое в (12) определено корректно в пределе нулевой массы фотона. Для вычисления второго слагаемого в (12) следует вычислить $\mathcal{M}_2''(0)$, для чего необходимо в (11) перейти к пределу $\rho \to 0$ при фиксированном значении $0 < \lambda^2 \ll m^2$. В результате несложных вычислений находим:
$$\mathcal{M}_2''(0) = -\frac{e^2}{2\pi}\,\frac{1}{2m}\left(1 + 2\ln\frac{\lambda}{m}\right). \tag{14}$$
В (14) все коэффициенты, зависящие от β, берутся в точке $\beta = 0$, поскольку при этом не возникает неопределённостей и расходимостей. Собирая формулы (2), (12), (13) и (14), получаем для $\mathcal{M}_2$:
$$\mathcal{M}_2 = \frac{e^2}{2\pi m}(\not p - m)^2\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\left[1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho}\,\ln\rho\right] - \frac{\not p + m}{m\rho}\left[\frac{1}{1-\rho} - \frac{(2-3\rho)}{(1-\rho)^2}\,\ln\rho + 1 + 2\ln\frac{\lambda}{m}\right]\right\}. \tag{15}$$

Действуя аналогично и делая вычитание (2) для
$$\mathcal{M}_1'(\not p) = \frac{e^2}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}\left\{\mathrm{const} + \sum_{i=1,\,2}\left[x_i + x_i(x_i-2)\,\ln\frac{1-x_i}{-x_i}\right]\right\}, \tag{16}$$
находим:
$$\mathcal{M}_1 = \frac{e^2}{2\pi m}(\not p - m)^2\,\frac{\not p + m}{m}\,\frac{1}{2(1-\rho)}\left(1 + \frac{2-\rho}{1-\rho}\,\ln\rho\right). \tag{17}$$
Складывая (15) и (17), окончательно находим:
$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{2\pi m}(\not p - m)^2\left\{\frac{1}{2(1-\rho)}\left(1 - \frac{2-3\rho}{1-\rho}\,\ln\rho\right) - \right.$$
$$\left. -\frac{\not p + m}{m\rho}\left[\frac{1}{2\,(1-\rho)}\left(2 - \rho + \frac{\rho^2+4\rho-4}{1-\rho}\,\ln\rho\right) + 1 + 2\,\ln\frac{\lambda}{m}\right]\right\}. \tag{18}$$
Оператор (18) вычислен в предположении $\rho > 0$, $\rho \gg \lambda/m$. При аналитическом продолжении в область $\rho < 0$ следует помнить, что точка ветвления $\rho = 0$ обходится снизу, так как m^2 содержит отрицательную бесконечно малую мнимую часть. Поэтому при $\rho < 0$
$$\ln\rho = \ln|\rho| - i\pi\,, \qquad \rho < 0\,. \tag{19}$$

Из (18) видно, что при нулевой массе фотона массовый оператор не определён, если используются условия нормировки (40 *a* Л10).

При $p^2 \gg m^2$ из (18) получаем следующую оценку:
$$\mathcal{M} \approx \frac{e^2}{4\pi}\,\not p\,\ln\frac{p^2}{m^2}\,. \tag{20}$$

Так как (20) есть поправка к $\not p$ (см. (39 Л10)), то для того чтобы ТВ была справедливой, должно быть

$$\frac{e^2}{4\pi}\ln\frac{p^2}{m^2}\ll 1\,. \tag{21}$$

Поскольку $e^2 = 1/137$, то условие (21) нарушается лишь при чрезвычайно больших импульсах.

Заметим, что массовый оператор калибровочно не инвариантен. В этом нет противоречий, поскольку массовый оператор не является непосредственно наблюдаемой величиной. В частности, в калибровке $\alpha = 3$ удовлетворение условиям нормировки (40 *a* Л10) не требует введения массы фотона

2. Поляризационный оператор

Можно существенно облегчить вычисления, если сначала найти мнимую часть диаграммы и затем восстановить всю диаграмму при помощи дисперсионного соотношения. Продемонстрируем этот метод на примере вычисления поляризационного оператора. В первом приближении ТВ он даётся петлёй в диаграмме

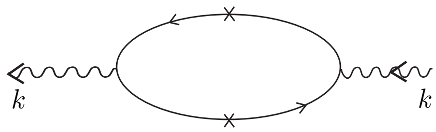


Рис. 24

Здесь внешняя линия виртуального фотона формально рассматривается как отвечающая реальной частице — векторному бозону массы $M^2 = k^2$, взаимодействующему с электрон-позитронным полем по тому же закону, что и фотон. При этом все соотношения условия унитарности остаются справедливыми. Диаграмма представляет диагональный элемент амплитуды $i\,M_{ii}$, дающей переход бозона самого в себя через распад на электрон-позитронную пару. Крестики на диаграмме показывают, по каким линиям она должна быть рассечена на две части так, чтобы дать реальное промежуточное состояние, фигурирующее при применении соотношения унитарности. Это состояние содержит электрон и позитрон с 4-импульсами $p_- = p$ и $p_+ = (k-p)$, соответственно.

Для вычисления мнимой части M_{ii} при помощи условия унитарности в соотношении (34′ Л5) в данном случае следует использовать меру

$$\sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3 p_-}{(2\pi)^3\,2p_-^0}\,\frac{\mathrm{d}^3 p_+}{(2\pi)^3\,2p_+^0}\,,$$

причём далее $\sum_\lambda$ означает сумму лишь по поляризациям промежуточных частиц, $p_-^2 = p_+^2 = m^2$ и в сумме по промежуточным состояниям 3-вектора $\mathbf{p}_-$ и $\mathbf{p}_+$ считаются независимыми. Имеем:

$$2\ \mathrm{Im}\ M_{ii} = (2\pi)^4 \sum_\lambda \int \frac{\mathrm{d}^3 p_-}{(2\pi)^3\,2p_-^0}\,\frac{\mathrm{d}^3 p_+}{(2\pi)^3\,2p_+^0}\,\delta^{(4)}(k - p_- - p_+)\,|\,M_{\lambda i}\,|^2\,, \tag{22}$$

где амплитуда $M_{\lambda i}$ даётся частью диаграммы на рис. 24 правее крестиков:

$$i\,M_{\lambda i} = \overline{u}_{p_-}(-ie\gamma^\mu)u_{-p_+}\sqrt{4\pi}\,e_\mu\,. \tag{23}$$

Введём параметр

$$t = k^2 = (p_- + p_+)^2 = 2\,(p_-p_+ + m^2)\,.$$

В процессе вычисления будем предполагать, что $t > 4\,m^2$. Так как интеграл в (22) лоренц-инвариантен, то вычислим его в системе отсчёта, где $\mathbf{k} = 0$, $k^0 = \sqrt{t}$. Сначала проинтегрируем по $\mathbf{p}_+$:

$$2\ \mathrm{Im}\ M_{ii} = \frac{1}{(4\,\pi)^2}\sum_\lambda \int \mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}} \int\limits_0^\infty \frac{|\mathbf{p}|^2\,\mathrm{d}\,|\mathbf{p}|}{(p^0)^2}\,\delta\,(\sqrt{t} - 2\,p^0)\,|M_{\lambda\,i}|^2\,.$$

Так как $|\mathbf{p}|\,\mathrm{d}\,|\mathbf{p}| = p^0\,\mathrm{d}\,p^0$, то

$$2\;\mathrm{Im}\;M_{ii} = \frac{1}{(4\,\pi)^2}\cdot\frac{|\mathbf{p}|}{2\,p^0}\int \mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\sum_\lambda |M_{\lambda\,i}|^2\,. \tag{24}$$

В (24) $p^0 = (1/2)\sqrt{t}$, $|\mathbf{p}| = (1/2)\sqrt{t-4\,m^2}$, $\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}$ — дифференциал телесного угла, внутри которого находится вектор $\mathbf{p} = \mathbf{p}_-$. С учётом (23)

$$\sum_\lambda |M_{\lambda\,i}|^2 = 4\,\pi\,e^2\,e^*_\mu e_\nu\sum_\lambda \mathrm{tr}\,\gamma^\mu u_{-p_+}\overline{u}_{-p_+}\gamma^\nu u_{p_-}\overline{u}_{p_-}\,. \tag{25}$$

В (25) $\sum_\lambda$ означает независимое суммирование по поляризациям электрона и позитрона. Поэтому при помощи (56 Л8) находим:

$$\sum_\lambda |M_{\lambda\,i}|^2 = 4\,\pi\,e^2\,e^*_\mu e_\nu\,\mathrm{tr}\,\gamma^\mu(\not p_+ - m)\gamma^\nu(\not p_- + m) = 16\,\pi\,e^2\,e^*_\mu e_\nu\,[p^\mu_- p^\nu_+ + p^\nu_- p^\mu_+ - (p_+p_- + m^2)\,\eta^{\mu\nu}]\,. \tag{26}$$

Здесь второе равенство получено при помощи формул (65 Л8) и (66 Л8). Так как $k = p_- + p_+$ и

$$k_\mu[p^\mu_- p^\nu_+ + p^\nu_- p^\mu_+ - (p_+p_- + m^2)\,\eta^{\mu\nu}] \equiv 0\,,$$

то

$$\int \mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\,[p^\mu_- p^\nu_+ + p^\nu_- p^\mu_+ - (p_+p_- + m^2)\,\eta^{\mu\nu}] = 4\,\pi\,a\,(k^2\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\,. \tag{27}$$

Коэффициент a в (27) находится путём вычисления свёртки по векторным индексам в (27):

$$a = -\frac{t+2\,m^2}{3\,t}\,. \tag{28}$$

С другой стороны,

$$i\,M_{ii} = \sqrt{4\,\pi}\,e^*_\mu\,\sqrt{4\,\pi}\,e_\nu\,\frac{i\,\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\,\pi}\,. \tag{29}$$

Если считать вектора поляризации бозона вещественными, то сопоставляя формулы (24), (26), (27), (28) и (29), получаем:

$$2\,e_\mu e_\nu\;\mathrm{Im}\;\mathcal{P}^{\mu\nu} = -\frac{2\,e^2}{3}\,e_\mu e_\nu\,\sqrt{\frac{t-4\,m^2}{t}}\cdot\frac{t+2\,m^2}{t}\,(k^2\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)\,.$$

Теперь можно отбросить вектора поляризации бозона и использовать определение (18 Л10). Окончательно находим:

$$\mathrm{Im}\;\mathcal{P}\,(t) = -\frac{e^2}{3}\,\sqrt{\frac{t-4\,m^2}{t}}\cdot\frac{t+2\,m^2}{t}\,. \tag{30}$$

Очевидно, $\mathrm{Im}\;\mathcal{P}\,(t) = 0$ при $t < 4\,m^2$. Поэтому по мнимой части (30) при помощи дисперсионного соотношения восстанавливается вся функция:

$$\mathcal{P}\,(t) = -\frac{e^2}{3\,\pi}\int\limits_{4\,m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,t'}{t'-t-i\varepsilon}\,\sqrt{\frac{t'-4\,m^2}{t'}}\cdot\frac{t'+2\,m^2}{t'}\,. \tag{31}$$

Этот интеграл является представлением Челлена–Лемана (см. (15 Л5)). Величина (30) является значением мнимой части поляризационного оператора на верхнем берегу разреза. Окончательное выражение для поляризационного оператора получается при учёте условия нормировки (40 b Л10), согласно которому необходимо сделать замену $\mathcal{P}\,(t) \to \mathcal{P}\,(t) - \mathcal{P}\,(0)$:

$$\mathcal{P}\,(t) = -\frac{e^2}{3\,\pi}\,t\int\limits_{4\,m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,t'}{t'-t-i\varepsilon}\,\sqrt{\frac{t'-4\,m^2}{t'}}\cdot\frac{t'+2\,m^2}{t'^2}\,. \tag{32}$$

Будем считать, что $t < 0$. Тогда интеграл (32) берётся при помощи подстановки $t'/4\,m^2 = 1/(1-x^2)$, $0 < x < 1$:

$$\mathcal{P}\,(t) = \frac{e^2}{3\,\pi}\left[-\frac{5}{3} + \frac{4\,\xi}{(1-\xi)^2} - (\xi^2 - 4\,\xi + 1)\,\frac{1+\xi}{(1-\xi)^3}\,\ln\xi\right]. \tag{33}$$

Мы выразили $\mathcal{P}$ через переменную

$$t/m^2 = -(1-\xi)^2/\xi\,. \tag{34}$$

Значение $\mathcal{P}\,(t)$ в предельном случае малых t легче всего ищется непосредственно из (32). Для этого следует положить под интегралом $t = 0$:

$$\mathcal{P}\,(t) = -\frac{e^2}{15\,\pi}\cdot\frac{t}{m^2}\,, \qquad |t| \ll 4\,m^2\,. \tag{35}$$

Из (34) видно, что при стремлении переменной ξ к единице снизу t стремится к нулю. Чтобы продвинуться далее от $t = 0$ до $t = 4\,m^2$ следует положить $\xi = e^{i\,\varphi}$. Тогда согласно (34)

$$t = 4\,m^2\,\sin^2\frac{\varphi}{2}\,, \qquad 0 \le \varphi \le \pi\,. \tag{36}$$

В области $t > 4\,m^2$ переменная ξ заключена в интервале $-1 < \xi < 0$. Из (36) следует, что в этом интервале $\ln\xi = \ln|\xi| + i\,\pi$. Из (34) получаем также, что при больших $|t|$

$$t\,\xi = -m^2\,, \qquad |t| \gg 4\,m^2\,. \tag{37}$$

Поэтому из (33) получаем асимптотику при больших $|t|$:

$$\mathcal{P}\,(t) = \begin{cases} \frac{e^2}{3\,\pi}\,\ln\frac{|t|}{m^2}\,, & \text{если} \quad -t \gg 4\,m^2 \\[2ex] \frac{e^2}{3\,\pi}\,\left(\ln\frac{t}{m^2} - i\,\pi\right)\,, & \text{если} \quad t \gg 4\,m^2\,. \end{cases} \tag{38}$$

Мнимые части $\mathcal{P}\,(t)$, полученные при помощи (30) и (38), совпадают. Это подтверждает равенство $\ln\xi = \ln|\xi| + i\,\pi$ при $-1 < \xi < 0$.

По смыслу ТВ полученные формулы справедливы до тех пор пока $|\mathcal{P}| \ll 1$ (см. (20 Л10)). Поэтому ТВ справедлива до тех пор пока

$$\frac{e^2}{3\,\pi}\,\ln\frac{|t|}{m^2} \ll 1\,.$$

Мы опять пришли к ограничению (21).

Константа перенормировки Z_3 получается, если в (20 Л10) подставить неперенормированный оператор (31) и устремить t к нулю. Обрезая интеграл в (31) масштабом $\Lambda \to \infty$, находим с точностью $O\,(e^2)$:

$$Z_3^{-1}(\Lambda) \equiv 1 - \mathcal{P}\,(t = 0;\,\Lambda) \approx 1 + \frac{2\,e^2}{3\,\pi}\,\ln\frac{\Lambda}{m}\,. \tag{39}$$

Теперь в соотношении (45 Л10) $e_0^2\,(\Lambda) = Z_3^{-1}\,(\Lambda)\,e^2$ сделаем подстановку $\Lambda \to M$, $e_0^2\,(\Lambda) \to e^2\,(M)$, где M — масштаб нормировки, $M \gg m$, а $e^2\,(M)$ — бегущая константа связи. Таким образом

$$e^2\,(M) = \left[1 + \frac{2\,e^2}{3\,\pi}\,\ln\frac{M}{m}\right]\,e^2\,.$$

Отсюда с точностью $O\,(e^3)$ получаем:

$$M\,\frac{\mathrm{d}\,e\,(M)}{\mathrm{d}\,M} \equiv \beta\,(e\,(M)) = \frac{e^3\,(M)}{3\,\pi}\,. \tag{40}$$

Решая это дифференциальное уравнение, находим:

$$e^2\,(M) = \frac{e^2}{1 - \frac{e^2}{3\,\pi}\,\ln\frac{M^2}{m^2}}\,. \tag{41}$$

Формула (41) показывает, что эффективная константа связи растёт при продвижении в ультрафиолетовую область. Это свойство является общим для скалярной теории и КЭД.

3. Радиационные поправки к закону Кулона

Рассмотрим квантовые поправки к кулоновскому полю неподвижного сверхмассивного точечного заряда e_1, потенциал которого (без учёта поправок)

$$\varphi_0(r) \equiv A_0^{(e)}(r) = \frac{e_1}{r}\,, \qquad \mathbf{A}^{(e)} = 0\,. \tag{42}$$

В импульсном пространстве

$$\varphi_0(\mathbf{k}) = \frac{4\,\pi\,e_1}{\mathbf{k}^2}\,. \tag{43}$$

С учётом квантовых поправок потенциал (42) заменяется на

$$\varphi = A_0^{(e)} + \mathcal{D}_{0\,\mu}\,\frac{\mathcal{P}^{\mu\nu}}{4\,\pi}\,A_\nu^{(e)}\,. \tag{44}$$

Получим первую поправку. Для этого поляризационный оператор возьмём в (32) и заменим точный фотонный пропагатор на свободный. С учётом того что $k^0 = 0$ получаем:

$$\varphi\,(\mathbf{k}) = \varphi_0(\mathbf{k}) + \mathcal{P}\,(-\,\mathbf{k}^2)\,\varphi_0(\mathbf{k})\,. \tag{45}$$

Отсюда видно, что возмущение потенциала есть

$$\delta\,\varphi\,(\mathbf{k}) = \frac{4\,\pi e_1}{\mathbf{k}^2}\,\mathcal{P}\,(-\,\mathbf{k}^2) = \frac{4\,\pi e_1}{y^2}\,\mathcal{P}\,(-y^2) \equiv \delta\,\varphi\,(-y^2)\,,$$

$$\delta\,\varphi\,(r) = \int e^{i\,\mathbf{k}\,\mathbf{r}}\,\delta\,\varphi\,(\mathbf{k})\,\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3} = \frac{1}{2\,\pi^2}\int\limits_0^\infty \delta\,\varphi\,(-y^2)\,\frac{\sin yr}{r}\,y\,\mathrm{d}\,y\,. \tag{46}$$

Так как подынтегральное выражение чётно, то

$$\delta\,\varphi\,(r) = \frac{1}{4\,\pi^2 r}\,\mathrm{Im}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta\,\varphi\,(-y^2)\,e^{i\,r\,y} y\,\mathrm{d}\,y\,. \tag{47}$$

Теперь сместим контур интегрирования с вещественной оси переменной y в верхнюю полуплоскость так, как показано на рис. 25.

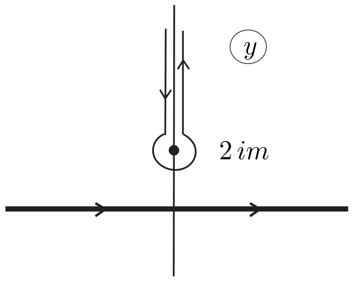


Рис. 25

На рис. 25 $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}$ на левом берегу разреза задаётся при помощи (30). Положим $y = i\,x$. Тогда (47) переписывается как

$$\delta\,\varphi\,(r) = \frac{e_1}{r}\left[-\frac{2}{\pi}\int\limits_{2\,m}^\infty \mathrm{Im}\;\mathcal{P}\,(t = x^2)\,\frac{e^{-r\,x}}{x}\,\mathrm{d}\,x\right].$$

Теперь выпишем потенциал (45):

$$\varphi\,(r) = \frac{e_1}{r} + \delta\,\varphi\,(r) = \frac{e_1}{r}\left[1 + \frac{2\,e^2}{3\,\pi}\int\limits_1^\infty e^{-2\,m\,r\,\zeta}\left(1 + \frac{1}{2\,\zeta^2}\right)\frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\zeta^2}\,\mathrm{d}\,\zeta\right]. \tag{48}$$

Оценим $\varphi(r)$ в двух предельных случаях.
а) $m\,r \gg 1$.

Интеграл (48) легко оценивается при помощи подстановки $\zeta = 1 + \xi$:

$$\varphi(r) = \frac{e_1}{r}\left[1 + \frac{e^2}{4\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{-2\,m\,r}}{(m\,r)^{3/2}}\right], \qquad r \gg \frac{1}{m}\,. \tag{49}$$

б) $m\,r \ll 1$.

Опуская вычисления, приводим ответ (см. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 4, § 114):

$$\varphi(r) = \frac{e_1}{r}\left[1 + \frac{2\,e^2}{3\,\pi}\left(\ln\frac{1}{m\,r} - C - \frac{5}{6}\right)\right], \qquad r \ll \frac{1}{m}\,, \tag{50}$$

где $C = 0,577\ldots$ — постоянная Эйлера.

Мы видим, что поляризация вакуума искажает кулоново поле точечного заряда в области $r \lesssim 1/m$ $(= \hbar/m\,c)$, где m — масса электрона. Вне этой области искажение поля убывает по экспоненциальному закону.

Задачи

1. Вычислить в однопетлевом приближении константу перенормировки дираковского поля Z_2.

2*. Установить путём прямого вычисления что в калибровке $\alpha = 3$ для удовлетворения массовым оператором условий нормировки (40 *а* Л10) не требуется введение массы фотона.

Лекция 12

II. ОДНОПЕТЛЕВАЯ СТРУКТУРА КЭД. ВЕРШИННЫЙ ОПЕРАТОР И АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ ЭЛЕКТРОНА

1. Формфакторы электрона

Рассмотрим вершинный оператор $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$ в случае, когда обе внешние электронные линии находятся на массовой поверхности, то есть описывают распространение реальных частиц, а внешняя фотонная линия считается входящей с 4-импульсом $k = p_2 - p_1$. Электронным внешним линиям отвечают множители $u_1 = u_{p_1}$ и $\overline{u}_2 = \overline{u}_{p_2}$, так что Γ входит в выражение для диаграмм в виде $J^\mu_{fi} = \overline{u}_2\,\Gamma^\mu(p_2, p_1)\,u_1$. Амплитуда перехода, описывающая

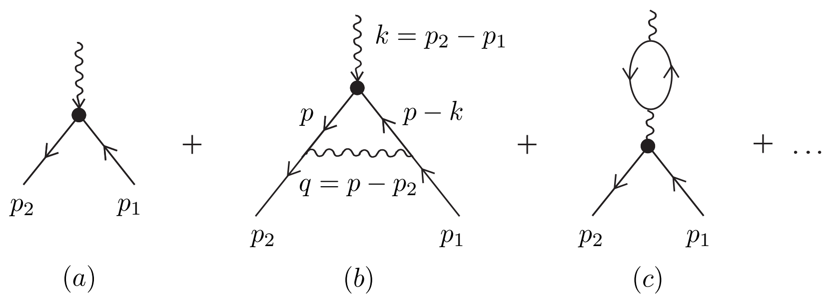


Рис.26

рассеяние электрона во внешнем поле в первом порядке по этому полю представляется как

$$M_{fi} = -e\,J^\mu_{fi}\,\mathcal{A}^{(e)}_\mu(k)\,, \qquad J^\mu_{fi} = \overline{u}_2\,\Gamma^\mu(p_2, p_1)\,u_1\,, \tag{1}$$

где $\mathcal{A}^{(e)}_\mu$ — эффективное (с учётом поляризации вакуума) внешнее поле. Однопетлевой вклад в эффективное внешнее поле задаётся диаграммой (в) на рис. 26. Поскольку эта амплитуда является скаляром (а не псевдоскаляром), а $\mathcal{A}^{(e)}_\mu$ — вектором, то величина J^μ_{fi} является вектором во всех приближениях и она может быть выражена лишь через истинные векторы, которые могут быть составлены из имеющихся в нашем распоряжении 4-векторов p_1 и p_2 $(k = p_2 - p_1)$ и биспиноров u_1 и u_2. Всего имеется три таких вектора:

$$\overline{u}_2\,\gamma^\mu\,u_1\,, \qquad (\overline{u}_2 u_1)\,P^\mu\,, \qquad (\overline{u}_2 u_1)\,k^\mu\,, \tag{2}$$

где $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$. Вследствие тождества Уорда (10 Л10), формул (39 Л10), (40 *a* Л10) и равенства (38 *a* Л8) имеем:

$$k_\mu J^\mu_{fi} = 0\,. \tag{3}$$

Так как 4-импульсы p_1 и p_2 находятся на массовой поверхности, то $k_\mu P^\mu = 0$, но $k_\mu k^\mu \neq 0$. Кроме того, вследствие (38 *a* Л8) $k_\mu \overline{u}_2 \gamma^\mu u_1 = 0$. Поэтому

$$J^\mu_{fi} = f_1 \cdot (\overline{u}_2 u_1)\,P^\mu + f_2 \cdot (\overline{u}_2 \gamma^\mu u_1)\,, \tag{4}$$

где f_1 и f_2 — инварианты, которые называются *электромагнитными формфакторами электрона.* Из двух векторов p_1 и p_2 $(p_1^2 = p_2^2 = m^2)$ можно составить лишь одну инвариантную величину, в качестве которой возьмём k^2. Формфакторы являются функциями лишь k^2.

При помощи формул (5 Л8), (10 Л8) и (38 Л8) получаем:

$$(\overline{u}_2 \sigma^{\mu\nu} u_1)\,k_\nu = -m\,(\overline{u}_2 \gamma^\mu u_1) + \frac{1}{2}(\overline{u}_2 u_1)\,P^\mu\,. \tag{5}$$

Поэтому представление (4) может быть переписано как

$$J^{\mu}_{fi} = f(k^2)(\overline{u}_2\gamma^{\mu}u_1) - \frac{1}{m}g(k^2)(\overline{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1)\,k_{\nu}\,, \tag{6}$$

где f и g — другие формфакторы.

Член в амплитуде рассеяния (1), пропорциональный $g(k^2)$, имеет вид

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{m}g(k^2)(\overline{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1)\,k_{\nu}\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}\,. \tag{7}$$

Рассмотрим чисто магнитное поле $\mathcal{A}^{(0)\mu} = (0,\,\mathbf{A})$ и пусть $k^{\mu} = (0,\,\mathbf{k})$, $\mathbf{k}\to 0$. Это значит, что поле не зависит от времени и оно медленно изменяется в пространстве [1]. Перепишем (7) с учётом того, что в данном случае имеются лишь пространственно-пространственные компоненты тензора электромагнитного поля и $H^i(\mathbf{k}) = i\,\varepsilon_{ijk}k_jA^{(e)}_k(\mathbf{k})$:

$$\delta M_{fi} = \frac{e}{m}g(0)\,\overline{u}_2\left(\frac{i}{2}\,\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk}\right)u_1\,H^i\,.$$

Такой же вклад в амплитуду даст добавка к гамильтониану

$$\delta\,\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\;\overline{\psi}\,\left[-\frac{e}{m}g(0)\left(\frac{i}{2}\,\varepsilon_{ijk}\sigma^{jk}\right)\,H^i\right]\,\psi \longrightarrow \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\varphi^{\dagger}\left[-\frac{e}{m}g(0)\;\mathbf{s}\,\mathbf{H}\right]\varphi\,. \tag{8}$$

Последнее выражение в (8) получается из предыдущего в нерелятивистском пределе в стандартном представлении. Сравнение (8) с уравнениями (28 Л8) и (30 Л8) показывает, что радиационные поправки дают дополнительный вклад в магнитный момент электрона, так что его полный магнитный момент (в обычных единицах)

$$\mu = \frac{e\,\hbar}{2\,m\,c}\,(1+g(0))\,. \tag{9}$$

Очевидно, что первое слагаемое в (6) не может дать вклад в аномальный магнитный момент. Действительно, при $k\to 0$ для первого слагаемого в (6) имеем $f(k^2)(\overline{u}_2\gamma^{\mu}u_1)\to 2\,f(0)\,p^{\mu}$, где p^{μ} — импульс электрона.

2. Аналитические свойства формфакторов

Амплитуда (1) описывает два канала реакции. В канале рассеяния переменная

$$t \equiv k^2 = (p_2-p_1)^2 \le 0\,. \tag{10}$$

Путём замены $p_2\to p_-$, $p_1\to -p_+$ мы приходим к аннигиляционному каналу, отвечающему рождению электрон-позитронной пары с 4-импульсами p_- и p_+. В этом канале

$$t = (p_-+p_+)^2 \ge 4\,m^2\,. \tag{11}$$

Область значений $0<t<4\,m^2$ — нефизическая.

Применим условие унитарности (34 Л5). В канале рассеяния ($t<0$) нет физических промежуточных состояний: один свободный электрон не может изменить свой импульс или родить какие либо другие реальные (не виртуальные) частицы; в нефизической области их также нет. Поэтому при $t<4\,m^2$ правая сторона равенства (34 Л5) отсутствует, так что

$$M_{fi} = M^{*}_{if}\,. \tag{12}$$

Равенство (12) справедливо, конечно, во всех приближениях. Перестановка начального и конечного состояний означает перестановку p_1 и p_2, а тем самым замену $k\to -k$. Из соотношения (12) для выражения (1) вытекает, что

$$J^{\mu}_{fi}\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}(k) = J^{\mu\,*}_{if}\mathcal{A}^{(e)\,*}_{\mu}(-k)\,.$$

[1]В этом случае в (7) можно заменить "одетое"поле $\mathcal{A}^{(e)}_{\mu}$ на "голое"поле $A^{(e)}_{\mu}$. Действительно, в конце лекции 11 было показано, что (в однопетлевом приближении) слабое медленно меняющееся "одетое"кулоново поле фактически совпадает с "голым". Это же утверждение во всех порядках ТВ имеет место в отношении любого слабого и медленно изменяющегося электромагнитного поля.

Но вследствие вещественности электромагнитного поля $\mathcal{A}_\mu^{(e)}(k) = \mathcal{A}_\mu^{(e)\,*}(-k)$, и потому

$$J^\mu_{fi} = J^{\mu\,*}_{if}\,, \qquad t < 4\,m^2\,. \tag{13}$$

Легко проверить, что (см. (8 Л8) и (11 Л8))

$$(\overline{u}_2\gamma^\mu u_1) = (\overline{u}_1\gamma^\mu u_2)^*\,, \qquad (\overline{u}_2\sigma^{\mu\nu}u_1) = -(\overline{u}_1\sigma^{\mu\nu}u_2)^*\,.$$

Поэтому f^*_{if} отличается от f_{fi} лишь заменой функций $f\,(t)$ и $g\,(t)$ их комплексно сопряжёнными. Тогда из (13) следует, что

$$\mathrm{Im}\,f\,(t) = \mathrm{Im}\,g\,(t) = 0\,, \qquad t < 4\,m^2\,. \tag{14}$$

Из диаграмм (b) и (c) на рис. 26 видно, что в аннигиляционном канале ($t > 4\,m^2$) уже в однопетлевом приближении существуют реальные промежуточные частицы. Поэтому правая часть условия унитарности для амплитуды (1) отлична от нуля и формфакторы f и g комплексны. Аналитические свойства функций $f\,(t)$ и $g\,(t)$ аналогичны свойствам функций $\mathcal{P}\,(t)$. Эти функции аналитичны в комплексной плоскости переменной t, разрезанной вдоль положительной вещественной оси $t > 4\,m^2$, причём

$$f^*(t) = f\,(t^*)\,, \qquad g^*(t) = g\,(t^*)\,. \tag{15}$$

Условие перенормируемости (46 Л10), применённое к (6), даёт

$$f\,(0) = 1\,. \tag{16}$$

Это условие учитывается автоматически, если в дисперсионном соотношении использовать не $f\,(t)$, а $(f\,(t)-1)/t$. Таким образом

$$f\,(t) - 1 = \frac{t}{\pi}\int\limits_{4\,m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,f\,(t')\,\mathrm{d}\,t'}{t'(t'-t-i\,\varepsilon)}\,. \tag{17}$$

Для формфактора $g\,(t)$ условие перенормировки (46 Л10) не даёт ограничений, так что аналогичная формула имеет вид

$$g\,(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{4\,m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{Im}\,g\,(t')\,\mathrm{d}\,t'}{t'-t-i\,\varepsilon}\,. \tag{18}$$

В (17), (18) мнимые части функций, как и обычно, берутся на верхних берегах разреза.

Рассмотрение, проведенное до сих пор, справедливо во всех порядках ТВ.

3. Вычисление мнимых частей по интегралу Фейнмана

Выпишем амплитуду, соответствующую диаграмме (b) на рис. 26 в аннигиляционном канале ($p_2 \to p_-,\ p_1 \to -p_+,\ q \to p - p_-,\ k = p_- + p_+$):

$$-i\,e\,\overline{u}_{p_-}\Gamma^\mu u_{-p_+} = (-i\,e)^3\overline{u}_{p_-}\gamma^\nu i\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,p}{(2\,\pi)^4}S_c(p)\,\gamma^\mu\,S_c(p-k)\,\gamma^\lambda u_{-p_+}\,D^\alpha_{\lambda\nu}(p-p_-)\,. \tag{19}$$

Далее обкладки $\overline{u}_{p_-}\,\ldots\,u_{-p_+}$ во всех формулах опускаются для сокращения записи, но равенства $\overline{u}_{p_-}\,\not{p}_- = m\,\overline{u}_{p_-}$ и $\not{p}_+\,u_{-p_+} = -m\,u_{-p_+}$ используются в вычислениях. В калибровке Фейнмана $\alpha = 1$ имеем:

$$f\,(k^2)\,\gamma^\mu - \frac{1}{m}\,g\,(k^2)\,\sigma^{\mu\nu}k_\nu = \int\frac{i\,\varphi^\mu(p^0,\,\mathbf{p})\,\mathrm{d}^{(4)}\,p}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}\,, \tag{20}$$

где

$$\varphi^\mu(p^0,\,\mathbf{p}) = -\frac{e^2}{4\,\pi^3}\cdot\frac{\gamma^\nu(\not{p}+m)\,\gamma^\mu(\not{p}-\not{k}+m)\,\gamma_\nu}{[(p-p_-)^2-\lambda^2]}\,. \tag{21}$$

Здесь опять введена бесконечно малая масса фотона λ в фотонный пропагатор.

Разрез проходит в t-плоскости при $t > 4\,m^2$. При таких значениях $t = k^2$ существует система отсчёта K_0, в которой $k = (k^0,\,\mathbf{0})$. В системе K_0

$$(p-k)^2 = (p^0-k^0)^2 - \mathbf{p}^2\,, \qquad p^0_- = p^0_+ = \frac{1}{2}k^0 = \frac{\sqrt{t}}{2}\,, \qquad \mathbf{p}_- = -\,\mathbf{p}_+\,, \qquad |\,\mathbf{p}_-\,| = \frac{1}{2}\sqrt{t-4\,m^2}\,. \tag{22}$$

Введём обозначение $\omega = +\sqrt{|\,\mathbf{p}\,|^2 + m^2}$. Тогда

$$\mathrm{d}^4 p = |\,\mathbf{p}\,|\,\omega\ \mathrm{d}p^o\ \mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}o_{\mathbf{p}}\,. \tag{23}$$

В системе отсчёта K_0 знаменатель в интеграле (20) имеет полюса по p^0 в точках

$$a)\ \ p_0 = \omega - i\varepsilon\,, \qquad a')\ \ p_0 = -\omega + i\varepsilon\,,$$

$$b)\ \ p_0 = k_0 - \omega + i\varepsilon\,, \quad b')\ \ p_0 = k_0 + \omega - i\varepsilon\,. \tag{24}$$

Для определённости считаем $k^0 > 0$, что отвечает процессу рождения пары (ответ не зависит от этого предположения, поскольку является функцией $(k^0)^2$). Ясно, что лишь полюса a) и b) могут совпасть при интегрировании в (20), что происходит при $\omega = (1/2)\,k^0$ (это возможно лишь при $k^0 > 2m$). На рис. 27 показано расположение полюсов в комплексной плоскости p^0 [1].

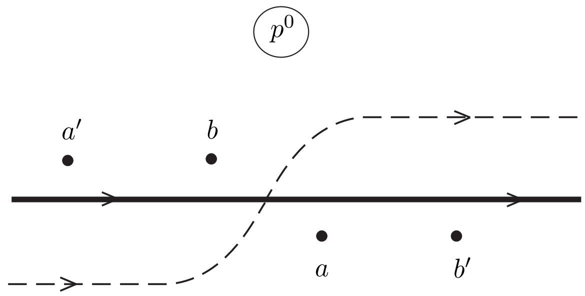


Рис. 27

При замене в интеграле (20) $k^2 \to k^2 - i\delta$, $\delta \to +0$, интеграл изменяется скачкообразно, поскольку при такой замене мы попадаем на нижний берег разреза. Однако из рис. 27 видно, что если полюса a) и b) не совпадают, то при указанной замене параметра скачка быть не может, поскольку контур интегрирования может быть плавно изменён (на рис. 27 новый контур интегрирования изображён пунктиром). Поэтому бесконечно малое смещение полюсов не переводит их на другую сторону контура интегрирования. Отсюда видно, что мнимая часть (или скачок интеграла) появляется лишь при условии совпадения полюсов a) и b). Такое совпадение происходит лишь при одновременном обращении в нуль обоих сомножителей в знаменателе интеграла (20). Это значит, что для нахождения скачка в интеграле (20) следует вставить под интеграл вместо знаменателя множитель $\delta(p^2 - m^2)\,\delta[(p-k)^2 - m^2]$. Для вычисления коэффициента при этом множителе заменим исходный контур интегрирования C на два других C' и C'' так, как показано на рис. 28.

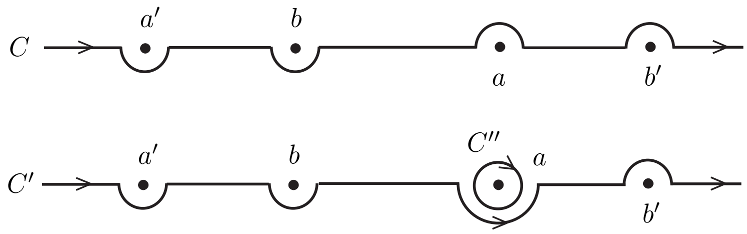


Рис. 28

Интеграл по контуру C' уводится от полюсов a) и b) и потому не даёт скачка. Интеграл по контуру C'' легко вычисляется взятием вычета, что эквивалентно замене под интегралом (20)

$$\frac{1}{p^2 - m^2} \to (-2\pi i)\,\delta(p^2 - m^2)\,. \tag{25}$$

[1]Совпадение полюсов внутренних фотонной и одной из фермионных линий невозможно, поскольку вследствие сохранения 4-импульса электрон не может излучить частицу.

Знак "$-$" в (25) имеет место вследствие отрицательной ориентации контура C''. Теперь очевидно, что разность значений интеграла (20) на верхнем и нижнем берегах разреза даётся величиной

$$\int\limits_{p_0>0} \mathrm{d}^{(4)}\, p\; i\,\varphi^\mu(p^0,\mathbf{p})\,[-2\pi i\,\delta(p^2-m^2)]\left[\frac{1}{(p-k)^2-m^2+i\delta}-\frac{1}{(p-k)^2-m^2-i\delta}\right]=$$

$$=\int\limits_{p_0>0} \mathrm{d}^{(4)}\, p\; i\,\varphi^\mu(p^0,\mathbf{p})\,[-2\pi i\,\delta(p^2-m^2)][-2\pi i\,\delta((p-k)^2-m^2)]\,. \tag{26}$$

Можно доказать общее *правило Каткосского* для отыскания скачка диаграмм:

1. разобьём диаграмму на две всеми возможными способами путём разрезания её пропагаторов;
2. для каждого разрезанного пропагатора частицы массы m делаем замену $(p^2-m^2+i\varepsilon)^{-1}\to(-2\pi i)\,\delta(p^2-m^2)$, затем вычисляем петлевые интегралы;
3. суммируем вклады от всех возможных разрезаний.

В результате интегрирования в системе K_0 δ-функции в (26) легко снимаются. При помощи (22) и (23) и (26) находим для скачка интеграла (20):

$$Disc\int\frac{i\varphi^\mu\,\mathrm{d}^4\,p}{(p^2-m^2)[(p-k)^2-m^2]}=\int\limits_{p_0>0}|\,\mathbf{p}\,|\,\omega\;\mathrm{d}\,p^o\;\mathrm{d}\,\omega\;\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\,i\varphi^\mu\times$$

$$\times[-2\pi i\,\delta\,(p_0^2-\omega^2)]\,[-2\pi i\,\delta\,((p_0-k_0)^2-\omega^2)]=-i\,\frac{\pi^2}{2}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\,\varphi^\mu\left(\frac{\sqrt{t}}{2},\,\mathbf{p}\right)\,, \tag{27}$$

$$p^0=\frac{\sqrt{t}}{2},\qquad |\,\mathbf{p}\,|=\frac{1}{2}\sqrt{t-4m^2}\,. \tag{28}$$

Вычислим интеграл в (27) в системе центра инерции K_0, в которой

$$p_-=\left(\frac{\sqrt{t}}{2},\,0,\,0,\,\frac{\sqrt{t-4m^2}}{2}\right)\,,\qquad p=\left(\frac{\sqrt{t}}{2},\,\mathbf{p}\right)\,,\qquad \mathbf{p}=\frac{\sqrt{t-4m^2}}{2}(\sin\theta\,\cos\phi,\sin\theta\,\sin\phi,\cos\theta)\,. \tag{29}$$

При помощи формул (62 Л8), (22), (28) и (29) величина (21) переписывается в виде

$$\varphi^\mu=\frac{e^2}{\pi^3\rho}\left(-2p^\mu\,\not{p}+\not{k}\,\gamma^\mu\,\not{p}+4m\,p^\mu-2m\,k^\mu\right)\,,\qquad \rho=(t-4m^2)\,(1-\cos\theta)+2\lambda^2\,. \tag{30}$$

Введём обозначения

$$\varkappa^\mu=\int\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\,\frac{p^\mu}{\rho}\,,\qquad \varkappa^{\mu\nu}=\int\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\frac{p^\mu p^\nu}{\rho}\,. \tag{31}$$

Приведём ненулевые значения компонент этих величин:

$$\varkappa^0=\tfrac{\pi\sqrt{t}}{t-4m^2}\,\ln\tfrac{t-4m^2}{\lambda^2}\,,\qquad \varkappa^3=\tfrac{\pi}{\sqrt{t-4m^2}}\,\left[-2+\ln\tfrac{t-4m^2}{\lambda^2}\right]\,,$$

$$\varkappa^{00}=\tfrac{\pi t}{2(t-4m^2)}\,\ln\tfrac{t-4m^2}{\lambda^2}\,,\qquad \varkappa^{03}=\tfrac{\pi}{2}\sqrt{\tfrac{t}{t-4m^2}}\,\left[-2+\ln\tfrac{t-4m^2}{\lambda^2}\right]\,, \tag{32}$$

$$\varkappa^{33}=\tfrac{\pi}{2}\,\left[-2+\ln\tfrac{t-4m^2}{\lambda^2}\right]\,,\qquad \varkappa^{\alpha\beta}=\tfrac{\pi}{2}\,\delta^{\alpha\beta}\,,\quad \alpha,\ \beta=1,2\,.$$

Далее в этом пункте обозначаем символом $\approx$ те равенства, которые имеют место лишь в обкладках $\overline{u}_{p_-}\ldots u_{-p_+}$. Например, формула (5) в аннигиляционном канале имеет вид

$$\sigma^{\mu\nu}k_\nu\approx -m\gamma^\mu+\frac{1}{2}(p_-^\mu-p_+^\mu)\,. \tag{33}$$

Теперь вычислим скачок на разрезе равенства (20) и, в первом случае, свернём его с вектором P_μ, а во втором случае рассмотрим скачок этого векторного равенства с индексами $\mu=\alpha=1,\,2$ (напомним, что равенство (20) рассматривается в "обкладках" $\overline{u}_{p_-}\ldots u_{-p_+}$). Таким образом мы получим два независимых уравнения, при помощи которых найдём мнимые части формфакторов.

В первом случае, учитывая равенство (33), находим скачок левой части Ур. (20):

$$\left[2m\,\mathrm{Im}\,f(t)+\frac{t}{2m}\,\mathrm{Im}\,g(t)\right]\cdot\left(\overline{u}_{p_-}\,u_{-p_+}\right). \tag{34}$$

Скачок же правой части этого равенства в данном случае равен

$$-\frac{\pi^2}{4}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int \mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}\,\left(\overline{u}_{p_-}P_\mu\varphi^\mu u_{-p_+}\right). \tag{35}$$

Согласно (30)

$$P_\mu\varphi^\mu=\frac{e^2}{\pi^3\rho}\left[-2(p\,P)\,\not p+\left(\not p_-+\not p_+\right)\left(\not p_--\not p_+\right)\,\not p+4m\,(p\,P)\right]. \tag{36}$$

Проведём простые преобразования:

$$\left(\not p_-+\not p_+\right)\left(\not p_--\not p_+\right)\,\not p=\left(-\not p_-\,\not p_++\not p_+\,\not p_-\right)\,\not p=-2\,\not p_-\,\not p_+\,\not p+2(p_-p_+)\,\not p\approx$$

$$\approx -2m\,\not p_+\,\not p+2(p_-p_+)\,\not p=-4m\,(p_+p)+2m\,\not p\,\not p_++2(p_-p_+)\,\not p\approx 2\big((p_-p_+)-m^2\big)\,\not p-4m\,(p_+p). \tag{37}$$

Согласно (29)

$$p=\frac{p_-+p_+}{2}+\frac{p_--p_+}{2}\cos\theta+(0,\,p^1,\,p^2,\,0), \tag{38}$$

и потому

$$\overline{u}_{p_-}\,\not p\,u_{-p_+}=m\cos\theta\,(\overline{u}_{p_-}\,u_{-p_+})-\left(\sum_{\alpha=1}^{2}\overline{u}_{p_-}\gamma^\alpha p^\alpha u_{-p_+}\right). \tag{39}$$

Таким образом

$$P_\mu\varphi^\mu=\frac{2e^2}{\pi^3\rho}\left[\big(-(p\,P)+(p_-p_+)-m^2\big)\,\not p+2m\big((p\,P)-(p_+p)\big)\right]\approx$$

$$\approx\frac{2e^2m}{\pi^3\rho}\left[\left(\sqrt{t-4m^2}\,p^3+\frac{(t-4m^2)}{2}\right)\cos\theta-\left(3\sqrt{t-4m^2}\,p^3+\sqrt{t}\,p^0\right)\right]=$$

$$=\frac{2e^2m}{\pi^3\rho}\left[2\left(p^3\right)^2-2\sqrt{t-4m^2}\,p^3-\sqrt{t}\,p^0\right], \tag{40}$$

так как

$$\cos\theta=\frac{2p^3}{\sqrt{t-4m^2}}. \tag{41}$$

В правой части (40) слагаемые вида p^3p^α, $\alpha=1,\,2$ не выписаны, так как согласно (32) под интегралом в (35) они обращаются в нуль.

Комбинируя (34), (35) и (40), получаем:

$$2m\,\mathrm{Im}\,f(t)+\frac{t}{2m}\,\mathrm{Im}\,g(t)=-\frac{e^2m}{2\pi}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int\frac{\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}}{\rho}\left[2\left(p^3\right)^2-2\sqrt{t-4m^2}\,p^3-\sqrt{t}\,p^0\right]. \tag{42}$$

Во втором случае скачок равенства (20) принимает вид

$$\big(\mathrm{Im}\,f(t)+\mathrm{Im}\,g(t)\big)\overline{u}_{p_-}\gamma^\alpha u_{-p_+}=-\frac{e^2}{2\pi}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int\frac{\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}}{\rho}\overline{u}_{p_-}\left[-p^\alpha\,\not p+\frac{1}{2}\,\not k\,\gamma^\alpha\,\not p\right]u_{-p_+}. \tag{43}$$

Здесь было учтено, что

$$\int\frac{\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}}{\rho}\,\frac{p^\alpha}{\rho}=0,\qquad k^\alpha=0,\qquad \alpha=1,\,2.$$

Легко устанавливается следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\overline{u}_{p_-}\,\not k\,\gamma^\alpha\,\not p\,u_{-p_+}=-(p_+p)\overline{u}_{p_-}\gamma^\alpha\,u_{-p_+}. \tag{44}$$

Уравнение (43) переписывается при помощи равенства (44) как

$$\operatorname{Im} f(t) + \operatorname{Im} g(t) = \frac{e^2}{2\pi}\sqrt{\frac{t-4m^2}{t}}\int \frac{\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}}{\rho}\left[\frac{p^\alpha\big(\overline{u}_{p_-}\,\not{p}\,u_{-p_+}\big)}{\big(\overline{u}_{p_-}\gamma^\alpha\,u_{-p_+}\big)} + \frac{\sqrt{t-4m^2}}{2}\,p^3 + \frac{\sqrt{t}}{2}\,p^0\right]. \tag{45}$$

Уравнения (42) и (45) позволяют найти мнимые части обоих формфакторов по отдельности:

$$\operatorname{Im} g(t) = -\frac{e^2m^2}{\pi\sqrt{t(t-4m^2)}}\int\frac{\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}}{\rho}\left[2\big(p^3\big)^2 - \sqrt{t-4m^2}\;p^3 + 2\frac{p^\alpha\big(\overline{u}_{p_-}\,\not{p}\,u_{-p_+}\big)}{\big(\overline{u}_{p_-}\gamma^\alpha\,u_{-p_+}\big)}\right],$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{e^2}{4\pi\sqrt{t(t-4m^2)}}\int\frac{\mathrm{d}\,o_{\mathbf{p}}}{\rho}\Big[\sqrt{t}\big(t-4m^2\big)p^0 +$$

$$+\big(t-8m^2\big)\sqrt{t-4m^2}\;p^3 + 8m^2\big(p^3\big)^2 + 2t\frac{p^\alpha\big(\overline{u}_{p_-}\,\not{p}\,u_{-p_+}\big)}{\big(\overline{u}_{p_-}\gamma^\alpha\,u_{-p_+}\big)}\Big]. \tag{46}$$

Теперь при помощи формул (32) приводим равенства (46) к окончательному виду:

$$\operatorname{Im} g(t) = \frac{e^2\,m^2}{\sqrt{t\,(t-4m^2)}}\,,$$

$$\operatorname{Im} f(t) = \frac{e^2}{4\sqrt{t\,(t-4m^2)}}\left[-3t + 8m^2 + 2(t-2m^2)\,\ln\frac{t-4m^2}{\lambda^2}\right]. \tag{47}$$

Инфракрасная расходимость имеется только в $f(t)$.

Формфакторы могут быть вычислены точно по их мнимым частям при помощи уже использовавшейся подстановки $t' = 4m^2/(1-x^2)$ (см. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 4, § 117). Однако мы ограничимся их асимптотическими значениями.

Согласно (18) и (47)

$$g(0) = \frac{e^2m^2}{\pi}\int\limits_{4\,m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,t}{t\sqrt{t(t-4m^2)}} = \frac{e^2}{2\,\pi}\,. \tag{48}$$

При $|\,t\,| \ll 4m^2$ можно пренебречь параметром t под знаком интеграла в (17):

$$f(t) - 1 = \frac{e^2\,t}{8\,\pi\,m^2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}\,x\left[-1 - 2\,x^2 + (1+x^2)\,\ln\frac{4\,x^2}{1-x^2} + (1+x^2)\,\ln\frac{m^2}{\lambda^2}\right] = \frac{e^2\,t}{3\,\pi\,m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right).$$

Поэтому

$$f(t) - 1 = \frac{e^2\,t}{3\,\pi\,m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right), \qquad g\,(t) = \frac{e^2}{2\,\pi}\,, \qquad |\,t\,| \ll 4\,m^2\,. \tag{49}$$

При $t' \gg 4\,m^2$ из (47) получаем, что $\operatorname{Im} f\,(t') = (e^2/2)\ln(t'/\lambda^2)$. Оценим сначала $f\,(t)$ при $-t \gg 4\,m^2$. Делая соответствующие пренебрежения, сводим интеграл в (17) к интегралу

$$f(t) - 1 = \frac{e^2\,t}{2\,\pi}\int\limits_{4\,m^2}^{\infty}\frac{\ln\frac{t'}{\lambda^2}\,\mathrm{d}\,t'}{t'(t'+|\,t\,|)}\,,$$

который легко оценивается при помощи подстановки $t' = 4\,m^2\,e^x$, $0 < x < \infty$:

$$f(t) - 1 = \frac{e^2\,t}{2\,\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\Big(x + \ln\frac{4\,m^2}{\lambda^2}\Big)\,\mathrm{d}\,x}{(|\,t\,| + 4\,m^2\,e^x)}\,.$$

Знаменатель в подынтегральном выражении почти равен $|\,t\,|$ при $x < x_0$ и быстро падает при $x > x_0$, где $x_0 = \ln\left[|\,t\,|/4\,m^2\right]$. Поэтому при $-t \gg 4\,m^2$

$$f(t) - 1 = -\frac{e^2}{2\,\pi}\left(\frac{1}{2}\ln^2\frac{|\,t\,|}{m^2} + 2\ln\frac{m}{\lambda}\,\ln\frac{|\,t\,|}{m^2}\right). \tag{50}$$

При больших положительных $|t|$ этот формфактор приобретает мнимую часть, а вещественная остаётся прежней. Легко сделать аналогичную оценку для $g(t)$. Таким образом

$$f(t) - 1 = -\frac{e^2}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\ln^2\frac{|t|}{m^2} + 2\ln\frac{m}{\lambda}\ln\frac{|t|}{m^2}\right) + \begin{cases} i\,\frac{e^2}{2}\,\ln\frac{|t|}{\lambda^2}\,, & \text{если } \ t \gg 4\,m^2 \\ 0\,, & \text{если } \ -t \gg 4\,m^2\,, \end{cases} \tag{51}$$

$$g\,(t) = -\frac{e^2\,m^2}{\pi\,t}\ln\frac{|t|}{m^2} + \begin{cases} i\,\frac{e^2\,m^2}{t}\,, & \text{если } \ t \gg 4\,m^2 \\ 0\,, & \text{если } \ -t \gg 4\,m^2\,, \end{cases} \tag{52}$$

4. Аномальный магнитный момент электрона

Согласно (9) и (48) в однопетлевом приближении магнитный момент электрона

$$\mu = \frac{e\,\hbar}{2\,m\,c}\left(1 + \frac{e^2}{2\,\pi\,\hbar\,c}\right)\,. \tag{53}$$

Эта формула впервые была получена Ю. Швингером в 1949 году.

Задачи

1. а) Оценить качественно вклад в магнитный момент электрона $g^{(2)}_{\text{поляр}}(0)$, происходящий от поляризации вакуума мюонной петлёй[1]. Иными словами, оценить вклад в $g^{(2)}_{(e)}(0)$ от последней диаграммы на рис. 16 в том случае, когда по вакуумной петле распространяется виртуальная мюонная пара.

б) То же самое, взаимно заменяя электроны и мюоны.

Указание. Согласно (20 Л10) вклад в формфакторы от нужной диаграммы получается путём замены

$$D_{\lambda\nu}(q) \longrightarrow D_{\lambda\nu}(q)\,\mathcal{P}(q^2).$$

Так как $q^2 = -\rho$, то учёт нужной диаграммы означает замену

$$1/\rho \longrightarrow 1/\rho\,\mathcal{P}(-rho)$$

В выражении для $\mathrm{Im}\ g(t)$ в Ур. (46). В случае а) поляризационный оператор зависит от массы мюона m_μ, в то время как в интеграле (46) (за исключением поляризационного опертора) используется электронная масса m_e. Во втором случае делается взаимная замена $m_\mu \longleftrightarrow m_e$.

Ответ:

а) $g^{(2)}_{(e)\,\text{поляр от}\,\mu} \sim \alpha^2\left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \ll \alpha^2$.

б) $g^{(2)}_{(\mu)\,\text{поляр от}\,e} \sim \alpha^2\ln\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right)$.

[1] Считать мюон элементарной частицей, отличающейся от электрона лишь массой: $m_\mu = 206,8\,m_e$. В остальном динамика мюонов и их взаимодействие с электромагнитным полем не отличаются от динамики электронов и их взаимодействия с фотонами.

Лекция 13
ИНФРАКРАСНАЯ ПРОБЛЕМА. ЛЭМБОВСКИЙ СДВИГ УРОВНЕЙ

Мы видели, что некоторые величины в КЭД вследствие инфракрасных расходимостей не могут быть вычислены без конечной массы фотона. В этой лекции будет показано, что в физически наблюдаемых величинах (в отличие от ненаблюдаемых величин) нефизическая масса фотона может быть устремлена к нулю и при этом наблюдаемые величины имеют конечный предел.

1. Массивное векторное поле

Поскольку массивное векторное поле имеет (для каждого импульса) три физических степени свободы (а не две — как в случае фотонного поля), то для корректного обращения с массивным векторным полем следует внести исправления в некоторые формулы.

Действие массивного векторного поля имеет вид

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{4\,\pi}\int \mathrm{d}^{(4)}\,x\left\{\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{\lambda^2}{2}A_\mu^2\right\}\,. \tag{1}$$

Мы выбрали нормировку, совпадающую с нормировкой электромагнитного поля (сравни с (16 Л7)) для облегчения дальнейшего предельного перехода. Действие (1) приводит к следующему уравнению движения:

$$\partial_\nu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) - \lambda^2 A^\mu = 0\,. \tag{2}$$

Из (2) следует условие

$$\partial_\mu A^\mu = 0\,. \tag{3}$$

В результате уравнение движения (2) упрощается:

$$(\partial_\nu\partial^\nu + \lambda^2)\,A^\mu = 0\,. \tag{4}$$

При помощи уравнения движения (2) находим пропагатор (сравни с (53 Л7))[1]

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\,\pi}{k^2-\lambda^2}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{\lambda^2}\right)\,. \tag{5}$$

Сумма по поляризациям векторной частицы даёт правило (сравни с (33 Л7)):

$$\sum_{\alpha=1}^{3} e^\mu_\alpha\, e^{\nu\,\star}_\alpha = -\left(\eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{\lambda^2}\right)\,. \tag{6}$$

Эта формула вытекает из равенств $k_\mu e^\mu_\alpha = 0$ и $k^2 = \lambda^2$.

Взаимодействие векторного поля с электрон-позитронным полем описывается тем же действием $\mathcal{S}_{int} = -e\int \mathrm{d}^{(4)}\,xA_\mu J^\mu$, что и в случае фотонного поля. Поэтому вследствие калибровочной инвариантности, то есть независимости физических величин от продольной части пропагатора, мы можем опустить в (5) продольную часть и пользоваться пропагатором

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{4\,\pi}{k^2-\lambda^2}\,\eta_{\mu\nu}\,. \tag{7}$$

Именно пропагатор (7) использовался в предыдущих лекциях.

2. Излучение мягких фотонов

[1]Оператор $D_{\mu\nu}(x) = \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\,k}{(2\pi)^4} D_{\mu\nu}(k) e^{-ikx}$ является обратным к оператору $(4\pi)^{-1}\left[-\left(\partial_\rho\partial^\rho + \lambda^2\right)\eta^{\mu\nu} + \partial^\mu\partial^\nu\right]$.

Для определённости рассмотрим процесс рассеяния электрона внешним электромагнитным полем. Например, это может быть неподвижное массивное ядро. На рис. 29 (a) изображена диаграмма упругого процесса рассеяния электрона, в результате которого электрон переходит из состояния с импульсом p в состояние с импульсом p'. Диаграммы на рис. 29 $(b), (c)$ изображают процесс неупругого рассеяния, отличающийся от упругого процесса испусканием дополнительного мягкого фотона $(k \to 0)$.

Диаграмма на рис. 29 (a) аналитически представляется в виде

$$M_{fi}^{(elas)} = \overline{u}_{p'} M\, u_p\,. \tag{8}$$

Рассмотрим амплитуду, изображённую на рис. 29 (c). Эта амплитуда получается из амплитуды,

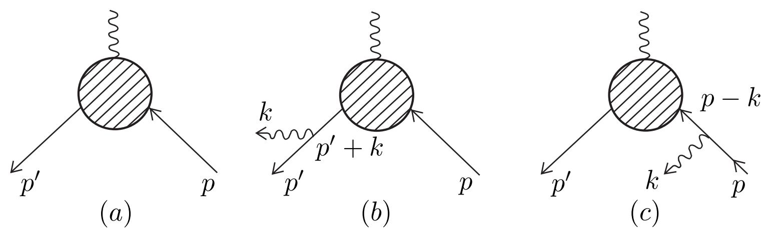


Рис.29

изображённой на рис. 29 (a), путём замены

$$u_p \to \sqrt{4\pi}\, e\, S_c(p-k)\,\gamma^\mu e_\mu^* u_p = \sqrt{4\pi}\, e\, \frac{\not{p} - \not{k} + m}{(p-k)^2 - m^2}\, \not{e}^* u_p \approx -\sqrt{4\pi}\, e\, \frac{\not{p}+m}{2pk - \lambda^2}\, \not{e}^* u_p\,. \tag{9}$$

Здесь было учтено, что $k^2 = \lambda^2$ и $k \to 0$. Так как

$$\not{p}\; \not{e}^* = 2\, p\, e^* - \not{e}^*\, \not{p}\,, \qquad \not{p}\; u_p = m\, u_p\,,$$

то (9) переписывается как

$$u_p \to -\sqrt{4\pi}\, e\, u_p \frac{p\, e^*}{pk - \lambda^2/2}\,. \tag{10}$$

Аналогичное рассмотрение показывает, что диаграмма, изображённая на рис. 29 (b), получается из диаграммы, изображённой на рис. 29 (a), путём замены

$$\overline{u}_{p'} \to \sqrt{4\pi}\, e\, \frac{p'\, e^*}{p'k + \lambda^2/2} \overline{u}_{p'}\,. \tag{11}$$

Таким образом, сумма амплитуд (b) и (c) на рис. 29

$$M_{fi} = M_{fi}^{(elas)} \left[\sqrt{4\pi}\, e\, \left(\frac{p'\, e^*}{p'k + \lambda^2/2} - \frac{p\, e^*}{pk - \lambda^2/2}\right)\right]\,, \tag{12}$$

а соответствующее неупругое сечение

$$\mathrm{d}\,\sigma_1 = \mathrm{d}\,\sigma^{(elas)} 4\,\pi\, e^2 \left|\frac{p'\, e}{p'k + \lambda^2/2} - \frac{p\, e}{pk - \lambda^2/2}\right|^2 \cdot \frac{\mathrm{d}^{(3)}\, k}{(2\,\pi)^3 2\,\omega_k}\,, \qquad \omega_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + \lambda^2}\,. \tag{13}$$

Из формулы (13) видна причина, по которой следует учитывать лишь фотоны, излучённые внешними электронными линиями, но не учитывать мягкие фотоны, излучённые внутренними линиями: внешние электронные линии дают в амплитуде дополнительный множитель — электронный пропагатор, импульс которого при $k \to 0$ находится очень близко к массовой поверхности. Такой пропагатор находится вблизи своего полюса и он численно велик. Поэтому при $k \to 0$ дифференциальное сечение (13) стремится к бесконечности. Если же мягкий фотон излучается внутренней линией, то численно большого множителя не появляется, так как по импульсу виртуального электрона происходит интегрирование и потому можно считать, что он находится вдали от массовой поверхности.

Просуммируем в (13) по поляризациям векторной частицы при помощи (6). Легко увидеть, что второе слагаемое в (6) даёт относительный вклад в сечение $\sim O(\lambda^2)$. Так как $\lambda^2 \to 0$, то вклад в сечение от второго слагаемого в (6) можно опустить. По этой же причине может быть опущено слагаемое λ^2 в знаменателях под знаком модуля в (13). В результате получаем:

$$\mathrm{d}\,\sigma_1 = -e^2 \left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{p\,k}\right)^2 \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{4\,\pi^2\,\omega_k}\,\mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}\,. \tag{14}$$

Пусть $\mathbf{n} = \mathbf{k}\,/\omega_k$, а $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$ — начальная и конечная скорости электрона. Тогда в случае $\lambda = 0$ выражение (14) в трёхмерных обозначениях принимает вид [1]

$$\mathrm{d}\,\sigma_1 = e^2 \left(\frac{[\mathbf{v}',\,\mathbf{n}]}{1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}'} - \frac{[\mathbf{v},\,\mathbf{n}]}{1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}}\right)^2 \cdot \frac{\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,|\,\mathrm{d}\,o_{\mathbf{k}}}{4\,\pi^2\,\omega_k}\,\mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}\,. \tag{15}$$

Точно к такому же выражению для сечения мы придём, если в (13) с $\lambda = 0$ просуммировать по *двум* поляризациям безмассовых фотонов при помощи правила (33 Л7), справедливого для реальных безмассовых фотонов. Мы видим, что формула (14) для неупругого сечения справедлива как в случае излучения реальных безмассовых мягких фотонов, так и в случае излучения мягких векторных частиц с бесконечно малой, но ненулевой массой, и тремя поляризациями.

Обратим внимание на то, что в случае реальных фотонов $(\lambda = 0)$ амплитуда (12) калибровочно инвариантна, т.е. она не изменяется при преобразовании вектора поляризации согласно (56 Л7). Таким образом, в случае реальных фотонов можно суммировать в сечении (13) по трём поляризациям фотона, включая продольную поляризацию. Это не изменит результат вследствие калибровочной инвариантности амплитуды и сечения. Но это означает, что при суммировании по поляризациям реального фотона можно пользоваться формулой (6) с последующим переходом к пределу $\lambda \to 0$. Именно такой подход и был использован при получении формулы (14). Приведенное рассуждение объясняет переход формулы (14) в формулу (15) при $\lambda \to 0$. Сама же формула (15) легче всего получается из формулы (13) при $\lambda = 0$ при помощи правила (33 Л7).

Множитель, стоящий перед $\mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}$ в (15), совпадает с (делённой на ω_k) классической интенсивностью $\mathrm{d}\,I$ тормозного излучения малых частот (см. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика, Т. 2, § 69). Таким образом, излучение длинноволновых фотонов является, по сути, классическим процессом.

Полученные формулы применимы, конечно, при условии

$$\omega \sim |\,\mathbf{k}\,| \ll p^0\,. \tag{16}$$

Необходимо также, чтобы передача импульса $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ рассеивающему центру (ядру) была велика по сравнению с изменением этой величины вследствие испускания мягкого фотона. Так как

$$\delta|\,\mathbf{p}\,| \sim \frac{\partial|\,\mathbf{p}\,|}{\partial\,p^0}\,\omega_k \sim \frac{\omega_k}{v}\,,$$

то имеем ограничение

$$\omega_k/|\mathbf{q}|\,v \ll 1\,. \tag{17}$$

Полученный результат легко обобщается на случай испускания нескольких фотонов. Например, в случае испускания двух мягких фотонов с импульсами и векторами поляризации, нумеруемыми

[1]Действительно, $p = p^0(1,\,\mathbf{v})$, и так как при $\lambda = 0$ $\omega_k = |\,\mathbf{k}\,|$, то $p\,k = p^0|\,\mathbf{k}\,|\,(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})$, $p\,p' = p_0 p_0'(1-\mathbf{v}\,\mathbf{v}')$, и потому

$$-|\,\mathbf{k}\,|^2\left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{p\,k}\right)^2 = -\frac{m^2}{(p_0')^2(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2} - \frac{m^2}{p_0^2(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2} + \frac{2\,(1-\mathbf{v}\,\mathbf{v}')}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')} =$$

$$= \left(\frac{\mathbf{v}'^2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2} + \frac{\mathbf{v}^2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})^2} - \frac{2\,\mathbf{v}\,\mathbf{v}'}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')}\right) - \left[\frac{1}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2} + \frac{1}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})^2} - \frac{2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')}\right]\,. \tag{*}$$

С другой стороны

$$\left(\frac{[\mathbf{v}',\,\mathbf{n}]}{1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}'} - \frac{[\mathbf{v},\,\mathbf{n}]}{1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}}\right)^2 = \left(\frac{\mathbf{v}'^2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2} + \frac{\mathbf{v}^2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})^2} - \frac{2\,\mathbf{v}\,\mathbf{v}'}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')}\right) -$$

$$-\left[\frac{(\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2} + \frac{(\mathbf{n}\,\mathbf{v})^2}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})^2} - 2\,\frac{(\mathbf{n}\,\mathbf{v})(\mathbf{n}\,\mathbf{v}')}{(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')}\right]\,. \tag{**}$$

Простое вычисление показывает, что квадратные скобки в (*) и (**) равны одному и тому же значению $(\mathbf{n},\,\mathbf{v}-\mathbf{v}')^2\,[(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v})^2(1-\mathbf{n}\,\mathbf{v}')^2]^{-1}$. Отсюда следует равенство выражений (14) и (15) в случае нулевой массы фотона.

индексами 1 и 2, амплитуда (12) содержала бы вместо одного множителя в квадратной скобке два аналогичных множителя:

$$\left[\sqrt{4\pi}\,e\left(\frac{p'\,e_1^*}{p'k_1}-\frac{p\,e_1^*}{pk_1}\right)\sqrt{4\pi}\,e\left(\frac{p'\,e_2^*}{p'k_2}-\frac{p\,e_2^*}{pk_2}\right)\right]. \tag{18}$$

В этом нетрудно убедиться прямым вычислением. Действительно, рассмотрим диаграмму, отличающуюся от диаграммы на рис. 29 (c) тем, что входящий электрон с импульсом p излучает сначала мягкий фотон с импульсом k_1 и затем мягкий фотон с импульсом k_2. Будем считать фотоны безмассовыми. Вычисление, аналогичное тому, которое привело к формуле (10), теперь показывает, что в данном случае вклад в амплитуду получается из амплитуды на рис. 29 (a), если в ней сделать замену (учитываются лишь главные вклады по k_1 и k_2)

$$u_p \to u_p\,\frac{[-\sqrt{4\pi}\,e\,(p\,e_1^*)][-\sqrt{4\pi}\,e\,(p\,e_2^*)]}{(p\,k_1+p\,k_2)(p\,k_1)}\,.$$

Если с правой частью этого равенства сложить такую же величину с перестановкой $k_1 \leftrightarrow k_2$, то мы получим

$$u_p \to u_p\left[-\frac{\sqrt{4\pi}\,e\,(p\,e_1^*)}{p\,k_1}\right]\left[-\frac{\sqrt{4\pi}\,e\,(p\,e_2^*)}{p\,k_2}\right].$$

Теперь очевидно, что если учесть все возможности излучения двух мягких фотонов внешними электронными линиями, то в результате амплитуда получит множитель (18), поскольку этот множитель калибровочно инвариантен.

В случае испускания n мягких фотонов для каждого фотона имеется свой множитель в амплитуде. Поэтому сечение процесса с испусканием n мягких фотонов представляется в виде

$$\mathrm{d}\,\sigma_n = \mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}\,\mathrm{d}\,w_1\,\ldots\,\mathrm{d}\,w_n\,, \tag{19}$$

где $\mathrm{d}\,w_i$ $(i=1\,\ldots\,n)$ — вероятность отдельного испускания фотона k_i. Поэтому полное неупругое сечение представляется в виде

$$\mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\int\limits_{\lambda}^{\omega_{max}}\mathrm{d}\,w_\omega\right)^n. \tag{20}$$

Здесь ω_{max} — некое значение частоты, удовлетворяющее условиям (16), (17). Под знаком суммы в (20) множитель $1/n!$ учитывает тождественность фотонов.

Как было указано,

$$\mathrm{d}\,w_\omega = \frac{\mathrm{d}\,I}{\omega_k}\,, \tag{21}$$

где $\mathrm{d}\,I$ — классическая интенсивность излучения мягких фотонов. Поэтому величина (21) может интерпретироваться как среднее число излучённых фотонов $\mathrm{d}\,\overline{n}$ в заданном интервале частот. Тогда среднее число излучённых фотонов

$$\overline{n} = \int\limits_{\lambda}^{\omega_{max}}\frac{\mathrm{d}\,I}{\omega_k} = \int\limits_{\lambda}^{\omega_{max}}\mathrm{d}\,w_\omega \sim e^2\,\ln\frac{\omega_{max}}{\lambda}\,. \tag{22}$$

Последняя оценка получена при помощи (15). Хотя $\omega_{max} \ll p^0$, при $\lambda \to 0$ с логарифмической точностью имеем оценку

$$\overline{n} = e^2\,\ln\frac{p^0}{\lambda}\,. \tag{23}$$

Если $\overline{n} \sim 1$, то ТВ оказывается неприменимой, т.к. первая поправка (15) оказывается того же порядка, что и $\mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}$. Однако сама формула (15) тем точнее, чем меньше энергия мягкого фотона.

Выход из этой противоречивой ситуации таков.

При $\lambda \to 0$ среднее число излучённых фотонов $\overline{n} \to \infty$. Мягкие фотоны излучаются статистически независимо. Этот факт подтверждается всеми порядками ТВ. Поэтому к процессу множественного излучения фотонов можно применить формулу Пуассона: вероятность w_n излучения n фотонов выражается через их среднее число $\overline{n}$ формулой

$$w_n = \frac{\overline{n}^n}{n!}\, e^{-\overline{n}}\,. \tag{24}$$

Теперь формулу (20) можно модернизировать следующим образом:

$$\mathrm{d}\,\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{d}\,\sigma_n\,, \qquad \mathrm{d}\,\sigma_n = \mathrm{d}\,\tilde{\sigma}^{(elas)}\, w_n\,. \tag{25}$$

Так как $\sum_n w_n = 1$, то согласно (25)

$$\mathrm{d}\,\sigma = \mathrm{d}\,\tilde{\sigma}^{(elas)}\,. \tag{26}$$

При этом, конечно, упругое сечение в формулах (25), (26) отличается от упругого сечения в (20) множителем:

$$e^{-\overline{n}}\,\mathrm{d}\,\tilde{\sigma}^{(elas)} = \mathrm{d}\,\sigma^{(elas)}\,. \tag{27}$$

Таким образом мы видим, что сечение чисто упругого рассеяния равно нулю при $\lambda \to 0$ (или $\overline{n} \to \infty$), что видно из формулы (27). Вместе с этим обращается в нуль сечение рассеяния с излучением любого конечного числа мягких фотонов. Тем не менее те сечения, которые вычисляются при помощи ТВ, конечны во всех порядках по константе связи, если учесть также и излучение мягких фотонов. Более того, в каждом порядке по константе связи существует конечный предел для сечений при устремлении массы фотона к нулю, хотя в каждом порядке по константе связи может быть излучено лишь конечное число мягких фотонов. Этот факт демонстрируется в следующем пункте. Таким образом, сечение рассеяния в борновском (без учёта радиационных поправок) приближении может интерпретироваться как полное сечение рассеяния с учётом излучения любого числа мягких фотонов, но в наинизшем приближении по константе связи (F. Bloch, A. Nordsieck, 1937).

3. Сокращение инфракрасных расходимостей

Для подтверждения сделанного в конце предыдущего пункта утверждения и проверки формулы (26) проследим за сокращением инфракрасной расходимости в низшем порядке ТВ.

Сначала продолжим вычисление сечения (14). Имеем:

$$\varkappa \equiv \left(\frac{p'}{p'k} - \frac{p}{p\,k}\right)^2 = \frac{m^2}{(p'k)^2} + \frac{m^2}{(p\,k)^2} - \frac{2\,p\,p'}{(p\,k)(p'k)}\,.$$

Воспользуемся равенством

$$-2\,p\,p' = -2\,m^2 + (p-p')^2\,,$$

при помощи которого находим:

$$\varkappa = \frac{m^2}{(p\,k)^2(p'k)^2}[(p\,k)^2 + (p'k)^2 - 2\,(p\,k)(p'k)] + \frac{(p-p')^2}{(p\,k)(p'k)} = \frac{m^2[(p'-p)\,k]^2}{(p\,k)^2(p'k)^2} + \frac{(p'-p)^2}{(p\,k)(p'k)}\,. \tag{28}$$

В нерелятивистском пределе величина (28)

$$\varkappa \approx \frac{(\mathbf{q}\,\mathbf{k})^2}{m^2\omega_k^4} - \frac{\mathbf{q}^2}{m^2\omega_k^2}\,, \qquad \mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}\,. \tag{29}$$

Подставим (29) в (14) и выполним тривиальное интегрирование по углам:

$$\mathrm{d}\,\sigma_1 = \mathrm{d}\,\sigma_0\,\frac{e^2\mathbf{q}^2}{\pi\,m^2}\int\limits_0^{\omega_{\max}} \left[1 - \frac{\mathbf{k}^2}{3\,(\mathbf{k}^2+\lambda^2)}\right]\cdot\frac{\mathbf{k}^2\,\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,|}{(\mathbf{k}^2+\lambda^2)^{3/2}}\,, \tag{30}$$

где $\mathrm{d}\,\sigma_0$ — упругое сечение рассеяния в неком порядке по теории возмущений. В предположении $\omega_{max}/\lambda \gg 1$ интеграл в (30) легко берётся:

$$\mathrm{d}\,\sigma_1 = \mathrm{d}\,\sigma_0\,\frac{2\,e^2}{3\,\pi}\cdot\frac{\mathbf{q}^2}{m^2}\left(\ln\frac{2\,\omega_{max}}{\lambda} - \frac{5}{6}\right)\,, \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2\,. \tag{31}$$

Все сечения $\mathrm{d}\,\sigma_n$ являются рядами относительно e^2:

$$\mathrm{d}\,\sigma_n = \sum_i \mathrm{d}\,\sigma_n^{(i)}\,, \tag{32}$$

так что величина $\mathrm{d}\,\sigma_n^{(i)}$ пропорциональна $e^{2\,i}$.

Согласно формулам (1), (6) и (49) лекции 13 в однопетлевом приближении

$$i\,M_{fi} = (-i\,e\,A_\mu \overline{u}_{p'}\gamma^\mu u_p)\,f\,(-\mathbf{q}^2) = i\,M_{fi}^{(1)}\,f\,(-\mathbf{q}^2)\,,$$

$$f\,(-\mathbf{q}^2) = 1 - \frac{e^2\mathbf{q}^2}{3\,\pi\,m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right)\,, \qquad \mathbf{q}^2 \ll m^2\,. \tag{33}$$

Нас интересуют лишь инфракрасно расходящиеся вклады. Поэтому мы не учитываем вклад в $i\,M_{fi}$ от формфактора g, а также вклад от амплитуды (*c*) на рис. 26. В нашем приближении в (31) следует использовать $\mathrm{d}\,\sigma_0^{(2)}$. Это сечение строится по амплитуде первого приближения $i\,M_{fi}^{(1)} = -i\,e\,A_\mu\overline{u}_{p'}\gamma^\mu u_p$. Согласно (33)

$$\mathrm{d}\,\sigma_0^{(2)} + \mathrm{d}\,\sigma_0^{(4)} = \mathrm{d}\,\sigma_0^{(2)}\,f^2 = \mathrm{d}\,\sigma_0^{(2)}\,\left[1 - \frac{2\,e^2\mathbf{q}^2}{3\,\pi\,m^2}\left(\ln\frac{m}{\lambda} - \frac{3}{8}\right)\right]\,. \tag{34}$$

При помощи (31) и (34) находим:

$$\mathrm{d}\,\sigma_0^{(2)} + \mathrm{d}\,\sigma_0^{(4)} + \mathrm{d}\,\sigma_1^{(4)} = \mathrm{d}\,\sigma_0^{(2)}\left[1 - \frac{2\,e^2\mathbf{q}^2}{3\,\pi\,m^2}\left(\ln\frac{m}{2\,\omega_{max}} + \frac{11}{24}\right)\right]\,. \tag{35}$$

Теперь в (35) можно перейти к пределу $\lambda \to 0$. Однако появляется зависимость сечения от ω_{max}. Эта зависимость является следствием того, что величина ω_{max} входит в определение рассеяния как процесса, в котором может быть испущено любое число мягких фотонов с энергиями меньше ω_{max}. Сечение такого процесса будет тем меньше, чем меньше ω_{max}. Из формулы (35) видно также, что радиационные поправки к сечению малы, если частота ω_{max} соизмерима с энергией покоя электрона.

Сравнение (35) и (34) показывает, что в нерелятивистском пределе инфракрасно регуляризованный формфактор

$$f_{\omega_{max}}(t) = 1 + \frac{e^2 t}{3\,\pi\,m^2}\left(\ln\frac{m}{2\,\omega_{max}} + \frac{11}{24}\right)\,, \qquad |t| \ll m^2\,. \tag{36}$$

Замечание. Полученный результат означает следующее: в величине (35) взаимно сокращаются вклады виртуальных и реальных испущенных фотонов с энергиями, меньшими ω_{max}. Поэтому регуляризованный формфактор (36) содержит лишь вклады тех промежуточных виртуальных фотонов, энергии которых больше ω_{max}. Таким образом, формфактор (36) описывает упругий процесс рассеяния, в котором не учитываются мягкие виртуальные фотоны.

Доказательство сокращения инфракрасных расходимостей в сечениях в четвёртом порядке относительно константы связи при любых энергиях проводится аналогично, но при помощи более трудоёмких вычислений. Эти вычисления содержатся в (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика, Т. 4).

Имеет место следующее утверждение: в суммах (20) и (25) инфракрасные расходимости сокращаются во всех порядках относительно константы связи.

4. Лэмбовский сдвиг уровней

Рассмотрим многоуровневую нерелятивистскую систему, взаимодействующую с электромагнитным полем. Мы будем иметь ввиду водородоподобный атом с зарядом ядра $Z\,e$, причём

$$Z\,e^2 \ll 1\,. \tag{37}$$

Эта система имеет ряд дискретных одноэлектронных уровней. Электрон взаимодействует с квантованным фотонным полем и вследствие этого дискретные уровни сдвигаются. В этом пункте вычисляется сдвиг дискретных уровней, обусловленный этим взаимодействием.

Согласно (30 Л8) нерелятивистский гамильтониан электрона имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \frac{e}{m}\,\mathbf{p}\,\mathbf{A}^{\perp} - \frac{e}{2\,m}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^{\perp}\,, \qquad \mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} + \Phi(r)\,, \qquad \mathbf{p} = -i\,\boldsymbol{\partial}\,, \qquad \Phi(r) = -\frac{Z\,e^2}{r}\,. \quad (38)$$

Здесь $\mathbf{A}^{\perp}(x)$ — квантованное фотонное поле (33 Л7). Спиновую составляющую гамильтониана взаимодействия с фотонным полем здесь можно опустить ввиду относительной малости ($\sim |\,\mathbf{k}\,|/|\,\mathbf{p}\,| \sim |\,\mathbf{k}\,|a \sim e^2 = \alpha$, где a — боровский радиус и $|\,\mathbf{k}\,| \sim e^2/a$) соответствующей поправки. Обозначим через $|N\rangle$ электронный уровень невозмущённого гамильтониана:

$$\mathcal{H}_0\,|N\rangle = E_N\,|N\rangle\,. \qquad (39)$$

При помощи (36 Л7) находим матричный элемент фотонного поля между фотонным вакуумом и однофотонным состоянием:

$$\langle \mathbf{k},\,\alpha|\mathbf{A}^{\perp}(\mathbf{x})|0\rangle = \sqrt{4\,\pi}\,\mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\;\alpha}\;e^{-i\,\mathbf{k}\,\mathbf{x}} \approx \sqrt{4\,\pi}\,\mathbf{e}^{\perp\,*}_{\mathbf{k}\;\alpha}\,. \qquad (40)$$

Последнее приближённое равенство означает, что задача решается в дипольном приближении, которое в данном случае является удовлетворительным. Воспринимая второе слагаемое в $\mathcal{H}$ как возмущение, выпишем первую неисчезающую поправку к уровням:

$$\delta\,E_N = \int \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,k}{(2\,\pi)^3\,2\,|\,\mathbf{k}\,|}\sum_{\alpha}\sum_{N'}\frac{4\,\pi\,e^2}{m^2}\cdot\frac{|\langle N|\,\mathbf{p}\;\mathbf{e}^{\perp}_{\mathbf{k}\;\alpha}\,|N'\rangle|^2}{E_N - E_{N'} - |\,\mathbf{k}\,|} = \frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\sum_{N'}\int\limits_0^{\infty}\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,|\cdot|\,\mathbf{k}\,|\frac{|\,\mathbf{p}_{N\,N'}\,|^2}{E_N - E_{N'} - |\,\mathbf{k}\,|}\,. \qquad (41)$$

При переходе ко второму равенству в (41) мы воспользовались правилом суммирования по векторам поляризации (33 Л7) и затем проинтегрировали по углам виртуального фотона. Интеграл по энергии виртуального фотона $|\,\mathbf{k}\,|$ в (41) расходится линейно. Необходимо выделить логарифмическую расходимость на фоне линейной. Для этого воспользуемся тождеством

$$\frac{|\,\mathbf{k}\,|}{E_N - E_{N'} - |\,\mathbf{k}\,|} = \frac{E_N - E_{N'}}{E_N - E_{N'} - |\,\mathbf{k}\,|} - 1\,.$$

Таким образом

$$\delta\,E_N = -\frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\,(\mathbf{p}^2)_{N\,N}\int\limits_0\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,| + \frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\sum_{N'}\int\limits_0\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,|\frac{|\,\mathbf{p}_{N\,N'}\,|^2\,(E_N - E_{N'})}{E_N - E_{N'} - |\,\mathbf{k}\,|}\,. \qquad (42)$$

Предположим, что мы рассмотрели бы эту же задачу для свободного электрона с гамильтонианом $\mathcal{H}_0 = \mathbf{p}^2/2m$. В этом случае, если состояния $|N\rangle$ — плоские волны, то $\mathbf{p}_{N\,N'} \sim \delta_{N\,N'}$ и второе слагаемое в правой части (42) обращается в нуль. Первое, линейно расходящееся слагаемое, устраняется путём перенормировки массы [1]. Действительно, пусть затравочный гамильтониан

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m_0} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,(m + \delta\,m)} = \frac{\mathbf{p}^2}{2\,m} - \frac{\delta\,m}{2\,m^2}\;\mathbf{p}^2\,, \qquad (43)$$

где m_0 — затравочная масса. В свободной теории (43) имеются лишь непрерывне уровни $|N\rangle$ — плоские волны. Подберём $\delta\,m$ в (43) так чтобы линейные расходимости всех уровней энергии сокращались. Согласно (42) и (43) имеем:

$$\delta\,E_N = -\frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\,(\mathbf{p}^2)_{N\,N}\int\limits_0\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,| - \frac{\delta\,m}{2\,m^2}\,(\mathbf{p}^2)_{N\,N} = 0 \longrightarrow \delta\,m = -\frac{4\,e^2}{3\,\pi}\int\limits_0\mathrm{d}\,|\,\mathbf{k}\,|\,.$$

[1] В предыдущих лекциях мы выяснили, что в дираковской теории поправки к массе электрона расходятся логарифмически. Однако изучаемый здесь гамильтониан нерелятивистской заряженной частицы в равной степени может описывать как фермиевскую, так и бозевскую частицу. Поэтому линейная расходимость перенормировки её массы вследствие взаимодействия с электромагнитным полем не противоречит полученным результатам.

Так как к гамильтониану (38) должно быть добавлено второе слагаемое из правой части (43), то мы видим, что с точностью $O(e^2)$ линейно расходящиеся поправки ко всем уровням энергии сокращаются. Поэтому сдвиг дискретного уровня энергии вследствие взаимодействия с фотонным полем определяется вторым слагаемым в (42), в котором вычислим интеграл по фотонной энергии от нуля до ω_{max}. Так как наше вычисление — нерелятивистское, то неизвестная частота ω_{max} должна удовлетворять следующим неравенствам:

$$(Z\,e^2)^2\, m \ll \omega_{max} \ll m\,. \tag{44}$$

Здесь первое неравенство означает, что учитываемые энергии фотонов в (42) много больше разности энергий дискретных уровней: $|E_N - E_{N'}| \ll \omega_{max}$. Таким образом

$$\delta\, E_N = \frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\sum_{N'}|\,\mathbf{p}_{N\,N'}\,|^2\,(E_{N'}-E_N)\,\ln\frac{\omega_{max}}{|E_{N'}-E_N|}\,. \tag{45}$$

Вследствие первого неравенства (44) аргумент логарифма возможно заменить на $[\omega_{max}/|E_{N'}-E_N|]$. Перепишем (45) в виде

$$\delta\, E_N = \frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\sum_{N'}|\,\mathbf{p}_{N\,N'}\,|^2\,(E_{N'}-E_N)\,\ln\frac{2\,\omega_{max}}{m} + \frac{2\,e^2}{3\,\pi\,m^2}\sum_{N'}|\,\mathbf{p}_{N\,N'}\,|^2\,(E_{N'}-E_N)\,\ln\frac{m}{2\,|E_{N'}-E_N|}\,. \tag{46}$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся следующими соотношениями:

$$\mathbf{p}_{N\,N'}\,(E_{N'}-E_N) = [\mathbf{p},\,\mathcal{H}_0]_{N\,N'} = -i\,(\boldsymbol{\partial}\,\Phi)_{N\,N'}\,, \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\sum_{N'}|\,\mathbf{p}_{N\,N'}\,|^2\,(E_{N'}-E_N) &\equiv \frac{1}{2}\sum_{N'}\{[\mathbf{p}_{N\,N'}(E_{N'}-E_N)]\;\mathbf{p}_{N'\,N} - \mathbf{p}_{N\,N'}\,[(E_N-E_{N'})\;\mathbf{p}_{N'\,N}]\} = \\ &= \frac{i}{2}\sum_{N'}\{-(\boldsymbol{\partial}\,\Phi)_{N\,N'}\,\mathbf{p}_{N'\,N} + \mathbf{p}_{N\,N'}(\boldsymbol{\partial}\,\Phi)_{N'\,N}\} = \frac{i}{2}\,[\mathbf{p},\,\boldsymbol{\partial}\,\Phi]_{N\,N} = \frac{1}{2}\,(\Delta\,\Phi)_{N\,N}\,,\end{aligned} \tag{48}$$

$$\mathbf{p}_{N\,N'} = -i\,m\,[\mathbf{r},\,\mathcal{H}_0]_{N\,N'} = -i\,m\;\mathbf{r}_{N\,N'}(E_{N'}-E_N)\,. \tag{49}$$

Ещё раз перепишем первое и второе слагаемые в (46) при помощи (48) и (49), соответственно:

$$\delta\, E_N^{(I)} = \frac{e^2}{3\,\pi\,m^2}(\Delta\,\Phi)_{N\,N}\,\ln\frac{2\,\omega_{max}}{m} + \frac{2\,e^2}{3\,\pi}\sum_{N'}|\,\mathbf{r}_{N\,N'}\,|^2\,(E_{N'}-E_N)^3\,\ln\frac{m}{2\,|E_{N'}-E_N|}\,. \tag{50}$$

Здесь верхний индекс (I) указывает на то, что соответствующий вклад получен от фотонов с частотами $\omega < \omega_{max}$.

Зависимость сдвига уровней (50) от нефизического параметра ω_{max} указывает на то, что формула (50) учитывает лишь часть сдвига: в дополнение к (50) следует учесть вклад от жёстких фотонов, который содержится в диаграмме (b) на рис. 26, а также вклад от поправки потенциала Φ, описываемый диаграммой (c) на рис. 26. Диаграмма (b) на рис. 26 даёт квантовые поправки к движению электрона, которые можно рассматривать как поправки вследствие изменения эффективного электронного гамильтониана. Вклад в эффективный гамильтониан от диаграммы (b) на рис. 26 следует учесть, используя инфракрасно регуляризованный формфактор f (36). При этом частота ω_{max} в (50) и (36) — одна и та же. Действительно, в регуляризованном формфакторе (36) фактически учитывается лишь вклад от виртуальных фотонов с частотами $\omega > \omega_{max}$ (см. замечание после (36)). Вклад в сдвиг уровней именно от такого формфактора и следует добавить к (50), поскольку в (50) уже учтён вклад от фотонов с частотами $\omega < \omega_{max}$. Формфактор g задаётся согласно (49 Л12) и он не содержит нефизических параметров, поскольку не требует инфракрасной регуляризации. Таким образом добавка к амплитуде, описываемая диаграммой (b) на рис. 26, имеет вид

$$\delta_{(b)}M_{fi}(\mathbf{q}) = -\left\{[f_{\omega_{max}}(-\mathbf{q}^2)-1]\,\overline{u}_f\gamma^0 u_i - \frac{g(-\mathbf{q}^2)}{m}(\overline{u}_f\sigma^{0\mu}u_i)\,q_\mu\right\}\,\Phi(\mathbf{q})\,. \tag{51}$$

Здесь q — 4-импульс, приносимый потенциалом Φ, причём $q = (0,\,\mathbf{q})$. Добавка к амплитуде, вытекающая из радиационных поправок к потенциалу и описываемая диаграммой (c) на рис. 26, согласно (45 Л11) равна

$$\delta_{(c)}M_{fi}(\mathbf{q}) = -\mathcal{P}(-\mathbf{q}^2)(\overline{u}_f\gamma^0 u_i)\,\Phi(\mathbf{q})\,. \tag{52}$$

Представим сумму амплитуд (51) и (52) в виде

$$\delta M_{fi} = \delta_{(b)} M_{fi} + \delta_{(c)} M_{fi} = -u_f^\dagger \Lambda\, \Phi\, u_i\,,$$
$$\Lambda = [f_{\omega_{max}}(-\mathbf{q}^2) - 1] + \mathcal{P}(-\mathbf{q}^2) + \frac{g}{2\,m}\boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{q}\,. \tag{53}$$

Величина $\delta\,\mathcal{H}^{(II)} \equiv \Lambda\,\Phi$ должна восприниматься как высокочастотная радиационная поправка к одноэлектронному гамильтониану. При помощи (53), (36), (35 Л11) и (49 Л12) находим значение этой поправки в импульсном представлении:

$$\delta\,\mathcal{H}^{(II)}(\mathbf{q}) = \left\{ -\frac{e^2\mathbf{q}^2}{3\,\pi\,m^2} \left(\ln\frac{m}{2\,\omega_{max}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) + \frac{e^2}{4\,\pi\,m}\,\boldsymbol{\gamma}\,\mathbf{q} \right\} \Phi\,(\mathbf{q})\,. \tag{54}$$

Функция, соответствующая (54) в координатном представлении, имеет вид

$$\delta\,\mathcal{H}^{(II)}(\mathbf{x}) = \frac{e^2}{3\,\pi\,m^2} \left(\ln\frac{m}{2\,\omega_{max}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \Delta\,\Phi\,(\mathbf{x}) - \frac{e^2}{4\,\pi\,m}\, i\,\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\partial}\,\Phi\,(\mathbf{x})\,. \tag{55}$$

Соответствующее смещение уровней получается усреднением оператора (55) по волновой функции невозмущённого состояния электрона в атоме:

$$\delta\,E_N^{(II)} = \frac{e^2}{3\,\pi\,m^2} \left(\ln\frac{m}{2\,\omega_{max}} + \frac{11}{24} - \frac{1}{5} \right) \langle N\,|\Delta\,\Phi|N\rangle - i\,\frac{e^2}{4\,\pi\,m}\,\langle N|\boldsymbol{\gamma}\,\boldsymbol{\partial}\,\Phi|N\rangle\,. \tag{56}$$

Замечание. Хотя формфакторы f и g были получены для электронов на массовой поверхности, их использование в (56) является законным, хотя усреднение идёт по связанным состояниям. Действительно, формфакторы в (56) получены от вклада виртуальных фотонов с энергиями $\omega > \omega_{max}$. С другой стороны, так как энергия связанных состояний (включая энергию покоя) $[1 - (Z\,e^2)^2]\,m$ почти совпадает с энергией покоя электрона и вследствие первого неравенства (44) использование формфакторов $f_{\omega_{max}}$ и g в (53) законно.

В первом слагаемом в (56) можно пользоваться непосредственно нерелятивистскими волновыми функциями электрона. Так как диагональные матричные элементы от спиновых операторов равны нулю, то во втором слагаемом в (56) необходимо использовать в качестве невозмущённых собственных функций $|N\rangle$ собственные функции гамильтониана Дирака (см. (33 Л8)) $\mathcal{H}_0 = -i\,\boldsymbol{\alpha}\,\boldsymbol{\partial} + m\,\gamma^0 + \Phi(r)$. Тогда при помощи уравнения (39), в котором E_N включает энергию покоя электрона, в стандартном представлении выражаем спинор χ через спинор ϕ. Пренебрегая энергией связи и потенциалом Φ (их учёт был бы превышением точности), находим:

$$\chi = -\frac{i}{2\,m}\,\boldsymbol{\sigma}\,\boldsymbol{\partial}\,\phi\,. \tag{57}$$

Спинор ϕ в (57) следует рассматривать как нерелятивистскую волновую функцию. Подставляя (57) в (56), после несложных вычислений получаем:

$$\delta\,E_N^{(II)} = \frac{e^2}{3\,\pi\,m^2} \left(\ln\frac{m}{2\,\omega_{max}} + \frac{19}{30} \right) \langle N\,|\Delta\,\Phi|N\rangle + \frac{e^2}{4\,\pi\,m^2}\,\langle N|(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{l})\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,r}|N\rangle\,. \tag{58}$$

В (58) и далее $|N\rangle$ — уже нерелятивистский вектор состояния электрона в центральном потенциале $\Phi(r)$ и $\mathbf{l}$ — оператор орбитального момента.

Складывая (50) и (58), находим полный сдвиг уровней:

$$\delta\,E_N = \frac{2\,e^2}{3\,\pi}\sum_{N'} |\,\mathbf{r}_{N\,N'}\,|^2\,(E_{N'}-E_N)^3\,\ln\frac{m}{2\,|E_{N'} - E_N|} + \frac{19}{30}\cdot\frac{e^2}{3\,\pi\,m^2}\langle N|\Delta\,\Phi|N\rangle + \frac{e^2}{4\,\pi\,m^2}\langle N|(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{l})\,\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,r}|N\rangle\,. \tag{59}$$

В (59) сокращается промежуточная частота $\omega_{\max}$, что является необходимым условием корректности вычисления. Все матричные элементы в (59) берутся по отношению к нерелятивистским волновым функциям электрона в атоме. Для водородоподобного атома эти функции зависят только от четырёх квантовых чисел: главного квантового числа n, орбитального момента l, полного момента j и его проекции M, так что $|N\rangle = |n\,l\,j\,M\rangle$. Это состояние может быть представлено как двухкомпонентный спинор (см. (74 Л8)) $|n\,l\,j\,M\rangle = f_n(r)\,\Omega_{j\,l\,M}(\theta,\,\phi)$.

Второе слагаемое в (59) вычисляется при помощи уравнений

$$\Delta\,\Phi(\mathbf{x}) = 4\,\pi\,Z\,e^2\,\delta^{(3)}(\mathbf{x})\,,$$

$$\langle n\,l\,j\,M|\Delta\,\Phi|n\,l\,j\,M\rangle = 4\,\pi\,Z\,e^2\,|\psi_N(0)|^2 = 4\,m^3\,(Z\,e^2)^4\,n^{-3}\,\delta_{l\,0}\,. \tag{60}$$

Полезно ввести обозначение

$$L_{nl} = \frac{n^3}{2\,m\,(Z\,e^2)^4}\sum_{N'}|\langle N'|\,\mathbf{r}\,|N\rangle|^2\cdot(E_{n'}-E_n)^3\,\ln\frac{m\,(Z\,e^2)^2}{2\,|E_{n'}-E_n|}\,. \tag{61}$$

Поскольку невозмущённые уровни энергии пропорциональны $(Z\,e^2)^2$, а характерный размер атома пропорционален $(Z\,e^2)^{-1}$, то величины $L_{n\,l}$ (61) не зависят от Z и они могут быть найдены численно для атома водорода. При помощи обозначения (61) перепишем первое слагаемое в (59) как

$$\frac{4\,m\,Z^4 e^{10}}{3\,\pi\,n^3}\left[L_{n\,l}+\frac{n^3}{2\,m\,(Z\,e^2)^4}\,\ln\frac{1}{(Z\,e^2)^2}\cdot\sum_{N'}|\,\mathbf{r}_{N\,N'}\,|^2(E_{N'}-E_N)^3\right]. \tag{62}$$

Ещё раз используя (48) и (49) преобразуем второе слагаемое в квадратной скобке в (62) к виду

$$\frac{n^3}{4\,m^3(Z\,e^2)^4}\,\ln\frac{1}{(Z\,e^2)^2}\cdot\langle n\,l\,j\,M|\Delta\,\Phi|n\,l\,j\,M\rangle = \ln\frac{1}{(Z\,e^2)^2}\cdot\delta_{l\,0}\,. \tag{63}$$

Последнее равенство здесь получается при помощи (60). Используя (60), (62), и (63), переписываем лэмбовский сдвиг в окончательном виде:

$$\delta\,E^{(L)}_{n\,l\,j} = \frac{4\,m\,Z^4 e^{10}}{3\,\pi\,n^3}\left\{L_{n\,l}+\left[\ln\frac{1}{(Z\,e^2)^2}+\frac{19}{30}\right]\,\delta_{l\,0}\right\}+\frac{e^2}{4\,\pi\,m^2}\,\langle n\,l\,j\,M|(\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{l})\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\Phi}{\mathrm{d}\,r}|n\,l\,j\,M\rangle\,. \tag{64}$$

Необходимо по отдельности рассмотреть случаи $l=0$ и $l\neq 0$.

При $l=0$ последнее слагаемое в (64) исчезает и мы имеем (в обычных единицах)

$$\delta\,E^{(L)}_{n\,0} = \frac{4\,m\,c^2 Z^4\alpha^5}{3\,\pi\,n^3}\,\left[L_{n\,0}+\ln\frac{1}{(Z\,\alpha)^2}+\frac{19}{30}\right]. \tag{65}$$

Приведём числовые значения нескольких величин $L_{n\,0}$:

$$\begin{array}{ccccccc} n & = & 1 & 2 & 3 & 4 & \infty \\ L_{n\,0} & = & -2,984 & -2,812 & -2,768 & -2,750 & -2,721 \end{array}.$$

Так как невозмущённые уровни $E_n = -m\,c^2(Z\,\alpha)^2/(2\,n^2)$, то

$$\left|\frac{\delta\,E_{n\,0}}{E_{n\,0}}\right| \sim Z^2\,\alpha^3\,\ln\frac{1}{Z\,\alpha}\,. \tag{66}$$

При $l\neq 0$ исчезает второе слагаемое в (64). Так как $(1/r)\,\mathrm{d}\,\Phi/\,\mathrm{d}\,r = Z\,e^2/r^3$ и

$$\langle n\,l\,j\,M|\,\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{l}|\,n\,l\,j\,M\rangle = j(j+1)-l(l+1)-\frac{3}{4}\,,$$

$$\langle n\,l\,j\,M|\,\frac{1}{r^3}|\,n\,l\,j\,M\rangle = \frac{2\,(Z\,e^2 m)^3}{n^3 l(l+1)(2\,l+1)}\,, \tag{67}$$

то

$$\delta E^{(L)}_{n\,l\,j\,M} = \frac{4\,m\,c^2 Z^4\alpha^5}{3\,\pi\,n^3}\,\left[L_{n\,l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{j(j+1)-l(l+1)-3/4}{l(l+1)(2\,l+1)}\right]. \tag{68}$$

Согласно (110 Л8) релятивистская поправка к энергии водородоподобных атомов — энергия тонкой структуры:

$$\delta\,E_{n\,l\,j\,M} = -\frac{m\,c^2(Z\,\alpha)^4}{2\,n^3}\,\left[\frac{1}{j+1/2}-\frac{3}{4\,n}\right]. \tag{69}$$

Из сравнения формул (68) и (69) видно, что квантовая теория поля даёт вклад в сдвиг уровней по порядку величины в α раз меньше чем вклад от релятивистских поправок в одноэлектронной задаче. Однако радиационный сдвиг (68) снимает последнее вырождение, сохраняющееся в формуле (69): вырождение уровней с одинаковыми значениями n и j, но разными $l = j \pm 1/2$. Именно поэтому лэмбовский сдвиг уровней легко отдели́м и потому измери́м.

Задачи

1. Вычислить радиационный сдвиг уровней заряженного пространственного осциллятора.

Указание. Поскольку гармонический потенциал есть некая идеализация, то можно считать, что рассматривается движение нерелятивистского электрона в глубокой, но конечной потенциальной яме с потенциалом $\Phi(r) = m\,\omega^2\,r^2/2, \quad r < L, \quad \Phi(r) = m\,\omega^2\,L^2/2, \quad r > L$. Считать, что $\hbar\omega \ll m\,\omega^2\,L^2/2 \ll m\,c^2$. В этом случае при вычислении радиационных поправок к нижним уровням учёт высокочастотного вклада при помощи формфакторов (51) является оправданным.

Часть III
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

Лекция 14
КВАНТОВЫЕ АНОМАЛИИ

1. Введение

В этой лекции мы рассматриваем безмассовую электродинамику $(m = 0)$. В безмассовом случае имеются две глобальные симметрии: дираковское действие инвариантно относительно двух непрерывных глобальных преобразований:

$$\psi = e^{i\,\alpha}\psi'\,, \qquad \overline{\psi} = \overline{\psi}\,'\,e^{-i\,\alpha}\,, \tag{1}$$

$$\psi = e^{i\,\beta\,\gamma^5}\psi'\,, \qquad \overline{\psi} = \overline{\psi}\,'\,e^{i\,\beta\,\gamma^5}\,. \tag{2}$$

Здесь $\alpha,\ \beta$ — вещественные числа.

Если в пункте 2 лекции 10 $\partial_\mu\alpha = 0$, то преобразование (3 Л10) сводится к преобразованию (1). Согласно теореме Нётер в классической теории поля каждой непрерывной симметрии соответствует сохраняющийся ток. Таким образом, в безмассовой классической электродинамике имеется два сохраняющихся тока: векторный и аксиально-векторный:

$$\partial_\mu J^\mu = 0\,, \qquad J^\mu = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi\,, \tag{3}$$

$$\partial_\mu J^{5\,\mu} = 0\,, \qquad J^{5\,\mu} = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\gamma^5\psi\,. \tag{4}$$

В квантовой теории поля теорема Нётер не может оставаться автоматически справедливой вследствие расходимостей. Действительно, рассмотрим амплитуду перехода Z из вакуума в вакуум. Для получения, например, закона сохранения (3), в континуальном интеграле для Z следует сделать бесконечно близкую к тождественной замену переменных вида (3 Л10) и провести все те манипуляции, которые привели к равенству (5 Л10). Если затем положить $\eta = \overline{\eta} = 0$, то из (5 Л10) следует закон сохранения

$$\partial_\mu\langle J^\mu(x)\rangle = 0\,. \tag{5}$$

Чрезвычайно важно, что равенство (5) получается не в четырёхмерном, а в комплексном d-мерном пространстве, в котором амплитуда перехода регуляризована и все те свойства теории, на которых основывается получение равенства (5), остаются справедливыми при комплексной размерности пространства. Поэтому после получения равенства (5) мы можем перейти к пределу $d \to 4$ и провести перенормировку. Тем самым закон сохранения (5) остаётся справедливым в уже перенормированной теории.

Аналогичный подход для получения закона сохранения аксиально-векторного тока оказывается несостоятельным. Это видно, в частности, из того, что в предположении аналитичности относительно размерности пространства d и справедливости формул (61 Л9) имеем:

$$\mathrm{tr}\,(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\,\ldots\,\gamma^{\mu_{2n}}) = 0 \tag{6}$$

для всех n. Это входит в противоречие с (68 Л8). Равенство (6) означает, что размерная регуляризация неудовлетворительна, когда исследуются аксиальные преобразования (2). Более того, не существует такой регуляризации в рамках теории S-матрицы, которая сохраняет аксиальную инвариантность (инвариантность относительно преобразования (2)). Поэтому аксиально-векторный ток не сохраняется в квантовой безмассовой электродинамике, что далее показывается.

Для доказательства равенства (6) вставим под знак следа тождество $\gamma_\mu\gamma^\mu = d$, затем "протащим"по циклу одну из матриц γ^μ под знаком следа, используя правила антикоммутации (5 Л8). В результате получим:

$$(d - 2\,n)\ \mathrm{tr}\,(\gamma^5\gamma^{\mu_1}\,\ldots\,\gamma^{\mu_{2n}}) + \,\ldots = 0\,. \tag{7}$$

Здесь многоточие означает сумму таких же следов с $(2\,n-2)$ дираковскими матрицами. В частности, для $n = 0$ имеем $d\,\mathrm{tr}\,\gamma^5 = 0$, т.е. $\mathrm{tr}\,\gamma^5 = 0$. Теперь равенство (6) следует из равенства (7) по индукции.

Покажем, что если бы не было ультрафиолетовых расходимостей, то аксиальная аномалия (несохранение аксиально-векторного тока) также отсутствовала бы. Для наших целей достаточно рассмотреть распространение квантованного дираковского поля на фоне неквантованного, но произвольного электромагнитного поля. На языке функционального интеграла такая ситуация реализуется, если сначала вычисляется функциональный интеграл по дираковскому полю, и лишь после этого вычисляется интеграл по электромагнитному полю. Тогда внутренний фермионный интеграл, который обозначим $Z\{A\}$, и описывает амплитуду перехода дираковского поля в заданном электромагнитном поле. Заметим, что согласно (26 Л9)

$$Z\{A\} = \det(i\,\gamma^\mu \nabla_\mu)\,, \quad \nabla_\mu = \partial_\mu + i\,eA_\mu\,. \tag{8}$$

Формула (8) верна, если внешние источники равны нулю. В противном случае эта формула должна быть исправлена за счёт соответствующей экспоненты.

Рассмотрим эту же задачу на операторном языке.

Пусть $\{\psi_N(t,\,\mathbf{x})\}$ образует в каждый момент времени t полный ортонормированный набор дираковских мод, т.е.

$$\int \mathrm{d}^{(3)}\,x\,\psi^\dagger_M(t,\,\mathbf{x})\,\psi_N(t,\,\mathbf{x}) = \delta_{M,N} \quad \longleftrightarrow \quad \sum_N \psi_N(t,\,\mathbf{x})\,\psi^\dagger_N(t,\,\mathbf{y}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{9}$$

Для упрощения записи мы ввели дискретный индекс N, нумерующий моды. Кроме того предполагается, что эти моды являются решениями уравнения Дирака в заданном электромагнитном поле:

$$i\,\gamma^\mu\nabla_\mu\psi_N = 0\,, \qquad i\,\nabla_\mu\,\overline{\psi}_N\,\gamma^\mu = 0\,. \tag{10}$$

Удобно считать, что в момент времени $t = t_0$ набор мод $\{\psi_N\}$ является полным ортонормированным набором следующего эрмитового оператора:

$$(-i\,\alpha^i\nabla_i)\big|_{t=t_0}\psi_N = \epsilon_N\psi_N\,. \tag{11}$$

Уравнение Дирака (10) может быть записано в виде

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_N = \mathcal{H}_\psi\psi_N\,, \qquad \mathcal{H}_\psi = -i\,\alpha^i\nabla_i + e\,A_0\,. \tag{12}$$

Так как оператор $\mathcal{H}_\psi$ является эрмитовым (сравни с (33 Л8)), то условия (9)-(11) совместны. Если в (11) $\epsilon_N > 0$ $(\epsilon_N < 0)$, то соответствующая мода называется положительно-(отрицательно-) частотной и обозначается $\psi^{(+)}_N$ $(\psi^{(-)}_N)$. Имеется взаимно однозначное соответствие между положительно- и отрицательно-частотными модами, так как преобразование $\psi_N \to \gamma^0\gamma^5\psi_N$ меняет их местами. Поэтому будем считать, что индекс N нумерует лишь положительно-частотные моды. Представим квантованное дираковское поле в виде (сравни с (46 Л8))

$$\begin{aligned} \psi\,(t,\,\mathbf{x}) &= \sum_N (a_N\psi^{(+)}_N\,(t,\,\mathbf{x}) + b^\dagger_N\psi^{(-)}_N\,(t,\,\mathbf{x}))\,, \\ \psi^\dagger(t,\,\mathbf{x}) &= \sum_N (b_N\psi^{(-)\,\dagger}_N\,(t,\,\mathbf{x}) + a^\dagger_N\psi^{(+)\,\dagger}_N\,(t,\,\mathbf{x}))\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Чтобы дираковские поля удовлетворяли каноническому антикоммутационному соотношению (52 Л8) должны выполняться следующие антикоммутационные соотношения (как обычно, выписываются лишь ненулевые соотношения):

$$\{a_M,\,a^\dagger_N\} = \{b_M,\,b^\dagger_N\} = \delta_{M,N}\,. \tag{14}$$

Подчеркнём, что операторы рождения и уничтожения в разложениях (13) не зависят от времени. Поэтому квантованные дираковские поля удовлетворяют уравнению Дирака:

$$i\,\gamma^\mu\nabla_\mu\psi = 0\,, \qquad i\,\nabla_\mu\,\overline{\psi}\;\gamma^\mu = 0\,, \tag{15}$$

и, таким образом, они являются гейзенберговыми операторами во внешнем электромагнитном поле. Вакуумное состояние естественно определить как

$$a_N\,|\,0\,\rangle = b_N\,|\,0\,\rangle = 0\,. \tag{16}$$

Составим из квантованных полей векторный $J^\mu = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi$ и аксиально-векторный $J^{5\,\mu} = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\gamma^5\psi$ токи. Формально в силу уравнений Дирака-Гейзенберга (15) оба эти тока сохраняются, т.е. они удовлетворяют уравнениям (3) и (4), соответственно. Однако в данном случае мы имеем дело с неопределённостями, которые требуют тщательного рассмотрения. Выпишем вакуумные средние рассматриваемых токов:

$$\langle\, 0\,|\, J^\mu(x)\,|\, 0\,\rangle = -i \ \mathrm{tr}\ S\,(x,\, x+\varepsilon)\,\gamma^\mu\,, \qquad \varepsilon^\mu = (\varepsilon, 0, 0, 0)\,, \qquad \varepsilon \to +0\,, \tag{17}$$

$$\langle\, 0\,|\, J^{5\,\mu}(x)\,|\, 0\,\rangle = -i \ \mathrm{tr}\ S\,(x,\, x+\varepsilon)\,\gamma^\mu\gamma^5\,, \tag{18}$$

$$S\,(x,\, y) \equiv -i\,\langle\, 0\,|T\,\psi(x)\ \overline{\psi}(y)\,|\, 0\,\rangle\,, \qquad -i\,S\,(x,\, y)\big|_{y^0 > x^0} = \sum_N \psi_N^{(-)}(x)\,\overline{\psi}{}_N^{(-)}(y)\,. \tag{19}$$

Из (19) видно, что средние (17), (18) сингулярны. Поэтому непосредственное вычисление дивергенций правых частей в (17), (18) невозможно до проведения регуляризации. Регуляризация, в свою очередь, должна быть согласована с условиями квантования теории. В КЭД регуляризация должна

(i) сохранять возможность виковского поворота в евклидово пространство;

(ii) сохранять калибровочную инвариантность.

Мы видели, что условие (i) означает, что за бесконечное время вакуум переходит в вакуум и вакуумы при $t \to \pm\infty$ различаются не более чем фазовым множителем. Нарушение условия (ii) означало бы нарушение свойства перенормируемости КЭД, поскольку свойство перенормируемости основывается, в частности, на тождествах Уорда, отражающих калибровочную инвариантность.

Например, регуляризация по энергиям, заключающаяся в отбрасывании высокочастотных мод с такими N, для которых $|\epsilon_N| > \Lambda \to \infty$, удовлетворяет условию (ii), но не удовлетворяет условию (i). Действительно, оператор Дирака в евклидовом пространстве относится к операторам эллиптического типа первого порядка. Поэтому все решения уравнения Дирака (10) в евклидовом пространстве растут на пространственной бесконечности. Так как при регуляризации по энергии после поворота Вика уравнения Дирака в евклидовом пространстве для регуляризованных полей по прежнему имеют место, то мы видим, что в данном случае поворот Вика приводит к неприемлемым с физической точки зрения решениям. Поэтому поворот Вика несовместен с регуляризацией по энергии. Стоит, однако, заметить, что при регуляризации по энергии оба закона сохранения (3) и (4) выполняются.

Размерностная регуляризация сохраняет оба требования (i) и (ii). Однако вследствие парадокса (6) использовать этот метод для вычисления дивергенции аксиально-векторного тока затруднительно. Поэтому мы будем использовать другие подходы.

2. Диаграммный метод вычисления аксиальной аномалии

Легко увидеть, что пропагатор (19) удовлетворяет уравнению

$$i\,\gamma^\mu\nabla_\mu\, S\,(x,\, y) = \delta^{(4)}(x-y)\,. \tag{20}$$

Действительно, если $x^0 \neq y^0$, то в силу уравнения (15) имеем $i\,\gamma^\mu\nabla_\mu\, S = 0$. При $x^0 = y^0$ пропагатор испытывает разрыв

$$[S\,(x+\varepsilon,\, y) - S\,(x-\varepsilon,\, y)]\big|_{\varepsilon\to+0} = -i\,\{\psi\,(x^0,\, \mathbf{x}),\, \overline{\psi}\,(x^0,\, \mathbf{y})\} = -i\,\gamma^0\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,. \tag{21}$$

Поэтому производная $\partial/\partial x^0$ в (20) даёт дополнительный вклад, равный $i\,\gamma^0\delta\,(x^0-y^0)\times$(разрыв пропагатора). Таким образом уравнение (20) проверено.

Заметим, что пропагатор свободного безмассового дираковского поля удовлетворяет уравнению (ср. с (49 Л9))

$$i\,\gamma^\mu\partial_\mu\, S_c(x-y) = \delta^{(4)}(x-y)\,. \tag{22}$$

Поэтому

$$S\,(x,\, y) = (i\,\gamma^\mu\partial_\mu - e\,\gamma^\mu A_\mu)^{-1}(x,\, y) = S_c(x-y) + \int \mathrm{d}^{(4)}\, z_1\, S_c(x-z_1)\,(e\,\gamma^\mu A_\mu(z_1))\, S_c(z_1-y) +$$
$$+ \int \mathrm{d}^{(4)}\, z_1\, \mathrm{d}^{(4)}\, z_2\, S_c(x-z_1)\,(e\,\gamma^\mu A_\mu(z_1))\, S_c(z_1-z_2)\,(e\,\gamma^\nu A_\nu(z_2))\, S_c(z_2-y) + \ \ldots\,. \tag{23}$$

Далее мы изучаем среднее от аксиально-векторного тока (18). Так как $\operatorname{tr}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0$, то первое слагаемое в правой части (23) не даёт вклада в (18). Второе слагаемое в правой части (23) также не даёт вклада в (18), поскольку оно, согласно (68 Л8) и (49 Л9), пропорционально $\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}(x-z_1)^\lambda(x-z_1)^\rho = 0$. Поэтому начнём с изучения третьего слагаемого в правой части (23), которое перепишем через Фурье-образы соответствующих величин:

$$e^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}p\,\mathrm{d}^{(4)}q}{(2\,\pi)^8} \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}r}{(2\,\pi)^4} A_\nu(p) A_\lambda(q)\, e^{i\,r\,(y-x)} e^{-i\,p\,x - i\,q\,y}\, S_c(r+p)\,\gamma^\nu\, S_c(r)\,\gamma^\lambda\, S_c(r-q)\,. \tag{24}$$

Подставим (24) в (18):

$$\langle\, 0\,|\, J^{5\,\mu}(x)\,|\,0\,\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^{(4)}p\,\mathrm{d}^{(4)}q}{(2\,\pi)^8} e^{-i\,(p+q)\,x} A_\nu(p) A_\lambda(q) \times$$

$$\times \left\{ i\,e^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}r}{(2\,\pi)^4} e^{i\,\varepsilon\,r^0} \operatorname{tr}\gamma^5\gamma^\mu \left[S_c(r+p)\,\gamma^\nu\, S_c(r)\,\gamma^\lambda\, S_c(r-q) + S_c(r+q)\,\gamma^\lambda\, S_c(r)\,\gamma^\nu\, S_c(r-p)\right] \right\} + \ldots\,. \tag{25}$$

В правой части множитель $1/2$ перед интегралом появился вследствие бозе-симметризации квадратной скобки в (25): лишь симметричная часть квадратной скобки в (25) относительно перестановки $(p,\,\nu) \longleftrightarrow (q,\,\lambda)$ даёт вклад в интеграл. Далее будем изучать выражение в фигурной скобке в (25), которое изображается суммой двух диаграмм на рис. 30.

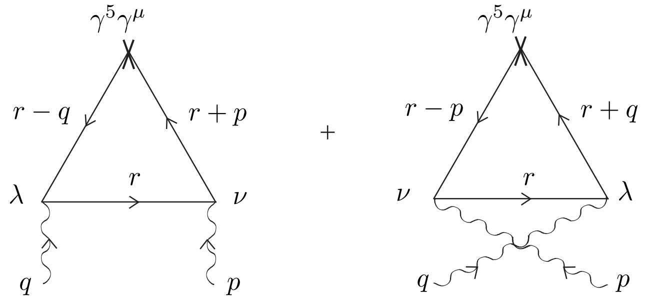


Рис. 30

Крестик в вершинах диаграмм означает, что в этих вершинах вместо множителя $(-i\,e\,\gamma^\mu)$ имеется множитель $(\gamma^5\gamma^\mu)$. В (25) можно положить $\varepsilon = 0$ ещё до вычисления интеграла, так как это не влияет на результат (те величины, которые зависят от порядка устремления ε к нулю, не дают вклада в изучаемое среднее).

Обозначим через $T^{\mu\nu\lambda}(p,q)$ величину в фигурной скобке в (25) и

$$T^{\mu\nu\lambda}(p,q) = \Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q) + \Gamma^{\mu\lambda\nu}(q,p)\,, \tag{26}$$

где $\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q)$ и $\Gamma^{\mu\lambda\nu}(q,p)$ изображаются первой и второй диаграммами на рис. 30, соответственно.

Диаграммы на рис. 30 расходятся линейно. Поэтому сдвиг переменной интегрирования изменяет эти диаграммы. При изучении диаграмм, встречавшихся в предыдущих лекциях, такого рода неопределённости устранялись условиями нормировки. В настоящем же случае никаких условий, кроме условия (ii), мы не имеем (условие (i) выполнено автоматически, так как используются фейнмановские пропагаторы). Таким образом, мы должны рассмотреть семейство величин $\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q\,|\,a)$, зависящих от сдвигового параметра 4-вектора a^μ:

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q\,|\,a) = \tilde\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q) + \Delta^{\mu\nu\lambda}(p,q\,|\,a)\,, \tag{27}$$

$$\tilde\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q) = ie^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}r}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\gamma^5\gamma^\mu\, S_c(r+p)\,\gamma^\nu\, S_c(r)\,\gamma^\lambda\, S_c(r-q)\,, \tag{28}$$

$$\Delta^{\mu\nu\lambda}(p,q\,|\,a) = ie^2 \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}r}{(2\pi)^4} \operatorname{tr}\gamma^5\gamma^\mu \times$$

$$\times\left\{S_c(r+a+p)\,\gamma^\nu\,S_c(r+a)\,\gamma^\lambda\,S_c(r+a-q)-S_c(r+p)\,\gamma^\nu\,S_c(r)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-q)\right\}\,. \tag{29}$$

Для прояснения ситуации рассмотрим одномерный интеграл

$$\Delta(a)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,x\,[f\,(x+a)-f\,(x)]\,. \tag{30}$$

Если $f\,(x)$ — интегрируемая функция на всей прямой, то при помощи сдвига переменной интегрирования устанавливается, что $\Delta\,(a)=0$. Теперь разложим подынтегральное выражение:

$$\Delta\,(a)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}\,x\,\left[a\,f'(x)+\frac{a^2}{2}f''(x)+\,\ldots\right]=a\,[f\,(+\infty)-f\,(-\infty)]+\frac{a^2}{2}[f'(+\infty)-f'(-\infty)]+\,\ldots\,.$$

Отсюда видно, что если $f\,(x)$ стремится к разным пределам при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$, то

$$\Delta\,(a)=a\,[f\,(+\infty)-f\,(-\infty)]\neq 0\,. \tag{31}$$

Аналогично вычисляется в задаче 1 величина (29):

$$\Delta^{\mu\nu\lambda}(p,q\,|\,a)=\frac{i\,e^2}{8\,\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}a_\rho\,,\qquad a_\rho=(a+b)\,p_\rho+b\,q_\rho\,. \tag{32}$$

Мы ограничили класс векторов a_ρ тем требованием, чтобы вектор a_ρ зависел лишь от векторов p, q, уже имеющихся в задаче. В (32) a и b — некие числа. Тогда наиболее общий вид величины (26) таков:

$$T^{\mu\nu\lambda}(p,q)=(\tilde\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q)+\tilde\Gamma^{\mu\lambda\nu}(q,p))+a\,\frac{i\,e^2}{8\,\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}(p_\rho-q_\rho)\,. \tag{33}$$

Комбинируя (25) и (26) и вычисляя дивергенцию, находим:

$$\langle\,0\,|\partial_\mu J^{5\,\mu}(x)\,|\,0\,\rangle=-\frac{i}{2}\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,p\;\mathrm{d}^{(4)}\,q}{(2\,\pi)^8}\,e^{-i\,(p+q)\,x}\,A_\nu(p)\,A_\lambda(q)\,[(p+q)_\mu T^{\mu\nu\lambda}(p,q)]+\,\ldots\,. \tag{34}$$

При помощи явной формулы (28) получаем:

$$\begin{aligned}(p+q)_\mu\,\tilde\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q)&\sim\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,r}{(2\,\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5[(\not r+\not p)\,S_c(r+p)\,\gamma^\nu S_c(r)\,\gamma^\lambda S_c(r-q)+\\&+S_c(r+p)\,\gamma^\nu S_c(r)\,\gamma^\lambda S_c(r-q)\,(\not r-\not q)]=\\&=\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,r}{(2\,\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5[\gamma^\nu S_c(r)\,\gamma^\lambda S_c(r-q)+S_c(r+p)\,\gamma^\nu S_c(r)\,\gamma^\lambda]=0\,.\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь в последнем интеграле каждое из слагаемых является двухиндексным псевдотензором в 4-мерном пространстве, составленным при помощи одного единственного вектора (q или p), что невозможно. Отсюда следует обращение в нуль величины (35). Поэтому согласно (33) и (35)

$$(p+q)_\mu T^{\mu\nu\lambda}(p,q)=-a\,\frac{i\,e^2}{4\,\pi^2}\varepsilon^{\nu\lambda\mu\rho}p_\mu q_\rho\,. \tag{36}$$

Далее следует учесть, что калибровочная инвариантность не нарушена. Очевидно, что оба изучаемых тока (17) и (18) инвариантны относительно калибровочных преобразований. Поэтому так же, как в лекции 10 при выводе тождества Уорда, находим тождество

$$\frac{\partial}{\partial y^\nu}\langle\,0\,|T\,J^{5\,\mu}(x)J^\nu(y)J^\lambda(z)\,|\,0\,\rangle=0\,,$$

из которого в наинизшем приближении следует равенство

$$p_\nu T^{\mu\nu\lambda}(p,q)=0\,. \tag{37}$$

Из (28) находим:

$$p_\nu\,\tilde\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q) = i\,e^2\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,r}{(2\,\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\,S_c(r+p)\,[(\not r+\not p)-\not r]\,S_c(r)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-q) =$$

$$= i\,e^2\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,r}{(2\,\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\,[S_c(r)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-q) - S_c(r+p)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-q)]\,. \qquad (38)$$

Первый интеграл в правой части (38) исчезает, так как невозможно построить псевдотензор с двумя индексами из одного единственного 4-вектора. Аналогичное вычисление даёт:

$$p_\nu\,\tilde\Gamma^{\mu\lambda\nu}(q,p) = i\,e^2\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,r}{(2\,\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\,S_c(r+q)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-p)\,. \qquad (39)$$

Нам нужна сумма интегралов (38) и (39):

$$p_\nu\,(\tilde\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,q) + \tilde\Gamma^{\mu\lambda\nu}(q,p)) \equiv \Delta^{\mu\lambda}(p,q) =$$

$$= i\,e^2\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,r}{(2\,\pi)^4}\,\mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\,[S_c(r+p+a)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-q+a) - S_c(r+p)\,\gamma^\lambda\,S_c(r-q)]\,, \qquad a = q-p\,. \qquad (40)$$

В задаче 2 эта величина вычислена:

$$\Delta^{\mu\lambda}(p,q) = \frac{i\,e^2}{4\,\pi^2}\varepsilon^{\mu\lambda\nu\rho}p_\nu q_\rho\,. \qquad (41)$$

При помощи (26), (27), (32) и (41) находим:

$$p_\nu T^{\mu\nu\lambda}(p,q) = \frac{i\,e^2}{4\,\pi^2}\varepsilon^{\mu\lambda\nu\rho}p_\nu q_\rho\left(1+\frac{a}{2}\right)\,. \qquad (42)$$

Отсюда видно, что для выполнения калибровочной инвариантности теории необходимо

$$a = -2\,. \qquad (43)$$

Согласно (36) такое значение параметра a означает несохранение аксиально-векторного тока. С другой стороны, если потребовать сохранение аксиально-векторного тока, для чего необходимо положить $a = 0$, то нарушается калибровочная инвариантность и векторный ток не сохраняется. Поэтому теория самосогласована лишь при выполнении равенства (43).

Важно, что многоточие в (34) может быть опущено, так как все слагаемые, обозначенные многоточием, не содержат ультрафиолетовых расходимостей и потому, как это было указано во введении, не могут дать вклад в аномальную дивергенцию каких либо величин. Этот факт даёт возможность переписать с учётом равенств (36) и (43) соотношение (34) как точное равенство вида

$$\langle\,0\,|\partial_\mu J^{5\,\mu}(x)\,|\,0\,\rangle = -\frac{e^2}{16\,\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\int\frac{\mathrm{d}^{(4)}\,p\;\mathrm{d}^{(4)}\,q}{(2\,\pi)^8}e^{-i\,(p+q)\,x}[p_\mu A_\nu(p) - p_\nu A_\mu(p)][q_\lambda A_\rho(q) - q_\rho A_\lambda(q)] =$$

$$= \frac{e^2}{16\,\pi^2}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}(x)\,F_{\lambda\rho}(x)\,. \qquad (44)$$

Равенство (44) было получено Ю. Швингером (1951) и затем ещё раз открыто С. Л. Адлером (1969) и Ю. С. Беллом и Р. Джекивом (1969).

3. Неинвариантность функциональной меры как источник аномалии

Рассмотрим задачу об аксиальной аномалии непосредственно в евклидовом пространстве. Тем самым условие (i) автоматически выполнено.

Формулировка фотодинамики в евклидовом пространстве очевидна. Поэтому мы лишь прокомментируем формулировку теории Дирака в евклидовом пространстве размерности d.

Пусть $\{\gamma^\mu\}$, $\mu = 1, \ldots, d$ — набор эрмитовых матриц Дирака таких, что

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,\delta^{\mu\nu}\,, \qquad \gamma^5 = \gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 = (\gamma^5)^\dagger \qquad (d=4)\,, \tag{45}$$

где $\delta^{\mu\nu}$ — символ Кронекера. Дираковское действие в безмассовом случае имеет вид

$$\mathcal{S}_\psi = -\int \mathrm{d}^{(d)}x\;\overline{\psi}\;i\gamma^\mu\nabla_\mu\,\psi\,, \qquad \nabla_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + ie\,A_\mu\,. \tag{46}$$

Здесь поля ψ и $\overline{\psi}$ взаимно эрмитовски сопряжены и поэтому действие (46) эрмитово. Рассмотрим фермионный функциональный интеграл (аналог величины (8))

$$Z\{\,A_\mu\,\} = \int D\,\overline{\psi}\;D\psi\,\exp\left(-\mathcal{S}_\psi\right). \tag{47}$$

В функциональном интеграле (47) переменные $\{\,\psi,\overline{\psi}\,\}$ рассматриваются как независимые.

Определим математически строго функциональную меру в интеграле (47) следующим образом. Предположим, во-первых, что x-пространство является компактным множеством (например, это может быть тор, на котором для полей заданы периодические граничные условия). Пусть $\{\,\psi_N\,\}$ — полный ортонормированный набор собственных функций оператора Дирака:

$$i\gamma^\mu\nabla_\mu\psi_N = \epsilon_N\,\psi_N\,. \tag{48}$$

Заметим, что $(i\gamma^\mu\nabla_\mu)$ — эрмитов оператор и индекс N вследствие компактности x-пространства пробегает счётное неограниченное множество. Разложим фермионные поля по этому полному набору функций:

$$\psi(x) = \sum_N{}'\,\eta_N\,\psi_N(x)\,, \quad \overline{\psi}(x) = \sum_N{}'\,\overline{\eta}_N\;\overline{\psi}_N(x)\,, \tag{49}$$

где $\{\,\eta,\overline{\eta}\,\}$ — множество независимых грассмановых переменных и переменные $\eta_N, \overline{\eta}_N$ взаимно комплексно сопряжены. В разложениях (49) штрих над знаком суммы означает, что суммирование ограничено теми значениями N, для которых

$$|\,\epsilon_N\,| < \Lambda \to \infty\,, \tag{50}$$

где Λ — импульс обрезания. Таким образом фермионные поля оказываются регуляризованными и при этом они разложены по конечному числу мод.

Обычно подразумевается, что континуальная фермионная мера в интеграле (47) представляется в виде

$$D\,\overline{\psi}\;D\psi = \prod_{x,\,a}\mathrm{d}\,\overline{\psi}_a(x)\;\mathrm{d}\,\psi_a(x) = \prod_N \mathrm{d}\,\overline{\eta}_N\;\mathrm{d}\,\eta_N\,. \tag{51}$$

Здесь все равенства являются формальными, поскольку произведение континуального или счётного бесконечного числа дифференциалов не является корректно и однозначно определённой величиной. Поэтому определим регуляризованную фермионную меру при помощи следующей формулы:

$$(D\,\overline{\psi}\;D\psi)_{reg} = \prod_N{}'\,\mathrm{d}\,\overline{\eta}_N\;\mathrm{d}\,\eta_N = \prod_{|\,\epsilon_N\,|<\Lambda}\mathrm{d}\,\overline{\eta}_N\;\mathrm{d}\,\eta_N\,. \tag{52}$$

Определение (52) является вторым моментом в определении регуляризованной дираковской континуальной меры. Мера (52) является калибровочно инвариантной. Действительно, при калибровочных преобразованиях

$$\psi_N(x) \to e^{-ie\,\alpha(x)}\psi_N(x)\,, \qquad \psi(x) \to e^{-ie\,\alpha(x)}\psi(x)\,, \qquad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)$$

собственные значения ϵ_N, а также грассмановы переменные $\{\,\eta,\overline{\eta}\,\}$ остаются инвариантными.

Далее мы используем регуляризованную меру (52), которая определена математически строго. Таким образом условие квантования (ii) также выполнено.

Совершим бесконечно малое аксиальное преобразование фермионных полей:

$$\psi(x) \to \tilde{\psi}(x) = \psi(x) + i\alpha(x)\,\gamma^5\psi(x)\,,$$

$$\overline{\psi}(x) \to \tilde{\overline{\psi}}(x) = \overline{\psi}(x) + i\alpha(x)\, \overline{\psi}(x)\, \gamma^5\,. \tag{53}$$

В терминах переменных η_N и $\overline{\eta}_N$ преобразование (53) переписывается следующим образом:

$$\eta_N \to \tilde{\eta}_N = \eta_N + i \sum_M{}' \eta_M \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \alpha(x)\, \overline{\psi}_N(x)\gamma^5\psi_M(x)\,,$$

$$\overline{\eta}_N \to \tilde{\overline{\eta}}_N = \overline{\eta}_N + i \sum_M{}' \overline{\eta}_M \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \alpha(x)\, \overline{\psi}_M(x)\gamma^5\psi_N(x)\,. \tag{54}$$

Преобразование (54) изменяет меру (52) в первом порядке по α (см. (23 Л9))[1]:

$$\prod_N{}' \mathrm{d}\,\overline{\eta}_N\; \mathrm{d}\,\eta_N = \left(1 + 2i \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \alpha \sum_M{}' \overline{\psi}_M\, \gamma^5\psi_M\right) \prod_N{}' \mathrm{d}\,\tilde{\overline{\eta}}_N\; \mathrm{d}\,\tilde{\eta}_N\;. \tag{55}$$

Используя в выражении (47) регуляризованную и калибровочно инвариантную фермионную меру (52), произведём в этом функциональном интеграле замену переменных согласно формулам (53), (54):

$$\prod_N{}' \mathrm{d}\,\overline{\eta}_N\; \mathrm{d}\,\eta_N\, e^{-\mathcal{S}_\psi} = \int \prod_N{}' \mathrm{d}\,\tilde{\overline{\eta}}_N\; \mathrm{d}\,\tilde{\eta}_N\; e^{-\tilde{\mathcal{S}}_\psi}\cdot$$

$$\left[1 + 2i \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \alpha \sum_M{}' \overline{\psi}_M\, \gamma^5\psi_M + i \int \mathrm{d}^{(d)}\, x\, \alpha\, \partial_\mu\, \tilde{J}^{5\mu}\right]. \tag{56}$$

Здесь $J^{5\mu} = i\, \overline{\psi}^\mu\, \gamma^\mu\gamma^5\psi$ — эрмитовский аксиальный ток. Все функции или функционалы, над которыми стоит волна, выражены через переменные с волной по обычным правилам. Полагая в (56) $\alpha(x) \sim \delta^{(d)}(x-y)$, получаем:

$$\langle\, \partial_\mu J^{5\mu}\, \rangle = -2 \sum_N{}' \overline{\psi}_N\, \gamma^5\psi_N\,. \tag{57}$$

В уравнении (57) $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение по фермионному вакууму. Правая часть в уравнении (57) возникла вследствие неинвариантности регуляризованной фермионной меры (52) относительно преобразований (54). Правая часть в (57) легко вычисляется, если обрезание в сумме сделать "мягким", то есть вместо обрезанной суммы $\sum_N'$ использовать регуляризованную сумму $\sum_N \exp(-\tau\epsilon_N^2)$, $\tau \to +0$. Таким образом, перепишем равенство (57) в виде

$$\langle\, \partial_\mu J^{5\mu}(x)\, \rangle = -2\, \mathrm{tr}\, \gamma^5\, K(x,x\,|\,\tau), \quad \tau \to +0\,, \tag{58}$$

$$K(x,y\,|\,\tau) = \theta(\tau) \sum_N e^{-\tau\epsilon_N^2}\psi_N(x)\, \overline{\psi}_N(y) = \theta(\tau)\, \left\{\exp\left[-\tau\, (i\gamma^\mu\nabla_\mu)^2\right]\right\}_{xy}\,. \tag{59}$$

Для оператора K имеем уравнение:

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} + (i\gamma^\mu\nabla_\mu)^2\right] K(x,y\,|\,\tau) = \delta(\tau)\, \delta^{(d)}(x-y)\,. \tag{60}$$

Воспользуемся равенством

$$\gamma^\mu\gamma^\nu = \delta^{\mu\nu} + 2\sigma^{\mu\nu}\,, \qquad \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}\, [\gamma^\mu, \gamma^\nu]\,,$$

и запишем оператор $(i\gamma^\mu\nabla_\mu)^2$ в виде

$$(i\gamma^\mu\nabla_\mu)^2 = -\nabla_\mu^2 - ie\, \sigma^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu}\,. \tag{61}$$

Теперь уравнение (60) принимает вид

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - \nabla_\mu^2 - ie\, \sigma^{\mu\nu}\, F_{\mu\nu}\right] K(x,y\,|\,\tau) = \delta(\tau)\, \delta^{(d)}(x-y)\,. \tag{62}$$

[1]Бесконечно малое калибровочное преобразование дираковских полей приводит к формулам преобразования переменных η_N и $\overline{\eta}_N$, отличающимся от (54) лишь отсутствием матрицы γ^5 и противоположным значением знаков перед суммами в этих формулах. Поэтому соответствующий якобиан тождественно равен единице.

Будем вычислять оператор $K(x,y\,|\,\tau)$ в пределе $\tau \to +0$ при помощи ТВ. В нулевом приближении оператор $K^{(0)}(x,y\,|\,\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{\partial}{\partial\tau} - \partial_\mu^2\right] K^{(0)}(x,y\,|\,\tau) = \delta(\tau)\,\delta^{(d)}(x-y) \tag{63}$$

и он равен при $d=4$

$$K^{(0)}(x,y\,|\,\tau) = K^{(0)}(x-y\,|\,\tau) = \frac{\theta(\tau)}{16\pi^2\tau^2}\,\exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right]. \tag{64}$$

Это выражение проще всего получить, переходя в импульсное представление, в котором

$$K^{(0)}(k\,|\,\tau) = \theta(\tau)\,e^{-\tau k^2}\,, \qquad K^{(0)}(x-y\,|\,\tau) = \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\,k}{(2\pi)^4}\,e^{ik(x-y)}\,K^{(0)}(k\,|\,\tau)\,.$$

Таким образом имеем:

$$K(x,x\,|\,\tau) = K^{(0)}(0\,|\,\tau) + \int\limits_0^\tau \mathrm{d}\,\tau_1 \int \mathrm{d}^{(4)}\,y\,K^{(0)}(x-y\,|\,\tau-\tau_1)\,\left[ie\,\sigma^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}(y)\right]\,K^{(0)}(y-x\,|\,\tau_1) +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \mathrm{d}\,\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \mathrm{d}\,\tau_2 \int \mathrm{d}^{(4)}\,y \int \mathrm{d}^{(4)}\,z\,K^{(0)}(x-y\,|\,\tau-\tau_1)\,\left[ie\,\sigma^{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}(y)\right]\cdot$$

$$\cdot K^{(0)}(y-z\,|\,\tau_1-\tau_2)\,\left[ie\,\sigma^{\lambda\rho}\,F_{\lambda\rho}(z)\right]\,K^{(0)}(z-x\,|\,\tau_2) + \ldots\,. \tag{65}$$

Невыписанные здесь слагаемые, обозначенные многоточием, либо исчезают под знаком следа в (58), либо исчезают в пределе $\tau \to +0$. Так как

$$\mathrm{tr}\,\gamma^5 = 0\,, \qquad \mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu = 0\,, \qquad \mathrm{tr}\,\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho = 4\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,, \tag{66}$$

то вклад в (58) даёт лишь третье слагаемое в (65). Из (64) видно, что при $\tau \to +0$ интегралы по y и z насыщаются при $y \to x$, $z \to x$ и потому гладкие величины $F_{\mu\nu}(y)$ и $F_{\lambda\rho}(z)$ могут быть вынесены из под знака интеграла и взяты в точке x. После этого все свёртки между функциями $K^{(0)}$ следует вычислять при помощи тривиальной формулы

$$\int \mathrm{d}^{(4)}\,z\,K^{(0)}(x-z\,|\,\tau-\tau_1)\,K^{(0)}(z-y\,|\,\tau_1) = K^{(0)}(x-y\,|\,\tau)\,.$$

Таким образом находим, что третье слагаемое в (65) равно

$$-\frac{e^2}{16\pi^2}\,\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\lambda\rho}\,F_{\mu\nu}(x)\,F_{\lambda\rho}(x)\,\left(\frac{1}{\tau^2}\int\limits_0^\tau \mathrm{d}\,\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \mathrm{d}\,\tau_2\right)\,. \tag{67}$$

Из проведенного вычисления видно, что если бы мы учли более высокие члены разложения в (65), то они были бы пропорциональны, например (в следующем порядке)

$$\frac{1}{\tau^2}\int\limits_0^\tau \mathrm{d}\,\tau_1 \int\limits_0^{\tau_1} \mathrm{d}\,\tau_2 \int\limits_0^{\tau_2} \mathrm{d}\,\tau_3 = \frac{\tau}{6} \to 0\,.$$

Все такие слагаемые стремятся к нулю в пределе $\tau \to +0$. Поэтому, подставляя (67) в (58) и используя (66), окончательно находим:

$$\langle\,\partial_\mu J^{5\mu}(x)\,\rangle = \frac{e^2}{16\,\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}(x)\,F_{\lambda\rho}(x)\,. \tag{68}$$

Замечание. Строго говоря, преобразованные поля (53) должны быть спроектированы на регуляризованное пространство фермионных полей (49) с базисом мод $\{\psi_N\}$, $|\epsilon_N| < \Lambda$. Иными словами, для преобразованных полей также должны иметь место разложения (49):

$$\tilde{\psi}(x) = {\sum_N}' \tilde{\eta}_N \, \psi_N(x) \,, \quad \tilde{\overline{\psi}}(x) = {\sum_N}' \tilde{\overline{\eta}}_N \, \overline{\psi}_N(x) \,. \tag{69}$$

В противном случае действие

$$\tilde{\mathcal{S}}_\psi = -\int \mathrm{d}^{(d)} x \, \tilde{\overline{\psi}} \, i\gamma^\mu \nabla_\mu \, \tilde{\psi}$$

в (56) как функция переменных $\{\tilde{\overline{\eta}}_M, \tilde{\eta}_M\}$ оказалось бы отличным от действия $\mathcal{S}$ в (47) как функции переменных $\{\overline{\eta}_M, \eta_M\}$, и из (56) не следовало бы соотношение (57). Однако вследствие того, что моды в разложениях (49) и (69) являются собственными для оператора Дирака $i\,\gamma^\mu \nabla_\mu$, мы имеем:

$$\tilde{\mathcal{S}}_\psi = \sum_{|\epsilon_N|<\Lambda} \epsilon_N \, \tilde{\overline{\eta}}_N \tilde{\eta}_N + \sum_{|\epsilon_N|>\Lambda} \epsilon_N \, \tilde{\overline{\eta}}_N \tilde{\eta}_N \,.$$

Здесь второе слагаемое имеет порядок $O\left(\alpha^2\right)$ и потому не играет роли в приведенном выше вычислении. Мы видим, что в фермионном действии проектирование преобразованных фермионных полей на регуляризованное фермионное подпространство происходит автоматически. Подчеркнём, что этот факт является следствием использования собственных функций оператора Дирака для регуляризации фермионных полей. Поэтому корректность перехода от равенства (56) между регуляризованными фермионными интегралами к соотношению (57) очевидна.

Замечание. Операторы (23) и (65) зависят лишь от величин $(e\,A_\mu \gamma^\mu)$ и $(e\,F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})$, соответственно. Согласно (35 Л10) и (45 Л10) эти величины не изменяются при одновременном переходе от затравочных значений константы e_0 и поля A_μ к их перенормированным (физическим) значениям e и $A_{(r)\,\mu}$. Очевидно, в пункте 2 используются перенормированные величины, а в пункте 3 — затравочные. Таким образом, полученные ответы для дивергенции аксиально-векторного тока (44) и (68) численно совпадают.

Вычисление аномальной расходимости аксиально-векторного тока путём учёта неинвариантности фермионной меры впервые было проделано С. Н. Вергелесом (1978).

Вывод: *Не все сохраняющиеся величины в классической теории поля остаются сохраняющимися в квантовой теории. Этому препятствуют квантовые аномалии. В частности, в безмассовой КЭД векторный ток сохраняется, а аксиально-векторный ток не сохраняется вследствие квантовой аномалии.*

Задачи

1. Вычислить интеграл (29).

Ответ:

$$\Delta^{\mu\nu\lambda}(p, q \,|\, a) = \frac{i\,e^2}{8\,\pi^2} \varepsilon^{\mu\nu\lambda\rho} a_\rho \,.$$

2. Вычислить интеграл (40).

Ответ:

$$\Delta^{\mu\lambda}(p, q) = \frac{i\,e^2}{4\,\pi^2} \varepsilon^{\mu\lambda\nu\rho} p_\nu q_\rho \,.$$

3. Сформулировать и выписать действие для двумерной электродинамики (электромагнитное + дираковское поля). В безмассовом случае решить задачу также и в евклидовом пространстве. Вычислить аномалию в дивергенции аксиально-векторного тока в безмассовой евклидовой теории.

4*. Вычислить в двумерной безмассовой электродинамике (модель Швингера) величину $\ln Z\{A\}$.

Указание. Действовать в евклидовом пространстве и принять во внимание следующие факты:
а)

$$\delta_A \ln Z\{A\} = -e \int \mathrm{d}^{(2)} x\, \delta A_\mu \langle J^\mu \rangle\,,$$

где $J^\mu = \overline{\psi}\,\gamma^\mu \psi$ — векторный ток.

б) Кинематическое соотношение

$$J^\mu = \varepsilon_{\mu\nu} J^{5\,\nu}\,, \qquad J^{5\,\mu} = -\varepsilon_{\mu\nu} J^\nu\,, \qquad J^{5\,\mu} = i\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu \gamma^5 \psi\,.$$

в) Равенства $\partial_\mu \langle J^\mu \rangle = 0$ и $\partial_\mu \langle J^{5\,\mu} \rangle = -\frac{e}{2\,\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$.

Лекция 15
СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

1. Спонтанное нарушение симметрии в классической теории

Рассмотрим теорию скалярного вещественного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{\mu^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \,. \tag{1}$$

Гамильтониан такой теории

$$\mathcal{H} = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right] . \tag{2}$$

В теории (1) - (2) имеется дискретная симметрия $\phi \to -\phi$.

Энергия классической системы (2) принимает минимальное значение в том случае, когда $\phi = \mathrm{const}$ и потенциал

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{3}$$

минимален, что имеет место при

$$\phi_0 = \pm v = \pm\sqrt{\frac{6}{\lambda}}\,\mu \neq 0\,. \tag{4}$$

Константа v называется *вакуумным средним поля* ϕ.

Предположим, что система находится вблизи одного из минимумов потенциала, совершая вблизи него малые колебания. Поэтому естественно разложить поле ϕ вблизи вакуумного среднего:

$$\phi = \phi_0 + \sigma\,. \tag{5}$$

Подставим (5) в лагранжиан (1):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{(2\,\mu^2)}{2}\,\sigma^2 - \frac{\lambda\,\phi_0}{3!}\,\sigma^3 - \frac{\lambda}{4!}\,\sigma^4\,. \tag{6}$$

Мы учли, что линейное слагаемое относительно σ автоматически исчезает в (6) и опустили $\mathcal{L}(\phi_0) = \mathrm{const}$. Лагранжиан (6) описывает скалярное поле σ с массой $m = \sqrt{2}\,\mu$. Симметрия $\phi \to -\phi$ теперь проявляется лишь в соотношении между тремя коэффициентми теории с лагранжианом (6).

Теперь рассмотрим линейную сигма-модель (см. задачу 3 к лекции 3) с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^i)^2 + \frac{\mu^2}{2}(\phi^i)^2 - \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2\,,$$
$$i = 1,\,\ldots\,,n\,, \qquad (\phi^i)^2 \equiv (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \,\ldots\,. \tag{7}$$

Лагранжиан (7) инвариантен относительно преобразований

$$\phi^i \to \mathcal{O}^i_j\,\phi^j\,, \qquad \mathcal{O}\,\mathcal{O}^t = 1\,. \tag{8}$$

Таким образом $\mathcal{O}$ — элемент ортогональной группы вращений n-мерного евклидового пространства.

Также как и в вышеприведенном случае классическая конфигурация с минимальной энергией есть постоянное поле ϕ^i_0, минимизирующее потенциал

$$V(\phi^i) = -\frac{\mu^2}{2}(\phi^i)^2 + \frac{\lambda}{4}[(\phi^i)^2]^2\,. \tag{9}$$

Этот минимум достигается, если

$$(\phi^i_0)^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}\,. \tag{10}$$

Условие (10) определяет лишь длину вектора ϕ_0^i, но не его направление. Для удобства будем считать, что

$$\phi_0^i = (0, \dots, v), \qquad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}. \tag{11}$$

Аналогично (5) теперь имеем:

$$\phi^i = (\pi^k(x), v + \sigma(x)), \qquad k = 1, \dots, n-1. \tag{12}$$

Перепишем лагранжиан (7) в терминах новых полей:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi^k)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 - \sqrt{\lambda}\mu\sigma^3 - \sqrt{\lambda}\mu(\pi^k)^2\sigma - \frac{\lambda}{4}\sigma^4 - \frac{\lambda}{2}(\pi^k)^2\sigma^2 - \frac{\lambda}{4}((\pi^k)^2)^2. \tag{13}$$

Лагранжиан (13) описывает динамику массивного поля σ и $(n-1)$ безмассовых полей π^k. Исходная $O(n)$ симметрия оказывается нарушенной, от неё остаётся подгруппа $O(n-1)$ вращений полей π в своём пространстве. Колебания поля σ происходят вдоль длины вектора ϕ^i, изменяя эту длину. Поэтому вторая производная лагранжиана по σ отлична от нуля и масса этого поля не равна нулю. Масса π-частиц равна нулю, так как π-частицы деформируют поле ϕ^i в $(n-1)$ направлениях, ортогональных вакуумному среднему.

2. Теорема Голдстоуна

Заметим, что группа симметрии исходного лагранжиана (7) инвариантна относительно группы Ли $O(n)$, размерность которой $n(n-1)/2$ (число различных двумерных плоскостей, в которых можно делать независимые друг от друга повороты). Когда исходная симметрия нарушена до симметрии, содержащейся в лагранжиане (13), остаточная симметрия описывается группой $O(n-1)$ с $(n-1)(n-2)/2$ независимыми преобразованиями. Таким образом, утрачены

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (n-1)$$

преобразований симметрии и вместе с тем появились $(n-1)$ безмассовые частицы, которые называются *голдстоуновскими бозонами.*

Теорема Голдстоуна утверждает, что для каждой спонтанно нарушенной *непрерывной* симметрии в теории содержится безмассовая частица.

Доказательство теоремы Голдстоуна проведём в самом общем случае.

Рассмотрим теорию, содержащую несколько полей ϕ^i с лагранжианом

$$\mathcal{L} = (\text{члены с производными}) - V(\phi). \tag{14}$$

Пусть ϕ_0^i — постоянное поле, минимизирующее V:

$$\frac{\partial}{\partial \phi^i} V \bigg|_{\phi^i(x) = \phi_0^i} = 0. \tag{15}$$

Разложим V в окрестности этого минимума:

$$V(\phi) = V(\phi_0) + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^i (\phi - \phi_0)^j \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^i \partial \phi^j} V \right)_{\phi_0} + \dots . \tag{16}$$

Коэффициент при квадратичном слагаемом

$$m_{ij}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^i \partial \phi^j} V \right)_{\phi_0} \tag{17}$$

является симметричной матрицей, собственные значения которой дают массы полей. Они неотрицательны, так как V минимален при $\phi = \phi_0$. Для доказательства теоремы Голдстоуна необходимо показать, что всякая непрерывная симметрия лагранжиана (14), не являющаяся симметрией (т.е. изменяющая) поле ϕ_0, приводит к нулевому собственному значению матрицы (17).

Произвольное преобразование непрерывной симметрии имеет вид

$$\phi^i \longrightarrow \phi^i + \alpha\, \Delta^i(\phi)\,, \qquad \alpha \to 0\,, \tag{18}$$

где $\Delta^i(\phi)$ — некие функции поля ϕ, определяющие данное преобразование симметрии. Достаточно рассмотреть поля, постоянные в пространстве-времени. Тогда потенциал V инвариантен сам по себе относительно преобразования (18):

$$V\,(\phi^i) = V\,(\phi^i + \alpha\, \Delta^i(\phi)) \longrightarrow \Delta^i(\phi)\, \frac{\partial}{\partial\, \phi^i}\, V\,(\phi) = 0 \longrightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial\, \phi^j}\, \left[\Delta^i(\phi)\, \frac{\partial}{\partial\, \phi^i}\, V\,(\phi)\right]\Bigg|_{\phi=\phi_0} = \frac{\partial\, \Delta^i}{\partial\, \phi^j}\Bigg|_{\phi=\phi_0} \frac{\partial\, V}{\partial\, \phi^i}\Bigg|_{\phi=\phi_0} + \Delta^i(\phi_0)\, m^2_{ij} = 0\,.$$

Вследствие (15)

$$m^2_{ij}\, \Delta^j\,(\phi_0) = 0\,. \tag{19}$$

Заметим, что если $\Delta^i\,(\phi_0) = 0$, то $\phi^i_0 + \Delta^i\,(\phi_0) = \phi^i_0$. Это означает, что вакуумное среднее инвариантно относительно относительно рассматриваемого преобразования. Наоборот, если $\Delta^i\,(\phi_0) \neq 0$, то мы имеем преобразование, изменяющее ϕ^i_0. Соответствующая симметрия отсутствует в лагранжиане вида (13). Но равенство (19) означает, что такому преобразованию соответствует нулевая масса. Тем самым теорема Голдстоуна доказана.

Вернёмся к линейной σ-модели с лагранжианом (13) и построим соответствующую квантовую теорию поля. Обозначим пропагаторы σ- и π-частиц соответственно двойной и одинарной линиями. Тогда элементы диаграммной техники Фейнмана представлены на рис. 31:

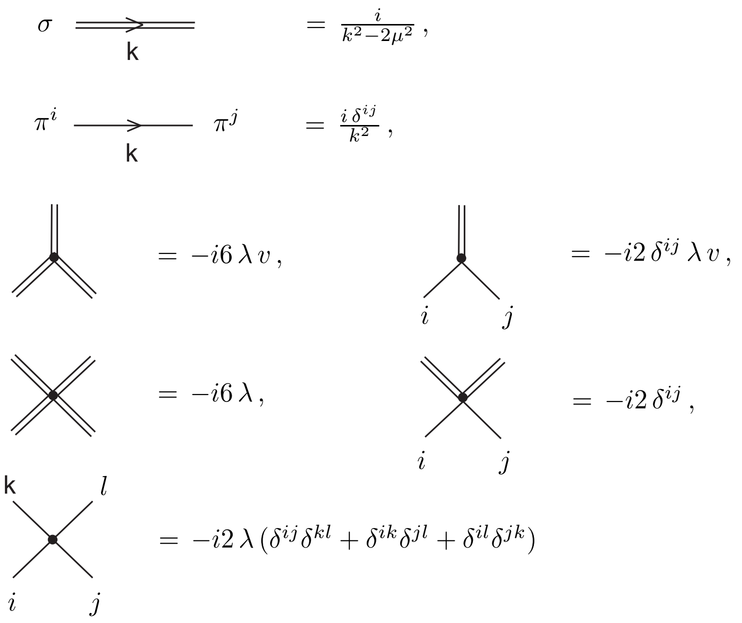


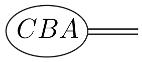
Рис. 31

Очевидно, что теория с указанной на рис. 31 диаграммной техникой перенормируема, так как перенормируема теория с лагранжианом (7), а ультрафиолетовые расходимости не могут зависеть от того, как "растасованы"и обозначены отдельные поля теории. Однако имеют место гораздо более сильные утверждения:

а) Для устранения ультрафиолетовых расходимостей в теории (13) с диаграммной техникой, представленной на рис. 31, достаточно введение контрчленов того же вида, что и в лагранжиане (13).

б) Теорема Голдстоуна остаётся справедливой с учётом квантовых поправок.

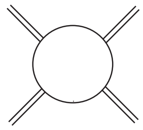
Ввиду громоздкости мы не доказываем здесь этих утверждений. Укажем лишь удобные условия перенормировки, фиксирующие все константы теории:



$$= 0\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,k^2}\left(\right.$$ 

$$\left.\right)\Bigg|_{k^2=0} = 0\,; \qquad (20)$$

$$\Bigg($$  $$\Bigg)_{\text{ампутированная}} = -i6\,\lambda \quad \text{при} \quad s = 4m^2\,, \quad t = u = 0.$$

3. Эффективное действие

Рассмотрим для некоторой скалярной теории поля с лагранжианом $\mathcal{L}\,(\phi)$ производящий функционал (см. (16 Л3))

$$e^{-i\,E(\eta)} \equiv Z\,(\eta) = \int D\phi\,\exp\,[i\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,(\mathcal{L}(\phi) + \eta\,\phi)]\,. \tag{21}$$

Имеем:

$$\frac{\delta}{\delta\,\eta(x)}\,E(\eta) = i\,\frac{\delta}{\delta\,\eta(x)}\,\ln Z = -\frac{\int D\phi\,e^{i\int(\mathcal{L}+\eta\,\phi)}\phi(x)}{\int D\phi\,e^{i\int(\mathcal{L}+\eta\,\phi)}} \equiv -\langle\phi(x)\rangle_\eta\,. \tag{22}$$

Здесь правая часть — среднее по вакууму в присутствии внешнего источника $\eta(x)$. Определим *классическое поле*

$$\phi_{cl}(x) \equiv \langle\phi(x)\rangle_\eta \tag{23}$$

и *эффективное действие*

$$\Gamma\,(\phi_{cl}) \equiv -E(\eta) - \int \mathrm{d}^{(d)}\,y\,\eta(y)\,\phi_{cl}(y)\,. \tag{24}$$

Тот факт, что эффективное действие зависит лишь от классического поля, но не от внешнего источника, устанавливается вычислением полной вариации величины (24):

$$\delta\,\Gamma = -\int \frac{\delta\,E}{\delta\,\eta(y)}\,\delta\,\eta(y)\,\mathrm{d}^{(d)}\,y - \int \phi_{cl}(y)\,\delta\,\eta(y)\,\mathrm{d}^{(d)}\,y - \int \eta(y)\,\delta\,\phi_{cl}(y)\,\mathrm{d}^{(d)}\,y\,.$$

С учётом (22) здесь первые два слагаемых взаимно сокращаются. Поэтому

$$\frac{\delta\,\Gamma\,(\phi_{cl})}{\delta\,\phi_{cl}(x)} = -\eta(x)\,. \tag{25}$$

Если внешний источник обратить в нуль, то из (25) получаем:

$$\frac{\delta\,\Gamma\,(\phi_{cl})}{\delta\,\phi_{cl}(x)} = 0\,. \tag{26}$$

Решения последнего уравнения являются значениями $\langle\phi(x)\rangle$ в стабильных квантовых состояниях теории. Для трансляционно-инвариантного вакуума ϕ_{cl} также не зависит от x. Именно такой случай далее мы будем рассматривать. Заметим лишь, что в случае трансляционно- и лоренц-инвариантного вакуума иногда могут быть дополнительные решения уравнения (26), нарушающие симметрию вакуума и соответствующие локализованным сгусткам поля, удерживаемым за счёт самодействия и топологических факторов. В случае, когда действие таких сгустков конечно, они называются *инстантонами*, а если конечен гамильтониан, то они называются *солитонами*. Солитоны являются частицами, которые отсутствуют при наивном изучении теории с помощью теории возмущений.

Если $\phi_{cl} = \mathrm{const}$, то поскольку $\Gamma(\phi_{cl})$ есть экстенсивная величина — она пропорциональна объёму пространства-времени — мы имеем:

$$\Gamma(\phi_{cl}) = -(V\,T)\,V_{eff}(\phi_{cl})\,. \tag{27}$$

Здесь T — временная протяжённость пространства-времени, а V — объём. $V_{eff}(\phi_{cl})$ в (27) называется *эффективным потенциалом*. В терминах эффективного потенциала уравнение (26) записывается как

$$\frac{\partial V_{eff}(\phi_{cl})}{\partial \phi_{cl}} = 0\,. \tag{28}$$

Так как $\Gamma = -E$ при $\eta = 0$, то V_{eff}, вычисленное в точке (28), является плотностью энергии в этом состоянии.

Будем вычислять V_{eff} при помощи ТВ. Разобьём лагранжиан, как обычно, на слагаемое, зависящее от перенормированных параметров, и слагаемое, содержащее лиишь контрчлены:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \delta\,\mathcal{L}\,. \tag{29}$$

Наша цель — вычисление функции $\Gamma(\phi_{cl})$, в то время как $Z(\eta)$ зависит от ϕ_{cl} косвенно через источник η. Попробуем найти, хотя бы неявно, связь между η и ϕ_{cl}. В наинизшем порядке ТВ эта связь задаётся уравнением (см. (25))

$$\left.\frac{\delta \int \mathrm{d}^{(d)}\,y\,\mathcal{L}}{\delta\,\phi(x)}\right|_{\phi=\phi_{cl}} = -\eta(x) \qquad (\text{в низшем порядке})\,. \tag{30}$$

Тогда уравнение

$$\left.\frac{\delta \int \mathrm{d}^{(d)}\,y\,\mathcal{L}_\infty}{\delta\,\phi(x)}\right|_{\phi=\phi_{cl}} = -\eta_1(x) \tag{30}$$

определяет "перенормированный"источник $\eta_1(x)$, так что

$$\eta(x) = \eta_1(x) + \delta\,\eta(x)\,. \tag{32}$$

"Контрчлен" $\delta\,\eta(x)$ определяется последовательно при помощи ТВ и уравнений (23), (31), (32). Перепишем формулу (21) следующим образом:

$$e^{-i\,E(\eta)} = \int D\phi\,\{\exp{[i\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,(\mathcal{L}_1(\phi) + \eta_1\phi)]}\}\{\exp{[i\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,(\delta\mathcal{L}(\phi) + \delta\eta\,\phi)]}\}\,. \tag{33}$$

В первой экспоненте справа разложим показатель вблизи ϕ_{cl} : $\phi(x) = \phi_{cl}(x) + \rho(x)$. Имеем:

$$\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,(\mathcal{L}_1(\phi) + \eta_1\phi) = \int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,(\mathcal{L}_1(\phi_{cl}) + \eta_1\phi_{cl}) + \int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\rho(x)\left(\left.\frac{\delta\,\mathcal{L}_1}{\delta\,\phi}\right|_{\phi=\phi_{cl}} + \eta_1\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\mathrm{d}^{(d)}\,y\,\rho(x)\,\rho(y)\left.\frac{\delta^2\,\mathcal{L}_1}{\delta\,\phi(x)\,\delta\,\phi(y)}\right|_{\phi=\phi_{cl}} +$$
$$+\frac{1}{3!}\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\mathrm{d}^{(d)}\,y\,\mathrm{d}^{(d)}\,z\,\rho(x)\,\rho(y)\,\rho(z)\left.\frac{\delta^3\,\mathcal{L}_1}{\delta\,\phi(x)\,\delta\,\phi(y)\,\delta\,\phi(z)}\right|_{\phi=\phi_{cl}} + \ldots\,. \tag{34}$$

Вследствие (30) линейное по ρ слагаемое в (34) исчезает. Таким образом, следует вычислить гауссов интеграл по полю ρ, а нелинейности учесть при помощи ТВ в соответствии с разработанной схемой.

В низшем приближении вторая экспонента справа в (33) не даёт вклада, а первая экспонента даёт гауссов интеграл:

$$\int D\rho\,\exp\left\{i\,\left[\int(\mathcal{L}_1(\phi_{cl}) + \eta_1\phi_{cl}) + \frac{1}{2}\int\rho\,\frac{\delta^2\mathcal{L}_1}{\delta\phi\,\delta\phi}\,\rho\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{ i \int (\mathcal{L}_1(\phi_{cl}) + \eta_1 \phi_{cl}) \right\} \cdot \left(\det \left[-\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi\,\delta\phi} \right] \right)^{-1/2} . \tag{35}$$

Отсюда видно, что при дальнейшем учёте квантовых поправок возникают фейнмановские диаграммы, в которых в качестве пропагатора используется оператор

$$-i \left(\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi\,\delta\phi} \right)^{-1} , \tag{36}$$

а вершинами являются третья и т.д. функциональные производные $\mathcal{L}_1$.

Вторая экспонента в (33) также разлагается вблизи ϕ_{cl} по полю ρ и даёт контрчлены. Как обычно в аналогичных вычислениях (см. (14 Л6)), получаем:

$$-i\,E(\eta) = i \int \mathrm{d}^{(d)} x\,(\mathcal{L}_1(\phi_{cl}) + \eta_1 \phi_{cl}) - \frac{1}{2} \ln \det \left(-\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi\,\delta\phi} \right) +$$

$$+(\text{связные диаграммы}) + i \int \mathrm{d}^{(d)} x\,(\delta\mathcal{L}(\phi_{cl}) + \delta\eta \cdot \phi_{cl}) . \tag{37}$$

Здесь последнее слагаемое является нулевым приближением при разложении по ρ показателя второй экспоненты в (33). Сопоставляя (24) и (37), находим:

$$\Gamma(\phi_{cl}) = \int \mathrm{d}^{(d)} x\,\mathcal{L}_1(\phi_{cl}) + \frac{i}{2} \ln \det \left(-\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi\,\delta\phi} \right) - i\,(\text{связные диаграммы}) + \int \mathrm{d}^{(d)} x\,\delta\mathcal{L}(\phi_{cl}) . \tag{38}$$

Здесь все слагаемые зависят явно от ϕ_{cl}. Важно также то, что каждая связная диаграмма в (38) не имеет внешних линий и потому является не ниже чем двухпетлевой. Таким образом однопетлевой вклад содержится во втором слагаемом в (38).

Отметим, что контрчлен $\delta\,\eta$ определяется из того требования, чтобы во всех порядках было $\langle\phi\rangle = \phi_{cl}$: если в процессе вычислений возникает ненулевой вклад в $\langle\rho\rangle$, то его "убивают", добавляя соответствующий вклад в $\delta\,\eta$.

Вычислим эффективное действие (38) для линейной сигма-модели в однопетлевом приближении, т.е. учитывая в (38) лишь первые два слагаемых. При помощи (7) мы находим:

$$\left. \frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi^i \delta\phi^j} \right|_{\phi=\phi_{cl}} = \delta^{ij}\,(-\partial^2 + \mu^2) - \lambda\,[(\phi_{cl}^k)^2 \delta^{ij} + 2\,\phi_{cl}^i\,\phi_{cl}^j] . \tag{39}$$

Предположим, что $\phi_{cl}^i = \mathrm{const}$ и

$$\phi_{cl}^i = (0,\,0,\,\ldots\,,\,0,\,\phi_{cl}) . \tag{40}$$

Тогда оператор (39) совпадает с диагональной матрицей $n \times n$, на диагонали которой находятся операторы Клейна-Гордона-Фока $(-\partial^2 - m_i^2)$, где

$$m_i^2 = \begin{cases} \lambda\,\phi_{cl}^2 - \mu^2 & \text{при действии на } \rho^1,\,\ldots\,,\,\rho^{n-1} \\ 3\lambda\,\phi_{cl}^2 - \mu^2 & \text{при действии на } \rho^n \end{cases} . \tag{41}$$

Поэтому детерминант в (38) равен произведению детерминантов этих операторов:

$$\det \left(-\frac{\delta^2 \mathcal{L}_1}{\delta\phi^i \delta\phi^j} \right) = \{ \det[\partial^2 + (\lambda\,\phi_{cl}^2 - \mu^2)] \}^{n-1} \cdot \det[\partial^2 + (3\lambda\,\phi_{cl}^2 - \mu^2)] . \tag{42}$$

Воспользуемся известной формулой

$$\ln\det A = \mathrm{tr}\ln A ,$$

где A — линейный оператор. Имеем:

$$\ln \det(\partial^2 + m^2) = \mathrm{tr}\,\ln(\partial^2 + m^2) . \tag{43}$$

Сделаем поворот Вика в Евклидово пространство. При помощи (7), (38), (42), (43) получаем:

$$V_{eff}(\phi_{cl}) = -\frac{1}{2}\,\mu^2 \phi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4}\,\phi_{cl}^4 + \frac{1}{VT} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}\,\ln(-\partial^2 + m_i^2) + \frac{1}{2}\,\delta_\mu \phi_{cl}^2 + \frac{1}{4}\,\delta_\lambda \phi_{cl}^4 . \tag{44}$$

Здесь набор масс m_i задаётся согласно (41), $\partial^2 = \sum_{\mu=1}^{d}(\partial_\mu)^2$, а два последние слагаемые — возможные контрчлены. Задача свелась к вычислению величины $\mathrm{tr}\,\ln(-\partial^2+m^2)$. В ортонормированном базисе $\{e^{ikx}\}$ матричные элементы оператора $\ln(-\partial^2+m^2)$ равны

$$\langle p|\ln(-\partial^2+m^2)|k\rangle = \int\limits_E \mathrm{d}^{(d)}\,x\,e^{i(k-p)x}\,\ln(k_E^2+m^2)\,.$$

Поэтому

$$\mathrm{tr}\,\ln(-\partial^2+m^2) = (VT)\int\limits_E \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\ln(k_E^2+m^2)\,. \tag{45}$$

Но

$$\int\limits_E \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\ln(k_E^2+m^2) = -\frac{\partial}{\partial\,\alpha}\int\limits_E \frac{\mathrm{d}^{(d)}\,k}{(2\,\pi)^d}\,\frac{1}{(k_E^2+m^2)^\alpha}\bigg|_{\alpha=0} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\,\alpha}\left[\alpha\cdot\frac{(m^2)^{d/2-\alpha}}{(4\,\pi)^{d/2}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha-d/2)}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\bigg|_{\alpha=0} = -\frac{(m^2)^{d/2}}{(4\,\pi)^{d/2}}\,\Gamma(-d/2)\,. \tag{46}$$

Теперь при помощи (41), (42), (44), (46) получаем:

$$V_{eff}(\phi_{cl}) = -\frac{1}{2}\,\mu^2\phi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4}\,(\phi_{cl}^2)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{\Gamma(-d/2)}{(4\,\pi)^{d/2}}\left\{(n-1)(\lambda\,\phi_{cl}^2-\mu^2)^{d/2} + (3\,\lambda\,\phi_{cl}^2-\mu^2)^{d/2}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\,\delta_\mu\phi_{cl}^2 + \frac{1}{4}\,\delta_\lambda(\phi_{cl}^2)^2\,. \tag{47}$$

Здесь $\phi_{cl}^2 = (\phi_{cl}^i)^2$. Эффективное действие (47), конечно, $O(n)$-инвариантно. Выражение (47) конечно при $d\to 4$ (т.е. конечны коэффициенты при при степенях ϕ_{cl}), если

$$\delta_\mu = -\lambda\,\mu^2(n+2)\,\frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\,\pi)^2} + \text{конечные члены}\,;$$

$$\delta_\lambda = \lambda^2(n+8)\,\frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\,\pi)^2} + \text{конечные члены}\,. \tag{48}$$

Конечные члены в (48) регулируются условиями нормировки. Подберём их так, чтобы

$$V_{eff}(\phi_{cl}) = -\frac{1}{2}\,\mu^2\phi_{cl}^2 + \frac{\lambda}{4}\,(\phi_{cl}^2)^2 +$$

$$+\frac{1}{4\,(4\,\pi)^2}\left\{(n-1)(\lambda\,\phi_{cl}^2-\mu^2)^2\,\ln\frac{\lambda\,\phi_{cl}^2-\mu^2}{M^2} + (3\,\lambda\,\phi_{cl}^2-\mu^2)^2\,\ln\frac{3\,\lambda\,\phi_{cl}^2-\mu^2}{M^2}\right\}\,. \tag{49}$$

Здесь M — точка нормировки. На рис. 32 пунктирной линией изображён график классического эффективного потенциала, а сплошной линией — потенциала с квантовой поправкой (49). Сплошная линия рвётся там, где поправка не определена. Из (49) видно, что при $\mu^2 > 0$ симметрия спонтанно нарушена, при $\mu^2 = -m^2 = -M^2 < 0$ имеется один тривиальный минимум потенциала при $\phi_{cl} = 0$.

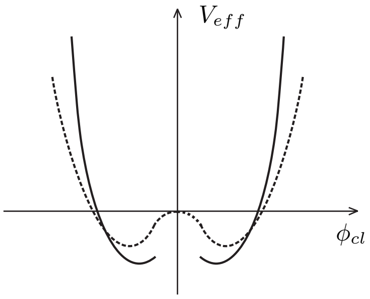


Рис. 32.

Рассмотрим V_{eff} (49) в случае $\mu^2 = 0$:

$$V_{eff}(\phi_{cl}) = \frac{1}{4}\,(\phi_{cl}^2)^2 \left\{ \lambda + \frac{\lambda^2}{(4\,\pi)^2} \left[(n+8)\,\ln\frac{\lambda\,\phi_{cl}^2}{M^2} + 9\,\ln 3 \right] \right\}. \tag{50}$$

Интересен вопрос: имеет ли потенциал (50) нетривиальный минимум? Легко найти, что $\mathrm{d}\,V_{eff}/\,\mathrm{d}\,\phi_{cl}^2 = 0$ при

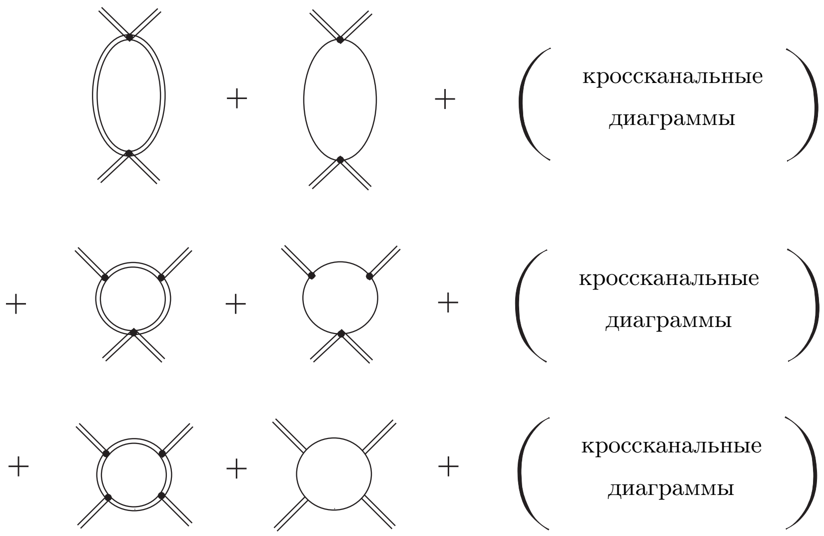
$$\phi_{cl}^2 \sim \frac{M^2}{\lambda}\exp\left[-\frac{(4\,\pi)^2}{(n+8)\,\lambda} \right] \neq 0\,. \tag{51}$$

Однако при таком значении ϕ_{cl}^2 второе слагаемое в фигурной скобке в (50) почти сокращает первое слагаемое, т.е. поправки имеют тот же порядок, что и нулевое приближение. Это означает, что что для решения поставленной задачи ТВ непригодна.

Задачи

1. Нарисовать все однопетлевые диаграммы, дающие поправки к вершине , дающей амплитуду рассеяния двух σ-частиц в линейной сигма-модели.

Ответ:



2. Имеет место равенство

$$\frac{\delta^n\,\Gamma(\phi_{cl})}{\delta\,\phi_{cl}(x_1)\,\ldots\,\delta\,\phi_{cl}(x_n)} = -i\langle T\,\phi(x_1)\,\ldots\,\phi(x_n)\rangle_{CC}\,, \tag{52}$$

где индекс СС означает, что этот коррелятор сильно связан и его ноги ампутированы.

а) Доказать, что

$$\frac{\delta^2\,\Gamma(\phi_{cl})}{\delta\,\phi_{cl}(x)\,\delta\,\phi_{cl}(y)} = -[D(x,\,y)]^{-1}\,,$$

где

$$-D(x,\,y) \equiv \frac{\delta^2 E(\eta)}{\delta\,\eta(x)\,\delta\,\eta(y)} = -i\,[\langle T\,\phi(x)\,\phi(y)\rangle - \phi_{cl}(x)\phi_{cl}(y)] \equiv -i\langle T\,\phi(x)\,\phi(y)\rangle_{\text{связн}}\,.$$

Индекс "связн"означает, что коррелятор является связным. Если вакуум трансляционно инвариантен, то согласно (13 Л5) и (22 Л5)

$$D\,(x,\,y) = \int \frac{\mathrm{d}^{(4)}\,k}{(2\,\pi)^4}\,\frac{e^{-ik(x-y)}}{-k^2+m^2+\Sigma(k^2)}\,, \qquad -D^{-1}(k) = k^2-m^2-\Sigma(k^2)\,,$$

где $\Sigma(k^2)$ — сумма сильно связных диаграмм с двумя концами.

б) Доказать формулу (52) для $n = 3$.

Приложение A
Выражение вероятностей процессов через амплитуды

Рассмотрим вопрос о выражении сечений рассеяния и вероятностей распадов частиц через инвариантные амплитуды рассеяния в трёхмерном пространстве.

Сначала проясним вопрос о нормировке r-частичных состояний. Согласно (39 Л2)

$$\langle k|k\rangle = 2\omega_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)\,. \tag{A1}$$

Так как объём пространства представляется как

$$V = \int \mathrm{d}^{(3)}\,x\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\,\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{p}=\mathbf{k}} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(0)\,,$$

то (A1) означает, что принятая нами лоренц-инвариантная нормировка состояний (38 Л2) такова, что в единице объёма содержится

$$n_{\mathbf{k}} = 2\omega_k = 2\sqrt{m^2+\mathbf{k}^2} \tag{A2}$$

частиц.

Построим r-частичное нормированное состояние. Пусть G — малая область в импульсном пространстве частиц вблизи значений импульсов $(\mathbf{p}_1,\,\ldots\,,\,\mathbf{p}_r)$, так что объём G равен:

$$G = \int\limits_G \mathrm{d}^{(3)}\,p_1\ldots \mathrm{d}^{(3)}\,p_r = \prod_{j=1}^{r}\Delta^{(3)}p_j\,. \tag{A3}$$

Состояние ($\omega_j \equiv \sqrt{m_j^2+\mathbf{p}_j^2}$)

$$|\tilde f\rangle = \prod_{j=1}^{r}\int\limits_G \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}|\mathbf{p}_1,\,\ldots\,,\mathbf{p}_r\,\rangle$$

имеет норму

$$\langle\tilde f|\tilde f\rangle = \prod_{j=1}^{r}\int\limits_G \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\int\limits_G \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p'_j}{[(2\pi)^3 2\omega'_j]}\langle\mathbf{p}'_1,\,\ldots\,,\mathbf{p}'_r\,|\mathbf{p}_1,\,\ldots\,,\mathbf{p}_r\,\rangle =$$

$$= \prod_{j=1}^{r}\int\limits_G \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\int\limits_G \mathrm{d}^{(3)}\,p'_j\,\delta^{(3)}(\mathbf{p}_j-\mathbf{p}'_j) = \prod_{j=1}^{r}\frac{\Delta^{(3)}p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\,. \tag{A4}$$

При получении (A4) была использована формула (45 Л2), а также тот факт, что импульсы $\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{p}'_j$ почти совпадают при всех j, в то время как импульсы $\mathbf{p}_j$ и $\mathbf{p}'_i$ при $i\neq j$ принадлежат непересекающимся областям Δp_j и Δp_i. Следует заметить, что (A4) есть лоренц-инвариант. Таким образом состояние

$$|f\rangle = \left[\prod_{j=1}^{r}\frac{\Delta^{(3)}p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\right]^{-1/2}|\tilde f\rangle \tag{A5}$$

нормировано, причём это свойство лоренц-инвариантно.

Пусть $|i\rangle$ — n-частичное состояние (43 Л2) и $|f\rangle$ — состояние (A5). Тогда для недиагональных матричных элементов (см. (2 Л3)-(4 Л3))

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|iT|i\rangle = \left[\prod_{j=1}^{r}\frac{\Delta^{(3)}p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\right]^{-1/2}\prod_{j=1}^{r}\int\limits_G \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\langle\mathbf{p}_1,\,\ldots\,,\mathbf{p}_r\,|iT|\mathbf{k}_1,\,\ldots\,,\mathbf{k}_n\,\rangle\,. \tag{A6}$$

Согласно вышесказанному выражение (A6) лоренц-инвариантно. Перепишем (A6) при помощи амплитуды M_{fi} (см. (4 Л3) и вычислим вероятность перехода из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$. Так как $|f\rangle$ — нормированное состояние, то согласно общим правилам квантовой механики эта вероятность

$$|\langle f|S|i\rangle|^2 = \prod_{j=1}^{r}\int\limits_G \frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}[(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f-P_i)]^2\,|M_{fi}|^2\,. \tag{A7}$$

При получении последней формулы была учтена малость объёма G, а также равенство

$$\left[\prod_{j=1}^{r}\frac{\Delta^{(3)}p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\right]^{-1}\prod_{j=1}^{r}\int\limits_G\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}=1\,.$$

В (A7)

$$P_i=k_1+\,\ldots\,+k_n\,,\qquad P_f=p_1+\,\ldots\,+p_r\,.$$

Положим

$$[(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f-P_i)]^2=V\,T\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f-P_i)\,,$$

где V — объём пространства, а T —полный промежуток времени, в течение которого рассматривается процесс. Таким образом, деля выражение (A7) на 4-объём $V\,T$, мы получаем вероятность перехода в единице пространства в единицу времени:

$$\mathrm{d}\,w_{fi}=(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f-P_i)]\,|M_{fi}|^2\prod_{j=1}^{r}\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\,. \tag{A8}$$

В (A8) опущен знак интеграла по импульсам конечных частиц. Поэтому вероятность перехода (A8) является дифференциальной вероятностью перехода в бесконечно малый элемент импульсного пространства конечных состояний.

Ещё раз подчеркнём, что выражение (A8) лоренц-инвариантно и в случае применимости ТВ амплитуда M_{fi} вычисляется при помощи диаграммной техники Фейнмана согласно вышеизложенным правилам.

Теперь рассмотрим частные случаи.

1. Процессы распада.

В этом процессе в начальном состоянии имеется одна частица с массой M. Чтобы получить вероятность распада одной частицы, следует разделить (A8) на плотность начальных частиц $n_{\mathbf{k}}=2\sqrt{M^2+\mathbf{k}^2}=2\omega_k$. Таким образом вероятность распада частицы в единицу времени

$$\mathrm{d}\,\Gamma=\frac{(2\pi)^4}{2\sqrt{M^2+\mathbf{k}^2}}\delta^{(4)}(P_f-k)|M_{fi}|^2\prod_{j=1}^{r}\frac{\mathrm{d}^{(3)}\,p_j}{[(2\pi)^3 2\omega_j]}\,. \tag{A9}$$

2. Взаимное рассеяние двух частиц

В системе отсчёта, в которой одна из рассеивающихся частиц покоится, вероятность (A8) представляется в виде

$$\mathrm{d}\,w_{fi}\equiv\mathrm{d}\,\sigma\cdot v_{\text{ОТН}}n_1n_2\,, \tag{A10}$$

где n_1 и n_2 — плотности частиц сортов 1 и 2, соответственно, $v_{\text{ОТН}}$ — относительная скорость частиц и $\mathrm{d}\,\sigma$ — лоренц-инвариантное дифференциальное сечение рассеяния. Из определения (A10) видно, что сечение имеет размерность площади, если n_1 и n_2 в (A10) нормируются так же как и начальные состояния при вычислении амплитуды рассеяния, т.е. согласно (A2).

Для проведения лоренц-инвариантных вычислений при нахождении сечений введём инвариантную величину, которую можно назвать инвариантной плотностью потока:

$$j=\sqrt{(k_1k_2)^2-m_1^2m_2^2}\,. \tag{A11}$$

В системе отсчёта, в которой частица 2 покоится

$$j=\frac{m_1m_2v_{\text{ОТН}}}{\sqrt{1-v_{\text{ОТН}}^2}}=\frac{1}{4}v_{\text{ОТН}}n_1n_2\,, \tag{A12}$$

где

$$n_1=\frac{2m_1}{\sqrt{1-v_{\text{ОТН}}^2}}\,,\qquad n_2=2m_2\,.$$

Если же налетающая частица 1 является безмассовой, то выражение для j при помощи правой части (A12) остаётся справедливым, если положить $v_{\text{OTH}} = 1$. Таким образом лоренц-инвариантное дифференциальное сечение рассеяния представляется как

$$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{\mathrm{d}\,w_{fi}}{4j}\,. \tag{A13}$$

Легко проверить следующую формулу:

$$2j = \sqrt{[s-(m_1+m_2)^2][s-(m_1-m_2)^2]}\,, \qquad s=(k_1+k_2)^2\,. \tag{A14}$$

В системе центра инерции частиц

$$k_1 = (\omega_1,\,\mathbf{k})\,, \qquad k_2 = (\omega_2,\,-\mathbf{k})\,,$$

и плотность потока

$$j = |\,\mathbf{k}\,|(\omega_1+\omega_2)\,. \tag{A15}$$

Рассмотрим подробнее формулу (A13) в системе центра инерции в том случае, когда в конечном состоянии имеется также две частицы с массами m_1' и m_2'. Имеем:

$$p_1 = (\omega_1',\,\mathbf{p})\,, \qquad p_2 = (\omega_1',\,-\mathbf{p})\,, \qquad {\omega_1'}^2 - {m_1'}^2 = {\omega_2'}^2 - {m_2'}^2 = |\,\mathbf{p}\,|^2\,. \tag{A16}$$

Отсюда

$$\omega_1'\,\mathrm{d}\,\omega_1' = \omega_2'\,\mathrm{d}\,\omega_2' = |\,\mathbf{p}\,|\,\mathrm{d}\,|\,\mathbf{p}\,| \longrightarrow \mathrm{d}(\omega_1'+\omega_2') = (\omega_1'+\omega_2')\frac{|\,\mathbf{p}\,|\,\mathrm{d}\,|\,\mathbf{p}\,|}{\omega_1'\omega_2'}\,. \tag{A17}$$

При помощи обозначений

$$\omega = \omega_1+\omega_2\,, \qquad \omega' = \omega_1'+\omega_2'$$

формулы (A15) и (A17) переписываются как

$$j = |\,\mathbf{k}\,|\omega\,, \qquad |\,\mathbf{p}\,|\,\mathrm{d}\,|\,\mathbf{p}\,| = \frac{\omega_1'\omega_2'}{\omega'}\,\mathrm{d}\,\omega'\,, \tag{A18}$$

что позволяет представить сечение (A13) в виде

$$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{|M_{fi}|^2|\,\mathbf{p}\,|\,\mathrm{d}\,o'}{64\pi^2|\,\mathbf{k}\,|\omega^2}\,. \tag{A19}$$

Здесь $\mathrm{d}\,o'$ — элемент телесного угла, в котором заключён импульс рассеянной частицы:

$$\mathrm{d}\,o' = \sin\theta\,\mathrm{d}\,\theta\,\mathrm{d}\,\phi\,, \tag{A20}$$

так что θ есть угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$, а угол ϕ является азимутальным углом вектора $\mathbf{p}$ относительно некого фиксированного ортогонального репера, третья ось которого совпадает с $\mathbf{k}$. Таким образом

$$t = (k_1-p_1)^2 = m_1^2 + {m_1'}^2 - 2\omega\omega' + 2|\,\mathbf{k}\,||\,\mathbf{p}\,|\cos\theta\,.$$

Поэтому при фиксированной энергии ω

$$\mathrm{d}\,t = 2|\,\mathbf{k}\,||\,\mathbf{p}\,|\,\mathrm{d}\cos\theta\,, \qquad \mathrm{d}\,o' = \mathrm{d}\,\phi\,\mathrm{d}(-\cos\theta) = \frac{\mathrm{d}\,\phi\,\mathrm{d}(-t)}{2|\,\mathbf{k}\,||\,\mathbf{p}\,|}\,,$$

так что

$$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{|M_{fi}|^2\,\mathrm{d}\,t}{64\pi|\,\mathbf{k}\,|^2|\omega^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\phi}{2\pi} = \frac{|M_{fi}|^2\,\mathrm{d}\,t}{64\pi j^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\,\phi}{2\pi}\,. \tag{A21}$$

Так как в физически интересных случаях амплитуда не зависит от угла ϕ, то, интегрируя (A21) по этому углу, находим:

$$\mathrm{d}\,\sigma = \frac{|M_{fi}|^2\,\mathrm{d}\,t}{64\pi j^2}\,. \tag{A22}$$

Поскольку в последнем равенстве инвариантное дифференциальное сечение представлено через инвариантные же величины, то этим равенством можно пользоваться в любой системе отсчёта.

Приложение В
Спиновые матрицы плотности

Выпишем некоторые формулы, относящиеся к спиновым матрицам плотности. Спиновые матрицы плотности необходимы при вычислении сечений и вероятностей распадов, т.к. в процессе таких вычислений приходится делать замены выражений, билинейных относительно спиновых волновых функций начальных и конечных частиц, согласно правилу

$$e_{\mathbf{k}\,\mu}e^*_{\mathbf{k}\,\nu} \longrightarrow \rho_{\mu\nu}(k)\,, \qquad u_{\pm ka}\overline{u}_{\pm kb} \longrightarrow \rho^{(\pm)}_{ab}(k)\,, \tag{Б1}$$

где $\rho_{\mu\nu}(k)$ — спиновая матрица плотности фотона, $\rho^{(+)}_{ab}(k)$ ($\rho^{(-)}_{ab}(k)$) — спиновая матрица плотности электрона (позитрона), причём импульс всех этих частиц равен $\mathbf{k}$.

1. Фотонные спиновые матрицы плотности.

Для неполяризованного фотона в трёхмерно-поперечной калибровке (см. (33 Л7))

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right)\,, \qquad \rho_{0i} = \rho_{i0} = \rho_{00} = 0\,. \tag{Б2}$$

Структура матрицы плотности неполяризованного фотона (Б2) очевидна, а общий коэффициент определяется требованием того, что сумма вероятностей нахождения спина фотона во всех состояниях равна единице:

$$\rho^{\mu}_{\mu} = -1\,. \tag{Б3}$$

Преобразуем выражение (Б2) к более удобному для использования виду, воспользовавшись свойством калибровочной инвариантности теории. В отношении фотонной матрицы плотности последнее свойство означает, что с физической точки зрения матрица плотности не изменяется при замене (сравни с (56 Л7))

$$\rho_{\mu\nu}(k) \longrightarrow \rho_{\mu\nu}(k) + (\chi_\mu k_\nu + \chi_\nu k_\mu)\,, \tag{Б4}$$

где $\chi_\mu(k)$ — произвольный 4-вектор. Действительно, каждый из векторов k^μ в круглых скобках в (Б4) сворачивается по векторному индексу с хронологическими корреляторами токов, из которых строятся все амплитуды. При этом импульс фотона k^μ есть входящий (или выходящий) импульс в соответствующую вершину. Вследствие равенств (17 Л10) описанные слагаемые обращаются в нуль и потому слагаемое в круглых скобках в (Б4) несущественно. При помощи преобразования (Б4) матрица плотности (Б2)приводится к виду

$$\rho_{\mu\nu} = -\eta_{\mu\nu}/2\,, \tag{Б5}$$

если

$$\chi^\mu = \left(-\frac{1}{4\omega},\, \frac{\mathbf{k}}{4\omega^2}\right)\,.$$

В общем случае матрица плотности представляется в виде

$$\rho_{\mu\nu} = \rho^*_{\nu\mu} = \sum_{\alpha,\,\beta=1}^{2} \rho^{\alpha\beta} e_{\alpha\mu} e^*_{\beta\nu}\,. \tag{Б6}$$

Здесь $(e_{1\,\mu},\, e_{2\,\mu})$ — базис векторов поляризации фотона. Эрмитовость матрицы (Б6) обеспечивается эрмитовостью матрицы $\rho^{\alpha\beta}$:

$$\rho^{\alpha\beta} = \rho^{\beta\alpha *}\,. \tag{Б7}$$

Очевидно, в рассмотренном случае неполяризованного фотона

$$\rho^{\alpha\beta} = (1/2)\delta^{\alpha\beta}\,. \tag{Б8}$$

Из (Б8) находим, что

$$\det \rho^{\alpha\beta} = 1/4\,. \tag{Б9}$$

В случае полностью поляризованного фотона матрица (Б6) должна представляться как тензорное произведение двух взаимно сопряжённых 4-векторов. Это возможно лишь в том случае когда

$$\rho^{\alpha\beta} = v^{\alpha} v^{\beta *} \,. \tag{Б10}$$

Очевидно, что в этом случае

$$\det \rho^{\alpha\beta} = 0 \,. \tag{Б11}$$

В общем случае матрица $\rho^{\alpha\beta}$ подчиняется условию (Б7), условию

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \rho^{\alpha\alpha} = 1 \,, \tag{Б12}$$

вытекающему из (Б3), а также условию

$$0 \le \det \rho^{\alpha\beta} \le 1/4 \,. \tag{Б13}$$

Общий вид матрицы ранга 2, удовлетворяющий условиям (Б7) и (Б12), таков:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\xi\sigma}) \,, \qquad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1,\, \xi_2,\, \xi_3) \,. \tag{Б14}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1,\, \sigma^2,\, \sigma^3)$ — матрицы Паули. Имеем:

$$\det \rho = \frac{1}{4}(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2) \,. \tag{Б15}$$

Из условия (Б13) следует, что

$$0 \le \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv \boldsymbol{\xi}^2 \le 1 \,. \tag{Б16}$$

Из сказанного выше вытекает, что в неполяризованном случае

$$\boldsymbol{\xi}^2 = 0 \,, \tag{Б17}$$

а в полностью поляризованном случае

$$\boldsymbol{\xi}^2 = 1 \,, \tag{Б18}$$

2. Спинорные матрицы плотности.

Из определения (Б1) и (39 Л8) вытекает, что

$$\mathrm{tr}\, \rho^{(\pm)}(k) = \pm 2m \,. \tag{Б19}$$

Спинорные матрицы плотности удовлетворяют уравнениям (ср. с (38 Л8))

$$(\not{k} \mp m)\rho^{(\pm)}(k) = \rho^{(\pm)}(k)(\not{k} \mp m) = 0 \,. \tag{Б20}$$

При заданной матрице плотности среднее значение спина вычисляется при помощи формулы (определение спинового оператора $\boldsymbol{\Sigma}$ см. в (111 Л8))

$$\langle \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{2\omega_k}\, \mathrm{tr}(\rho^{(\pm)} \gamma^0 \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{4\omega_k}\, \mathrm{tr}(\rho^{(\pm)} \gamma^5 \boldsymbol{\gamma}) \,. \tag{Б21}$$

Матрица плотности для неполяризованного состояния получается при помощи суммы (56 Л8), делённой на 2. Действительно, в неполяризованном состоянии обе проекции спина имеют одинаковую вероятность (1/2). Таким образом в неполяризованном состоянии

$$\rho^{(\pm)}(k) = (1/2)(\not{k} \pm m) \,. \tag{Б22}$$

Матрица плотности (Б22) удовлетворяет условиям (Б19) и (Б20).

В общем случае спинорные матрицы плотности представляются в виде

$$\rho^{(\pm)}(k) = (1/2)(\not{k} \pm m)(1 - \gamma^5 \not{a}) \,, \tag{Б23}$$

где a^μ есть 4-вектор, характеризующий поляризацию и удовлетворяющий условию

$$k_\mu a^\mu = 0 \longleftrightarrow \not{a} \not{k} + \not{k} \not{a} = 0 \,. \tag{Б24}$$

Непосредственно проверяется, что при условии выполнения равенств (Б24) матрица (Б23) также удовлетворяет условиям (Б19) и (Б20). Имеем также:

$$\pm a^\mu = \frac{1}{2m} \operatorname{tr}(\rho^{(\pm)} \gamma^5 \gamma^\mu) \,. \tag{Б25}$$

Сравнение формулы (Б21), (Б24) и (Б25) показывает, что в системе покоя частицы

$$a^\mu = (0,\, \pm 2\langle \mathbf{s} \rangle) \,. \tag{Б26}$$

Поскольку

$$0 \le \langle \mathbf{s} \rangle^2 \le 1/4 \,,$$

то 4-вектор a^μ удовлетворяет ограничению

$$-1 \le a^2 \le 0 \,. \tag{Б27}$$

Напоследок укажем, что в случае рассеяния неполяризованных частиц без фиксации поляризации рассеянных частиц каждой начальной и конечной частице в сечении рассеяния соответствуют матрицы (Б5) либо (Б22) (в зависимости от сорта частиц), причём в сечение рассеяния следует внести дополнительный множитель 2^r, где r — суммарное число электронов, позитронов и фотонов в конечном состоянии. Этот множитель означает учёт обоих состояний спина каждой конечной частицы.

Приложение C
Тензор энергии-импульса

Пусть ϕ, A_μ и ψ — скалярное, электромагнитное и спинорное поля, соответственно, и $\delta x^\mu(x)$ — d произвольных бесконечно малых функций координат. Рассмотрим следующие вариации полей:

$$\begin{aligned}\delta\,\phi(x) &= \delta x^\nu(x)\partial_\nu\phi(x)\,,\\ \delta A_\mu(x) &= \delta x^\nu(x)\partial_\nu A_\mu(x) + (\partial_\mu\delta x_\nu(x))\,A^\nu(x)\,,\\ \delta\psi(x) &= \left[\delta x^\nu(x)\partial_\nu + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\delta x_\nu(x))\,\sigma^{\mu\nu}\right]\psi(x)\,.\end{aligned} \tag{C1}$$

Преобразования $(C1)$ имеют следующее обоснование. В случае

$$\delta x^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu\,, \qquad \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} = \mathrm{const}\,,$$

правая часть последнего уравнения в $(C1)$ совпадает с разностью $\delta\psi(x) \equiv \psi(x) - \tilde\psi(x)$, вычисленной согласно (20 Л8) для бесконечно малого преобразования Лоренца. Знак перед вторым слагаемым в формуле преобразования векторного поля в $(C1)$ определяется тем требованием, чтобы величина $\overline{\psi}\,\gamma^\mu\psi\,A_\mu$ преобразовывалась как скалярное поле в $(C1)$.

Пусть лагранжиан $\mathcal{L}$ состоит из трех слагаемых:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3\,,\\ \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi)\,,\\ \mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,,\\ \mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2}\,\overline{\psi}(i\gamma^\mu\nabla_\mu - m)\psi + h.c.\,.\end{aligned} \tag{C2}$$

Таким образом, рассматривается полный лагранжиан системы Максвелла-Дирака и нейтрального скалярного поля.

Вычислим вариации этих лагранжианов при вариациях полей $(C1)$:

$$\begin{aligned}\delta\,\mathcal{L}_1 &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\delta x_\nu + \partial_\nu\delta x_\mu)\,\partial^\mu\phi\cdot\partial^\nu\phi + \eta^{\mu\nu}\delta x_\mu\partial_\nu\mathcal{L}_1\,,\\ \delta\,\mathcal{L}_2 &= -\frac{1}{2}\,(\partial_\mu\delta x_\nu + \partial_\nu\delta x_\mu)\,\frac{1}{4\pi}F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda + \eta^{\mu\nu}\delta x_\mu\partial_\nu\mathcal{L}_2\,,\\ \delta\,\mathcal{L}_3 &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\delta x_\nu + \partial_\nu\delta x_\mu)\left[\frac{1}{4}\,\overline{\psi}(i\gamma^\mu\nabla^\nu + i\gamma^\nu\nabla^\mu)\psi + h.c.\right] + \eta^{\mu\nu}\delta x_\mu\partial_\nu\mathcal{L}_3\,.\end{aligned} \tag{C3}$$

Собирая последние формулы, находим с точностью до поверхностного члена:

$$\delta\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\delta\mathcal{L} = \int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,t^{\mu\nu}\big(\partial_\mu\delta x_\nu\big)\,,$$

$$t^{\mu\nu} = \partial^\mu\phi\cdot\partial^\nu\phi - \frac{1}{4\pi}F^{\mu\lambda}F^\nu{}_\lambda + \left[\frac{1}{4}\,\overline{\psi}(i\gamma^\mu\nabla^\nu + i\gamma^\nu\nabla^\mu)\psi + h.c.\right] - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}\,. \tag{C4}$$

Величина

$$t^{\mu\nu} = t^{\nu\mu} \tag{C5}$$

называется тензором энергии-импульса материи.

Перепишем правую часть $(C4)$ в виде

$$\delta\mathcal{S} = -\int \mathrm{d}^{(d)}\,x\,\big(\partial_\nu t^{\nu\mu}\big)\delta x_\mu\,. \tag{C6}$$

Теперь применим такой же прием, какой был применен в пункте 3 Лекции 14 при выводе аксиальной аномалии: в амплитуде перехода, представленной в форме функционального интеграла, произведем бесконечно малую вариацию переменных вида ($C1$). Поскольку эти преобразования переменных имеют смысл в пространствах любой размерности, то размерность пространства будем считать аналитической. Важно также, что якобиан функциональной меры при преобразованиях переменных интегрирования ($C1$) равен единице при комплексной размерности пространства-времени[1]. Поэтому, в отличие от случая, рассмотренного в Лекции 14, в данном случае получаем:

$$\partial_\nu \langle A|t^{\nu\mu}|B\rangle = 0\,,$$

где $|A\rangle$ и $|B\rangle$ — произвольные состояния. Последнее равенство эквивалентно операторному равенству

$$\partial_\nu \hat{t}^{\,\nu\mu} = 0\,. \tag{C7}$$

Из ($C7$) следует, что сохраняются d операторов d-импульса (далее "шляпки"над операторами не пишем)

$$\mathcal{P}^\mu \equiv \int \mathrm{d}^{(d-1)}\,x\,t^{0\,\mu}(x)\,. \tag{C8}$$

Действительно, вследствие равенств ($C7$)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\mathcal{P}^\mu = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\,x\,\frac{\partial}{\partial x^0}t^{0\,\mu}(x) = -\int \mathrm{d}^{(d-1)}\,x\,\frac{\partial}{\partial x^i}t^{i\,\mu}(x) = 0\,,$$

если на пространственной бесконечности $t^{i\,\mu} \to 0$. Из ($C5$) и ($C7$) следует, что сохраняются также $d(d-1)/2$ операторов d-момента

$$J^{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\,x\,\left(x^\mu t^{0\,\nu} - x^\nu t^{0\,\mu}\right), \tag{C9}$$

поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\left(x^\mu t^{\lambda\nu} - x^\nu t^{\lambda\mu}\right) = 0\,. \tag{C10}$$

Обозначим через $\Phi(x)$ любое из полей $\phi(x)$, $A_\mu(x)$, $\psi(x)$ в представлении Гейзенберга и вычислим матричный элемент $\langle A|\Phi(x)|B\rangle$. Представим этот матричный элемент в форме функционального интеграла (см. пункт 2 Лекции 1) и проведем в нем вариацию переменных интегрирования ($C1$). В результате этого вычисления сумма слагаемых первого порядка относительно δx^ν должна быть приравнена нулю. Одно из этих слагаемых есть $\langle A|\delta\Phi(x)|B\rangle$, а второе происходит от вариации действия, которую возьмем в виде ($C4$), но не в виде ($C6$). Это удобнее, поскольку при рассмотрении коррелятора

$$\langle A|T\,\Phi(x)\,\partial_0 t^{0\,\nu}(y)|B\rangle$$

при $x^0 = y^0$ требуется особенная тщательность. В противном случае может быть потеряно слагаемое вида $[t^{0\,\nu}(x^0,\,\mathbf{y}),\,\Phi(x)]$. При использовании вариации действия в виде ($C4$) это слагаемое легко учитывается. Таким образом имеем:

$$\langle A|\delta\Phi(x)|B\rangle + i\int \mathrm{d}^{(d)}\,y\,\left(\partial_\mu \delta x_\nu(y)\right)\langle A|T\,\Phi(x)\,t^{\mu\nu}(y)|B\rangle = 0\,. \tag{C11}$$

Теперь перебросим оператор $\partial/\partial y^\mu$ на хронологический коррелятор в ($C11$) и учтем, что коррелятор

$$\langle A|T\,\Phi(x)\,t^{\mu\nu}(y)|B\rangle$$

имеет разрыв при $x^0 = y^0$

$$\langle A|[t^{\mu\nu}(x^0,\,\mathbf{y}),\,\Phi(x)]|B\rangle\,.$$

[1]Поскольку вариации ($C1$) не только бесконечно малы, но и линейны относительно переменных интегрирования, то соответствующий якобиан отличается от единицы следом линейных операторов, действующих на поля в ($C1$). Этот след равен нулю. Действительно, поскольку след оператора не зависит от базиса, в котором он вычисляется, то возьмем в качестве базиса плоские волны $\Psi_k(x) \sim \exp ikx$. Нужный нам след пропорционален величине $\int \mathrm{d}^{(d)}\,k \int \mathrm{d}^{(d)}\,x \exp(-ikx)\,\ldots\,\exp(ikx)$, где вместо многоточия находится оператор из ($C1$). После интегрирования по переменной x след оказывается пропорциональным величине $\int k\,\mathrm{d}^{(d)}\,k$, которая равна нулю вследствие симметрии базиса относительно инверсии $k \to -k$.

Поэтому равенство ($C11$) после опускания обкладок переписывается как

$$\delta\Phi(x) = i\int \mathrm{d}^{(d)}\, y\, \delta x_\nu(y)\, \delta(y^0 - x^0)\, [t^{0\,\nu}(x^0, \mathbf{y}),\, \Phi(x)]\,. \tag{C12}$$

При переходе от ($C11$) к ($C12$) было учтено уравнение ($C7$).

Поскольку вариации $\delta x_\nu(y)$ независимы в разных точках y, то интегральное равенство ($C12$) распадается на семейство равенств в каждой точке y. Выпишем их в случае дираковского поля:

$$\delta^{(d)}(y-x)\,\partial^\nu\psi(x) - \frac{1}{2}\delta^{(d)}(y-x)_{,\,\mu}\,\sigma^{\mu\nu}\psi(x) = i\,\delta(y^0-x^0)[t^{0\,\nu}(x^0,\mathbf{y}),\,\psi(x)]\,. \tag{C13}$$

Свернем равенство ($C13$) с величиной $\left(\varepsilon_\nu + \omega_{\nu\lambda}y^\lambda\right)$ и затем проинтегрируем по переменной y:

$$\left\{\left(\varepsilon^\nu + \omega^\nu{}_\mu x^\mu\right)\partial_\nu - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right\}\psi(x) = i\left[\varepsilon_\nu\mathcal{P}^\nu(x^0) - \frac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}(x^0),\,\psi(x)\right]. \tag{C14}$$

Если в Ур. ($C1$) положить $\delta\, x^\nu = \varepsilon^\nu + \omega^\nu{}_\mu x^\mu$, то правая часть Ур. ($C1$) совпадет с левой частью Ур. ($C14$). Таким образом, операторы $\mathcal{P}^\nu$ и $J^{\mu\nu}$ являются генераторами d-трансляций и d-поворотов в d-мерном пространстве Минковского. В частности, $\mathcal{P}^0 = \mathcal{H}$ есть гамильтониан, а $\mathcal{P}^i$ — оператор импульса системы. При помощи формул ($C2$), ($C4$), ($C8$) и ($C9$) находим:

$$\mathcal{P}^0 = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x \left\{\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} + \overline{\psi}\,\left(-i\gamma^i\nabla_i + m\right)\psi\right\}, \tag{C15}$$

$$\mathcal{P}^i = \int \mathrm{d}^{(d-1)}\, x\left\{-\dot{\phi}\nabla_i\phi + \frac{1}{4\pi}\varepsilon_{ijk}E^jH^k - \psi^\dagger i\nabla_i\psi\right\}. \tag{C16}$$

Правые части в ($C15$) и ($C16$) должны быть выражены через гейзенберговы поля.

Мы видим, что правые части в ($C15$) и ($C16$) совпадают с операторами Гамильтона и импульса соответствующих полей, уже использовавшихся в лекциях.

Очевидно, любой тензорный оператор преобразуется аналогично ($C14$). Поэтому для тензора энергии-импульса имеем:

$$\left(\varepsilon^\lambda + \omega^\lambda{}_\rho x^\rho\right)\partial_\lambda t_{\mu\nu}(x) - \omega_{\mu\lambda}t^\lambda_\nu - \omega_{\nu\lambda}t^\lambda_\mu = i\left[\varepsilon_\lambda\mathcal{P}^\lambda - \frac{1}{2}\omega_{\lambda\rho}J^{\lambda\rho},\, t_{\mu\nu}(x)\right]. \tag{C17}$$

Интегрируя равенство ($C17$) по переменной x по $(d-1)$-мерной гиперповерхности $x^0 = \mathrm{const}$ с соответствующими весами, находим следующие коммутационные соотношения:

$$[\mathcal{P}^\mu,\, \mathcal{P}^\nu] = 0\,, \tag{C18}$$

$$\left[J^{\mu\nu},\, \mathcal{P}^\lambda\right] = i\left(\eta^{\nu\lambda}\mathcal{P}^\mu - \eta^{\mu\lambda}\mathcal{P}^\nu\right), \tag{C19}$$

$$\left[J^{\mu\nu},\, J^{\lambda\rho}\right] = i\left(\eta^{\mu\rho}\, J^{\nu\lambda} - \eta^{\nu\rho}\, J^{\mu\lambda} - \eta^{\mu\lambda}\, J^{\nu\rho} + \eta^{\nu\lambda}\, J^{\mu\rho}\right). \tag{C20}$$

(Сравни последние два равенства с равенствами (12 Л8), (13 Л8). Конечно, коммутационные соотношения ($C14$), ($C17$)-($C20$) могут быть установлены также и путем прямого вычисления.

Согласно определению, линейная оболочка совокупности эрмитовых операторов $\left(\mathcal{P}^\mu,\, J^{\lambda\rho}\right)$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям ($C18$)-($C20$), называется алгеброй Пуанкаре.

При помощи формулы ($C14$) немедленно получаем:

$$\exp(i\, x^\mu\mathcal{P}_\mu)\Phi(0)\exp(-i\, x^\mu\mathcal{P}_\mu) = \Phi(x)\,. \tag{C21}$$

Унитарные операторы

$$U = \exp\left(i\varepsilon_i J^{0i}\right) \tag{C22}$$

называются бустами. Эти операторы генерируют преобразования Лоренца.