Лекция 10 - (2021) ~~Лекция 9/10 - 2017(8)~~ (1)

Функционал ГЛ - вывод методом функц. интеграла

1. Стат. сумма (эл. газа) в виде интеграла по грассмановым полям. Когерентные состояния. Дискретизация

2. Функц. интеграл для Ферми-газа с притяжением в произвольном канале. Преобразовани Хаб-Стр. Эффект. действие $S[\Delta]$, функции Грина

3. Окрестность точки перехода: разложение по степеням Δ. ~~однородные члены~~ коэффициенты при $|\Delta|^2$ и $|\Delta|^4$

4. Вычисление коэфф. при $|\vec{\nabla}\Delta|^2$ Длина корреляции

~~5. „Грязные" сверхпроводники: „уравнение" для T_c („теорема Андерс."~~

не з~~...~~

1a

$$Z=\prod_i \int e^{-\bar\psi_i M_{ik}\psi_k} \prod_i d\bar\psi_i d\psi_i = \det\|\hat M\| \equiv \prod_i \lambda_i$$

↑ eigenvalues of $\hat M$

$$\prod_i \iint e^{-\sum_i \bar\varphi_i \lambda_i \varphi_i} d\bar\varphi_i d\varphi_i = \prod_i \lambda_i = \exp(\mathrm{Tr}\ln \hat M)$$

$$\langle \psi_i \bar\psi_k \rangle = \frac{1}{Z}\prod_i \int e^{-\bar\psi \hat M \psi} \langle \psi_i \bar\psi_k \rangle = (\hat M^{-1})_{ik}$$

Далее мы будем использовать функции Грина G_{ik}, они определены как $G_{ik} = -\langle \psi_i \bar\psi_k \rangle = -(\hat M^{-1})_{ik}$

Квадратичный Гамильтониан фермионов:

S_0 – свободная часть

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\bar\psi_i \mathcal{D}\psi_i \exp\left[-\int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left(\bar\psi_i \partial_\tau \psi_i + \bar\psi_i H_{ik}\psi_k\right)\right]$$

Гран. условия $\psi(-\beta/2) = -\psi(\beta/2)$ Антипериодичны

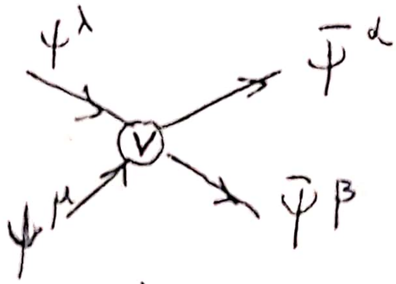
$$\psi(\tau) = T\sum_{\omega_n} a_n e^{-i\omega_n \tau} \qquad \omega_n = \pi T(1+2n)$$

$$Z_0 = \prod_\alpha \left[1+e^{\beta(\mu-\varepsilon_\alpha)}\right]$$

Учитываем куперовское взаимодействие

$$S = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \left[\sum_{\bar k \alpha} \bar\psi_{\bar k\alpha} \frac{\partial}{\partial\tau} \psi_{\bar k\alpha} + \xi_{\bar k} \bar\psi_{\bar k\alpha} \psi_{\bar k\alpha} + H_{int}(\bar\psi, \psi) \right]$$

$$e^{-S} = e^{-S_0} e^{-\int_{-\beta/2}^{\beta/2} H_{int} d\tau} = e^{-S_0} \exp \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \frac{d\tau}{2} \sum_{\bar k \bar k' \bar q} V^{\alpha\beta\lambda\mu}_{\bar k \bar k'} \left(\bar\psi^{\alpha}_{\bar k + \frac{\bar q}{2}} \bar\psi^{\beta}_{-\bar k + \frac{\bar q}{2}}\right) \left(\psi^{\lambda}_{\bar k' + \frac{\bar q}{2}} \psi^{\mu}_{-\bar k' + \frac{\bar q}{2}}\right)$$



$$V^{\alpha\beta\lambda\mu}_{\bar k, \bar k'} = V(\bar k, \bar k') \cdot \Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} \quad \text{(без спин-орбиты)}$$

$$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda\mu} = \begin{cases} \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta} \gamma^{+}_{\lambda\mu} & \gamma_{\alpha\beta} = (i\sigma_y)_{\alpha\beta} \quad (\text{singlet}) \\ \frac{1}{2} \vec\gamma_{\alpha\beta} \vec\gamma^{+}_{\lambda\mu} & \vec\gamma_{\alpha\beta} = (i\vec\sigma \sigma_y)_{\alpha\beta} \quad (\text{triplet}) \end{cases}$$

$$e^{-S_{int}} = \int \mathcal{D}\Delta_{\alpha\beta}(\bar k, \bar q, \tau)\, \mathcal{D}\bar\Delta_{\alpha\beta}(\bar k, \bar q, \tau) \times \exp\left[-S(\Delta, \psi)\right]$$

$$-S'[\Delta, \psi] = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}_{\alpha\beta} \sum_{\bar k \bar k' \bar q} \bar\Delta_{\alpha\beta}(\bar k, \bar q) V^{-1}(\bar k, \bar k') \Delta_{\alpha\beta}(\bar k', \bar q) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\bar k, \bar q} \left(\Delta_{\alpha\beta}(\bar k, \bar q) \bar\psi^{\alpha}_{\bar k + \frac{\bar q}{2}} \bar\psi^{\beta}_{-\bar k + \frac{\bar q}{2}} + \bar\Delta_{\alpha\beta}(\bar k, \bar q) \psi^{\alpha}_{-\bar k + \frac{\bar q}{2}} \psi^{\beta}_{\bar k + \frac{\bar q}{2}} \right)$$

Здесь V^{-1} – обратный оператор: $\sum_{k''} V^{-1}(\bar k, \bar k'') V(\bar k'', \bar k') = \delta(\bar k - \bar k')$

$$\Delta_{\alpha\beta}(\bar k, \bar q) = \gamma_{\alpha\beta} \Delta(\bar k, \bar q)$$

Запишем взаимодействие в канале с орбитальным моментом l в виде $V(\bar{k},\bar{k}') = V_l(k,k') \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\hat{k}) Y^*_{lm}(\hat{k}')$

Здесь $V_l(k,k') = \begin{cases} -V_l \,; & |\xi_k|, |\xi_{k'}| < \omega_D \\ 0 \,; & \text{otherwise} \end{cases}$

Тогда 1-ый член в $-S[\Delta,\psi]$ запишется как

$$-\frac{1}{2V_l}\sum_{k,q} \bar{\Delta}_{\alpha\beta}(\bar{k},\bar{q})\,\Delta_{\beta\gamma}(\bar{k},\bar{q})$$

Сначала займемся более простым случаем $l = 2k$, синглет, $\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Тогда $e^{-S_{int}} = \int \mathcal{D}\bar{\Delta}(\bar{k},\bar{q})\,\mathcal{D}\Delta(\bar{k},\bar{q}) \times$

$$\times \exp\Big\{ -\frac{1}{V_l}\int \sum_{\bar{k},\bar{q}} \bar{\Delta}(\bar{k},\bar{q},\tau)\,\Delta(\bar{k},\bar{q},\tau)\, d\tau \,-$$

$$- \int d\tau \sum_{k,q} \Big(\Delta(\bar{k},\bar{q})\, \bar{\psi}^{\uparrow}_{k+\frac{q}{2}} \bar{\psi}^{\downarrow}_{-k+\frac{q}{2}} + \Delta^*(\bar{k},\bar{q})\, \psi^{\downarrow}_{k+\frac{q}{2}} \psi^{\uparrow}_{-k+\frac{q}{2}} \Big) \Big\}$$

Еще упростим задачу: $l = 0$, так что

$\Delta(\bar{k},\bar{q}) \Rightarrow \Delta(\bar{q})$

$\underline{\ell = S = 0:}$ $\qquad S[\psi,\Delta] = S_0 + S_{int}$ $\qquad$! ③

$$S_0 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \int d\vec{r} \left[\psi^*_\sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_\sigma + H_0(\psi^*;\psi) \right]$$

$$S_{int} = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} d\tau \int d\vec{r} \left[\frac{|\Delta|^2}{V_0} + \Delta^*(\vec{r}) \psi_\downarrow(\vec{r}) \psi_\uparrow(\vec{r}) - \Delta(\vec{r}) \psi^*_\downarrow(\vec{r}) \psi^*_\uparrow(\vec{r}) \right]$$

$$Z = \int \mathcal{D}\psi^* \mathcal{D}\psi \, \mathcal{D}\bar{\Delta} \mathcal{D}\Delta \exp\left\{ - S[\psi,\Delta] \right\} =$$

$$= \int \mathcal{D}\bar{\Delta} \mathcal{D}\Delta \det \hat{M}[\Delta] \, e^{-\int \frac{|\Delta|^2}{V_0} d\tau d\vec{r}} \equiv$$

$$\equiv e^{-S_0} \int \mathcal{D}\bar{\Delta} \mathcal{D}\Delta \exp\left\{ - S[\bar{\Delta}(\tau,\vec{r})] \right\}$$

$$S_0 = - \operatorname{Tr} \ln \hat{M}[\Delta=0] \equiv - \ln \det \hat{M}[\Delta=0]$$

$$S[\Delta] = \int \frac{|\Delta|^2}{V_0} d\tau d\vec{r} - \operatorname{Tr} \ln \| \hat{M}_0^{-1} \cdot \hat{M} \|$$

$\underline{S(\Delta=0) = 0}$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_k & \Delta \\ -\Delta^* & -\frac{\partial}{\partial \tau} + \xi_k \end{pmatrix}$$

(3a)

Введем спиноры в пр-ве Горькова-Намбу:

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} \psi_\downarrow \\ -\psi_\uparrow^* \end{pmatrix} \qquad \bar{\Psi}_\beta = \left(\psi_\downarrow^*, \psi_\uparrow\right)$$

Квадратичная форма по фермионам будет иметь вид

$$\bar{\Psi}\hat{M}\Psi = \psi_\downarrow^*\left(\frac{\partial}{\partial\tau}+\xi_k\right)\psi_\downarrow - \psi_\uparrow\left(-\frac{\partial}{\partial\tau}+\xi_k\right)\psi_\uparrow^*$$
$$+\Delta^*\psi_\downarrow\psi_\uparrow - \Delta\psi_\downarrow^*\psi_\uparrow^*$$

Матричная Ф.Г.:

$$G_{\alpha\beta}(r,r'|\tau,\tau') = -\langle T_\tau \Psi_\alpha(r,\tau)\bar{\Psi}_\beta(r',\tau')\rangle$$
$$= -\left(\hat{M}^{-1}\right)_{\alpha\beta}$$

$$G_{11} = -\langle T_\tau\psi_\downarrow(r,\tau)\psi_\downarrow^*(r',\tau')\rangle \equiv G(rr'|\tau\tau')$$

$$G_{22} = \langle T_\tau\psi_\uparrow^*(r,\tau)\psi_\uparrow(r',\tau') = -G^+(r'r|\tau'\tau)$$

$$G_{12} = -\langle T_\tau\psi_\downarrow(r,\tau)\psi_\uparrow(r',\tau')\rangle = F(rr'|\tau\tau')$$

$$G_{21} = +\langle T_\tau\psi_\uparrow^*(r,\tau)\psi_\downarrow^*(r',\tau')\rangle = F^+(rr'|\tau\tau')$$

Однородный сверхпроводник, нет зависимости от времени

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} -i\omega + \xi_k & \Delta \\ -\Delta^* & i\omega + \xi_k \end{pmatrix} = -G_\Delta^{-1}$$

$$\hat{G}_\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{i\omega + \xi_k}{\omega^2 + \xi_k^2 + |\Delta|^2} & \frac{\Delta}{\omega^2 + \xi_k^2 + |\Delta|^2} \\ -\frac{\Delta^*}{\omega^2 + \xi_k^2 + |\Delta|^2} & \frac{i\omega - \xi_k}{\omega^2 + \xi_k^2 + |\Delta|^2} \end{pmatrix}$$

$$e^{-F(\Delta)/T} = \int \mathcal{D}\bar{\Delta}\mathcal{D}\Delta\, e^{-S[\bar{\Delta}]}$$

Считаем $\Delta(\vec{r}) = \Delta = \mathrm{const}$

$$F(\Delta) = T S_\Delta = \frac{|\Delta|^2}{V_0} - T\sum_{\omega_n}\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}\ln\left(1 + \frac{|\Delta|^2}{\omega_n^2 + \xi_k^2}\right)$$

$$= \frac{|\Delta|^2}{V_0} - T\sum_{\omega_n}\nu_0\int d\xi \ln\left(1 + \frac{\Delta^2}{\omega_n^2 + \xi^2}\right)$$

Экстремум по Δ: $\partial F/\partial\Delta = 0 = \frac{\Delta}{V_0} - T\sum_{\omega_n}\nu_0\int d\xi\frac{\Delta}{\omega_n^2 + \xi^2 + \Delta^2}$

Уравнение самосогласования. $\boxed{\Delta = \nu_0 V_0 \Delta \int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}\,\mathrm{th}\frac{\sqrt{\xi^2 + \Delta^2}}{2T}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\frac{\delta^2 F}{\delta\Delta^2}\bigg|_{\Delta=0} = \frac{1}{V_0} - T\sum_{\omega_n}\nu_0\int\frac{d\xi}{\omega_n^2 + \xi^2} = \nu_0\ln\frac{T}{T_c}}$$

Коэфф. b в члене $\frac{b}{2}|\Delta|^4$

получим как $\partial^2 F/\partial(\Delta^2)^2$:

$$b = \nu_0 T\sum_{\omega_n}\int\frac{d\xi}{(\omega_n^2 + \xi^2)^2} = \boxed{\frac{7}{8}\frac{\zeta(3)}{\pi^2 T^2}\nu_0} = b$$

Ground state energy

4a

$$T \to 0, \quad F(\Delta) \to E_S(\Delta) - E_N(\Delta) = E_{SN}(\Delta)$$

$$\frac{1}{2}\frac{dE_{SN}}{d\tilde{\Delta}} = \frac{\tilde{\Delta}}{V_0} - \nu_0 \int\frac{d\omega}{2\pi}\int d\xi \frac{\tilde{\Delta}}{\omega^2+\xi^2+\tilde{\Delta}^2}$$

$$= \nu_0 \tilde{\Delta}\Big[\underbrace{\frac{1}{\lambda_0}}_{\ln\frac{2\omega_D}{\Delta}} - \int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+\tilde{\Delta}^2}}\Big] = \nu_0 \tilde{\Delta}\ln\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}$$

$$E_{SN} = \nu_0 \int_0^{\Delta} 2\tilde{\Delta}\ln\frac{\tilde{\Delta}}{\Delta}\, d\tilde{\Delta} = -\frac{\nu_0\Delta^2}{2}$$

Вычисление T_c :

$$\Pi(0) = T\sum_{\omega_n}\nu_0\int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\omega_n^2+\xi^2} = \nu_0\int_0^{\omega_D}\frac{d\xi}{\xi}\,\mathrm{th}\frac{\xi}{2T} =$$

$$= \nu_0\Big[\ln\frac{\omega_D}{2T} - \underbrace{\int_0^{\infty}dx\frac{\ln x}{\mathrm{ch}^2 x}}_{\ln\pi + \psi(\frac{1}{2}) = \ln\pi - 2\ln 2 - C}\Big] = \nu_0 \ln\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}$$

где $\gamma = e^{C}$

C - число Эйлера

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\nu_0 V_0} = \ln\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T_c} \qquad \boxed{T_c = \frac{2\omega_D\gamma}{\pi}e^{-1/\lambda_0}}$$

$$\frac{1}{\lambda_0} = \ln\frac{2\omega_D}{\Delta(0)} \Rightarrow \boxed{\Delta(0) = 2\omega_D e^{-1/\lambda_0}} \qquad \boxed{\frac{\Delta(0)}{T_c} = \frac{\pi}{\gamma} = 1.76}$$

4) Градиентный член

$$F_{grad}[\Delta] = \sum_q |\Delta(q)|^2 \left(\Pi(0) - \Pi(q)\right)$$

где $$\Pi(q) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{th\left(\frac{\beta}{2}\xi_{p+q/2}\right) + th\left(\frac{\beta}{2}\xi_{p-q/2}\right)}{2\left(\xi_{p+q/2} + \xi_{p-q/2}\right)}$$

Разложим по малым q:

$$\Pi(0) - \Pi(q) = \frac{\nu_0 v_F^2\, 7\zeta(3)}{48(\pi T)^2} \cdot q^2$$

Это удобнее делать в представлении

$$\Pi(q) = T\sum_{\omega_n} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n - \xi_{p+q/2})(i\omega_n - \xi_{p-\frac{q}{2}})}$$

разложив до членов $\sim q^2$ везде

Получится $$\Pi(0) - \Pi(q) = \nu_0 q^2 \frac{\pi v_F^2}{12} T \sum_{\omega_n} \frac{1}{|\omega_n|^3} =$$

$$= q^2 \frac{v_F^2 \nu_0}{6(\pi T)^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3}}_{\frac{7}{8}\zeta(3)} = \underbrace{q^2 \frac{7 v_F^2 N_0 \zeta(3)}{48(\pi T)^2}}_{\text{coefficient } C}$$

coefficient C

$C|\vec{\nabla}\Delta|^2$

для чистого сверхпроводника

$$\Pi(0) = T\sum_{\omega_n} \nu_0 \int^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi^2 + \omega_n^2} = \nu_0 \int_0^{\omega_D} \frac{d\xi}{\xi}\, th\frac{\xi}{2T} =$$

$$= \nu_0 \left(\ln\frac{2\omega_D}{\pi T} + C\right)$$

$C = 0.577\ldots$ число Эйлера

(6)

Эквивалентное представление

$$K(\vec r) = \int (d^3 r) \Pi(\vec q) e^{i\vec q \vec r}$$

$$\iint \overset{*}{\Delta}(r) K(\vec r, \vec r\,') \Delta(r') d^3 r\, d^3 r' =$$

$$= F_{grad} + \left(\int d^3 r |\Delta(r)|^2\right) \cdot K(\rho = 0)$$

$$F_{grad} = \int d^3 r\, C |\vec\nabla \Delta(r)|^2 \quad \text{где}$$

$$C = \frac{1}{6}\int K(\vec\rho) \rho^2 d^3\vec\rho$$

Для этого надо написать:

$$\bar r = \bar R + \bar\rho/2 \qquad \bar r\,' = \bar R - \bar\rho/2$$

$$\overset{*}{\Delta}(\bar r) = \overset{*}{\Delta}(R) + \frac{\vec\rho}{2}\vec\nabla\Delta + \frac{\rho_i \rho_j}{4}\nabla_i\nabla_j \Delta$$

$$\Delta(r') = \Delta(R) - \frac{\vec\rho}{2}\vec\nabla\Delta + \frac{\rho_i\rho_j}{4}\nabla_i\nabla_j \Delta$$

$$K(\rho) = \frac{N(0)T}{2V_F}\sum_{\omega_n}\frac{e^{-2|\omega_n|\rho/v_F}}{\rho^2}$$

длина убывания $\boxed{\frac{v_F}{2\pi T_c} \approx \xi_0}$