

Александр З



Сверхпроводимость

2 рода

(0)

① Критерий металл.  
состояния

$$\frac{1}{2m^*} (-i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \vec{A})^2 \psi = |\alpha| \psi = -\beta |\psi|^2 \psi$$

Тогда критерий равен:

$$\mu_1(B) = |\alpha|$$

или  $B = \mu_0 z$ , то есть

$$\lambda_1 = \frac{\hbar \tilde{\omega}_c}{2} = \frac{\hbar}{2} \frac{2eB}{m^* c}$$

$$\mu_0 z = \frac{\hbar^2 c |\alpha|}{2m^* e} = \frac{\Phi_0}{2\alpha \xi^2}$$

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m^* |\alpha|} \text{ - definition}$$

2) Структура  $\psi(r)$  вблизи  $H_{c2}$

$$\psi_k = e^{iky} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2}{\xi^2(r)}}$$

$$x_0 = \frac{\hbar c K}{2e H_{c2}}$$

$$\vec{A}_0 = (0, x H_{c2}, 0)$$

Полное решение  $\psi_L(\vec{r})$  периодически по  $x, y$ .

Многочисленные трансляции (здесь удалим изотр. камп)

$$T_a^M = G_a T_a$$

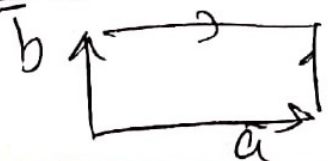
$$T_a: \vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{a}$$

$$A \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \frac{1}{2} [\vec{H} \times \vec{a}]$$

$$G_a: \psi \rightarrow \psi e^{i\chi_a} \quad \vec{A}' \rightarrow \vec{A}' + \underbrace{\frac{\hbar c}{2e} \vec{\chi}_a}_{\vec{A}} = \vec{A}$$

$$\frac{\hbar c}{2e} \chi_a = -\frac{\vec{r}}{2} [\vec{H} \times \vec{a}]$$

Условие коммутативности:



$$T_b^M T_a^M = T_a^M T_b^M \Rightarrow$$

$$[\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{H} = \frac{\pi \hbar c}{e} = \Phi_0$$

ежеднев 3



(2)

Фазово  $\omega$   $\varphi = 2\pi/\lambda$

www.ictp.it

за  $\psi_k$

$$\psi_L(\vec{r}) = \sum_n e^{i\varphi_n} C_n \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(x - x_n)^2}{\sigma^2(t)}\right]$$

$$x_n = \frac{\hbar c q_n}{2e \hbar c_2}$$

коэфф.  $C_n$  зависи от  $n$ . условно периодична осъ

Если  $C_n = \text{const}$ , то  $\Delta_y = \frac{2\pi}{q}$        $\Delta_x = \frac{\hbar c q}{2e \hbar c_2}$

$\Delta_y \cdot \Delta_x = \frac{\Phi_0}{\hbar c_2}$  . Это размер квдр. ячейки

### 3) Свободная энергия

Вариация  $\psi_L \rightarrow (1+\epsilon)\psi_L$  около решения ГЛ  
дает  $\delta\mathcal{F} = 2\epsilon \int_V \left[ \alpha |\psi_L|^2 + \beta |\psi_L|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi_L \right|^2 \right]$

Для простоты интегралы типа  $\int |\psi_L|^2 d\mathbf{r}$ , взятые по объему  $V$  образца, будем обозначать через  $V \overline{|\psi_L|^2}$ . Тогда, используя (6.78), условию стационарности  $\delta\mathcal{F} = 0$  можно придать вид

$$\overline{|\psi_L|^2} + \overline{|\psi_L|^4} + \frac{1}{2m} \overline{\left| \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c}\mathbf{A} \right) \psi_L \right|^2} = 0. \quad (6.79)$$

Де Жен, "Сверхпроводимость металлов и сплавов". Стр.203 и ниже.

$$-\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0 \right)^2 \psi_L = -\alpha \psi_L, \quad (6.75a)$$

Это уравнение можно несколько упростить, приняв во внимание, что функция  $\psi_L$  удовлетворяет уравнению (6.75a). Для этого положим  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ , где  $\mathbf{A}_0$  — соответствующий полю  $H_{c2}$  вектор-потенциал, определяемый соотношением (6.75б). Добавка  $\mathbf{A}_1$  появляется вследствие того, что, во-первых, приложенное поле несколько меньше, чем  $H_{c2}$ , и, во-вторых, в образце возникают сверхпроводящие токи.

Выделяя в уравнении (6.79)

члены первого порядка по  $\mathbf{A}_1$  и используя (6.75a), находим

$$\overline{\beta |\psi_L|^4} - \frac{1}{c} \overline{\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{j}_L} = 0, \quad (6.80) \quad \text{где}$$

$$\mathbf{j}_L = \frac{e}{m} \left[ \psi_L^* \left( -i\hbar\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A}_0 \right) \psi_L + \text{Компл. сопр.} \right] \quad (6.81)$$

— плотность тока, соответствующая невозмущенному решению.

Интегрируя в (6.80) второй член по частям и полагая  $\text{rot } \mathbf{A}_1 = \mathbf{h}_1$ ,  $\text{rot } \mathbf{h}_s = (4\pi/c) \mathbf{j}_L$ , окончательно получаем

$$\beta |\overline{\Psi_L}|^4 - \frac{1}{4\pi} \overline{\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_s} = 0. \quad (6.82)$$

## 2. Связь между полем и параметром порядка.

Положим  $\mathbf{h}_1(\mathbf{r}) = H - H_{c2} + \mathbf{h}_s(\mathbf{r})$ , (6.83)

где поле  $\mathbf{h}_s$  описывает вклад сверхпроводящих токов <sup>1)</sup>.

Для вычисления поля  $\mathbf{h}_s$  предварительно докажем следующее свойство. Если  $\Psi_L$  отвечает наимизшему собственному значению  $-\alpha = \hbar\omega_c/2$  уравнения (6.75а), то *линии тока*  $\mathbf{j}_L$  совпадают с *линиями*  $|\Psi_L| = \text{const}$ .

(доказательство – см. Де Жен)

$$j_{Lx} = -\frac{e\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial y} |\Psi_L|^2, \quad j_{Ly} = \frac{e\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial x} |\Psi_L|^2. \quad (6.86)$$

Сравнивая (6.86) и определение  $\text{rot } \mathbf{h}_s = (4\pi/c) \mathbf{j}_L$ , легко получить явное выражение для поля  $h_s$ , возникающего из-за наличия сверхпроводящих токов

$$h_s = -4\pi \frac{e\hbar}{mc} |\psi_L|^2. \quad (6.87)$$

Постоянная интегрирования выбрана равной нулю из условия, что  $\overline{|\psi_L|^2} = 0$  при  $h_s = 0$ . Подставляя (6.83) и (6.87) в (6.82), окончательно находим

$$\beta \overline{|\psi_L|^4} + \frac{e\hbar}{mc} \overline{|\psi_L|^2 \left( H - H_{c2} - \frac{4\pi e\hbar}{mc} |\psi_L|^2 \right)} = 0. \quad (6.88a)$$

Полезно переписать это уравнение в несколько ином виде, положив  $|\psi_L| = \psi_0 f$  и вводя величины  $\kappa$  и  $H_{c2}$  с помощью соотношений (6.26) и (6.64):

$$\left( 1 - \frac{1}{2\kappa^2} \right) \overline{f^4} - \left( 1 - \frac{H}{H_{c2}} \right) \overline{f^2} = 0. \quad (6.88b)$$

От типа решетки зависит только отношение  $\frac{\bar{f}^4}{(\bar{f}^2)^2} = \beta_A$ , Через него и выразим свободную энергию

1. Индукция  $B$ , по определению, представляет собой результат усреднения поля  $\mathbf{H} + \mathbf{h}_s$ . С помощью (6.87) ее можно представить в виде

$$B = H + \bar{h}_s = H - \frac{4\pi e \hbar}{mc} |\overline{|\Psi_L|^2}| = H - \frac{H_c}{\kappa \sqrt{2}} \bar{f}^2. \quad (6.90)$$

2. Плотность свободной энергии  $F$  можно вычислить, исходя из (6.9) и (6.11):  $F = F_n + \alpha |\psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 + \frac{1}{2m} \left| \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\hbar^2}{8\pi} \alpha \psi + \beta |\psi|^2 \psi + \frac{1}{2m} \left( -i\hbar \nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi = 0$ ,

$$F = -\frac{H_c^2}{8\pi} \bar{f}^4 + \frac{\hbar^2}{8\pi}, \text{ выразим } \bar{h}^2 \text{ через } H, \bar{f}^2 \text{ и } \bar{f}^4.$$

$$F = \frac{B^2}{8\pi} - \frac{(H_{c2} - B)^2}{1 + (2\kappa^2 - 1) \beta_A}$$

$$4\pi \frac{dF}{dB} = H,$$



Отбор типа решетки по минимизации энергии: *наименьшему значению  $\beta_A$*

Квадратная:  $C_n = \text{const}$       *треугольная*       $C_{n+2} = C_n$        $C_1 = iC_0$ .

$$\beta_A = 1,18;$$

$$\beta_A = 1,16,$$

$$M = \frac{B-H}{4\pi} = \frac{H-H_{c2}}{4\pi\beta_A(2\kappa^2-1)}.$$

Следует из уравнений для  $F(B)$  и  $H(B)$  приведенных выше

Наклон  $M(H)$  большой при  $\kappa \rightarrow 1/\sqrt{2}$

### 3. Смешанное состояние при $B \ll H_{c2}$

(Абрикосов, гл.18)

При малых полях расстояние между вихревыми нитями становится столь большим, что они являются почти независимыми и в первом приближении мы можем рассматривать одну вихревую нить. Введем цилиндрическую систему координат  $(\rho, \theta, z)$  и ось  $z$  направим вдоль оси вихревой нити. Векторный потенциал выберем перпендикулярным радиус-вектору  $\rho$ , т. е.  $\mathbf{A} = A\theta$ .

Если записать  $\Psi = f \cdot \exp(i\chi)$  ( $f = |\Psi|$ ), то ток в единицах ГЛ имеет вид  $\mathbf{j} = f^2(\nabla\chi/\kappa - \mathbf{A})$ . Так как  $f^2 = n_s/2$  — плотность пар в конденсате ( $n_s$  — плотность «сверхпроводящих электронов»), то  $\nabla\chi/\kappa - \mathbf{A}$  играет роль их скорости. Поэтому введем обозначение

$$\mathbf{v}_s = \nabla\chi/\kappa - \mathbf{A}.$$

$$\tilde{\Psi} = \psi \psi_0$$

$$\tilde{H} = \frac{H}{\sqrt{2} H_c}$$

$$\tilde{A} = \frac{A}{\sqrt{2} H_c \lambda}$$

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}/\lambda$$

$$-\kappa^{-2} \rho^{-1} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df}{d\rho} \right) + v_s^2 f = f - f^3, \quad (18.37)$$

$$-\frac{dH}{d\rho} = v_s f^2, \quad (18.38)$$

$$H = (\text{rot } \mathbf{A})_z = -\rho^{-1} \frac{d}{d\rho} (\rho v_s) + \frac{2\pi}{\kappa} \delta(\rho). \quad (18.39)$$



$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = -(\text{rot } \mathbf{v}_s - \kappa^{-1} \text{rot } \nabla \chi),$$

Граничные условия к уравнениям (18.37)–(18.39) следующие. При  $\rho \rightarrow \infty$   $f \rightarrow 1$ ,  $H \rightarrow 0$  (а следовательно, и  $v_s \rightarrow 0$ ). При  $\rho \rightarrow 0$   $v_s \rightarrow (\kappa\rho)^{-1}$ ; это связано с тем, что  $\nabla_{\theta}\chi = \rho^{-1}\partial\chi/\partial\theta \rightarrow \rho^{-1}$ . Что касается  $f$ , то оно не должно бесконечно возрастать ни при каких  $\rho$ .

Решение уравнений в общем случае может быть получено лишь путем численного интегрирования. Однако при  $\varkappa \gg 1$  дело существенно упрощается. Чтобы это продемонстрировать, заметим, что расстояния, на которых существенно меняется функция  $v_s$ , — это  $\rho \sim 1$ . Что же касается функции  $f$ , то она заметно меняется на расстояниях  $\rho \sim \varkappa^{-1} \ll 1$ . Ввиду этого в уравнении (18.38) можно ожидать, что функция  $f$  уже достигла значения  $f = 1$ . Подставляя (18.39) для  $\rho \neq 0$ , получаем уравнение для  $v_s$ ; его решение

$$v_s = K_1(\rho)/\varkappa, \quad (18.41)$$

где  $K_1$  — функция Макдональда, уже появлявшаяся в § 16.5.

В уравнении для  $f$  можно пользоваться асимптотическим видом  $v_s$  для малых расстояний, т. е.  $v_s \approx (\varkappa\rho)^{-1}$ . Подставляя это в (18.37), получаем

$$\varkappa^{-2} \left[ \rho^{-1} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{df}{d\rho} \right) - \rho^{-2} f \right] = f^3 - f. \quad (18.42)$$

Решение этого уравнения на расстояниях  $\rho \gg \kappa^{-1}$  (но, конечно,  $\rho \ll 1$ ) равно

$$f^2 = 1 - (\kappa\rho)^{-2}. \quad (18.43)$$

При  $\rho \ll \kappa^{-1}$  предполагаем  $f \ll 1$  и находим

$$f = C\kappa\rho, \quad (18.44)$$

$$B_{\varphi 1} = \frac{1}{\alpha} K_0(\rho)$$

Магнитная индукция  
(при  $\rho \rightarrow 0$  сингулярность режется на  $1/\kappa$ )

$$j = f^2 v_s \approx \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\rho}$$

Плотность тока

$$\text{или } \frac{1}{\alpha} \kappa \rho \ll 1$$

Главный вклад в энергию поля приходится  
 от области  $\frac{1}{\epsilon} \ll r \ll 1$  (т.е.  $\xi < r < \lambda$ )  
 где можно использовать приближение

Лоренца

$$F_{\text{Lor}} = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{H}^2 + \chi(\nabla \times \mathbf{H})^2) dV$$

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\frac{j^2}{\rho_0} = \rho_0 v^2$$

$$H_{\text{var}} = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

- берем к однородным суммам

$$(*) \vec{H} + \lambda^2 \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{H} = \Phi_0 \delta(r - r') \vec{e}_z$$

$$\vec{H} \sim \vec{e}_z$$

$$1 \ll r \ll \lambda$$

$$f_{\nu} = \frac{L_z}{8\pi} \left( \frac{\Phi_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\lambda^2} \int \frac{d^2 r}{r^2} = \frac{L_z}{8\pi} \frac{\Phi_0^2}{(2\pi\lambda)^2} \cdot 2\pi \ln \frac{\lambda}{3}$$

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{f_{\nu}}{L_z} = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \left[ \ln \lambda + 0.5 \right] \quad \frac{2.0 \text{ Габриэла от } 1 \text{ копа.}}{\lambda}$$

Другой способ получить тот же ответ:

$$F_{\text{сн}} = \frac{1}{8\pi} \int H \left( H + \lambda^2 \nabla_x \nabla_x H \right) dV \Rightarrow \frac{\Phi_0}{8\pi} \ln 2 \cdot H(0)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Phi_0}{8\pi} \cdot \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2} \ln 2 = \left( \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda} \right)^2 \ln 2$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Phi_0}{4\pi} H_{c1} \quad H_{c1} = \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda^2} \ln 2$$

Нижнее критическое поле



# Взаимодействие

www.ictp.it Вектор

$$\nabla^2 \bar{H} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \bar{H} = \Phi_0 (f(\vec{r} - \vec{r}_1) + f'(\vec{r} - \vec{r}_2))$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\Phi_0}{8\pi} [H(\vec{r}_1) + H(\vec{r}_2)] = 2\mathcal{E}_1 + \frac{\Phi_0}{4\pi} H(\vec{r}_2)$$

$$\mathcal{E}_{out}(x) = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^2} K_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$f = -\frac{d\mathcal{E}_{out}}{dx} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi^2 \lambda^3} K_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{\Phi_0}{c} j_{12}(x)$$

Более общий случай.  $\vec{f}_L = \frac{1}{\epsilon} (\vec{j} \times \vec{\Phi}_0)$   
т.к.  $\vec{j}$  создаете всем, кроме этого вектора

Вектор в тонкой пленке (разобрать сайтами)

$$\vec{f}_{12} = -\frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda^2} \vec{h}_1 \vec{z}$$

(для одинаковых циркуляций)

Это очень важная задача, решение которой будет часто использоваться в дальнейшем

# Надгнанието на притока на енергия

На  $\epsilon \ll R \ll R_2$

$$\nabla^2 \bar{h} + \lambda^2 \nabla \times \nabla \times \bar{h} = \Phi_0 \sum_i \delta_2(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

$$h_q = \frac{\Phi_0}{1 + \lambda^2 q^2}$$

$$F = \frac{1}{8\pi} \sum_q h_q^2 (1 + \lambda^2 q^2) = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi} \sum_{q \neq 0} \frac{1}{1 + \lambda^2 q^2} = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{B^2}{8\pi \lambda^2} \frac{1}{h_v \cdot 2\pi} \int \frac{q dq}{q^2} = \frac{B^2}{8\pi} + \frac{\Phi_0 B}{16\pi^2 \lambda^2} \ln \frac{a}{\xi}$$

