

1. Насколько точной является замена исходного гамильтониана системы на энергию взаимодействия магнитных зарядов?

- а) Из приведенного в статье рисунка 3 ясно, что поправки настолько малы, что увидеть непосредственно из графика их количественную меру проблематично. Представьте этот рисунок в виде таблицы из трех строк (две энергии и их относительное различие в процентах).
- б)* Аппроксимация гамильтониана приводит к тому, что многократно вырожденное основное состояние расщепляется на большое количество уровней, характерное расстояние между которыми δ много меньше расстояния Δ до состояния с возбужденными монополями. Верно ли, что отношение δ/Δ имеет порядок вычисленной в а) величины, или оно существенно меньше за счет дополнительных усреднений? Попробуйте численно найти энергии двух каких-нибудь далеких друг от друга по энергии “основных состояний”.
- в) Найдите в литературе характерную для $\text{Dy}_2\text{Ti}_2\text{O}_7$ величину кристаллического поля, ориентирующего спины вдоль ребер решетки алмаза. Как соотносится поправка от неполной изинговости спинов с найденной выше?

2. Рассмотрим стандартную модель льда на квадратной решетке.

- а) Получите для числа M основных состояний на решетке $L \times L$ с периодическими граничными условиями оценку $M \geq A^{L^2}$ с какой-нибудь константой $A > 1$.
- б) Попробуйте оценить точное значение c , рассматривая задачу на торе $k \times L$, где k фиксировано, а $L \rightarrow \infty$. Покажите, что асимптотика числа основных состояний на таком торе имеет вид $M \sim A(k)^{kL}$, где $A(k)$ – наибольшее собственное число некоторой матрицы $2^k \times 2^k$. Найдите $A(k)$ точно для $k = 2, 3, 4$.
- в)* Напишите программу вычисления $A(k)$ в какой-нибудь среде, поддерживающей нахождение спектров больших матриц. До каких k удается добраться? Экстраполируйте ответ на $k \rightarrow \infty$. Какова ошибка полученного приближения? Какова ошибка приближения Полинга?

3. В тексте сказано, что “one can show that v_0 is large enough, for the compounds we consider, that it enforces $Q_\alpha = 0$ everywhere in the ground state”.

- а) Каково пороговое значение v_0 для полной нейтральности основного состояния? Дайте численный ответ на физическом уровне строгости.
- б) Можно ли привести более строгое рассуждение для параметров обсуждавшихся соединений?