

1. Задача 1б к статье «On the Shannon Capacity of a Graph».

2. Рассмотрим ферромагнитный *гейзенберговский* кластер спинов $1/2$

$$H = -|J| \sum_{i < j} \mathbf{S}_i \mathbf{S}_j, \quad i, j = 1 \dots N.$$

Статистическая сумма в квантовом случае дается формулой $Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr} e^{-\beta H}$. При какой температуре в этой модели происходит фазовый переход?

1. Задача 2в к статье «Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets» для $N \leq 4$.

2. Поместим спиновый лед в магнитное поле, направленное вдоль одного из спинов:

$$H = \frac{J}{3} \sum_{i \sim j} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) S_i S_j + D a^3 \sum_{i, j} \left[\frac{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{e}_i \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{e}_j \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5} \right] S_i S_j - h \sum_i (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_i) S_i.$$

В пределе $T \ll h \ll |J|, |D|$ кратность вырождения основного состояния системы N спинов имеет вид 2^{cN} , где $0 \leq c \leq 1$ (в пределе $N \rightarrow \infty$ и в пренебрежении параметрически малыми разностями энергий). Получите для c оценки $c_1 \leq c \leq c_2$, для которых $|c_2 - c_1| \leq 1/3$.

1. Задача 1 к статье «Branched Polymers and Dimensional Reduction».

2. Рассмотрим изинговский ферромагнитный кластер в случайном магнитном поле:

$$H = -|J| \sum_{i < j} s_i s_j - \sum_i h_i s_i, \quad s_i = \pm 1, \quad i, j = 1 \dots N,$$

где локальные поля h_i распределены с плотностью

$$P(h)dh = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right) dh.$$

Постройте фазовую диаграмму в координатах $(T/\sigma, J/\sigma)$. Чему равно критическое отношение h/J , разделяющее при $T = 0$ ферромагнитную и неупорядоченную фазы?